Aplicaciones del plano con un punto fijo de atracción global.

Begoña Alarcón Cotillas
Departament de Matemàtica Aplicada.
Universitat de València.

Septiembre 2008

Aplicaciones del plano con un punto fijo de atracción global.

Tesis presentada por Begoña Alarcón Cotillas bajo la dirección del Prof. José Andrés Martínez Alfaro de la Universitat de València y del Prof. Carlos Gutierrez del ICMC-USP, Brasil.

El propósito de esta memoria es buscar condiciones suficientes que garanticen la existencia de un punto fijo de atracción asintótica global. Parte de este trabajo se basa en los resultados publicados en los artículos *Planar maps whose second iterate has a unique fixed point* y *Planar Embeddings with a globally attracting fixed point*. El primero ha sido realizado en colaboración con mis directores de tesis, José Andrés Martínez Alfaro (Universitat de València) y Carlos Gutierrez (ICMC-USP, Brasil). El segundo en colaboración con Víctor Guíñez (USACH, Chile) y con Carlos Guiterrez.

Me gustaría expresar mi especial gratitud a mis *mamás*, a mis *papás* y a mi *tío*, cinco estupendas personas que confiaron en mí desde el principio y que han hecho posible que esta tesis se lleve a cabo entre España y Brasil: Carmen Romero, Cidinha Soares Ruas, Carlos Gutierrez, José Andrés Martínez Alfaro y Rafael Ortega.

Además quiero darle las gracias al Departamento de Geometría y Topología por darme una oportunidad y un *hogar*. Sin olvidarnos de Azucena, Sime, Amalia y Carmen, claro, por su inagotable paciencia y profesionalidad. A mis *compis* de doctorado y a todo el ICMC-SP de Brasil por ... por enseñarme un montón de cosas.

Por último y más importante me gustaría expresar mi más sincera gratitud a todas las personas que infelizmente me he dejado atrás en este arduo camino. A aquellas personas que he tenido la inmensa suerte de conocer allá donde he ido durante este tiempo y que tanto me han enseñado. Y por supuesto a todos los maravillosos amigos y amigas que nunca me han dejado ni un sólo momento pese a la distancia, el olvido y todas las numerosas adversidades de estos últimos años.

Dedicado a

Josefa Cotillas González y Antonio Alarcón Martínez ... Ójala que algún día consiga que se sientan orgullosos de mí y de lo que hago.

Carmen, Juana, Pepi, Toñi, Rafa y Fernando Alarcón Cotillas ... Ójala que algún día les pueda devolver todo lo que han hecho por mí y consigan ver en esta memoria los granitos de arena que han ido poniendo. Gracias por todo.

Andrea, Jairo, Carlos, Carmen, Irene, Lucía, Javier, Pablo y Martina ... ¡Porque son y serán mi alegría de vivir!

A mi gente de Albacete, Valencia, São Carlos, Castellón y Vistabella ... Porque ellos también son familia.

Índice general

Notación **15**

Introducción **19**

1. Preliminares **33**

1.1. Definiciones básicas 33

2. La Conjetura Discreta de Markus Yamabe **47**

2.1. La Conjetura de Markus Yamabe 48

2.2. El Problema de La Salle 51

2.2.1. Una respuesta positiva 53

2.2.2. Una respuesta negativa 55

2.3. Contraejemplo en dimensión 2 58

2.4. Contraejemplo en dimensión 2 con infinito repulsor 69

3. Órbitas periódicas en aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ **79**

3.1. Existencia de puntos fijos 80

3.2. Existencia de órbitas periódicas de período dos 83

3.2.1. Dinámica Lineal 83
3.2.2. Aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ sin valores propios reales 89
3.2.3. Aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ con valores propios reales 95
3.3. Aplicación polinomial 104
3.3.1. Polinomios de segundo grado 104
3.3.2. Ejemplos con polinomios cúbicos 106
3.4. Existencia de órbitas periódicas de período $n > 2$ 109

4. Aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ con un punto de atracción global 117
4.1. Embebimientos del plano sin puntos fijos 121
4.2. Existencia de un único punto fijo y estabilidad local 124
4.3. Dinámica con curva invariante 125
4.3.1. Aplicaciones que preservan la orientación 133
4.3.2. Aplicaciones que no necesariamente preservan la orientación 143
4.4. Un contraejemplo sin rayo invariante y sin órbitas periódicas 153

5. Problemas abiertos 157
5.1. Aplicación a la Teoría de Osciladores 157
5.2. Existencia de un rayo invariante 162

5.3. Extensión a $\mathbb{R}^n$ 164
5.4. Dinámica de la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe 165

Tabla de contraejemplos **167**

Índice de contenidos **169**

Índice de figuras **172**

Bibliografía **175**

Notación

Conjuntos:

$\mathbb{Z}$ El conjunto de los enteros.

$\mathbb{N}$ El conjunto de los naturales

$\mathbb{R}$ El conjunto de los reales.

$\mathbb{X}$ Espacio métrico completo.

$\mathbb{S}^2$ Esfera de Riemann $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$

$\mathbb{S}^1$ Circunferencia centrada en el origen y radio unidad.

$\|.\|$ Métrica usual euclidiana.

$\#S$ Cardinal del conjunto S.

$\text{int}(S)$ Interior del conjunto S.

$\text{cl}(S)$, $\bar{S}$ Clausura del conjunto S.

$\partial(S)$ Frontera del conjunto S.

Subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$S(r)$ Circunferencia de centro el origen y radio r

$S(r)^-$ Unión de $S(r)$ y la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus S(r)$.

$S(r)^+$ Unión de $S(r)$ y la componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus S(r)$.

$B(q,r)$ Bola euclídea de centro q y radio r.

$A(r_1,r_2)$ Corona circular centrada en el origen y de radios r_1 y r_2

$\mathbb{D}$ Dominio de definición de la aplicación de Poincaré.

γ Rayo invariante.

Σ Continuo invariante.

Υ Curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada simple.

Ψ Curva en $\mathbb{R}^n$ derivable.

Matrices:

$M_n(\mathbb{R})$ Espacio de matrices cuadradas reales $n \times n$.

I Matriz identidad.

$\mathrm{Spec}(A)$ Conjunto de valores propios de la matriz A.

λ_A Valor propio de la matriz A.

v_{λ_A} Vector propio asociado a λ_A.

V_λ Espacio de vectores propios asociados a un valor propio λ.

$\mathrm{sr}(A)$ Radio espectral de la matriz A.

$\det(A)$ Determinante de la matriz A.

$\mathrm{tr}(A)$ Traza de la matriz A.

$\arctan(u,v)$ Argumento de $u+v\imath$.

Φ, Φ_A Homeomorfismo sobre S^1 determinado por una matriz no singular (si se especifica $A \in M_2(\mathbb{R})$).

Φ_π Trasladado en π de Φ.

$\hat{\Phi}_A$ Levantamiento de Φ_A.

G_A Variación de $\tilde{\Phi}_A$ con respecto del ángulo.

G_p^n Variación de $\tilde{\Phi}_{D_p(f^n)}$ con respecto del ángulo.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz en $M_2(\mathbb{R})$ denotaremos por:

$$r_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2$$

$$r_{22} = a_{12}^2 + a_{22}^2$$

$$r_{12} = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}$$

Aplicaciones:

f Aplicación cuya dinámica queremos estudiar.

f^n Composición $n-$ésima de la aplicación f consigo misma.

$\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de aplicaciones continuas e inyectivas del plano.

$\mathrm{Emb}_+(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de embebimientos del plano que preservan la orientación.

$\mathrm{Emb}^d(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de embebimientos del plano que son diferenciables.

$\mathrm{Emb}_+^d(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de embebimientos del plano diferenciables que preservan la orientación.

$\mathrm{Emb}^r(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de embebimientos del plano de clase C^r, $r \geq 1$.

$\mathrm{Emb}_+^r(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de embebimientos del plano de clase C^r, $r \geq 1$, que preservan la orientación.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de homeomorfismos del plano.

$\mathrm{Hom}_+(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de homeomorfismos del plano que preservan la orientación.

$\mathrm{Dif}(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de difeomorfismos del plano.

$\mathrm{Dif}^r(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de difeomorfismos del plano de clase C^r, $r \geq 1$.

$\mathrm{Dif}^r_+(\mathbb{R}^2)$ Conjunto de difeomorfismos del plano de clase C^r, $r \geq 1$, que preservan la orientación.

$\mathrm{Spec}(f)$ Conjunto de valores propios de Df_p para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Id Aplicación identidad.

$\mathrm{Index}(f, 0)$ Grado de Brouwer de $f - Id$ en 0.

$\mathrm{sr}(F)$ Radio espectral del difeomorfismo F.

<u>*Dinámica:*</u>

$\Theta^+(p)$ Órbita positiva del punto p.

$\omega(p)$ Conjunto $\omega-$límite del punto p.

$\bigwedge(p)$ Región de atracción del punto p.

$\mathrm{Fix}(f)$ Conjunto de puntos fijos de f.

$\mathrm{Per}(f)$ Conjunto de órbitas periódicas de f.

$\Omega(f)$ Conjunto de puntos no errantes de f.

$CR(f)$ Conjunto de puntos recurrentes por cadenas de f.

$W^s(p, U, f)$ Variedad estable de punto fijo hiperbólico.

$W^u(p, U, f)$ Variedad inestable de punto fijo hiperbólico.

Introducción

El estudio de esta memoria ha sido motivado por preguntas relativas a la estabilidad global de un punto fijo de una aplicación definida en $\mathbb{R}^n$. Muchos matemáticos han abordado este problema relacionándolo con lo ya existente para campos vectoriales que definen un sistema continuo autónomo ([30], [17], [13],[57]). O no autónomo como, por ejemplo, en [4], considerando la aplicación como el tiempo 1 del flujo definido por el sistema.

Empezaremos la introducción fijando las propiedades de las aplicaciones con las que trabajaremos en esta memoria. Es decir, la mayoría de los resultados que se encuentran referentes a la estabilidad del punto fijo son para difeomorfismos. Sin embargo, estudiar que ocurre cuando la dinámica viene dada por una aplicación que no necesariamente es diferenciable comporta unas complejidades especiales.

Existen numerosos artículos donde se detalla con bastante detalle la dinámica de los homeomorfismos del plano que preservan la orientación ([5, 6, 24, 25, 39, 40, 41, 56]), relacio-

nando la estabilidad de un punto fijo con el grado de Brouwer de la aplicación ([7, 36]). También hay otros en los que la aplicación invierte la orientación ([53, 54]) o generalizaciones a $\mathbb{R}^3$, como en [9].

Por otro lado, la aplicación de Poincaré asociada a una ecuación diferencial periódica de segundo orden conserva la orientación y es inyectiva (ver Sección 5.1 para más detalles), pero no es necesariamente un difeomorfismo ni un homeomorfismo. Por lo que es natural preguntarse por la dinámica de los embebimientos topológicos (aplicaciones continuas e inyectivas).

El primer problema que uno se encuentra al trabajar con embebimientos es que no todos los puntos tienen antiimagen por lo que no tiene por qué estar definido el conjunto límite negativo, perdiendo control sobre la dinámica global. En 1998, P. Murthy probó resultados análogos a los existentes para homeomorfismos del plano que preservan la orientación en el caso de no tener sobreyectividad ([44]). Además, existen otros trabajos en los que también se relaciona la estabilidad de punto fijo de un embebimiento topológico con el grado de Brouwer de la aplicación (ver [19, 48]).

Nosotros nos preguntaremos por condiciones necesarias para garantizar la atracción global de un punto fijo de un embebimiento de clase C^1.

Contextualizando el tema de trabajo, el origen del estudio se inspira en la siguiente conjetura:

Conjetura DMY (Discreta de Markus-Yamabe) [57]: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y todos los valores propios de la matriz diferencial de f en cada punto tienen norma menor que uno. ¿Es el 0 un atractor global del sistema discreto generado por f?.

La Conjetura DMY se inspiró a su vez en su primera versión para campos vectoriales a la que se le llamó Conjetura de Markus-Yamabe (ver Sección 2.1):

Conjetura de Markus-Yamabe [57]: Sea $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $X(0) = 0$. Si para todo $p \in \mathbb{R}^n$ la parte real de todos los valores propios de la matriz diferencial de X en p es negativa. ¿Es el origen un atractor global del sistema continuo dado por X?

El trabajo pionero de C. Olech [46, 47] y también [42] muestran la existencia de una fuerte relación entre comportamiento asintótico global de un campo vectorial $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y la inyectividad de X (considerado como una aplicación). Esta conexión fue estudiada y desarrollada en numerosas publicaciones (ver por ejemplo [1, 11, 12, 15, 20, 21, 26, 27, 28, 29]). Nosotros veremos en esta memoria que la inyectividad también juega un papel importante a la hora de estudiar la dinámica

global de una aplicación cualquiera de clase C^1.

Como se detallará en el Capítulo 2, salvo en el caso de aplicaciones triangulares de las que hablaremos en la Sección 2.2.1, la Conjetura DMY únicamente es cierta en dimensión 1 y para difeomorfismos polinomiales definidos en el plano. Por ello cabe preguntarse por la dinámica de las aplicaciones del plano para las que el origen no es un atractor global pese a que verifican las condiciones de la Conjetura DMY.

El objetivo de esta memoria es dar respuesta al Problema DMY o Conjetura Discreta de Markus Yamabe en dimensión 2 con hipótesis adicionales. La hipótesis natural después de estudiar el contraejemplo de Szlenk al caso racional, detallado en la Sección 2.3, es la siguiente:

(a) f es disipativa.

Esta hipótesis adicional no es todavía suficiente para generalizar el Problema DMY como se mostrará en el Capítulo 2. Probaremos la existencia de un difeomorfismo suave $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tiene una órbita periódica de período cuatro. No obstante, el ∞ es un repulsor, $f(0) = 0$ y $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0, 1)$.

Dado que el inconveniente es la aparición de órbitas periódicas, el siguiente paso es el estudio del caso en el que no existan.

En el Capítulo 3 veremos que si el espectro de una aplicación diferenciable que fija el origen no intersecta al intervalo $[1, 1+\varepsilon)$ para un $\varepsilon > 0$, entonces la aplicación no tiene puntos fijos salvo el origen. Usando esa misma técnica, probaremos que si la diferencial de la aplicación no tiene valores propios reales entonces tampoco tiene órbitas periódicas de período 2. Además también daremos condiciones que prueben que, si la aplicación tiene valores propios reales dobles, no es una homotecia y el 1 no está incluido en el espectro de la aplicación, entonces tampoco tiene órbitas periódicas de períodos mayores. Lo demostraremos usando las propiedades de un homeomorfismo definido en la circunferencia dado por la variación del ángulo del sistema linealizado. Relacionaremos los iterados de la aplicación con la composición de estos homeomorfismos. También la existencia de valores propios imaginarios, reales positivos o negativos vendrán determinados por los valores que toman estos homeomorfismos en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Es definitiva, construiremos una familia de aplicaciones del plano para las que no aparecen más puntos fijos ni órbitas periódicas que no sean la del origen. No obstante, en la Sección 4.4 daremos un ejemplo de un difeomorfismo del plano de clase C^1 que verifica las hipótesis de la Conjetura DMY, el infinito es un repulsor, no tiene órbitas periódicas ni puntos fijos salvo el 0 y el origen sigue sin ser atractor global.

Llegados a este punto, es fácil ver que la dinámica de una aplicación de la familia de la Conjetura DMY no se pude determinar incluso imponiendo que el infinito sea repulsor ni eliminando la existencia de órbitas periódicas. Por lo que tienen que aparecer fenómenos más extraños. Esto nos induce a preguntarnos por las propiedades de un difeomorfismo f definido en $\mathbb{R}^2$ que ya tenga el origen como punto fijo de atracción asintótica global. Probaremos que existe una C^r-foliación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por curvas invariantes con ciertas propiedades a las que llamaremos rayos $f-$invariantes (ver Proposición 4.3.8). Por esta razón la segunda hipótesis que se introduce en la Conjetura DMY es la siguiente:

(b) Existe un rayo $f-$invariante.

Tiene sentido porque, si el infinito es un repulsor, la existencia de un rayo invariante nos dice que el origen está en la variedad inestable del infinito y ambas hipótesis nos deberían permitir generalizar el problema.

En esta memoria estudiaremos el Problema DMY con las hipótesis adicionales: la aplicación es inyectiva, es disipativa (o equivalentemente el infinito es un repulsor) y existe un rayo invariante por la aplicación.

En cuanto a resultados concretos, la primera pregunta

que se aborda en esta memoria es relativa a la existencia de un único punto fijo. La segunda se refiere a la existencia de otros puntos no errantes como las órbitas periódicas. La tercera es el $\omega-$límite de todos los puntos del plano. Por lo tanto, la estrategia a seguir es la siguiente:

Sea f un embebimiento de clase C^1 verificando las condiciones de la Conjetura DMY. Para conseguir que el 0 sea un atractor global del sistema en primer lugar probaremos que, debido a la condición sobre el espectro de la aplicación, el origen es el único punto fijo y además es asintóticamente estable. Después probaremos junto con la hipótesis adicional (b) que el conjunto de puntos no errantes de la aplicación es exactamente el conjunto unitario de puntos fijos. De esta manera centraremos nuestra atención en la órbita positiva de un punto cualquiera del plano, es decir la sucesión $\{f^n(p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $p \in \mathbb{R}^2$. Si se verifica (a) obtenemos que la sucesión es convergente y por tanto únicamente faltará probar cuándo su límite es exactamente el origen, alcanzando así el objetivo de esta memoria: probar que el origen es un punto fijo de atracción asintótica global.

El paso más delicado es el referente al estudio del conjunto de puntos no errantes del sistema. Es aquí donde se ve claramente la importancia del rayo γ invariante por la aplicación f. Veremos que el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y que el conjunto de puntos fijos de f está contenido en la

curva. Por tanto, f restringida al complementario de γ es una aplicación sin puntos fijos.

En primer lugar supondremos que la aplicación preserva la orientación para hacer uso de la teoría existente sobre embebimientos del plano sin puntos fijos motivada por el Teorema de Massera y desarrollada por P. Murthy y R. Ortega, entre otros (ver por ejemplo [44] o [19, 49]). Esta teoría afirma que un embebimiento que preserva la orientación sin puntos fijos no tiene puntos no errantes. De esta manera, usando la existencia del rayo invariante y el hecho de que la aplicación sea un embebimiento que preserva la orientación llevaremos el estudio de la dinámica del problema de todo el plano a la curva, reduciendo así una dimensión. Además, dado que un embebimiento es un homeomorfismo en su imagen, todos estos trabajos están fuertemente relacionados con la teoría de homeomorfismos del plano sin puntos fijos que preservan la orientación, llamados homeomorfismos de Brouwer. En artículos como [5, 6, 25, 35, 39, 40, 56] se explica con detalle la dinámica de esta clase de homeomorfismos.

En segundo lugar estudiaremos el caso en que la aplicación f no preserve necesariamente la orientación. En este sentido lo que haremos será aplicar los resultados obtenidos a la segunda iterada f^2 que sí que preserva la orientación y centraremos nuestra investigación en la existencia de órbitas

periódicas de período 2.

El contenido de este trabajo se presentará en el siguiente orden:

En el Capítulo 1 introduciremos algunos conceptos básicos para un mejor entendimiento de esta memoria.

En el Capítulo 2 explicaremos la principal motivación de nuestro trabajo, la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe, así como los casos en los que es verdadera y en los que es falsa. Veremos que se verifica en dimensión $n \neq 1, 2$ únicamente para aplicaciones triangulares y que es falsa en general. No obstante, en dimensión 2 es verdadera para el caso polinomial, aunque ya no lo es para el racional. Las primeras secciones son un resumen de lo publicado acerca de la Conjetura de Markus Yamabe principalmente en el artículo [13] de A. Cima, A. Gasull y F. Mañosas y en el libro [57] de Arno van den Essen. En la Sección 2.4 daremos un nuevo resultado sobre la existencia de una aplicación racional verificando las hipótesis de la Conjetura DMY junto con la hipótesis de que el infinito es un repulsor y donde, no obstante, siguen apareciendo órbitas periódicas. Impidiendo así que el origen sea un atractor global.

En el Capítulo 3 daremos condiciones sobre el espectro de una aplicación de clase C^1 para garantizar que no aparezcan

órbitas periódicas de período n y así intentar probar la existencia de un atractor global. La Sección 4.4 nos mostrará que todavía no es condición suficiente incluso si el infinito es un repulsor. No obstante, los resultados para los casos $n = 1, 2$, jugarán un papel importante en las demostraciones de los resultados del Capítulo 4.

En la Sección 3.1 continuaremos los trabajos de Fernandes, Gutierrez y Rabanal en [21] para probar la existencia de a lo sumo un punto fijo. También veremos que la familia de aplicaciones que verifican la Conjetura DMY también verifican este resultado y, por lo tanto, se podrá garantizar la existencia de un único punto fijo que además es asintóticamente estable.

En la Sección 3.2 se usarán técnicas similares para estudiar qué condiciones espectrales son necesarias para que no aparezcan órbitas periódicas de período dos. En particular probaremos que si la diferencial no tiene valores propios reales, entonces no existen órbitas $2-$periódicas. Construiremos un homeomorfismo a partir de la variación del ángulo en el sistema linealizado y estudiaremos la relación que tiene con los valores propios de la matriz diferencial. Veremos que los iterados de la aplicación se corresponderán con composiciones de estos homeomorfismos. Así el estudio de la dinámica del sistema se podrá traducir con más claridad en función del espectro de la aplicación.

En la Sección 3.3 aplicaremos estos resultados al estudio de la dinámica de sistemas polinomiales cuadráticos y cúbicos. En la Sección 3.4 cerraremos este capítulo con un resultado sobre órbitas periódicas de períodos mayores $n > 2$. Volveremos a estudiar la composición de los homeomorfismos definidos en las secciones anteriores, pero además daremos una acotación del valor del radio que nos permitirá tener un mayor control de la variación de las sucesivas iteradas. Probaremos que si esas variaciones del radio se producen en un intervalo y si no existen puntos fijos para cada una de las iteradas diferentes del origen, entonces la aplicación no tiene órbitas periódicas de ningún período ni puntos fijos que sean diferentes de 0.

En el Capítulo 4 se darán otras condiciones adicionales a las de la Conjetura DMY que hagan que el origen sea un atractor global. Además cambiaremos las hipótesis originales de dicha conjetura por otras más topológicas, probando así los resultados con independencia de la diferenciabilidad de la aplicación (Teoremas 4.3.13, 4.3.19).

En la Sección 4.1 se expondrá la teoría necesaria sobre embebimientos del plano que preservan la orientación para probar los resultados principales del Capítulo 4.

En la Sección 4.2 utilizaremos las condiciones espectrales dadas en la Sección 3.1 del Capítulo 3 para encontrar embebimientos del plano que preservan la orientación con un único

punto fijo. Además, con la ayuda del Teorema de Hartman-Grobman daremos un primer resultado de estabilidad local.

En la Sección 4.3 estudiaremos la dinámica del sistema con un rayo invariante por el embebimiento f. Usaremos los resultados de la Sección 4.1 en el caso de que f preserve la orientación y los relativos a órbitas periódicas de período 2 del Capítulo 3 para cuando no la conserve necesariamente. De esta manera controlaremos el conjunto $\Omega(f)$ y el $\omega-$límite de todo punto del plano. El mejor de los casos para la obtención de la atracción global del punto fijo es que $\Omega(f) = \{0\}$ y $\omega(p) = \{0\}$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Pero, como $\mathbb{R}^2$ no es compacto, necesitaremos la condición de que la aplicación sea disipativa para garantizar la existencia del $\omega-$límite.

La Sección 4.4 mostraremos un ejemplo de una aplicación donde se ve claramente que la curva invariante ejerce un papel muy importante que va más allá de garantizar la no existencia de órbitas periódicas. Este ejemplo muestra un homeomorfismo disipativo del plano que preserva la orientación, tiene un único punto fijo que es atractor local, no tiene órbitas periódicas de ningún período y aún así el origen no es atractor global. Por lo que nos lleva a pensar que no es tan trivial eliminar la hipótesis de la existencia de un rayo invariante, cerrando así el trabajo de esta memoria.

En el Capítulo 5 se explicarán algunos problemas abiertos

que deja esta memoria así como unas posibles aplicaciones.

Parte del Capítulo 2 y los Capítulos 3 y 4 están recogidos en los artículos [3] y [2], respectivamente, realizados por la autora de esta memoria en colaboración con José Andrés Martínez Alfaro de la Universidad de Valencia, Carlos Gutierrez de la USP-Brasil y Víctor Guíñez de la USACH-Chile.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo veremos las definiciones que nos harán falta para entender los contenidos de esta memoria. Se pueden encontrar con más detalle en [30], [17], [52] o en [4], por ejemplo.

1.1. Definiciones básicas

Dada una aplicación continua $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ definida en un espacio métrico completo con métrica d, estudiaremos el sistema dinámico discreto generado por f:

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos al iterado enésimo de un punto $x \in \mathbb{X}$ como

$$f^n(x) = (f \circ f \circ ...^{n)} \circ f)(x).$$

La órbita de un punto $x \in \mathbb{X}$ es la sucesión de iterados $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y la denotaremos por $\Theta^+(x)$.

A continuación definiremos los elementos más característicos del sistema. Se pueden encontrar con más detalle en [52] o en [4, 17, 33], entre otros.

Definición 1.1.1. *Un punto $p \in \mathbb{X}$ se dirá que es un punto fijo de f (o del sistema generado por f) si $f(p) = p$. Se dirá que es un punto periódico de período m si $f^m(p) = p$, pero $f^j(p) \neq p$ si $j < m$.*

A partir de ahora, $\mathrm{Fix}(f)$ denotará el conjunto de puntos fijos de la aplicación f, $\mathrm{Per}(f)$ el conjunto de órbitas periódicas de f y, para cualquier conjunto S, $\#S$ denotará el número de elementos que lo componen.

Definición 1.1.2. *Un punto $q \in \mathbb{X}$ se dice que es un punto $\omega-$límite de $p \in \mathbb{X}$ para f si existe una sucesión de naturales n_k tendiendo a infinito cuando k tiende a infinito tal que*

$$\lim_{k\to\infty} d(f^{n_k}(p), q) = 0.$$

El conjunto de todos los puntos $\omega-$límite de p para f se llama conjunto $\omega-$límite de p y se denota por $\omega(p)$.

Definición 1.1.3. *Un subconjunto $S \subset \mathbb{X}$ se dice que es positivamente invariante si $f(x) \in S$ para todo $x \in S$, es decir, si $f(S) \subset S$.*

A continuación daremos unas propiedades del $\omega-$límite de cualquier punto $p \in \mathbb{X}$ que nos serán de utilidad a lo largo de esta memoria.

Proposición 1.1.4. *Sea $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una aplicación continua definida en un espacio métrico completo $\mathbb{X}$ y $p \in \mathbb{X}$.*

1. *$\omega(p)$ es cerrado y positivamente invariante.*
2. *Si $\Theta^+(p)$ está contenida en algún subconjunto compacto de $\mathbb{X}$, entonces $\omega(p) \neq \emptyset$ y es compacto. Además la distancia $d(f^n(p), \omega(p))$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito.*
3. *Si $D \subset \mathbb{X}$ es un subconjunto cerrado y positivamente invariante con $p \in D$, entonces $\omega(p) \subset D$.*
4. *Si $q \in \omega(p)$, entonces $\omega(q) \subset \omega(p)$.*

Definición 1.1.5. *Diremos que $p \in \mathbb{X}$ es un punto no errante de f si para cada entorno U de p, existe un entero $n > 0$ y un punto $q \in U$ tal que $f^n(q) \in U$. Denotaremos el conjunto de puntos no errantes de f por $\Omega(f)$.*

Definición 1.1.6. *Dado $\epsilon > 0$, definimos $\epsilon-$cadena de tamaño n de f de un punto x a otro punto y en $\mathbb{X}$ a una sucesión finita $x = x_0, ..., x_n = y$ tal que para todo $1 \leq j \leq n$, $d(f(x_{j-1}), x_j) < \epsilon$.*

Diremos que $p \in \mathbb{X}$ es recurrente por cadenas si existe una $\epsilon-$cadena de p a p. Denotaremos el conjunto de puntos recurrentes por cadenas por $CR(f)$.

Proposición 1.1.7. *Sea $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una aplicación continua definida en un espacio métrico completo $\mathbb{X}$. Se verifica:*

$$\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f).$$

Consideraremos a partir de ahora $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ y d la métrica usual euclidiana $\|.\|$. Con el fin de exponer nuestros resultados necesitaremos las siguientes definiciones:

Definición 1.1.8. *Un embebimiento topológico del plano es una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua e inyectiva. A la clase de embebimientos topológicos la denotaremos por $Emb(\mathbb{R}^2)$.*

Definición 1.1.9. *Una aplicación $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ preserva la orientación si $deg(f - q_0, U) = 1$, donde $q_0 = f(0)$ y U es un entorno abierto y acotado del origen.*

Denotaremos por:

$\mathrm{Emb}_+(\mathbb{R}^2)$ el subconjunto formado por las aplicaciones de $\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$ que preservan la orientación.

$\mathrm{Emb}^d(\mathbb{R}^2)$ el subconjunto de aplicaciones en $\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$ que son diferenciables.

$\mathrm{Emb}^d_+(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Emb}^d(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Emb}_+(\mathbb{R}^2)$.

$\mathrm{Emb}^{\,r}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de embebimientos de clase C^r, $r \geq 1$

$\mathrm{Emb}^r_+(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Emb}^{\,r}(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Emb}_+(\mathbb{R}^2)$.

Cabe destacar que un embebimiento no tiene por qué ser sobreyectiva. No obstante, la siguiente proposición nos permitirá definir homeomorfismos a partir de embebimiento sin necesidad de exigir que la inversa sea continua.

Proposición 1.1.10. *Toda aplicación $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ es abierta*

Definición 1.1.11. *Diremos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo si $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ y además verifica que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. A la clase de homeomorfismos la denotaremos por $Hom(\mathbb{R}^2)$. Por tanto,*

$$Hom_+(\mathbb{R}^2) = \{f \in Emb_+(\mathbb{R}^2) \mid f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2\}.$$

Definición 1.1.12. *Diremos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo si $f \in Emb^d(\mathbb{R}^2)$, $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ y además tiene inversa diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. A la clase de difeomorfismos la denotaremos por $Dif(\mathbb{R}^2)$. Por tanto,*

$$Dif_+(\mathbb{R}^2) = \{f \in Emb^d_+(\mathbb{R}^2) \mid f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2\}.$$

Si el difeomorfismo es de clase C^r, $r \geq 1$, lo denotaremos por $Dif^r(\mathbb{R}^2)$. Y si éste preserva la orientación $Dif^r_+(\mathbb{R}^2)$.

Definición 1.1.13. *Sea M un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{X}$. Definimos la región de atracción de M como el conjunto:*

$$\bigwedge(M) := \{q \in \mathbb{X} \mid \omega(q) \neq 0 \ y \ \omega(q) \subseteq M\}$$

Definición 1.1.14. *Sea $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ un embebimiento tal que $f(p) = p$. Diremos que el punto fijo p es:*

- *estable si todo entorno U de p contiene un entorno V de p positivamente invariante.*
- *atractor si $\bigwedge(p)$ es un entorno de p en $\mathbb{R}^2$.*
- *asintóticamente estable si es estable y es atractor.*
- *atractor (asintótico) global si es estable y $\bigwedge(p) = \mathbb{R}^2$.*

Definición 1.1.15. *Si existe f^{-1}, la aplicación inversa de f, diremos que $p \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo repulsor de f si es asintóticamente estable para f^{-1}.*

Si $f : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ es un homeomorfismo de la esfera de Riemann con $f(\infty) = \infty$, podemos definir análogamente el ∞ como estable, asintóticamente estable, atractor, atractor global o repulsor.

El diagrama de la Figura 1.1 muestra las relaciones entre los diferentes puntos fijos citados en la definición anterior.

Definición 1.1.16. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \tag{1.1}$$

dada por un campo vectorial $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con $X(0) = 0$. A la solución $x(t) \equiv 0$ se le llama punto de equilibrio del sistema.

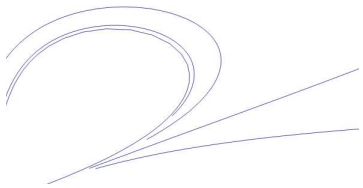

Figura 1.1: Punto fijo atractor no estable.

Diremos que el origen es asintóticamente estable o atractor local si toda solución que empieza cerca del 0 *está definida para todo* $t > 0$ *y tiende al origen cuando* t *tiende a infinito (ver [32] o [4] para más detalles). Si toda solución de (2.1) tiende al origen, diremos entonces* $x(t) \equiv 0$ *es un atractor global.*

Ejemplo 1.1.17. *Consideremos ahora la ecuación diferencial (1.1) donde el campo* $X = (X_1, X_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *viene dado por*

$$X_1(x, y) = \frac{x^2(y - x) + y^5}{(x^2 + y^2)[1 + (x^2 + y^2)^2]}$$

$$X_2(x, y) = \frac{y^2(y - 2x)}{(x^2 + y^2)[1 + (x^2 + y^2)^2]}$$

La Figura 1.1 muestra el espacio de fases del flujo definido por el sistema. También la aplicación a tiempo uno inducida por

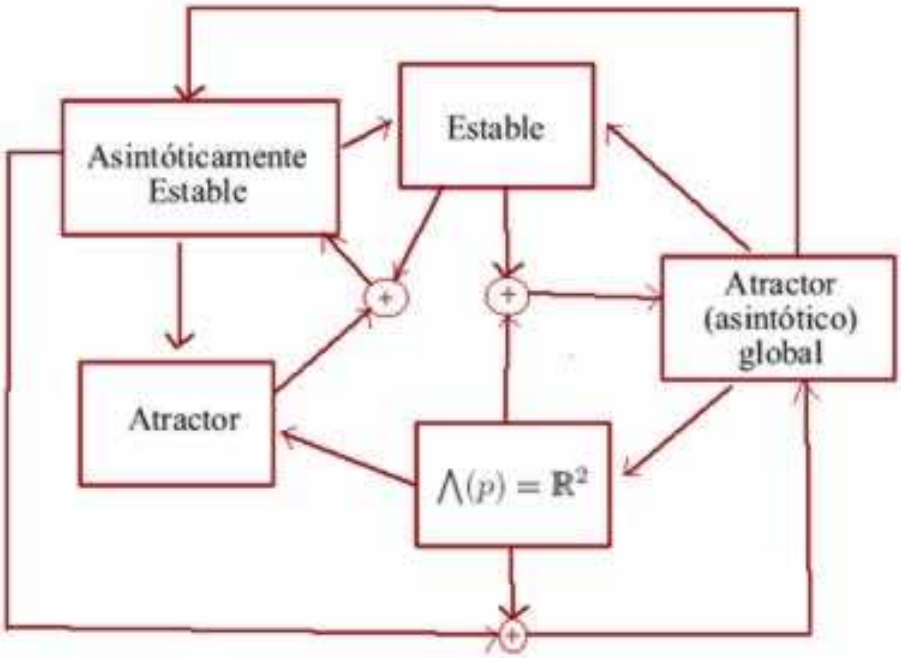

Figura 1.2: Diagrama de atractores.

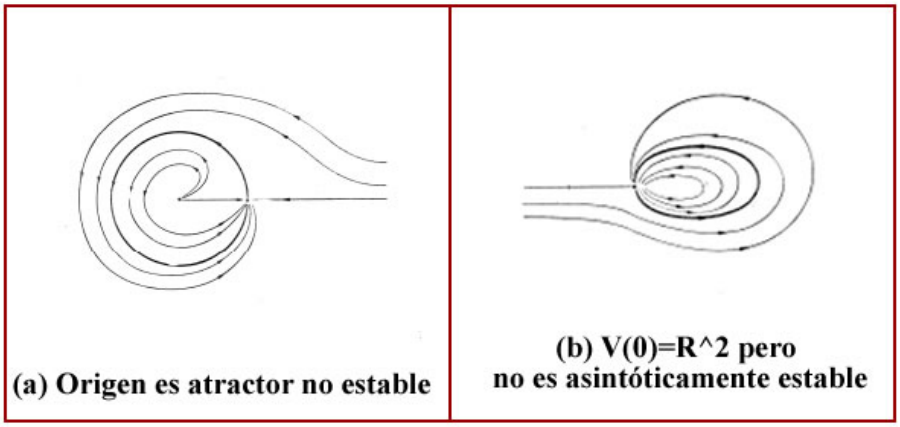

Figura 1.3: Ejemplo de atractores no estables.

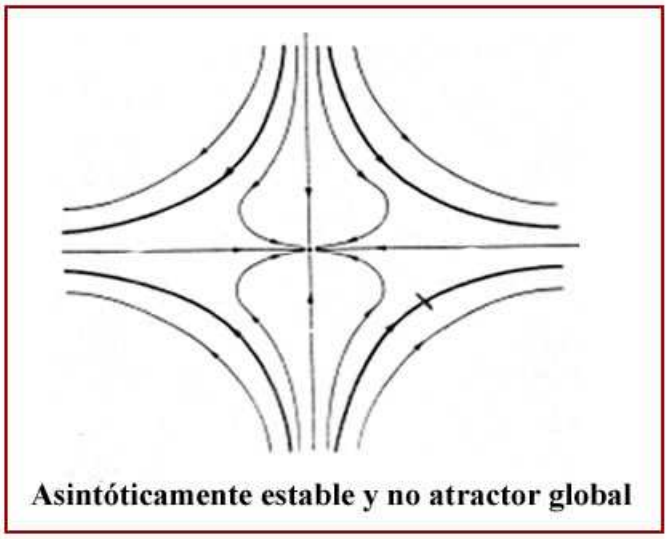

Figura 1.4: Ejemplo de asintóticamente estable no atractor global.

el flujo, que asumiremos que es un difeomorfismo suave de $\mathbb{R}^2$, tiene en el origen un punto fijo atractor ($\bigwedge(0) = \mathbb{R}^2$) pero no es estable.

Ejemplo 1.1.18. *Consideremos la ecuación diferencial (1.1) donde el campo* $X = (X_1, X_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *viene dado por*

$$X_1(x,y) = -y \ \ \forall (x,y)\ , \quad X_2(x,y) = \begin{cases} x & si \ \ x^2y^2 \geq 1 \\ 2x^3y^2 - x & si \ \ x^2y^2 < 1 \end{cases}$$

La Figura 1.1 muestra el espacio de fases del flujo definido por el sistema. También la aplicación a tiempo uno inducida por el flujo, que asumiremos que es un difeomorfismo suave de $\mathbb{R}^2$, tiene en el origen un punto asintóticamente estable pero no es atractor global.

Definición 1.1.19. *Diremos que dos aplicaciones continuas* $f, g : X \to Y$ *entre espacios topológicos son homotópicas si existe* $F : X \times I \to Y$ *tal que para todo punto* $x \in X$ *se cumple que* $F_0(x) = F(x,0) = f(x)$ *y* $F_1(x) = F(x,1) = g(x)$. *A la aplicación* F *se le llama homotopía.*

Si $F_t : X \to Y$ *es un homeomorfismo* $\forall t \in I$ *diremos que* F *es una isotopía. Diremos, por tanto que las aplicaciones* f, g *son isotópicas.*

Si $F_t : X \to Y$ *es un difeomorfismo* $\forall t \in I$ *diremos que* F *es una difeotopía. Diremos, por tanto que las aplicaciones*

f, g son difeotópicas.

Definición 1.1.20. *Sean W y W' dos abiertos del plano euclidiano orientado $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ y entornos del origen. Supongamos que W contiene a la bola de radio $r > 0$, $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq r\}$, y que $f : W \to W'$ es un homeomorfismo tal que el origen es su único punto fijo. Se define el índice,* $\mathrm{Index}(f, 0)$, *de f en el punto fijo* 0 *como el grado de la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \mu_0 : & \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & s & \mapsto & \frac{f(rs)-rs}{\|f(rs)-rs\|}, \end{array} \tag{1.2}$$

donde $\mathbb{S}^1$ es la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 = \{s = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|s\| = 1\}$. También se puede definir como el grado de la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & s & \mapsto & \frac{f(\alpha(s))-\alpha(s)}{\|f(\alpha(s))-\alpha(s)\|}, \end{array} \tag{1.3}$$

para toda aplicación $\alpha : \mathbb{S}^1 \to W \setminus \{0\}$ homotópica a $\alpha_0 : \mathbb{S}^1 \to W \setminus \{0\}$ tal que $\alpha_0(s) = rs$.

Notación 1.1.21. *Sea A una matriz real 2×2, denotaremos por* $\mathrm{Spec}(A)$ *el conjunto formado por sus valores propios.*

Definición 1.1.22. *Si la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable, definimos* $\mathrm{Spec}(f)$ *como el conjunto formado por los valores propios (complejos) de la diferencial de f, Df_p, cuando*

p toma valores en $\mathbb{R}^2$*. Es decir,*

$$\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda \in \mathrm{Spec}(Df_p),\ \textit{para todo } p \in \mathbb{R}^2\}$$

Definición 1.1.23. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un* C^r-*difeomorfismo,* $r \geq 1$*. Se dice que un punto fijo* p *de* f *es hiperbólico si* $\|\lambda\| \neq 1$*, para todo* $\lambda \in \mathrm{Spec}(Df_p)$*. Diremos que* p *es un punto fijo atractor hiperbólico si* $\|\lambda\| < 1$ *para todo* $\lambda \in \mathrm{Spec}(Df_p)$*. Diremos que es un punto fijo (hiperbólico) de silla si un valor propio tiene norma mayor que uno y el otro menor que uno.*

Definición 1.1.24. *Sea* f *una aplicación de clase* C^r*, con* $r > 1$*,* y $p \in \mathbb{R}^2$ *un punto fijo hiperbólico de* f*. Para cada entorno* $U \subset \mathbb{R}^2$ *de* p *se define la variedad estable local de* p *en* U *como el conjunto*

$$W^s(p, U, f) = \{q \in U \mid f^i(q) \in U\ \forall i > 0 \ \ y \ \ \lim_{i\to\infty} \left\|f^i(q) - p\right\| = 0\}.$$

Diremos que una sucesión de puntos $\{q_{-i}\}$ *es pasado histórico de un punto* $q \in \mathbb{R}^2$ *si* $q_0 = q$ *y* $f(q_{-i-1}) = q_{-i}$ *para* $i \geq 0$*. La variedad inestable local de* p *en* U *se define como el conjunto*

$$W^u(p, U, f) = \{q \in U \mid \exists\{q_{-i}\} \subset U \ \ \textit{tal que} \ \ \lim_{i\to\infty} \|q_{-i} - p\| = 0\}.$$

Teorema 1.1.25 (Hartman-Grobman)**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un difeomorfismo de clase* C^r*,* $r \geq 1$*,* y p *un punto fijo hiperbólico de* f*. Entonces existe un entorno* U *de* p y V *de* 0 y *un homeomorfismo* $h : V \to U$ *tal que* $f(h(x)) = h(Ax)$*,* $\forall x \in V$*, donde*

$A = Df_p$.

Corolario 1.1.26. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un C^r-difeomorfismo, $r \geq 1$, y p un punto fijo hiperbólico de f. Si p es un atractor hiperbólico, entonces p es asintóticamente estable.*

Capítulo 2

La Conjetura Discreta de Markus Yamabe

Uno de los problemas que más se han abordado en Teoría de Sistemas Dinámicos es la búsqueda de condiciones suficientes para garantizar la existencia de un atractor global tanto para el caso continuo como para el discreto.

A finales del siglo XIX Lyapunov relacionó la estabilidad local de un punto de equilibrio con los valores propios de la matriz diferencial del campo vectorial. Esto favoreció la publicación en los años 60 de una de las conjeturas más interesantes del siglo pasado: la Conjetura de Markus-Yamabe. Unos 15 años después, y dado que también hay relación entre los valores propios de la diferencial y la estabilidad de punto fijo, se dio a conocer la versión para aplicaciones. A esta nueva conjetura se la denominó, a finales de los 90, Conjetura Discreta de Markus-Yamabe por analogía a la primera versión para sis-

temas continuos. Se pueden encontrar más detalles en [13], [14], [57] o en [58], entre otros.

En este capítulo explicaremos cómo surgió y en qué consiste la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe para tener un mayor entendimiento del estudio de este trabajo. Veremos en la Sección 2.1 que la versión para campos vectoriales en dimensión 2 es verdadera y además equivalente a la inyectividad del campo. Por otro lado, como se mostrará en la Sección 2.2, la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe es falsa para difeomorfismos racionales del plano. Esta disparidad fomentó el estudio de la dinámica de las aplicaciones continuas e inyectivas del plano verificando las hipótesis de la Conjetura DMY, que es de lo que se ocupa esta memoria.

2.1. La Conjetura de Markus Yamabe

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \tag{2.1}$$

dada por un campo vectorial $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con $X(0) = 0$. Supongamos que $x(t) \equiv 0$ es una solución de equilibrio del sistema (2.1).

Ejemplo 2.1.1. *Supongamos que X es una aplicación lineal dada por la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces cada solución de*

(2.1) tiene la forma

$$x(t) = x(0)\, e^{tA}.$$

En este caso, el origen es un atractor global si y sólo si la parte real de todos los valores propios de la matriz A es negativa.

Este ejemplo revela la naturaleza de la siguiente proposición:

Proposición 2.1.2 (Lyapunov)**.** *Sea $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $X(0) = 0$. Si la parte real de todos los valores propios de $DX(0)$ es negativa, entonces el origen es un atractor local del sistema $\dot{x}(t) = X(x(t))$.*

Ejemplo 2.1.3. *Consideremos la ecuación diferencial no lineal*

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,\dot{x} + \frac{1}{l}\,\sin x = 0 \tag{2.2}$$

Esta ecuación describe el movimiento vertical de un péndulo de masa constante $m > 0$ sujetada a una cuerda de masa despreciable y longitud constante $l > 0$. $k > 0$ se relaciona con la fricción del sistema.

Si expresamos el sistema en función también de la velocidad angular $\dot{x} = y$ obtenemos un campo vectorial C^1, $X =$

$(X_1, X_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con

$$X_1(x, y) = y \quad X_2(x, y) = -\frac{k}{m}\, y - \frac{1}{l}\, \sin x.$$

Los valores propios de $DX(0, 0)$ son:

$$\{\frac{-kl - \sqrt{l}\sqrt{k^2 l - 4m^2}}{2lm}, \frac{-kl + \sqrt{l}\sqrt{k^2 l - 4m^2}}{2lm}\}$$

Si $k^2 l - 4m^2 < 0$, los valores propios son complejos y con parte real negativa, por lo que el origen es un atractor local.

No obstante la solución $x(t)$ con $x(0) = \pi$ y $\dot{x}(0) = 0$ no tiende al origen siendo además otro punto de equilibrio de la ecuación (2.2). Si calculamos la matriz $DF(\pi, 0)$ observamos que tiene los valores propios:

$$\{\frac{-kl - \sqrt{l}\sqrt{k^2 l + 4m^2}}{2lm}, \frac{-kl + \sqrt{l}\sqrt{k^2 l + 4m^2}}{2lm}\}$$

Como todas las constantes son positivas, los valores propios son reales y uno de ellos es mayor que cero.

Con este ejemplo ya se observa que la condición de los valores propios de la diferencial en el origen no es suficiente para determinar la dinámica global del sistema. No obstante, en 1960, L. Markus y H. Yamabe conjeturaron en [42] lo siguiente:

Conjetura 2.1.4 (Conjetura de Markus-Yamabe)**.** *Sea* $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un campo vectorial de clase* C^1 *tal que* $X(0) = 0$*. Si*

para todo $p \in \mathbb{R}^n$ la parte real de todos los valores propios de $DX(p)$ es negativa, entonces el origen es un atractor global del sistema $\dot{x}(t) = X(x(t))$.

Conjetura 2.1.5 (Conjetura Débil de Markus-Yamabe)**.** *Sea $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 verificando las hipótesis de la Conjetura de Markus-Yamabe, entonces X es inyectiva.*

C. Olech probó en 1963 que ambas conjeturas son equivalentes en dimensión 2 y dio el primer resultado de estabilidad global (ver [46], [47]). Más tarde, en 1995, R. Fessler y C. Gutierrez publicaron independientemente (en [22] y [26], respectivamente) la respuesta afirmativa a la Conjetura de Markus-Yamabe en dimensión 2, fortaleciendo así la estrecha relación entre la estabilidad global del punto de equilibrio y la inyectividad del campo considerándola como una aplicación de clase C^1. Fue a partir de 1997, cuando A. Cima, A. van den Essen, A. Gasull, E. Hubbers, y F. Mañosas encontraron contraejemplos para el caso $n > 2$ (ver [57] y [14]).

2.2. El Problema de La Salle

Análogamente a la Conjetura de Markus Yamabe para sistemas continuos, J. LaSalle conjeturó en 1976 la versión discreta del problema de atracción global (ver [34]), al que

se le llamó Problema de La Salle. Posteriormente se le denominó Problema o Conjetura Discreta de Markus Yamabe por alusión a la versión continua para campos vectoriales. Su enunciado es el siguiente:

Conjetura 2.2.1 (Discreta de Markus-Yamabe, [57])**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación de clase* C^1 *tal que* $f(0) = 0$ *y* $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$*, entonces el* 0 *es un atractor global del sistema discreto generado por* f*.*

Fueron A. Cima, A. Gasull y F. Mañosas quienes estudiaron con profundidad en [13] el problema propuesto por LaSalle y su relación con la también conocida Conjetura Jacobiana (ver [57]).

Esta sección se centrará en [13] donde se prueba que la conjetura es falsa en general y únicamente cierta para $n = 1$, aplicaciones polinomiales en dimensión dos y para aplicaciones triangulares en dimensión n. Cabe resaltar que la definición de atractor global que aparece en dicho artículo no coincide con la de esta memoria. Para ellos atractor global es sólo $\bigwedge(0) = \mathbb{R}^2$, nosotros necesitaremos además la estabilidad local del punto fijo. La definición que usan Cima, Gasull y Mañosas es la dada habitualmente en libros como [4], pero en nuestro contexto ésta induce a error ya que existen casos en los que un punto fijo es atractor global en este sentido pero no es estable

como punto fijo, como se muestra en la Figura 1.1. No obstante, dado que prueban la atracción global a partir de la hipótesis $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$, las dos definiciones son equivalentes puesto que la condición del espectro implica que el origen ya es asintóticamente estable por el Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman y por tanto es atractor global en nuestro sentido. Ver Definición 1.1.14 de atractor y diagrama de la Figura 1.1.

En la Sección 2.2.1 daremos una breve descripción de los casos en los que es verdadero el Problema de LaSalle o Conjetura DMY, mientras que en la Sección 2.2.2 veremos cuando es falsa.

2.2.1. Una respuesta positiva

Dado que la Conjetura de Markus-Yamabe es verdadera en dimensión 2 para el caso continuo, cabe esperar que también lo sea en algunos casos para la versión discreta. En esta sección mostraremos los enunciados con los que A. Cima, A. Gasull y F. Mañosas probaron en [13] que la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe es verdadera para un caso particular de aplicaciones de clase C^1 definidas en $\mathbb{R}^n$. Con este resultado también probaron que es verdadera para aplicaciones polinomiales en dimensión 2. Sin embargo, veremos en la Sección 2.2.2 contraejemplos para casos más generales.

Definición 2.2.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación C^1, diremos que f es triangular si es de la forma:*

$$f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Diremos que f es linealmente triangularizable si existe un cambio de variable lineal que hace f triangular.

Teorema 2.2.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación C^1 triangular con $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$. Supongamos que $f(0) = 0$, entonces el 0 es un atractor global del sistema discreto generado por f.*

Ejemplo 2.2.4. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación dada por $f(x_1, x_2) = (c_1x_1 + h_1(x_2), c_2x_2 + h_2)$ donde $c_1, c_2, h_2 \in \mathbb{R}$ y $h_1(x_2) \in \mathbb{R}[x_2]$ es un polinomio en x_2 con coeficientes reales.*

En efecto, si $|c_1|, |c_2| < 1$ entonces f es una aplicación linealmente triangularizable de clase C^1 cuyo espectro está incluido en la bola unidad y por tanto $(\frac{1}{1-c_1}h_1(\frac{h_2}{1-c_2}), \frac{h_2}{1-c_2})$ es un atractor global para la aplicación f.

Lema 2.2.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación polinomial tal que $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$, entonces el polinomio característico de Df_p es independiente de p.*

Además el polinomio característico tiene la forma:

$$P_p(\lambda) = \lambda^n - t_1\ \lambda^{n-1} + ... + (-1)^n\ t_n,\ \forall p \in \mathbb{R}^n$$

donde t_i, $i = 1, ..., n$ *son constantes. Es decir, el polinomio no depende del punto.*

Teorema 2.2.6 (Dillen, [18])**.** *Sea* $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una aplicación polinomial en dos variables* (x, y) *con hessiano constante en todo* $\mathbb{R}^2$ *igual a* c*. Entonces existe una transformación afín del plano tal que*

$$H(x, y) = \sqrt{-c}\, xy + h(x),$$

donde h *es un polinomio de una sola variable* $x \in \mathbb{R}$*.*

A. Cima, A. Gasull y F. Mañosas usan el Lema 2.2.5 y el Teorema de Dillen para reducir el caso polinomial al caso triangular en dimensión 2, probando así el siguiente teorema:

Teorema 2.2.7. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación polinomial con* $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0, 1)$*, entonces existe un único punto fijo de* f *siendo éste atractor global del sistema discreto generado por* f*.*

2.2.2. Una respuesta negativa

En la Sección 2.2.1 vimos que la Conjetura DMY es verdadera en dimensión cualquiera para aplicaciones triangulares y en dimensión 2 para polinomiales. En esta sección mostraremos los casos en los que es falsa.

El Teorema 2.2.9 también está recogido en [13] y con él los autores prueban la existencia de un difeomorfismo global

definido en $\mathbb{R}^n$ que verifica las hipótesis de la Conjetura DMY y tiene una órbita periódica de período 4. El difeomorfismo que consideran es una generalización del siguiente contraejemplo en dimensión 2 (el cual se estudiará con detalle en la Sección 2.3):

Teorema 2.2.8 (Ejemplo de Szlenk)**.** *Sea* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación dada por la expresión:*

$$F(x,y) = (-\frac{ky^3}{1+x^2+y^2}, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2}), \qquad \textit{donde } \ k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}}). \tag{2.3}$$

F satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Spec}(F) \subset B(0,1)$.
2. *Existe una órbita periódica de período* 4 *para* F.
3. F *es inyectiva.*

Teorema 2.2.9 (Ejemplo de Szlenk-Cima-Gasull-Mañosas)**.** *Consideremos la aplicación* $G_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por*

$$G_a(x_1,x_2,x_3,...,x_n) = (-\frac{kx_2^3}{1+x_1^2+x_2^2} - ax_1, \frac{kx_1^3}{1+x_1^2+x_2^2} - ax_2, cx_3, ..., cx_n),$$

donde $|c| < 1$ *and* $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

Si a *es suficientemente pequeño, la aplicación* G_a *es un difeomorfismo global de* $\mathbb{R}^n$ *en sí mismo satisfaciendo las siguientes propiedades:*

(a) $\mathrm{Spec}(G_a) \subset B(0,1)$.

(b) $G_a(0) = 0$ *y existe un* $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tal que* $(G_a)^4(p) = p$.

Hemos visto que con el Teorema 2.2.8 se dio una respuesta negativa a la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe para el caso racional en dimensión 2 y con el Teorema 2.2.9 se dio la misma respuesta en el caso más general. Pero todavía queda dar una respuesta a la Conjetura para aplicaciones polinomiales en dimensión cualquiera, ya que para $n = 2$ es verdadera (visto en Sección 2.2.1).

Cabe destacar que las técnicas usadas para probar el Teorema 2.2.7 en $\mathbb{R}^2$ están estrechamente ligadas a la dimensión del problema, $n = 2$, lo que imposibilitó enunciar el resultado en dimensión mayor.

Fueron A. van den Essen y E. Hubbers quienes publicaron en [58] un contraejemplo para el caso polinomial en dimensión $n \geq 4$. Posteriormente, en 1997, A. Cimas, F. Mañosas, A. Gasull, A. van den Essen y E. Hubbers dieron en [14] el siguiente contraejemplo también polinomial con $n \geq 3$, cerrando así el Problema Discreto de Markus-Yamabe original:

Teorema 2.2.10. *Sea* $n \geq 3$ *y* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *la aplicación dada por*

$$F(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (\frac{1}{2}x_1 + x_3\, d(x)^2, \frac{1}{2}x_2 - d(x)^2, \frac{1}{2}x_3, ..., \frac{1}{2}x_n),$$

donde $d(x) = x_1 + x_3x_2$. *Entonces* F *es un contraejemplo a la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe. Más precisamente,*

existe un valor inicial $x^{(0)}$ *tal que la sucesión* $x^{(n+1)} = F(x^{(n)})$ *tiende a infinito cuando n tiende a infinito.*

2.3. Contraejemplo en dimensión 2

En la Sección 2.1 se vio que la Conjetura de Markus-Yamabe es verdadera para campos vectoriales de clase C^1 definidos en el plano mientras que en la Sección 2.2 se muestra que su versión Discreta únicamente es cierta en dimensión 2 si la aplicación es triangular y/o polinomial. Esto induce a preguntarse qué hipótesis hacen falta en la Conjetura Discreta de Markus Yamabe para que ésta sea cierta para cualquier aplicación de clase C^1 en dimensión 2.

En esta sección se explicará con cierto detalle algunas propiedades topológicas del Ejemplo 2.3 de Szlenk con el que se da una respuesta negativa a la conjetura en dimensión dos para aplicaciones racionales. Este ejemplo jugará un importante papel a lo largo de este capítulo y dará origen parte de los resultados de esta memoria.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 dada por la expresión (2.3). En coordenadas polares toma la forma:

$$\theta_1 = \begin{cases} \arctan(\frac{-1}{\tan^3(\theta)}), & \text{si } \theta \neq \frac{k\pi}{2} \\ \theta + \frac{\pi}{2} & \text{si } \theta = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$$r_1 = \frac{kr^3}{1+r^2}\sqrt{(\sin^6\theta + \cos^6\theta)} \tag{2.4}$$

Veremos que la aplicación F contrae área, es un homeomorfismo con un único punto fijo, no tiene órbitas periódicas de período 2 y el infinito no es un repulsor. Además veremos que no admite rayos invariantes.

(1) La aplicación contrae área

Probaremos que $\text{Spec}(F) \subset B(0,1)$. En efecto, la matriz diferencial de la aplicación F viene dada por la expresión:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2kxy^3}{(1+x^2+y^2)^2} & -\frac{ky^2(3+3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \\ \frac{kx^2(3+x^2+3y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} & -\frac{2kx^3y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$detDF(x,y) = \frac{3k^2x^2y^2(3+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$trDF(x,y) = \frac{-2kxy(x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Por otro lado es fácil ver que el discriminante del polinomio característico de la matriz diferencial

$$\Delta(x,y) = tr^2DF(x,y) - 4detDF(x,y)$$

tiene la forma:

$$\Delta(x,y) = -4k^2x^2y^2\ \frac{2x^4+8x^2y^2+2y^4+12x^2+12y^2+9}{(1+x^2+y^2)^4} \leq 0.$$

Entonces $DF(x,y)$ tiene un único valor propio real doble o tiene dos valores propios complejos conjugados. Por lo que cabe distinguir dos casos:

- Si $xy = 0$, $\Delta(x,y) = 0$ y tr $DF(x,y) = 0$ y por tanto $\lambda = 0$ es valor propio real doble.
- Si $xy \neq 0$, $\Delta(x,y) < 0$ y los valores propios de $DF(x,y)$ no son reales.

  Como, utilizando coordenadas polares, se verifica la expresión

$$0 \leq detDF(r,\theta) = \frac{3k^2\ sin^2\theta\ cos^2\theta\ r^4(r^2+3)}{(1+r^2)^3} =$$

$$= \frac{3k^2\ sin^2 2\theta\ (r^6+3r^4)}{4(r^6+3r^4+3r^2+1)} < \frac{3k^2}{4} < 1,$$

obtenemos que:

$$0 < |\lambda| = \sqrt{\det DF(x,y)} < \sqrt{\frac{3k^2}{4}} = \frac{k\sqrt{3}}{2} < 1.$$

Observar que en ambos casos $|\lambda| < 1$ y $F(0) = 0$, luego F verifica las hipótesis del Problema DMY.

(2) F es un homeomorfismo del plano con un único punto fijo

Como F es de clase C^1, $F(0) = 0$ y $\mathrm{Spec}(F) \subset B(0,1)$, por el Corolario 3.1.2, el 0 es el único punto fijo de F. Además, por el Corolario del Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman, el origen es asintóticamente estable. Por lo tanto $\mathrm{Index}(F,0) = \mathrm{Index}(F^n,0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado que la aplicación F dada por (2.4) es continua, basta con probar la biyectividad para ver que es un homeomorfismo.

(2.1) Primero veremos que es inyectiva.

Sea $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$, probaremos que si existe un $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_1,y_1) = F(x_2,y_2)$, entonces se debe verificar que $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

Como de forma trivial para todo $a \in \mathbb{R}^2$ se verifica que $F(a) = F(0)$ si y sólo si $a = 0$, distinguiremos dos casos:

(i) Si $x_1y_1 \neq 0$, entonces tanto x_1 como y_1 son diferentes de cero. En este caso, $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ si y solo si

$$\frac{-ky_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{-ky_2^3}{1+x_2^2+y_2^2} \quad \text{y} \quad \frac{kx_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{kx_2^3}{1+x_2^2+y_2^2}.$$

Por lo tanto también se verifica que $x_2y_2 \neq 0$.

Despejando e igualando obtenemos,

$$\frac{y_1^3}{y_2^3} = \frac{x_1^3}{x_2^3} = \frac{1+x_1^2+y_1^2}{1+x_2^2+y_2^2} > 0.$$

Por lo que $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} > 0$ o equivalentemente, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Esto quiere decir que los puntos $(x_2, x_1), (y_2, y_1)$ pertenecen a la misma recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\omega > 0$.

Es decir, $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ si y solo si $\exists\, \omega > 0$ tal que $x_1 = \omega\, x_2$ y $y_1 = \omega\, y_2$. Veamos que $\omega = 1$:

$F(\omega x_2, \omega y_2) = F(x_2, y_2)$ si y sólo si $\frac{\omega^3}{1+\omega^2(x_2^2+y_2^2)} = \frac{1}{1+x_2^2+y_2^2}$. O lo que es lo mismo:

$$(1+x_2^2+y_2^2)\omega^3 - (x_2^2+y_2^2)\omega^2 - 1 = 0. \qquad (2.5)$$

Pero la ecuación (2.5) tiene únicamente una solución real $\omega = 1$.

(ii) Si por el contrario $x_1y_1 = 0$, con $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$, entonces

una de las dos variables es diferente de cero. Supongamos que $x_1 = 0$ y también que $y_1 \neq 0$.

En este caso, como $F(0, y_1) = F(x_2, y_2)$, obtenemos que $x_2 = 0$ y

$$\frac{-ky_1^3}{1+y_1^2} = \frac{-ky_2^3}{1+y_2^2}$$

Equivalentemente,

$$(1+y_2^2)y_1^3 - y_2^3y_1^2 - y_2^3 = 0. \tag{2.6}$$

Nuevamente la ecuación (2.6) tiene una única solución real $y_1 = y_2$.

(2.2) Veamos ahora que F dada por (2.4) es una aplicación sobreyectiva.

Probaremos que para todo $(r_1, \theta_1) \in [0, \infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$ existe un (r_0, θ_0) tal que (r_1, θ_1) es la imagen de (r_0, θ_0) por F en coordenadas polares.

En efecto, dado que la aplicación trigonométrica $t \mapsto \tan(t)$ es biyectiva en $]-\pi/2, \pi/2[$, es fácil ver que para todo $\theta_1 \in]-\pi/2, \pi/2[$ existe un único θ_0 tal que $\theta_1 = \arctan(\frac{-1}{\tan^3(\theta_0)})$.

Veamos ahora qué ocurre con el radio. Como

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = \cos^6\theta\ (1+\frac{1}{\tan^2\theta_1}) = \frac{1}{(1+\frac{1}{\tan^{2/3}\theta_1})^3}\ (1+\frac{1}{\tan^2\theta_1}),$$

tenemos que

$$r_1 = \frac{kr^3}{1+r^2}\sqrt{\frac{1+\tan^2\theta_1}{(1+\tan^{2/3}\theta_1)^3}} \tag{2.7}$$

Por lo tanto, si consideramos $\theta_1 \in]-\pi/2, \pi/2[$ y $r_1 \in [0,\infty)$, entonces existe un $\theta_0 \in]-\pi/2, \pi/2[$ verificando (2.4) tal que

$$\sqrt{\frac{1+\tan^2\theta_1}{(1+\tan^{2/3}\theta_1)^3}} = \frac{1+\tan^6\theta_0}{1+\tan^2\theta_0} > 0. \tag{2.8}$$

Luego la función que está dentro de la raíz en la ecuación (2.7) está bien definida y es constante en $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Veamos si la ecuación $r_1 = Ak\frac{r^3}{1+r^2}$ tiene solución.

Dado $B > 0$, la función $h(r) = Br^3 - (1+r^2)$ es real, continua y toma valores negativos para r suficientemente pequeño y valores positivos cuando r es suficientemente grande. Además solo tiene una raíz real, ya que la derivada $h'(r) = r(3Br-2)$ se anula en $r = 0$, donde alcanza el máximo con $h(0) = -1$, y en $r = \frac{2}{3B} > 0$, donde alcanza el mínimo con $h(\frac{2}{3B}) = -\frac{4+27B^2}{27A^2} < 0$. Luego, por el Teorema de Bolzano, la ecuación $h(r) = 0$ tiene una única raíz real positiva .

Por lo tanto, dados $r_1 \in [0,\infty[$ y $\theta_1 \in]-\pi/2, \pi/2[$, existe un $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ y un $r_0 > 0$ tales que

$$\theta_1 = \arctan(\frac{-1}{\tan^3(\theta_0)}) \quad \text{y} \quad \frac{r_1}{\sqrt{\sin^6\theta + \cos^6\theta}} = \frac{r_0^3}{1+r_0^2}$$

Por lo que la aplicación de Szlenk dada por (2.3) es biyectiva.

(3) F no tiene órbitas periódicas de período 2

Es fácil comprobar que

$$F(x,0) = (0, \frac{kx^3}{1+x^2}) = (-0, R_1(k,x)), F^2(x,0) = (-R_2(k,x), 0),$$

$$F^3(x,0) = (-0, -R_3(k,x)) \text{ y } F^4(x,0) = (R_4(k,x), 0),$$

donde $R_i(k,x),\ i = 1,2,3,4$ son funciones racionales de clase C^1 definidas en $\mathbb{R}^2$. Por lo que cabe pensar que se podría obtener una órbita periódica si, para algún $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$, existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = R_4(k,x)$. En efecto, la solución es $p_0 = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$. De hecho, $F^4(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0) = (\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0)$.

Veamos que es única:

Dado que la expresión del ángulo en (2.4) no depende del radio, podemos considerar la componente angular, la cual define un difeomorfismo en el círculo. Es fácil ver que este difeomorfismo tiene únicamente dos órbitas periódicas, una atractora (en los ejes coordenados $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$) y la otra repulsora (en las bisectrices $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$).

Si ahora observamos la expresión del radio en (2.4), veremos que la aplicación restringida a los ejes coordenados es

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{kr^3}{1+r^2} \\ \theta_1 &= \theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Esta restricción tiene un punto fijo repulsor en cada semieje, por lo que existe una órbita periódica para F de período 4 situada en los ejes coordenados.

Sin embargo, la ecuación restringida a las bisectrices es

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{k}{\sqrt{2}}\,\frac{kr^3}{1+r^2} \\ \theta_1 &= \theta + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

que ya no tiene ningún punto fijo ni periódico diferente del origen, el cual es atractor.

Por lo tanto, F tiene una única órbita periódica, es de período 4 y está situada en los ejes. Además, cada punto p_0 y $p_i = F^i(p_0)$ con $i = 1, 2, 3$ es un punto fijo de silla para F^4, luego $\text{Index}(F^4, p_i) = -1$ para cada $i = 0, 1, 2, 3$.

(4) El infinito no es un repulsor.

Si extendemos F a un homeomorfismo $\tilde{F} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ de la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ tal que $\tilde{F}(\infty) = \infty$, entonces se puede ver computacionalmente por la definición de

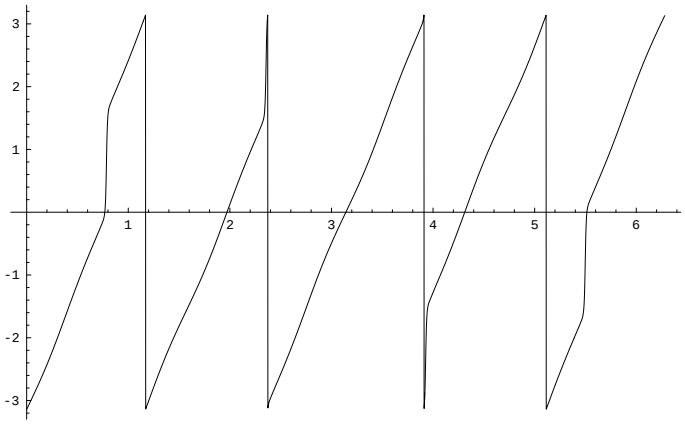

Figura 2.1: Índice en el infinito para $k = 1{,}1$.

índice que $\text{Index}(\tilde{F}^4, \infty) = 5 \neq 1$ (ver Figura (2.3)). Lo que implica que el infinito no es un repulsor.

Además, F^4 es un homeomorfismo de la esfera que preserva la orientación con un número finito de puntos fijos aislados y el índice en el infinito es estrictamente mayor que 1, entonces tenemos 4 pétalos atractores y 4 pétalos repulsores en el infinito (ver [7, 41, 55]).

(5) Dinámica de la aplicación F^4

Dado que F^4 deja invariante cada octante, analizaremos la dinámica en uno de ellos. Supongamos que es el comprendido entre la recta $x = 0$ y la bisectriz $y = x$. La dinámica de la F^4 restringida a la componente angular tiene en ese sector dos puntos fijos, el atractor que está en el eje $0Y$ y el repulsor que está en la bisectriz. Por lo que las imágenes por F^4 de

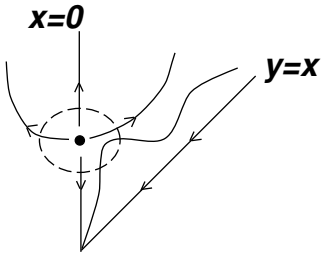

Figura 2.2: Octante invariante para F^4.

estos puntos se deben alejar de la bisectriz y acercarse al eje de ordenadas $0Y$ con $y > 0$.

Además, el punto fijo del eje $x = 0$ es un punto de silla hiperbólico para F^4 por lo que en un entorno U las órbitas de cualquier punto suficientemente cercano al eje OY tiene sólo estas tres opciones (ver Figura 2.3):

- tender al origen,

- tender al infinito,

- tender al punto de silla p_i, $i = 1, 2, 3, 4$, formando la variedad estable de p_i, $W^s(p_i)$.

Por lo que la dinámica de la aplicación F^4 se puede entender como la representada en la Figura 2.3.

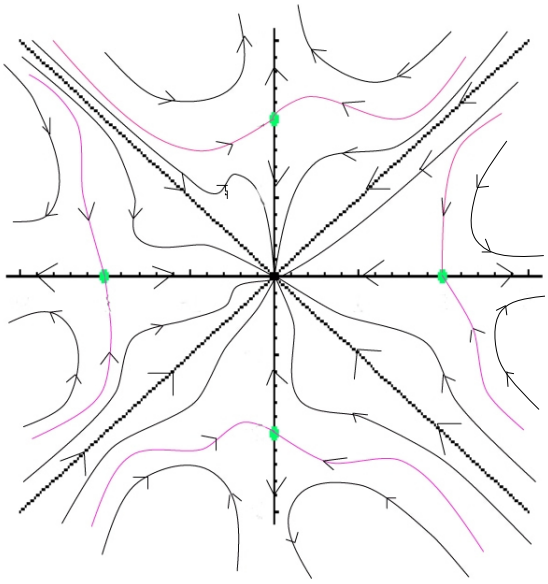

Figura 2.3: Dinámica de la iterada F^4 de Szlenk.

2.4. Contraejemplo en dimensión 2 con infinito repulsor

En el ejemplo de Szlenk del Teorema 2.2.8 aparecen puntos p tales que $\lim_{n\to\infty} F^n(p) = \infty$, y por tanto el ∞ no es un repulsor como se ve en la Figura 2.3. Además, en la aplicación de Szlenk-Cima-Gasull-Mañosas G_a, del Teorema 2.2.9 con $n = 2$, el ∞ tampoco es un repulsor.

En esta sección daremos la prueba publicada en [2] de que, para difeomorfismos suaves de $\mathbb{R}^2$ que verifican las hipótesis de la Conjetura DMY y además el ∞ es un repulsor, el Problema DMY sigue teniendo respuesta negativa.

La demostración dependerá de los siguientes dos lemas y de la notación que detallaremos a continuación, también publicados en [2].

Notación 2.4.1. *Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ una matriz real 2×2, denotaremos por*

$$\mathrm{sr}\,(A) = \mathrm{máx}\,\{|\lambda| : \lambda \text{ es un valor propio de } A\}$$

el radio espectral de A. Y por

$$||A|| = \sup\{||Av|| : ||v|| = 1\}.$$

la norma de A.

Es sabido que

$$\mathrm{sr}\,(A) \leq ||A||.$$

Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo denotaremos el radio espectral como

$$\mathrm{sr}\,(F) = \sup\{\mathrm{sr}\,(DF|_p) : p \in \mathbb{R}^2\}.$$

Lema 2.4.2. *Dado $R > 0$, $C > 1/2$ y $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{8C}$, existe una función suave*

$$\phi : [0, \infty) \to \left[\frac{1}{2C}, 1\right]$$

que satisface las siguientes condiciones:

1) $\phi(r) = 1$, *para todo* $r \in [0, R]$.

2) $\phi'(r) \leq 0$ *y* $|\phi'(r) \cdot r| < \varepsilon$, *para todo* $r \in [0, \infty[$.

3) Existe un entero N *tal que* $\phi(r) = \dfrac{1}{2C}$, *para todo* $r > R + N$.

Demostración. Primero definiremos $\phi(r) = 1$, para $r \in [0, R]$. Consideremos la sucesión $\{S(n)\}$ definida para todos los enteros positivos n como

$$S(n) \;=\; 1 - \frac{\varepsilon}{8}\left(\frac{1}{R+1} + \frac{1}{R+2} + \cdots + \frac{1}{R+n}\right).$$

Observar que $S(n) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Sea N un entero tal que $S(n) > \dfrac{1}{2C}$, para $n = 1, \cdots, N-1$, y $S(N) \leq \dfrac{1}{2C}$.

Entonces, para cada entero positivo $n \geq 1$, definimos

$$\begin{cases} \phi(R+n) = S(n), & \text{si} \;\; 1 \leq n \leq N-1\,, \\ \\ \phi(R+n) = \dfrac{1}{2C}, & \text{si} \;\; n \geq N\,. \end{cases}$$

Ahora, para cada entero n tal que $1 \leq n \leq N-1$, extendemos ϕ a una aplicación suave $\phi : [R+n, R+n+1] \to [S(n+1), S(n)]$ que es llana en ambos $R+n$ y $R+n+1$, y es

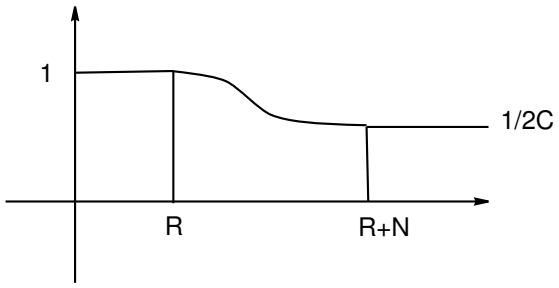

Figura 2.4: Aplicación ϕ del Lema 2.4.2.

tal que

$$0 \leq -\phi'(r) = |\phi'(r)| \leq \frac{2(S(n) - S(n+1))}{(R+n+1) - (R+n)} = \frac{\varepsilon}{4(R+n+1)}\,.$$

Finalmente, para $r > R+N$, definimos $\phi(r) = \dfrac{1}{2C}$. Ver Figura 2.4.

La aplicación ϕ satisface las condiciones del 1) al 3) porque para $n = 1, \cdots, N$ y $R+n-1 \leq r \leq R+n$, tenemos que

$$|\phi'(r) \cdot r| \leq \frac{\varepsilon}{4(R+n)} \cdot (R+n) \;=\; \frac{\varepsilon}{4} \;<\; \varepsilon\,.$$

□

Lema 2.4.3. *Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales 2×2 y sea C una constante positiva. Denotaremos por $\mathcal{A}$ el conjunto compacto formado por las matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ tales que $||A|| \leq$*

C y $\mathrm{sr}(A) \leq 0,9$. Entonces existe $\dfrac{1}{8C} > \varepsilon > 0$ tal que si

$$B = \begin{pmatrix} b+\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & b+\varepsilon_4 \end{pmatrix}$$

verifica que $\dfrac{1}{2C} \leq b \leq 1$ y si $\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|, |\varepsilon_4|\} < \varepsilon$, entonces

$$\mathrm{sr}\,(BA) \leq 0,95$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. Escribiendo $B = b\,I + E$, tenemos que $BA = bA + EA$ y además que

$$\det(BA - \lambda I) \;=\; b^2 \det\left(A + \frac{1}{b}\,EA - \frac{\lambda}{b}\,I\right)$$

lo que implica que

$$\mathrm{sr}(BA) \;=\; b\;\mathrm{sr}\left(A + \frac{1}{b}\,EA\right)\,.$$

Dado $\delta > 0\,,$ existe $0 < \varepsilon < \frac{1}{8C}$ tal que

$$\mathrm{sr}\left(A + \frac{1}{b}\,EA\right) \;\leq\; \mathrm{sr}(A) \;+\; \frac{\delta}{b}$$

es decir, tal que

$$\mathrm{sr}(BA) \;\leq\; b\;\mathrm{sr}(A) \;+\; \delta\,.$$

Así que es suficiente considerar $0 < \delta < 0,95 - 0,9\, b$. □

El siguiente teorema nos muestra un ejemplo de difeomorfismo de clase C^∞ del plano que verifica todas las hipótesis de la Conjetura DMY y además el infinito es un repulsor:

Teorema 2.4.4. *Existe un difeomorfismo suave $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tiene una órbita periódica de período 4 y es tal que el ∞ es un repulsor, $f(0) = 0$ y $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$.*

Demostración. Consideremos el ejemplo de Szlenk-Cima-Gasull-Mañosas

$$G_a(x,y) \;=\; (-\frac{ky^3}{1+x^2+y^2} - ax, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} - ay)$$

con $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$ y $0 < a < a_0 < 1$, tal que G_a verifica las condiciones del Teorema 2.2.9 en dimensión 2.

Consideremos también una constante $C > 0$ tal que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tengamos que

$$||D\, G_a(x,y)|| \leq C\,. \tag{2.9}$$

Como $\mathrm{sr}\,(G_0) < \sqrt{3}k/2$ y $\mathrm{Spec}(G_a)(x,y) = \mathrm{Spec}(G_0)(x,y) - a$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces existe un $0 < a_0 < 1$ y un $1 < k_0 < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (0,88)\,(\approx 1,01614)$, tales que

$$\mathrm{sr}\,(G_a) \leq 0,9\,, \quad \text{para todo} \quad 0 < a < a_0 \quad \text{y} \quad 1 < k < k_0\,. \tag{2.10}$$

Asociado a los números $R = \dfrac{2}{\sqrt{k-1}}$, $C > 0$ como en (2.9), y $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{8C}$ como en el Lema 2.4.3, consideraremos la función suave

$$\phi : [0, \infty) \to \left[\frac{1}{2C}, 1\right]$$

del Lema 2.4.2. Sea

$$f = H \circ G_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

con a (y por tanto k) como en (2.10), donde H está dada por

$$H(x, y) = (\phi(\sqrt{x^2 + y^2})x, \phi(\sqrt{x^2 + y^2})y)\,.$$

Veremos a continuación que f satisface nuestro Teorema.

Paso 1. Primero veremos que f es un difeomorfismo suave. Para ello necesitaremos ver que H lo es:

Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$DH(x, y) = \begin{pmatrix} \phi(r) + \phi'(r) \cdot \dfrac{x^2}{r} & \phi'(r) \cdot \dfrac{xy}{r} \\ \\ \phi'(r) \cdot \dfrac{xy}{r} & \phi(r) + \phi'(r) \cdot \dfrac{y^2}{r} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\phi(r) > \frac{1}{2C} > 4\varepsilon > \varepsilon > |\phi'(r) \cdot r|$$

implica que

$$\det DH(x,y) \,=\, \phi(r)\,(\phi(r)+\phi'(r)\cdot r) \,=\, \phi(r)\,(\phi(r)-|\phi'(r)\cdot r)|) > 0\,,$$

y dado que

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \|H(x,y)\| \,=\, \infty$$

obtenemos que la aplicación H es un difeomorfismo global. Además, por construcción de H y por serlo G_a, la aplicación f también es de clase C^∞.

Paso 2. Ahora veremos que $\mathrm{sr}(f) < 1$. Primero observemos que para todo (x,y), la aplicación $DG_a(x,y)$ pertenece al conjunto $\mathcal{A}$ del Lema 2.4.3. Si $r = \|Ga(x,y)\|$ y $(u,v) = Ga(x,y)$, entonces

$$\frac{1}{2C} \le \phi(r) \le 1\,,$$

y

$$\text{máx}\{|\phi'(r)\cdot\frac{u^2}{r}|, |\phi'(r)\cdot\frac{uv}{r}|, |\phi'(r)\cdot\frac{v^2}{r}|\ \le\ |\phi'(r)\cdot r| < \varepsilon\,.$$

Podemos ahora obtener a partir del Lema 2.4.3 que

$$\mathrm{sr}(f)\ \le\ 0{,}95\,.$$

Paso 3. En este paso veremos que $f(0,0) = (0,0)$ y que f tiene una órbita periódica de período cuatro. En efecto, $f(0,0) = (0,0)$. Además, dado que $p = (R/2, 0)$ es un punto periódico de orden cuatro hiperbólico de G_0, no solo el difeomorfismo G_a

tiene la órbita periódica hiperbólica de período cuatro en la bola perforada $B(0,R)\setminus\{0\}$, sino que además también lo tiene el difeomorfismo f.

Paso 4. Tenemos que

$$\|f(x,y)\| \;=\; \frac{\|G_a(x,y)\|}{2C} \;\leq\; \frac{1}{2}\,\|(x,y)\|$$

para todo $\|(x,y)\| \geq R+N$, con N como en la condición 3) del Lema 2.4.2. Por lo tanto, ∞ es un repulsor de f y ya completamos la prueba. □

Capítulo 3

Órbitas periódicas en aplicaciones de $\mathbb{R}^2$

En el Capítulo 2 se muestra que el hecho de que el espectro esté contenido en la bola unidad no es suficiente para garantizar la atracción global del punto fijo, pese a que sí implica la atracción local (ver ejemplo de Szlenk de la Sección 2.3). Además, con el Teorema 2.4.4 se probó que tampoco es suficiente incluso imponiendo que el infinito sea un repulsor. Esto es debido fundamentalmente a la aparición de órbitas periódicas.

En este capítulo daremos más condiciones sobre el espectro de la aplicación que garanticen la no existencia de órbitas periódicas para ver si así conseguimos probar que el origen es un atractor global. El resultado más relevante de este capítulo es el que afirma que si el espectro de una aplicación diferenciable no contiene valores propios reales, entonces la aplicación no tiene

órbitas periódicas de período dos. Este resultado será clave en las pruebas del Capítulo 4. Pero también hay que destacar que independientemente del objetivo de obtener condiciones para la existencia de un atractor global, los Teoremas 3.2.8 y 3.2.12 tienen interés práctico por sí mismos.

En la Sección 3.1 estudiaremos el conjunto de puntos fijos del sistema. Las condiciones adicionales sobre el espectro de la aplicación de esta sección nos ayudarán a garantizar en la Sección 3.2 la no existencia de órbitas periódicas de período 2. También veremos en la Sección 3.3 algunas aplicaciones a sistemas discretos polinomiales. Asimismo, en la Sección 3.4 daremos algunos casos en los que no aparecen órbitas periódicas de período n.

3.1. Existencia de puntos fijos

Como primer paso veremos la existencia de puntos fijos y algunos casos de unicidad. En [21] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación diferenciable (no necesariamente de clase* C^1*) tal que, para algún* $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Spec}(f) \cap [0, \varepsilon[= \emptyset$*, entonces* f *es inyectiva.*

Una consecuencia natural de este teorema es la siguiente:

Corolario 3.1.2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación diferenciable tal que, para algún* $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Spec}(f) \cap [1, 1+\varepsilon[= \emptyset$, *entonces* $\#\,\mathrm{Fix}(f) \leq 1$.

Demostración. Como f es una aplicación diferenciable, $g = f - Id$, es también una aplicación diferenciable. Por otra parte, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, entonces $\lambda - 1 \in \mathrm{Spec}(g)$ ya que

$$\|Dg - (\lambda - 1)I\| = \|Df - I - (\lambda - 1)I\| = \|Df - \lambda I\| = 0.$$

Esto implica que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{Spec}(g) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, luego la aplicación g es inyectiva.

Supongamos que existen dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(p) = p$ y $f(q) = q$. Entonces, $g(p) = f(p) - p = 0 = f(q) - q = g(q)$ y por tanto, $p = q$. □

Como ejemplo de aplicación que verifica el Corolario 3.1.2 tenemos el siguiente:

Ejemplo 3.1.3.

$$\begin{aligned} x_1 &= -x(1 + x^2 + y^2) \\ y_1 &= -y(1 + x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Los valores propios asociados a la matriz diferencial son:

$$-1 - 3x^2 - 3y^2 \quad -1 - x^2 - y^2$$

Por lo tanto el número de puntos fijos es como mucho uno, pero como la aplicación fija el origen, podemos afirmar que éste es el único punto fijo del sistema. Además, cualquier recta que pasa por el origen es invariante.

En efecto, si $y = mx$ es una recta de pendiente $m \in \mathbb{R}$, entonces $x_1 = -x[1 + (1 + m^2)x^2]$. Por lo que $y_1 = m[-x[1 + (1 + m^2)x^2]] = mx_1$. Además $\alpha(p) = 0$ y $\omega(p) = \infty$ para todo punto p de la curva. Pero el origen no es un repulsor local ya que la matriz Df_0 tiene el 1 como valor propio.

Como consecuencia inmediata del Corolario 3.1.2 tenemos el siguiente:

Corolario 3.1.4. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación diferenciable tal que,* $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$ *entonces* $\#\,\mathrm{Fix}(f) \leq 1$. *Además, si* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$*, entonces el punto fijo es atractor local.*

Demostración. Como $B(0,1) \cap [1, 1 + \varepsilon) = \emptyset$ para cualquier $\varepsilon > 0$, por el Corolario 3.1.2 tenemos que $\#\,\mathrm{Fix}(f) \leq 1$. Por lo tanto, si $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ entonces existe un único punto fijo y por el corolario al Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman podemos afirmar que éste es atractor local. □

Dado que el hecho de que el espectro de la aplicación esté contenido en la bola unidad nos dice además que el origen es un atractor local por el Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman, en este capítulo trabajaremos bajo las hipótesis del

Corolario 3.1.2 si únicamente necesitamos la unicidad del punto fijo o bien bajo las condiciones del Corolario 3.1.4 en el caso en que además necesitemos la estabilidad del punto fijo.

3.2. Existencia de órbitas periódicas de período dos

En esta sección buscaremos condiciones para que no existan órbitas $2-$periódicas diferentes de la del propio origen. Buscaremos condiciones sobre la propia f que impliquen que $\mathrm{Spec}(f^2) \cap [1, 1+\varepsilon) = \emptyset$, para algún $\varepsilon > 0$ y así podamos aplicar el Corolario 3.1.2 a la segunda iterada. Para ello es conveniente hacer uso de las propiedades de la dinámica de un sistema lineal.

3.2.1. Dinámica Lineal

Una aplicación lineal no singular sobre $\mathbb{R}^2$ dada por la matriz A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determina un homeomorfismo de S^1 en S^1.

En efecto, una aplicación lineal envía rectas que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen. Además, si

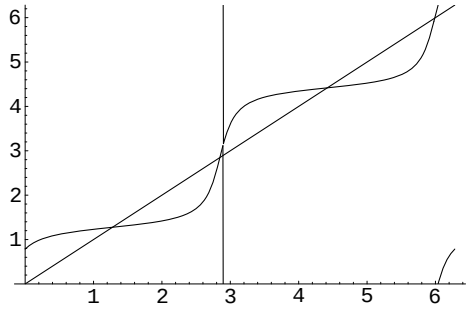

Figura 3.1: Aplicación Φ caso valores propios reales y mismo signo

ésta es no singular, también envía semirrectas en semirrectas. Así, dado un punto p de S^1 con coordenadas polares (r, θ) y argumento $\theta \in [0, 2\pi]$, consideramos el argumento del punto Ap (que al ser A no singular es único). Este argumento será la imagen de θ y, por tanto, $\Phi : S^1 \to S^1$ está bien definida:

$$\Phi(\theta) = \arctan(a_{11}\cos(\theta) + a_{12}\sin(\theta), a_{21}\cos(\theta) + a_{22}\sin(\theta))$$

Si la matriz A deja invariante una recta, entonces ésta es el subespacio de vectores propios asociados a un valor propio λ ($\lambda \neq 0$ por la regularidad de A). Así, dado un punto p de dicha recta invariante, determinado por el ángulo θ_0, entonces $\Phi(\theta_0) = \theta_0$ o bien $\Phi(\theta_0) = \theta_0 \pm \pi$ dependiendo de si el valor propio de A es positivo o negativo. Luego, dependiendo del signo de los valores propios de A, de que éstos sean reales y distintos, reales dobles o imaginarios, el homeomorfismo tiene 2, 1 o ningún punto fijo. (Ver Figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4).

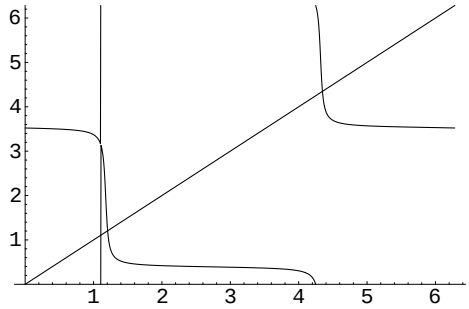

Figura 3.2: Aplicación Φ caso valores propios reales y signo distinto

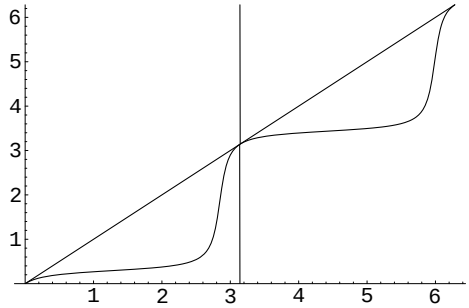

Figura 3.3: Aplicación Φ caso valores propios iguales

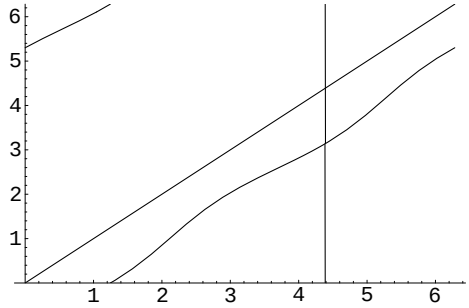

Figura 3.4: Aplicación Φ caso valores propios complejos

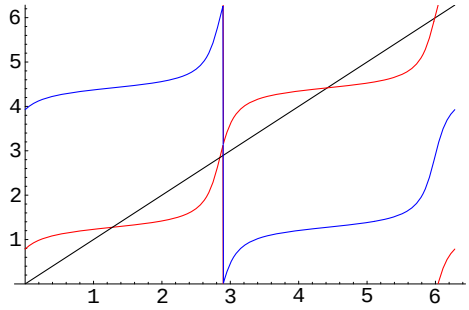

Figura 3.5: Aplicaciones Φ y Φ_π correspondientes a la fig. 3.1

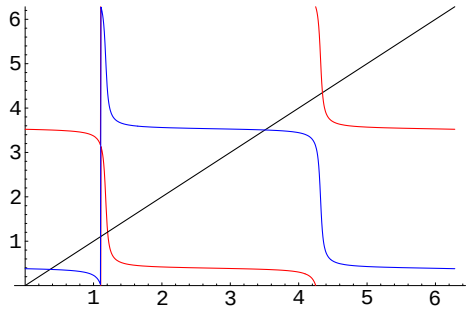

Figura 3.6: Aplicaciones Φ y Φ_π correspondientes a la fig. 3.2

Los puntos fijos de estas aplicaciones determinan direcciones propias de la matriz y por tanto se corresponden con valores propios reales positivos de la matriz.

Consideramos el homeomorfismo Φ_π resultado de trasladar en π el valor del ángulo. Los puntos fijos de este homeomorfismo se corresponden ahora con valores propios reales negativos. En las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7 representamos los dos homeomorfismos.

A partir de ahora, si necesitamos saber a partir de que

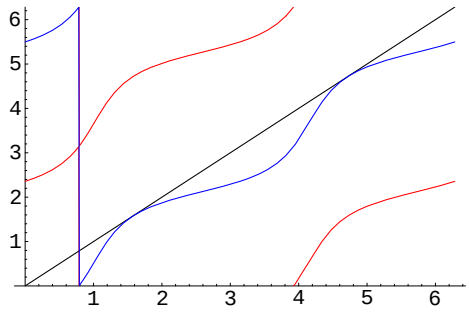

Figura 3.7: Aplicaciones Φ y Φ_π, para una matriz con valor propio doble negativo

matriz A está definida Φ utilizaremos la notación Φ_A.

Por otra parte, si consideramos $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$ como la proyección natural tal que $\Pi(x) = e^{2\pi x \imath}$, entonces existe un levantamiento $\hat{\Phi}_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Φ_A, es decir, una aplicación continua tal que $\Pi \circ \Phi_A = \hat{\Phi}_A \circ \Pi$. Existen una cantidad numerable de levantamientos de Φ_A y todos difieren en $2\pi k$.

A partir de $\tilde{\Phi}_A$ definimos la aplicación $G_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$G_A(\theta) = \tilde{\Phi}_A(\theta) - \theta.$$

De esta manera llevaremos el estudio de puntos fijos de Φ_A al estudio de los ceros de la aplicación G_A.

A partir de ahora, si no se dice lo contrario, consideraremos la determinación de $\tilde{\Phi}_A$ de tal manera que $G_A(0) \in [0, 2\pi[$. Como propiedades elementales tenemos las siguientes.

Propiedades 3.2.1.

(*a*) *Si* $G_A(\alpha) = 2n\pi$, *con* $n \in \mathbb{Z}$, *la recta* $x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$ *es el espacio invariante generado por un vector propio asociado a un valor propio real positivo de* A.

(*b*) *Si* $G_A(\alpha) = (2n+1)\pi$, *con* $n \in \mathbb{Z}$, *la recta* $x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$ *es el espacio invariante generado por un vector propio asociado a un valor propio real negativo de* A.

(*c*) *Supongamos que* $\mathrm{Spec}(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. *Por (a) y (b) como antes y el hecho de que* $G_A(0) \in [0, 2\pi[$, *la gráfica de* $G_A(\theta)$ *está contenida en* $\mathbb{R}\times]0, \pi[$ *o en* $\mathbb{R}\times]\pi, 2\pi[$.

(*d*) *Si* A *es una homotecia, es decir, se puede expresar de la forma* $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ *donde* $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *entonces* $G_A(\theta)$ *es constante e igual a* 0 *o a* π, *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$.

Así, dadas dos matrices A y B queremos encontrar condiciones para que $\tilde{\Phi}_{AB}$ no tenga puntos fijos o, equivalentemente, que la función G_{AB} dada por

$$G_{AB}(\theta) = \tilde{\Phi}_{AB}(\theta) - \theta.$$

no tenga ningún cero.

En este capítulo estudiaremos el sistema lineal generado por la matriz diferencial Df_p^2 en cada punto $p \in \mathbb{R}^2$, en-

tendiéndola como producto de dos matrices A y B. Dividiremos nuestro estudio en dos partes: en la Sección 3.2.3 veremos qué ocurre cuando las dos matrices A y B no tengan valores propios reales y en la Sección 3.2.2 cuando al menos una de las dos tenga un valor propio real.

3.2.2. Aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ sin valores propios reales

Sean A y B dos aplicaciones lineales no singulares sobre $\mathbb{R}^2$. Puede ocurrir que $(\mathrm{Spec}(A) \cup \mathrm{Spec}(B)) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ pero que $\mathrm{Spec}(AB) = \{1\}$ (sólo hay que considerar $B = A^{-1}$). Para impedir que eso ocurra probaremos que, bajo algunas condiciones, se verifica que $\mathrm{Spec}(f^2) \cap [0, \infty[= \emptyset$. Entonces la no existencia de órbitas periódicas de período 2 se seguirá del Corolario 3.1.2.

Lema 3.2.2. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \textit{tal que} \quad \mathrm{Spec}(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset.$$

entonces $a_{21} \neq 0$. *Además,*

Si $a_{21} > 0$, *entonces* $G_A(\mathbb{R}) \subset]0, \pi[$.

Si $a_{21} < 0$, *entonces* $G_A(\mathbb{R}) \subset]\pi, 2\pi[$.

Demostración. Como los valores propios de A no son reales, el elemento a_{21} no se puede anular nunca y $G_A(\mathbb{R}) \subset]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Con todas estas condiciones G_A es continua por tanto $G_A(\mathbb{R})$ es

un subconjunto conexo de $]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$. Por lo tanto $G_A(\mathbb{R}) \subset]0,\pi[$ o $G_A(\mathbb{R}) \subset]\pi,2\pi[$.

Y como $G_A(0) = \arg(a_{11}, a_{21}) \in [0,2\pi[$, se obtiene fácilmente la conclusión del lema. □

El Lema 3.2.4 nos llevó a considerar f como una aplicación sólo diferenciable, sin que sea necesariamente de clase C^1. Pero antes de enunciarlo recordaremos el Teorema de Darboux.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Darboux)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función real de valores reales, continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Si f es derivable en a por la derecha y en b por la izquierda, entonces f satisface la propiedad de valor intermedio: para cada t entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ existe algún $x \in [a,b]$ tal que $f'(x) = t$.*

Lema 3.2.4. *Sea $H(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable tal que $\frac{\partial H}{\partial x}$ nunca se anula. Entonces $\frac{\partial H}{\partial x}$ es estrictamente positiva o estrictamente negativa en todo $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Probaremos primero que para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, la función $x \to \frac{\partial H}{\partial x}(x, y_0)$ definida en la recta horizontal $\{y = y_0\}$ de $\mathbb{R}^2$ tiene signo constante. De hecho, si asumimos que existen dos puntos $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) < 0 < \frac{\partial H}{\partial x}(x_1, y_0)$, entonces podría existir, por el Teorema de Darboux, un punto x_2 entre x_0 y x_1 tal que $\frac{\partial H}{\partial x}(x_2, y_0) = 0$, lo que contradice las hipótesis del lema.

Esto implica que para cada $y \in \mathbb{R}$, la función $x \to H(x, y)$ definida en la recta horizontal $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}\}$ es estrictamente monótona.

Fijemos $y_0 \in \mathbb{R}$. Consideraremos únicamente el caso en el que la función $x \to \frac{\partial H}{\partial x}(x, y_0)$ es positiva, y por tanto el caso en el que la función $x \to H(x, y_0)$ es estrictamente creciente. Probaremos que para todo $y_1 \in \mathbb{R}$, suficientemente cerca de y_0, la función $x \to \frac{\partial H}{\partial x}(x, y_1)$ es positiva. De hecho, si cogemos dos números reales $x_0 < x_1$, entonces

$$H(x_1, y_0) = H(x_0, y_0) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Por continuidad sobre H, si y_1 es próximo a y_0 tenemos que:

$$H(x_0, y_1) < H(x_1, y_1)$$

lo que implica que si y_1 está suficientemente cerca de y_0, no sólo la función $x \to H(x, y_1)$ debe ser estrictamente creciente sino que la función $x \to \frac{\partial H}{\partial x}(x, y_1)$ también debe ser positiva. El lema se sigue del hecho de que $\mathbb{R}^2$ es conexo. □

El mismo argumento del anterior lema puede utilizarse para obtener:

Corolario 3.2.5. *Sea U un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$. Si la aplicación $H(x, y) : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable tal que $\frac{\partial H}{\partial x}$ nunca se anula, entonces $\frac{\partial H}{\partial x}$ es estrictamente positiva o*

estrictamente negativa en todo U*.*

Notación 3.2.6. *A lo largo de este capítulo* $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *será una aplicación diferenciable tal que* $\mathrm{Spec}(f) \cap \{0\} = \emptyset$*. Bajo estas condiciones, dado un punto* $p \in \mathbb{R}^2$ *y un entero positivo* n*, utilizaremos la notación* $G_p^n := G_{D_p(f^n)}$*.*

Lema 3.2.7. *Tenemos que*

(1) si A *y* B *son dos matrices no singulares* 2×2 *tales que* $G_A(\mathbb{R}) \cup G_B(\mathbb{R}) \subset]0, \pi[$ *(resp.* $G_A(\mathbb{R}) \cup G_B(\mathbb{R}) \subset]\pi, 2\pi[$*) entonces,*

$$G_{AB}(\mathbb{R}) \subset]0, 2\pi[\qquad (\textit{resp.}\ \ G_{AB}(\mathbb{R}) \subset]2\pi, 4\pi[);$$

(2) si U *es un subconjunto abierto y conexo de* $\mathbb{R}^2$*, y si* $f : U^2 \to \mathbb{R}^2$ *es una aplicación diferenciable tal que* $\mathrm{Spec}(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$*, entonces o bien* $\{G_p^1(\mathbb{R}) : p \in U\} \subset]0, \pi[$ *o bien* $\{G_p^1(\mathbb{R}) : p \in U\} \subset]\pi, 2\pi[$*.*

Además, o bien $\{G_p^2(\mathbb{R}) : p \in U\} \subset]0, 2\pi[$ *o bien* $\{G_p^2(\mathbb{R}) : p \in U\} \subset]2\pi, 4\pi[$*.*

Demostración. La afirmación (1) es el resultado de componer G_A con G_B.

La afirmación (2) se sigue inmediatamente del Lema 3.2.2 y el Corolario 3.2.5 ya que en este caso $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ es siempre positiva o negativa para todo punto $p \in \mathbb{R}^2$. □

Pese a su corta demostración, el siguiente teorema es uno de los resultados más importantes de este capítulo. Afirma que una aplicación diferenciable del plano que fije el origen y sin valores propios reales no tiene órbitas periódicas de período 2 y el punto fijo es único. Esto nos permitirá en el Capítulo 4 suprimir la condición de que la aplicación conserve la orientación.

Teorema 3.2.8. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación diferenciable tal que* $\mathrm{Spec}(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. *Entonces* $\#\,\mathrm{Fix}(f^2) \leq 1$.

Demostración. Denotaremos $f = (f_1, f_2)$. Como $\mathrm{Spec}(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, tenemos que f es no singular, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable y además

$$a_{21}(p) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(p)$$

no se anula en ningún punto $p \in \mathbb{R}^2$. Usando el Lema 3.2.4, $a_{21}(p)$ tiene signo constante en todo $\mathbb{R}^2$. Usando el Lema 3.2.7 y el Lema 3.2.2 obtenemos que $\mathrm{Spec}(f^2) \cap [0, \infty[= \emptyset$. Por lo tanto, podemos concluir por el Corolario 3.1.2, que f^2 tiene a lo sumo un punto fijo. □

Ejemplo 3.2.9. *Dados* $\alpha \geq 0$ *y* $\beta > 0$, *definimos el sistema*

generado por:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha x - \beta y)(1 + x^2 + y^2) \\ y_1 &= (\beta x + \alpha y)(1 + x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Los valores propios asociados a la matriz de la linealización del sistema son:

$$\alpha(1 + 2r^2) \pm \sqrt{(\alpha^2 - 3\beta^2)r^4 - 4\beta^2 r^2 - \beta^2}$$

Por lo tanto, si $\alpha^2 < 3\beta^2$, el discriminante es negativo y los valores propios no son reales. Esto implica por el Teorema 3.2.8 que la aplicación no tiene órbitas $2-$periódicas.

No obstante, cabe destacar que existen órbitas periódicas de períodos diferentes a 2 para algunos valores de los parámetros como veremos a continuación:

Si cambiamos a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,(r + r^3) \\ \theta_1 &= \theta + \arctan(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\mu = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$, tenemos un círculo invariante $r^2 = \frac{1-\mu}{\mu}$.

La aplicación restringida al círculo es una rotación con número de rotación $\theta_0 = \frac{1}{2\pi}\arctan(\alpha, \beta)$. Por lo tanto, ten-

drá órbitas periódicas de periodos arbitrarios mayores o iguales que 3 en el caso de que θ_0 sea racional.

3.2.3. Aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ con valores propios reales

Ya hemos visto en el apartado anterior que el producto de dos matrices A y B sin valores propios reales y tales que a_{11} y b_{11} tienen el mismo signo (respectivamente a_{22} y b_{22}) no tiene valores propios reales positivos. En este apartado se verá qué ocurre cuando una de las dos matrices tiene valores propios reales.

A continuación veremos un ejemplo de dos matrices A y B con los mismos valores propios. Daremos distintas configuraciones de los valores propios de la matriz producto dependiendo de cómo las multipliquemos.

Si un valor propio de ambas matrices es real, entonces la recta generada por el vector propio asociado él, dada por θ_0, es invariante tanto por Φ_A como por Φ_B. Además, $\Phi_A(\theta) = \theta_0$ o bien $\Phi_A(\theta) = \theta_0 \pm \pi$ (respectivamente $\Phi_B(\theta) = \theta_0$ o bien $\Phi_B(\theta) = \theta_0 \pm \pi$), dependiendo de si el valor propio es positivo o negativo.

Entonces, si los vectores propios asociados a los valores propios reales de A y B están sobre los ejes (es decir, $\theta_0 = 0$ o bien $\theta_0 = \pm\pi$) se anularán simultáneamente tanto Φ_A como Φ_B, es decir el producto AB vuelve a tener valores propios reales

positivos. Es precisamente lo que evitaremos con la siguiente construcción.

Sean A y B las matrices:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Ambas matrices tienen los mismos valores propios λ_1 y λ_2, pero la segunda admite como vectores propios $(1, 1)$ y $(1, -1)$, que ya no están en los ejes. Veamos como influye esto en el producto.

La composición de A consigo misma es una matriz con valores propios reales y positivos mientras que la composición de A con B es la matriz:

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2) & \frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2) \\ \frac{1}{2}\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2) & \frac{1}{2}\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Más concretamente, si los valores propios son reales, por ejemplo $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$, la matriz AB es de la forma:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Sus valores propios son $\frac{1}{4}\left(1 \pm 3i\sqrt{7}\right)$, que ya no son reales como lo son los de la matriz AA o la matriz BB.

En esta sección generalizaremos el Teorema 3.2.8 permitiendo valores propios reales dobles pero exigiendo, ahora sí, que la aplicación sea de clase C^1.

Lema 3.2.10. *Dadas dos matrices A y B con valores propios dobles, λ_A y λ_B respectivamente, si AB tiene valores propios dobles, se verifica que:*

$$|\lambda_{AB}| = |\lambda_A|\,|\lambda_B|$$

Demostración. Supongamos que existan dos vectores propios, v_{λ_A} y v_{λ_B} asociados a λ_A y λ_B, respectivamente, que sean independientes. Tomando el sistema de referencia formado por ellos, las matrices A y B se pueden reducir a la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_A & 0 \\ a_{21} & \lambda_A \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_B & b_{12} \\ 0 & \lambda_B \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Los valores propios de la matriz producto son

$$\frac{1}{2}\left(a_{21}b_{12} + 2\lambda_A\lambda_B \pm \sqrt{a_{21}b_{12}(a_{21}b_{12} + 4\lambda_A\lambda_B)}\right) \tag{3.7}$$

Como AB tiene un valor propio real doble, el discriminante se debe anular. Por lo tanto o $a_{21} = 0$ o $b_{12} = 0$ o bien

$a_{21}b_{12} + 4\lambda_A\lambda_B = 0$. En los dos primeros casos una de las matrices es diagonal y el enunciado es evidente. Si por el contrario $a_{21}b_{12} = -4\lambda_A\lambda_B$, por sustitución directa en (3.7) obtenemos que:

$$\lambda_{AB} = -\lambda_A\lambda_B$$

Supongamos ahora que no existen dos vectores propios v_{λ_A} y v_{λ_B} independientes. Tomando como base una formada por v_{λ_A} y otro vector independiente arbitrario, las dos matrices A y B serán triangulares inferiores por lo que:

$$\lambda_{AB} = \lambda_A\lambda_B$$

y con esto se acabaría la prueba. □

Al subespacio invariante generado por todos los vectores propios asociados a λ, valor propio de una matriz A, lo denotaremos V_λ. Obsérvese que:

(i) Si λ es real simple, entonces $\dim(V_\lambda) = 1$ y la matriz A se puede expresar como $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donde μ es el otro valor propio simple de la matriz.

(ii) Si λ es un valor propio real doble podemos obtener que $\dim(V_\lambda) = 1$ o bien que $\dim(V_\lambda) = 2$.

En el primer caso la matriz se puede expresar caso como

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & \mu \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$ real.

En el segundo caso como $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, si $\dim(V_\lambda) = 1$ la aplicación lineal dada por A no es una homotecia.

Lema 3.2.11. *Supongamos que la matriz A tiene un valor propio real doble no nulo; entonces $G_A(\mathbb{R})$ está contenida exactamente en uno de los siguientes intervalos:*

$$[0, \pi[,]0, \pi], [\pi, 2\pi[,]\pi, 2\pi].$$

Demostración. El lema se sigue de la siguiente afirmación:

(1) La gráfica de $G_A(\theta)$ intersecta a lo sumo una de las siguientes rectas: $\mathbb{R}\times\{0\}$, $\mathbb{R}\times\{\pi\}$, $\mathbb{R}\times\{2\pi\}$ y no puede cruzar ninguna.

De hecho, supongamos por contradicción que la gráfica de G_A cruza la recta $\mathbb{R} \times \{0\}$ por el punto $(\theta_0, 0)$. Como G_A es una aplicación acotada y 2π-periódica la gráfica de G_A debe cruzar la recta $\mathbb{R} \times \{0\}$ en todo punto de la forma $\theta_0 + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. Asimismo, G_A debe cruzar la recta $\mathbb{R} \times \{0\}$ en algún punto $(\theta_1, 0)$ con $\theta_0 < \theta_1 < \theta_0 + 2\pi$. Lo que nos lleva a una contradicción porque A no tiene dos valores propios reales

diferentes. De una manera similar obtenemos que G_A tampoco puede cruzar las otras dos rectas. □

Y con estos dos últimos lemas sí que estamos en condiciones de saber cuándo no existen órbitas periódicas de período 2 en el caso de que la diferencial de nuestra aplicación tenga valores propios reales dobles.

Teorema 3.2.12. *Sea* $\varepsilon > 0$ *y* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación de clase* C^1 *tal que, para todo* $p \in \mathbb{R}^2$, Df_p *no es una homotecia ni tiene valores reales simples. Si se verifica una de las dos siguientes condiciones,*

(a) $\mathrm{Spec}(f) \cap (\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} \cup \{0\}) = \emptyset$,

(b) $\mathrm{Spec}(f) \cap \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1 + \varepsilon\} = \emptyset$,

entonces $\#\,\mathrm{Fix}(f^2) \leq 1$.

Demostración. Con el fin de aplicar la Proposición 3.1.2, deberemos demostrar que f^2 satisface:

$$\mathrm{Spec}(f^2) \cap [1, 1 + \varepsilon[= \emptyset. \tag{3.8}$$

Sean

$$M = \{p \in \mathbb{R}^2 : G_p^1(\mathbb{R}) \subset [0, \pi]\}, N = \{p \in \mathbb{R}^2 : G_p^1(\mathbb{R}) \subset [\pi, 2\pi]\}.$$

(1) $\mathbb{R}^2 = M \cup N$ y $M \cap N = \emptyset$.

En efecto, se sigue de los Lemas 3.2.7 y 3.2.11 que $\mathbb{R}^2 = M \cup N$ y del hecho de que Df_p no es una homotecia que $M \cap N = \{p \in \mathbb{R}^2 : G_p^1(\mathbb{R}) = \{0, \pi, 2\pi\}\} = \emptyset$.

Veamos que M y N son cerrados:

(2) M es cerrado.

Supongamos por contradicción que existen un punto $p \in N$ y una sucesión $\{p_n\}$ en M tales que $p_n \to p$. Por el Lema 3.2.11, $G_p^1(\mathbb{R}) \in [\pi, 2\pi[$ o bien $G_p^1(\mathbb{R}) \in]\pi, 2\pi]$.

Supongamos que $G_p^1(\mathbb{R}) \in [\pi, 2\pi[$. Como $G_p^1(0) \in [\pi, 2\pi[$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $G_{p_n}^1(0) \in [0, \pi]$ obtenemos que $G_p^1(0) = \pi$ y $G_{p_n}^1(0) \to \pi = G_p^1(0)$. Usando el hecho de que G_p y todas las G_{p_n} son 2π-periódicas y que f es de clase C^1, obtenemos que G_{p_n} converge uniformemente a G_p. Esto implica que $G_p(\mathbb{R}) \equiv \pi$, lo que nos lleva a una contradicción porque Df_p no es una homotecia.

Si por el contrario, $G_p^1(\mathbb{R}) \in]\pi, 2\pi]$. Como $G_p^1(0) \in]\pi, 2\pi]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $G_{p_n}^1(0) \in [0, \pi]$ obtenemos que $G_p^1(0) = 2\pi$ y $G_{p_n}^1(0) \to 2\pi = G_p^1(0)$. Y análogamente al apartado anterior obtendríamos que $G_p(\mathbb{R}) \equiv 2\pi$, lo que nos vuelve a llevar a una contradicción porque Df_p no es una homotecia.

(3) N es cerrado.

En este caso la prueba es similar a (2). No obstante, en vez de las funciones $\{G_p^1 : p \in \mathbb{R}^2\}$ aquí es conveniente considerar

las funciones $\{\widetilde{G}_p^1 : p \in \mathbb{R}^2\}$ dadas por $\widetilde{G}_p^1 = G_p^1$ si $p \in M$, y $\widetilde{G}_p^1 = G_p^1 - 2\pi$ si $p \in N$. Si en la definición de Φ_A en el comienzo de este capítulo hubiésemos tomado $\Phi_A(0) \in [-\pi, \pi[$, en vez de $\Phi_A(0) \in [0, 2\pi[$, podríamos obtener las funciones $\widetilde{G}_p^1$ en vez de las funciones G_p^1. Obtendríamos $M = \{p \in \mathbb{R}^2 : \widetilde{G}_p^1(\mathbb{R}) \subset [0, \pi]\}$ y $N = \{p \in \mathbb{R}^2 : \widetilde{G}_p^1(\mathbb{R}) \subset [-\pi, 0]\}$. Entonces la prueba del apartado (3) se consigue de forma similar al apartado (2).

Como $\mathbb{R}^2$ es conexo, tenemos que o $\mathbb{R}^2 = M$ o bien $\mathbb{R}^2 = N$. Distingamos los dos casos:

(4) Caso I: $\mathbb{R}^2 = M$.

Sea $p \in \mathbb{R}^2 = M$, en este caso tanto $G_p^1(\mathbb{R})$ como $G_{f(p)}^1(\mathbb{R})$ están incluidos en el intervalo $[0, \pi]$.

Distinguiremos a su vez otros dos casos:

(i) Si $\text{Spec}\,(Df_p) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ o bien $\text{Spec}\,(Df_{f(p)}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, entonces por el Lema 3.2.2 obtenemos que $G_p^1(\mathbb{R}) \subset]0, \pi[$ o bien $G_{f(p)}^1(\mathbb{R}) \subset]0, \pi[$. En ambos casos $G_p^2(\mathbb{R}) \subset]0, 2\pi[$ lo que implica que Df_p^2 no tiene valores propios reales positivos, es decir que $\text{Spec}\,(Df_p^2) \cap [0, \infty[= \emptyset$.

(ii) Supongamos que tanto Df_p como $Df_{f(p)}$ tienen valores propios reales (en este caso dobles no nulos, por hipótesis) λ_p y $\lambda_{f(p)}$, respectivamente. Por el Lema 3.2.11, tanto G_p^1 como $G_{f(p)}^1$ están contenidos bien en $[0, \pi[$ o bien en $]0, \pi]$.

Lo que significa que $G_p^2 \subset [0, 2\pi[$ o bien $G_p^2 \subset]0, 2\pi]$ o bien $G_p^2 \subset]0, 2\pi[$. Veamos que en cualquiera de los tres casos se verifica la expresión (3.8):

Si $G_p^2 \subset]0, 2\pi[$ entonces $\mathrm{Spec}\,(Df_p^2) \cap [0, \infty[= \emptyset$.

Si $G_p^2 \subset [0, 2\pi[$, deberá existir algún $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $G_p^2(\theta) = 0$. Como $G_p^1(\mathbb{R}) \cup G_{f(p)}^1(\mathbb{R}) \subset [0, \pi]$, entonces $G_p^1(\theta) = 0$ y $G_{f(p)}^1(\theta) = 0$. Por lo tanto, la recta $x = \cos(\theta), y = \sin(\theta)$ es invariante tanto para Df_p como para $Df_{f(p)}$ y además es la única puesto que f no es una homotecia. Luego $|\lambda_{f^2(p)}| = |\lambda_p||\lambda_{f(p)}|$.

Supongamos ahora que para algún $\theta \in \mathbb{R}$, $G_p^2(\theta) = 2\pi$, entonces $G_p^1(\theta) = \pi$ y $G_{f(p)}^1(\theta) = \pi$. Análogamente al caso anterior la recta $x = \cos(\theta), y = \sin(\theta)$ es invariante tanto para Df_p como para $Df_{f(p)}$ y $|\lambda_{f^2(p)}| = |\lambda_p||\lambda_{f(p)}|$.

Con todo esto, si se verifica la condición (a) de las hipótesis $|\lambda_p| < 1$ y $\left|\lambda_{f(p)}\right| < 1$ por lo que $|\lambda_{f^2(p)}| < 1$. Por otro lado, si se verifica la condición (b) de las hipótesis $|\lambda_p| > 1 + \varepsilon$ y $\left|\lambda_{f(p)}\right| > 1 + \varepsilon$ por lo que $\mathrm{Spec}(Df_p^2) \cap [1, 1 + \varepsilon[= \emptyset$.

Por lo tanto, si $\mathbb{R}^2 = M \quad \mathrm{Spec}(Df_p^2) \cap [1, 1 + \varepsilon[= \emptyset$ y la condición (3.8) se satisface. Veamos ahora el otro caso:

(5) Caso II: $\mathbb{R}^2 = N$.

Sea ahora $p \in \mathbb{R}^2 = N$, en este caso tanto $G_p^1(\mathbb{R})$ como $G_{f(p)}^1(\mathbb{R})$ están incluidos en el intervalo $[\pi, 2\pi]$, por lo que

$G_p^2(\mathbb{R}) \subset [2\pi, 4\pi]$. Análogamente al apartado (4), si una de las dos matrices Df_p o $Df_{f(p)}$ tiene un valor propio imaginario, entonces $G_p^2(\mathbb{R}) \subset]2\pi, 4\pi[$ lo que implica que $\text{Spec}(Df_p^2) \cap [0, \infty[= \emptyset$. Si por el contrario, las dos tienen valores propios reales dobles, entonces la matriz producto no tiene valores propios reales positivos o bien tiene un valor propio real doble. Aplicando al segundo caso el Lema 3.2.10 y sumándole las hipótesis (a) o (b) del Teorema volvemos a obtener que si $\mathbb{R}^2 = N$, entonces $\text{Spec}(Df_p^2) \cap [1, 1+\varepsilon[= \emptyset$ y la condición (3.8) se vuelve a satisfacer. □

3.3. Aplicación polinomial

En esta sección analizaremos el caso en el que la aplicación sea polinomial. Estudiando así los diferentes casos en los que puedan aparecer órbitas periódicas de período dos.

3.3.1. Polinomios de segundo grado

Comenzaremos con una aplicación polinomial de grado dos. Las propiedades que veremos a continuación indican que las aplicaciones estrictamente cuadráticas tienen valores propios reales y por tanto no podemos aplicar los resultados básicos de este trabajo.

Consideremos la aplicación f como un polinomio de segundo grado:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ f_2(x,y) &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

La matriz diferencial es:

$$\begin{pmatrix} a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y & a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y \\ b_{10} + 2b_{20}x + b_{11}y & b_{01} + b_{11}x + 2b_{02}y \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Denotaremos por $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, con α y β reales los valores propios de la matriz (3.10).

Proposición 3.3.1. *No existen difeomorfismos estrictamente cuadráticos verificando las hipótesis del Teorema 3.2.8.*

Demostración. Para que no existan valores propios reales los elementos de la matriz derivada fuera de la diagonal no se pueden anular en ningún punto. Pero como son expresiones lineales, necesariamente tienen que ser constantes. Por ello:

$$a_{11} = a_{02} = b_{20} = b_{11} = 0$$

Los valores propios en este caso son:

$$\frac{1}{2}\left(a_{10} + b_{01} + 2a_{20}x + 2b_{02}y \pm \sqrt{4a_{01}b_{10} + (a_{10} - b_{01} + 2a_{20}x - 2b_{02}y)^2}\right)$$

Con el mismo razonamiento anterior, si el discriminante no ha

de ser positivo:

$$a_{20} = b_{02} = 0$$

Es decir, la aplicación es lineal. □

3.3.2. Ejemplos con polinomios cúbicos

A diferencia de las aplicaciones polinomiales cuadráticas, encontramos con cierta facilidad ejemplos de funciones verificando los resultados principales de este capítulo.

Comenzamos con unos casos sencillos en los que los valores propios nunca son reales y, por tanto, aplicando el Teorema 3.2.8 no existen órbitas periódicas de período 2. Además, por el Corolario 3.1.2 el origen es el único punto fijo.

Ejemplo 3.3.2. *Consideremos el sistema generado por:*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x-y}{2}(2+x^2+y^2) \\ y_1 &= \frac{x+y}{2}(2+x^2+y^2) \end{aligned} \tag{3.11}$$

La matriz diferencial de la aplicación que define el sistema (3.11) es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2+3x^2-2xy+y^2) & \frac{1}{2}(-2-x^2+2xy-3y^2) \\ \frac{1}{2}(2+3x^2+2xy+y^2) & \frac{1}{2}(2+x^2+2xy+3y^2) \end{pmatrix}$$

que tiene dos valores propios complejos conjugados de norma estrictamente mayor que uno, cuya expresión en coordenadas polares:

$$1+r^2 \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{2+r^2(4+r^2)}.$$

Ejemplo 3.3.3. *Consideremos ahora este otro sistema:*

$$\begin{aligned} x_1 &= x-y-y^3 \\ y_1 &= x+y \end{aligned} \tag{3.12}$$

En este caso, la matriz diferencial de la aplicación que define el sistema (3.12) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1-3y^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que también tiene dos valores propios complejos conjugados de norma estrictamente mayor que uno, cuya expresión es $1 \pm i\sqrt{1+3y^2}$.

En el siguiente ejemplo la matriz tiene valores propios reales, pero todavía podremos asegurar la existencia de una sola órbita 2-periódica aplicando el Teorema 3.2.12.

Ejemplo 3.3.4.

$$\begin{aligned} x_1 &= x - y + y^2 - y^3 \\ y_1 &= x + \frac{5}{3}y + y^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Los valores propios asociados a la matriz diferencial son:

$$\frac{4}{3} + y \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\sqrt{-(2-3y)^2}$$

El discriminante tiene un máximo cuando $y = \frac{2}{3}$. Para estos valores la matriz Df se reduce a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

El valor propio es 2 y el subespacio invariante asociado a él es de dimensión uno, generado por $(-1, 1)$.

3.4. Existencia de órbitas periódicas de período $n > 2$

Supongamos que los valores propios de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ no son reales. La generalización del Teorema 3.2.8 al caso de órbitas de período n, con $n > 2$ necesita un estudio detallado de la diferencia angular $\theta_1 - \theta$. Por lo tanto, miraremos los valores extremos de la función $G_A(\theta)$.

Introduciremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_{11}^2 + a_{21}^2 \\ r_{22} &= a_{12}^2 + a_{22}^2 \\ r_{12} &= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \end{aligned}$$

Proposición 3.4.1. *Los valores máximo y mínimo de la función $G_A(\theta)$ son:*

$$\arctan\left(\frac{\mathrm{tr(A)}(a_{12} - a_{21}) \pm 2\sqrt{\det(\mathrm{A})(r_{11} + r_{22} - 2\det(\mathrm{A}))}}{(a_{12} - a_{21})^2 - 4\det(\mathrm{A})}\right) \tag{3.15}$$

Demostración. La función $G_A(\theta)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} G_A(\theta) &= -\theta + \theta_1 \\ &= -\theta + \arctan \frac{a_{21}\cos(\theta) + a_{22}\sin(\theta)}{a_{11}\cos(\theta) + a_{12}\sin(\theta)} \\ &= -\theta + \arctan \frac{a_{21}(1+\cos(2\theta)) + a_{22}\sin(2\theta)}{a_{11}(1+\cos(2\theta)) + a_{12}\sin(2\theta)} \end{aligned}$$

La derivada de $G_A(\theta)$ es:

$$-1 + \frac{\det(\mathrm{A})}{r_{11}\cos^2(\theta) + r_{22}\sin^2(\theta) + 2r_{12}\cos(\theta)\sin(\theta)}$$

Esta derivada se anula si y solo si:

$$(r_{11} - r_{22})\cos(2\theta) + 2r_{12}\sin(2\theta) = 2\det(\mathrm{A}) - r_{11} - r_{22} \quad (3.16)$$

Se sigue de la ecuación que:

$$\cos(2\theta) = \frac{r_{22} - r_{11}}{r_{11} + r_{22} + 2\det(\mathrm{A})} \pm \frac{4r_{12}}{r_{11} + r_{22} + 2\det(\mathrm{A})} \sqrt{\frac{\det(\mathrm{A})}{r_{11} + r_{22} - 2\det(\mathrm{A})}}$$

El valor de $\sin(2\theta)$ se puede obtener a partir de (3.16) y $\cos(2\theta)$.

La segunda derivada de $G_A(\theta)$ con los valores del $\cos(2\theta)$ y del $\sin(2\theta)$ verificando la expresión (3.16) es igual a:

$$\mp \frac{2\sqrt{\det(\mathrm{A})(r_{11} + r_{22} - 2\det(\mathrm{A}))}}{\det(\mathrm{A})}$$

Como A es no singular, esta segunda derivada se anula

si y solo si $r_{11} + r_{22} = 2\det(\mathrm{A})$ o equivalentemente si $(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{21} + a_{12})^2 = 0$. En este caso, A estaría expresada en la forma normal y $G_A(\theta)$ sería constante, tomando valores de la expresión (3.15), ahora reducido a un único valor.

Si la segunda derivada de G_A no se anula, cada par de valores del $\sin(2\theta)$ y del $\cos(2\theta)$ verificando la expresión (3.16) corresponden a un punto donde G_A alcanza el valor mínimo o máximo. Supongamos que es así, entonces por sustitución directa de θ_1 obtenemos que

$$\tan\theta_1 = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \mp \sqrt{\det(\mathrm{A})(r_{11} + r_{22} - 2\det(\mathrm{A}))}}{a_{11}^2 + a_{12}^2 - \det(\mathrm{A})}$$

Aplicando A^{-1} conseguimos el valor de $\tan\theta$ donde $G(\theta)$ tiene un extremo:

$$\tan\theta = \frac{-r_{12} \pm \sqrt{\det(\mathrm{A})(r_{11} + r_{22} - 2\det(\mathrm{A}))}}{r_{22} - \det(\mathrm{A})}$$

Entonces, la tangente de $\theta_1 - \theta$ es

$$\tan(\theta_1 - \theta) = \left(\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{A})(a_{12} - a_{21}) \mp 2\sqrt{\det(\mathrm{A})(r_{11} + r_{22} - 2\det(\mathrm{A}))}}{(a_{12} - a_{21})^2 - 4\det(\mathrm{A})} \right)$$

que es lo que queríamos probar. □

Proposición 3.4.2. *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach real y $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una aplicación lineal acotada tal que $I - A^k$ es biyectiva para todo $1 \leq k \leq n$. Sea $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y $Df(p)$ la derivada de Frechet de f en el*

punto $p \in \mathbb{X}$.

Si $\|A - Df(p)\| < a$, *para todo* $p \in \mathbb{X}$ *y* $a > 0$ *suficientemente pequeño, entonces* f *no tiene órbitas periódicas de período* k *con* $1 \leq k \leq n$.

Demostración. En primer lugar probaremos por inducción sobre k que para cada $1 \leq k \leq n$ existe un $a_k > 0$ tal que $\left\|f^k(x) - A^k x\right\| \leq a_k \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

Sea $k = 1$, como $\|A - Df(p)\| < a$, para todo $p \in \mathbb{X}$, por el Teorema del Valor Medio $\|f(x) - A(x)\| \leq a \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Consideraremos $a_1 = a$. Supongamos ahora que para $k \geq 1$ existe un $a_k > 0$ tal que $\left\|f^k(x) - A^k(x)\right\| \leq a_k \|x\|$. Entonces, $\left\|f^{k+1}(x) - A^{k+1}(x)\right\| \leq a_{k+1} \|x\|$ donde $a_{k+1} \leq a \left\|A^k\right\| + aa_k + \|A\| a_k$.

Por otro lado, para cada $1 \leq k \leq n$ existen números positivos b_k tales que $\left\|(I - A^k)(x)\right\| \geq b_k \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Entonces ya podemos probar que para $a > 0$ suficientemente pequeño y para cada $1 \leq k \leq n$ existen $a_k > 0$ suficientemente pequeños tales que para cada $x \neq 0$ se verifica que

$$\left\|x - f^k(x)\right\| = \left\|x - A^k(x) + A^k(x) - f^k(x)\right\| \geq b_k \|x\| - a_k \|x\| .$$

Esto quiere decir que si $b_k > a_k$ y $x \neq 0$, entonces $x \neq f^k(x)$ y por lo tanto f^k no tiene puntos fijos diferentes del 0. □

En nuestro contexto,

Corolario 3.4.3. *Sea f una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y $D_p f$ es uniformemente cercana a una matriz constante A. Si*

$$\mathrm{Spec}(A),\ \mathrm{Spec}(A^2), \ldots, \mathrm{Spec}(A^n)$$

son disjuntos de $[1, 1+\varepsilon[$, entonces f no tiene ninguna órbita periódica de período k, para $1 \leq k \leq n$.

Un ejemplo sencillo que ilustra la proposición anterior es el siguiente:

Ejemplo 3.4.4.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x - 3y \\ y_1 &= -3x + y \end{aligned} \tag{3.17}$$

Los valores propios asociados a la matriz de la linealización del sistema son:

$$\frac{1}{2}\left(3 \pm \imath\sqrt{35}\right)$$

La expresión de la Proposición 3.4.1, nos da el siguiente intervalo de variación:

$$\theta_1 - \theta \in [5{,}02641, 5{,}3256]$$

Este intervalo corresponde al los valores iniciales:

$$\theta = 1{,}41379, \quad \theta = 2{,}83495$$

Iterando sucesivamente se tiene que la diferencia $\theta_n - \theta$ varía dentro del intervalo:

$$[3{,}7696, 4{,}3681],\ [2{,}5128, 3{,}4106],\ [1{,}2560, 2{,}4531],\ [-0{,}00070282, 1{,}4955]$$

En la quinta iteración, la correspondiente aplicación puede tener un valor real positivo.

Consideremos ahora la aplicación tal que su espectro está cerca de A en todo $\mathbb{R}^2$. En este caso:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x - 3y + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ y_1 &= -3x + y + \frac{\varepsilon y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

La Propiedad 3.4.1 muestra que si ε es suficientemente pequeño la única órbita periódica de período menor que cuatro es la órbita del origen.

En esta sección hemos dado condiciones sobre el espectro de una aplicación de clase C^1 para impedir la existencia de órbitas periódicas. Esto nos lleva a hacernos otra vez la pregunta:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 tal que

$f(0) = 0$, $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$, el infinito es repulsor y no existen órbitas periódicas de periodo $n > 1$. ¿Es el origen un atractor global del sistema definido por f?

La respuesta es negativa. En la Sección 4.4 probaremos la existencia de un difeomorfismo para el que el origen es el único punto fijo, el infinito es repulsor, no tiene órbitas periódicas de ningún período y además el origen es asintóticamente estable pero no es un atractor global.

Capítulo 4

Aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ con un punto de atracción global

En el Capítulo 3 se dieron condiciones sobre el espectro de aplicaciones de clase C^1 o simplemente diferenciables que garantizan la no existencia de órbitas periódicas del sistema discreto que define. Pero, no obstante, el ejemplo de la Sección 4.4 muestra que esta condición sumada a las originales de la Conjetura DMY y a que el infinito sea un repulsor, tampoco son suficientes para garantizar la existencia de un atractor global.

En este capítulo probaremos que, si el origen es el único punto fijo, las condiciones anteriores, más la existencia de una determinada curva invariante, serán suficientes para probar la existencia de un atractor global. Además veremos casos en los que existirá incluso con independencia de la diferenciabilidad de la aplicación (Teoremas 4.3.13 y 4.3.19) y otros incluso con independencia de la imposición sobre existencia de órbitas

periódicas (Teorema 4.3.16).

La técnica que se usará es la introducción de la hipótesis de existencia una curva invariante por la aplicación, sin autointersecciones y que una el origen con el infinito. Con esta condición, (ver Lema 4.3.9) si el origen es el único punto fijo, la aplicación restringida al complementario de la curva invariante será una aplicación sin puntos fijos definida sobre un conjunto homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Esto permitirá hacer uso de algunos resultados sobre homomorfismos del plano y llevar el estudio de la dinámica a la curva invariante, reduciendo así la dimensión con la que trabajar.

La dinámica local de una aplicación del plano alrededor de un punto fijo ha sido desarrollada por numerosos autores, de los que destacamos P. Le Calvez y F. Le Roux para homeomorfismos del plano que preservan la orientación (ver [35],[36], [40] y [41], entre otros) y F. R. Ruiz del Portal (ver [53] y [54], entre otros) para aquellos que la invierten.

En la Sección 4.1 presentaremos algunos resultados publicados por M. Murthy en [44]. En ese trabajo prueba que un embebimiento del plano que preserva la orientación sin puntos fijos no tiene órbitas periódicas. Probaremos además en esta sección que tampoco tiene puntos recurrentes. Este resultado es el que hará posible centrar el estudio de este capítulo en la curva invariante.

Como buscamos un atractor global, lo primero que se estudiará es la unicidad del punto fijo y después la dinámica del sistema alrededor de él. En la Sección 4.2 daremos condiciones sobre el espectro de una aplicación diferenciable para que sea un embebimiento con un único punto fijo y para que éste sea atractor local. Además estas condiciones sobre el espectro son computables, lo que hace mucho más simple la comprobación de las condiciones de los resultados de esta memoria.

En la Sección 4.3 justificaremos la introducción de la existencia de la curva invariante (rayo invariante por el embebimiento f) y probaremos los resultados más relevantes de esta memoria tanto para aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ que preservan la orientación como para las que no necesariamente la conservan. Usaremos los resultados de la Sección 4.1 en el caso de que f preserve la orientación y los del Capítulo 3 para cuando no lo haga. De esta manera controlaremos el conjunto $\Omega(f)$ y el $\omega-$límite de todo punto del plano. El mejor de los casos para la obtención de la atracción global del punto fijo es que $\Omega(f) = \{0\}$ y $\omega(p) = \{0\}$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$.

Además incorporaremos hipótesis adicionales para garantizar que la aplicación sea disipativa para establecer la existencia del $\omega-$límite de todo punto del plano. No obstante, la Figura 1.1 muestra el flujo de un campo vectorial. A tiempo fijo $t = 0$ el flujo se puede ver como un difeomorfismo $\mathbb{R}^2$. Este ejemplo

tiene un único punto fijo, es disipativo y con espectro contenido en la bola unidad, con un rayo $f-$invariante pero el origen no es un atractor global. Este hecho se debe a que el origen no es estable, por lo que surgirá la necesidad de incorporar la estabilidad local a las hipótesis originales. De esta manera este capítulo estudiará el siguiente problema:

Sea $f \in Emb_+(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$ y además se verifica: 0 es un atractor local, existe un rayo $f-$invariante y f es disipativa. ¿Es el origen un atractor global?.

O en el caso de que la aplicación no preserve necesariamente la orientación:

Sea $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(0) = 0$ y además se verifica: $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$, 0 es un atractor local, existe un rayo $f-$invariante y f es disipativa. ¿Es el origen un atractor global?.

En la Sección 4.4 veremos que la existencia de la curva invariante es fundamental y va más allá de impedir la existencia de órbitas periódica. Mostraremos un ejemplo con el que se prueba la existencia de un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva la orientación y para el que el origen no es un atractor global. Dicho homeomorfismo es disipativo, $\mathrm{Per}(f) = \{0\}$ y 0 es un atractor local. Además veremos que no existe ningún rayo invariante por el homeomorfismo h.

4.1. Embebimientos del plano sin puntos fijos

En esta sección se recogerán los resultados que utilizaremos en las pruebas de este capítulo sobre embebimientos del plano que preservan la orientación, publicados en [44] por P. Murthy. Existen varios resultados anteriores para homeomorfismos, como por ejemplo [23] y [24] de J. Franks o [5] y [6] de M. Brown. En este sentido cabe destacar que lo que hacen básicamente todos estos autores es probar que si el conjunto de puntos recurrentes por cadenas es distinto del vacío entonces también lo es el conjunto de órbitas periódicas. Por consiguiente, tanto en homeomorfismos como en embebimientos, siempre que se preserve la orientación, únicamente nos tenemos que preocupar de las órbitas periódicas para entender la dinámica del sistema.

Teorema 4.1.1 (Murthy [44], 1998)**.** *Sea $f \in Emb_+(\mathbb{R}^2)$. Si f tiene un punto periódico p, entonces el conjunto* $\mathrm{Fix}(f)$ *es diferente del vacío.*

Teorema 4.1.2 (Murthy [44], 1998)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$ y $g : U \to U$ una aplicación continua e inyectiva que preserva la orientación. Si $CR(g) \neq \emptyset$, entonces* $\mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$.

Los siguientes resultados son un caso particular del Teorema 4.1.2 y es el que realmente se usará a lo largo de este capítulo. La prueba es independiente de la de P. Murthy, más simple y con otras técnicas (ver por ejemplo [23] de J. Franks).

Proposición 4.1.3. *Sea $f \in Emb_+(\mathbb{R}^2)$. Si el conjunto $\Omega(f)$ es distinto del vacío entonces también lo es* $\mathrm{Fix}(f)$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Fix}(f)$ fuera vacío. Entonces por el Teorema 4.1.1, $\Omega(f)$ tampoco contiene ningún punto periódico.

Sea $p \in \Omega(f)$, entonces para todo entorno U de p existe un entero $n > 0$ y un punto $q \in U$ tales que $f^n(q) \in U$. Como f es un homomorfismo local podemos considerar U como un disco suficientemente pequeño tal que $U \cap f^k(U) = \emptyset$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ con $n \geq 2$ y $q \in U \cap f^n(U)$.

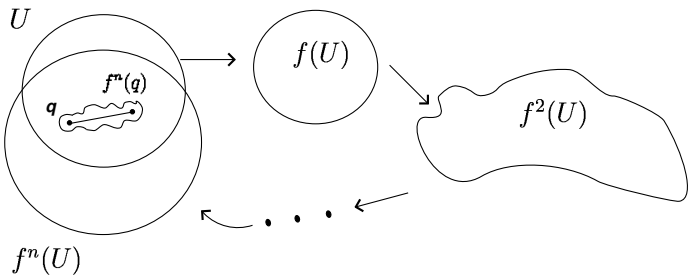

Figura 4.1: Construcción de abiertos U.

Sea Γ una poligonal contenida en U que une q con $f^n(q)$ y V un entorno tubular de Γ suficientemente pequeño tal que

$V \subset U$ (ver Figura 4.1), entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva la orientación soportado en V (es decir, que $h|_{\mathbb{R}^2 \setminus V}$ coincide con la aplicación identidad) y tal que $h(f^n(q)) = q$.

Sea $g = f \circ h$, en este caso $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un embebimiento que preserva la orientación tal que $g(f^n(q)) = f(q)$. Entonces $f^n(q)$ es un punto periódico de g de período n porque $U \cap f^k(U) = \emptyset$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ y g coincide con f fuera de U. En efecto,

$$g^n(f^n(q)) = g^{n-1}(g(f^n(p))) = g^{n-1}(f(p)) = [g^{n-2} \circ (f \circ h)](f(p)) =$$

$$= g^{n-2}(f^2(p)) = ... = g(f^{n-1}(q)) = f \circ h(f^{n-1}(q)) = f^n(q).$$

Se sigue del Teorema 4.1.1 que g tiene un punto fijo q_0. Ciertamente $q_0 \notin U$, por tanto $q_0 \in \mathrm{Fix}(f)$, lo que contradice las hipótesis iniciales. □

Corolario 4.1.4. *Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y $g : U \to U$ es un embebimiento que preserva la orientación con $\Omega(g) \neq \emptyset$, entonces g tiene un punto fijo.*

Demostración. Dado que U es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, existe un homeomorfismo $H : U \to \mathbb{R}^2$. Sea $f = H \circ g \circ H^{-1}$, entonces $f \in \mathrm{Emb}_+(\mathbb{R}^2)$ es un embebimiento conjugado a g. Por lo tanto, si $\Omega(g) \neq \emptyset$ entonces $\Omega(f) \neq \emptyset$ y podemos aplicar la Proposición 4.1.3 a f. De esta manera $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ y en consecuencia $\mathrm{Fix}(g) \neq \emptyset$, como queríamos probar. □

4.2. Existencia de un único punto fijo y estabilidad local

En el contexto de homeomorfismos locales o de embebimientos, el primer paso para obtener un atractor global es garantizar tanto la inyectividad de la aplicación como la unicidad del punto fijo.

Una vez más daremos condiciones sobre el espectro de una aplicación diferenciable, esta vez para que ésta sea un embebimiento con un único punto fijo. Además de un primer resultado sobre atracción local.

El siguiente teorema nos muestra el escenario donde se desarrollarán los resultados de las Sección 4.3. Cuando necesitemos únicamente la unicidad de punto fijo, supondremos que se verifica el apartado (a) del Teorema 4.2.1. Si además necesitamos la estabilidad local, supondremos el apartado (b).

Teorema 4.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable tal que $f(0) = 0$. Se verifica que:*

(a) Si $\mathrm{Spec}(f) \cap ([1, 1+\varepsilon) \cup [0, \varepsilon)) = \emptyset$, para algún $\varepsilon > 0$, entonces f es un embebimiento con $Fix(f) = \{0\}$.

(b) Si $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1) \setminus [0, \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$, entonces f es un embebimiento con $Fix(f) = \{0\}$ y además 0 es un atractor local de f.

Demostración. El apartado (a) se sigue del Teorema 3.1.1 y del Corolario 3.1.2. El apartado (b) es una consecuencia del apartado (a) y del Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman. □

4.3. Dinámica con curva invariante

Un primer paso para la solución del problema que nos ocupa en este capítulo es la búsqueda de un atractor global del sistema, en el caso de que existiera. En este sentido, la Proposición 4.3.8 justificará la incorporación de una curva invariante en las hipótesis iniciales del Problema DMY. Dicha curva permitirá probar los principales resultados de este capítulo y de esta memoria.

Para ello necesitaremos algunos resultados (ver [31], páginas 182 y 186 para más detalles) sobre teoría de isotopía y extensión de aplicaciones. Más concretamente, dado un difeomorfismo sobre una corona circular cerrada, el Teorema 4.3.1 nos permite extenderlo a un homeomorfismo definido en el disco limitado por la corona. Después, el Teorema 4.3.2 nos permitirá suavizar dicho homeomorfismo construyendo un difeomorfismo con las mismas propiedades.

Teorema 4.3.1. *Todo difeomorfismo de S^1 se extiende a un difeomorfismo del disco D^2.*

Teorema 4.3.2. *Para $i = 1, 2$ sean W_i $n-$variedades sin borde y unión de dos subvariedades cerradas de dimensión n, M_i, N_i tales que*

$$M_i \cap N_i = \partial M_i = \partial N_i = V_i.$$

Sea $h : W_1 \to W_2$ un homeomorfismo que lleva M_1 y N_1 difeomorficamente a M_2 y N_2 respectivamente. Entonces existe un difeomorfismo $f : W_1 \to W_2$ tal que $f(M_1) = M_2$, $f(N_1) = N_2$ y $f|_{V_1} = h|_{V_1}$. Además f se puede escoger de manera que coincida con h fuera de un entorno Q de V_1 dado.

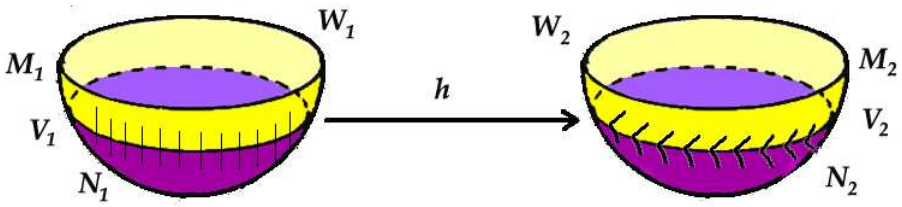

Figura 4.2: Cómo hacer suave un homeomorfismo en una frontera

En este capítulo utilizaremos una versión más débil del Teorema 4.3.2 que nos permite considerar W_i como variedad con borde en el caso de que se produzca que $V_i \cap \partial W_i = \emptyset$, para $i = 1, 2$. La prueba de este resultado es análoga a la original. Además, cogiendo con cuidado los conjuntos con los que se trabaja en [31] en la demostración del Teorema 4.3.2 se puede suponer que $f = h$ en M_1 o bien en M_2.

El siguiente resultado nos permitirá extender aplicaciones

definidas sobre la unión de dos discos con imágenes disjuntas a toda la esfera.

Teorema 4.3.3. *Sea M una $n-$variedad sin borde. Supongamos que $f_i, g_i : D^n \to M$ ($i = 1, 2$) son embebimientos tales que*

$$f_1(D^n) \cap f_2(D^n) = \emptyset = g_1(D^n) \cap g_2(D^n).$$

Si M es orientable y todas las f_i, g_i ($i = 1, 2$) preservan la orientación o todas la invierten, entonces existe un difeomorfismo $H : M \to M$ difeotópico a la identidad tal que $H \circ f_i = g_i$ ($i = 1, 2$).

También necesitaremos la definición de rayo invariante, clave para el estudio de esta memoria:

Definición 4.3.4. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua. Consideraremos un embebimiento topológico, $\gamma(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, del intervalo $[0, \infty)$. Como es habitual, identificaremos γ con $\gamma([0, \infty))$. Diremos que γ es un rayo $f-$invariante si $\gamma(0) = (0, 0)$, $f(\gamma) \subset \gamma$, y $\lim_{t\to\infty} \|\gamma(t)\| = \infty$.*

Nótese que si $n = 1$ y $\mathrm{Fix}(f) \subset \gamma$, entonces una de las consecuencias de la definición de rayo invariante es que su complementario no contiene ningún punto fijo y es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, también se podrían conseguir resultados análogos a los de este capítulo sustituyendo el rayo γ por un continuo Σ (conjunto compacto y conexo) en $\mathbb{R}^2$ con las mismas características. Ver Figura 4.3.

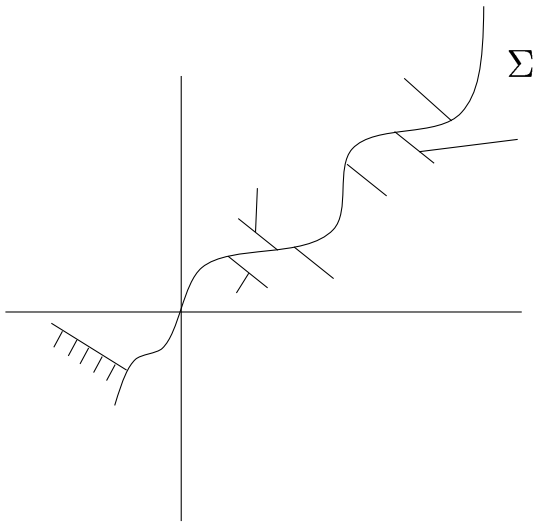

Figura 4.3: Ejemplo de generalización de rayo invariante

La siguiente proposición nos muestra que si el origen es un atractor global (es decir, asintóticamente estable y con todo el plano como región de atracción), entonces este tipo de curvas invariantes definen una foliación continua en todo el plano y de clase C^r en el complementario del origen. Para ello necesitaremos introducir los siguientes conceptos:

Definición 4.3.5. *Un conjunto compacto $W \subset \mathbb{R}^2$ es una ventana para $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ si para todo $p \in \mathbb{R}^2$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(p) \in W$.*

Definición 4.3.6. *Diremos que $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ es una aplicación disipativa si existe una ventana para f.*

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en

[43] y es la que permite encontrar compactos positivamente invariantes en espacios métricos:

Proposición 4.3.7. *Sea X un espacio métrico localmente compacto y $f : X \to f(X)$ un homeomorfismo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) f es una aplicación disipativa.

(ii) Para todo conjunto compacto $D \subset X$ existe una ventana W de f tal que $D \subset int(W)$ y además,

$$f(W) \subset W \quad y \quad \forall p \in X \; \exists \, n_0 \quad tal \; que \quad f^{n_0}(p) \in int(W).$$

(iii) Para todo conjunto compacto $D \subset X$ existe una ventana W de f tal que $D \subset int(W)$ y además,

$$f(W) \subset int(W).$$

Proposición 4.3.8. *Sea $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ un C^r-difeomorfismo, con $r \geq 1$, teniendo el 0 como atractor global. Entonces existe una C^r-foliación de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por rayos $f-$invariantes.*

Demostración. Dados $0 < r_1 < r_2$ y $r > 0$, consideraremos los conjuntos $A(r_1, r_2) = \{p \in \mathbb{R}^2 : r_1 \leq \|p\| \leq r_2\}$, $B(r) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| < r\}$ y $S(r) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| = r\}$.

Si $\Upsilon \subset \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada simple denotaremos por Υ^- (resp. Υ^+) la unión de Υ y la componente conexa acotada (resp. no acotada) de $\mathbb{R}^2 - \Upsilon$.

Como por hipótesis el origen es un atractor global, la aplicación es disipativa y, por la Proposición 4.3.7, podemos encontrar una ventana $W \subset \mathbb{R}^2$ de clase C^∞ tal que $0 \in \text{int}(W)$, $f(W) \subset \text{int}(W)$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(W) = \mathbb{R}^2$. Denotaremos la frontera de W por $C = \partial W$.

Sea $V(C)$ un entorno tubular C^∞ suficientemente pequeño de C tal que $f(V(C)) \cap V(C) = \emptyset$. Para $\varepsilon > 0$ pequeño consideraremos el embebimiento C^∞,

$$g_1 : A(2-2\varepsilon, 2+2\varepsilon) \to V(C)\,, \quad \text{con} \quad g_1(S(2)) = C.$$

Consideremos también este otro embebimiento C^∞,

$$g_2 = f \circ g_1 \circ T : A(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to V(C) \quad \text{donde} \quad T(x,y) = 2(x,y).$$

Tenemos que:

(1) Las aplicaciones $f \circ g_1$ y $g_2 \circ T^{-1}$ restringidas a $A(2-2\varepsilon, 2+2\varepsilon)$ son iguales. Ver Figura 4.4.

(2) Probaremos que existe un embebimiento C^∞, $H_0 : A(1-\varepsilon, 2+2\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ que es una extensión de ambos g_1 y g_2:

Por el Teorema 4.3.1 podemos extender $g_2|_{S(1-\varepsilon)}$ a un difeomorfismo g_2^* del disco K_1 (ver Figura 4.4). La aplicación $g_2 \sqcup g_2^*$ es un homeomorfismo $\tau : A(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cup K_1 \to f(V(C)) \cup K_2$. Luego podemos aplicar el Teorema 4.3.2 con $W_1 = A(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \sqcup K_1$, $W_2 = f(V(C)) \sqcup K_2$ y $V_1 = S(1-\varepsilon)$ para garantizar

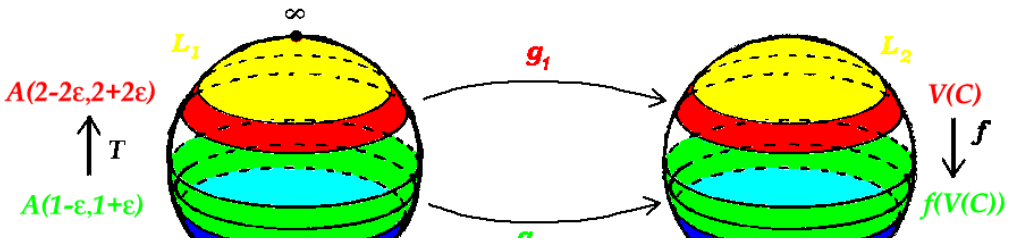

Figura 4.4: Construcción de los embebimientos

que existe un difeomorfismo $G_2 : S(1+\varepsilon)^- \to g_2(S(1+\varepsilon))^-$.

Consideremos el plano como conjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$. Entonces, análogamente al caso anterior (ver Figura 4.4), podemos aplicar los Teoremas 4.3.2 y 4.3.1 para extender g_1 a un difeomorfismo $G_1 : S(2-2\varepsilon)^+ \to g_1(S(2-2\varepsilon))^+$.

Ahora veremos que existe un difeomorfismo C^∞, $H : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ difeotópico a la identidad de $\mathbb{R}^2$, de tal manera que restringido a $S(2-2\varepsilon)^+$ y a $S(1+\varepsilon)^-$ coincide con G_1 y G_2, respectivamente. Basta considerar un difeomorfismo $h : S(2-2\varepsilon)^+ \to S(1+\varepsilon)^-$ que preserve la orientación y la aplicación identidad $id : S(2-2\varepsilon)^+ \to S(2-2\varepsilon)^+$. En efecto (ver Figure 4.5),

$$id(S(2-2\varepsilon)^+) \cap h(S(2-2\varepsilon)^+) = \emptyset = G_1(S(2-2\varepsilon)^+) \cap G_2 \circ h(S(2-2\varepsilon)^+).$$

Observar que el hecho de que todas las aplicaciones conserven o inviertan la orientación depende, por construcción,

exclusivamente de si lo hace o no el C^r- difeomorfismo f de las hipótesis del teorema.

Por lo tanto se sigue del Teorema 4.3.3 que podemos encontrar un difeomorfismo C^∞ $H : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ difeotópico a la identidad de $\mathbb{R}^2$, de tal manera que $H \circ id = G_1$ y $H \circ h = G_2 \circ h$. Por lo tanto H restringida a $S(2-2\varepsilon)^+$ coincide con G_1 y H restringida a $S(1+\varepsilon)^-$ coincide con G_2.

Lo que queríamos probar se sigue considerando H_0 como la restricción de H a $A(1-\varepsilon, 2+2\varepsilon)$.

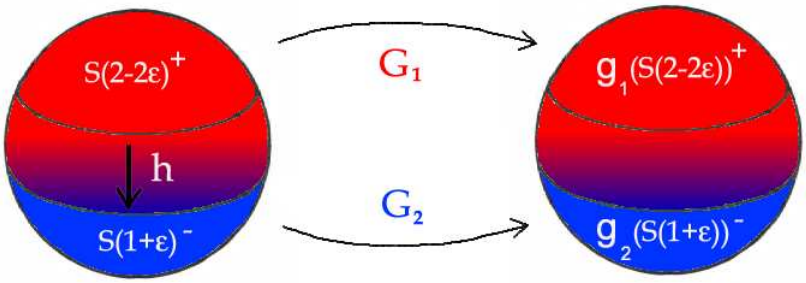

Figura 4.5: Construcción del difeomorfismo H difeotópico a la identidad

Ahora, sobre la corona $A(1-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, consideramos la foliación $\mathcal{L}_0$ cuyas hojas son los segmentos lineales $r_p = \{tp : 1-\varepsilon \leq t \leq 2+\varepsilon\}$, con $p \in S(1)$.

(3) Probaremos que si $\ell \subset A(2-2\varepsilon, 2+2\varepsilon)$ es un arco de hoja de $\mathcal{L}_0$, entonces $H(\ell)$ y $f(H(\ell))$ son arcos en la misma hoja de la foliación $H(\mathcal{L}_0)$.

En efecto, se sigue de (1) que

$$f \circ H(\ell) = f \circ g_1(\ell) = g_2 \circ T^{-1}(\ell) = H(T^{-1}(\ell)\,.$$

Lo que queríamos probar resulta de la anterior igualdad y del hecho de que ℓ y $T^{-1}(\ell)$ son arcos de la misma hoja de $\mathcal{L}_0$.

De acuerdo con (2) y (3), $\mathcal{F} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(H(\mathcal{L}_0))$ es la foliación C^∞ de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ por rayos $f-$invariantes, finalizando así la prueba de la proposición. □

Por lo tanto parece natural colocar en las hipótesis originales del Problema DMY la existencia de al menos un rayo invariante.

4.3.1. Aplicaciones que preservan la orientación

Al suponer que la aplicación preserva la orientación y la existencia de un rayo invariante probaremos el siguiente lema usando los resultados de la Sección 4.1:

Lema 4.3.9. *Sea $f \in Emb_+(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$. Si existe un rayo $f-$invariante, γ, entonces $\Omega(f) \subset \gamma$. Además $\omega(p) = \{0\}$ o bien $\omega(p) = \emptyset$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$.*

Demostración. Si 0 es el único punto fijo de f y si existe un rayo $f-$invariante, γ, entonces $f : \mathbb{R}^2 \setminus \gamma \to \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ es un embebimiento que preserva la orientación verificando (4.1).

$$\mathrm{Fix}(f|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}) = \emptyset \tag{4.1}$$

Como $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, podemos concluir que $\Omega(f_{|_{\mathbb{R}^2 \setminus \gamma}}) = \emptyset$ por la Proposición 4.1.3, y por tanto que $\Omega(f) \subset \gamma$. No obstante, $f|_\gamma : \gamma \to \gamma$ es un embebimiento uno dimensional que preserva la orientación y tiene un único punto fijo, por lo tanto el conjunto $\{q \in \gamma \ : \omega(q) = \{0\}\}$ es γ o bien $\{0\}$.

Sea $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Dado que $\Omega(f) \subset \gamma$, tenemos que $\omega(p) \subset \gamma$.

Buscamos que $\omega(p) \subseteq \{0\}$. Supongamos que no es así, entonces existe un $r \in \omega(p) \cap (\gamma \setminus \{0\})$. Por lo que existirá un entorno abierto W de r tal que $\gamma \cap W$ es un segmento embebido y $W \setminus \gamma$ es la unión de dos discos disjuntos U y V. Dado que la órbita positiva de p se acumula en r, podremos asumir que esa órbita positiva intersecta a U infinitas veces (en caso contrario consideraremos V). Pero como $\omega(r) \subseteq \{0\}$ y f es un homomorfismo en su imagen, cogiendo W (y por tanto U) suficientemente pequeño, podemos suponer que $U, f(U)$ y $f^2(U)$ son disjuntos dos a dos y por lo tanto que existe un entero positivo n, con $n > 2$, tal que para algún $s \in U$, tenemos que $f^n(s) \in U$, y además $U \cap f^\ell(U) = \emptyset$, para $\ell = 1, 2, \ldots, n-1$. Ver Figura 4.3.1.

Por teoría de isotopía, podemos encontrar un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva la orientación soportado en U (es decir, que $h|_{\mathbb{R}^2 \setminus U}$ coincide con la aplicación identi-

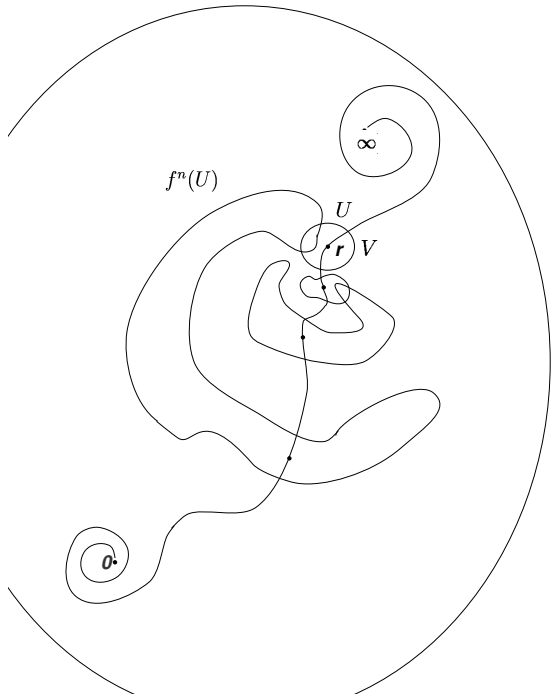

Figura 4.6: Construcción de abiertos U.

dad) y tal que $h(f^n(q)) = q$. Definimos $g = f \circ h$, entonces $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un embebimiento que preserva la orientación tal que $g(f^n(q)) = f(q)$ y que además coincide con f fuera de U.

Como $f^n(s) \in U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, $f^n(s)$ es un punto periódico de $g|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}$ de período n. Se sigue del Corolario 4.1.4 que $g|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}$ tiene un punto fijo q_0. Ciertamente $q_0 \notin U$, y por tanto $q_0 \in \mathrm{Fix}(f|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma})$ lo que contradice la condición a). Entonces $\omega(p) \subseteq \{0\}$ y hemos probado el Lema. □

Nota 4.3.10. *En el lema anterior puede ocurrir que* $\{p \in$

$\mathbb{R}^2 : \omega(p) = \{0\}\}$ *es diferente de* $\{0\}$ *y* $\mathbb{R}^2$ *incluso si* f *es un isomorfismo lineal de* $\mathbb{R}^2$. *Un ejemplo sería la aplicación* $f(x,y) = (x/2, 2y)$. *La órbita positiva del punto* (x,y) *es la sucesión* $\{(x/2^n, 2^n y)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *que converge al rayo* $f-$*invariante* γ *correspondiente al eje* $x = 0$ *sobre el que el origen es un repulsor.*

Teorema 4.3.11. *Sea* $f \in Emb^d_+(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $f(0) = 0$. *Si existe un rayo* $f-$*invariante,* γ, *y* $\mathrm{Spec}(f) \cap [1, 1+\varepsilon) = \emptyset$, *para algún* $\varepsilon > 0$, *entonces* $\Omega(f) \subset \gamma$. *Además* $\omega(p) = \{0\}$ *o bien* $\omega(p) = \emptyset$, *para todo* $p \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. $f \in \mathrm{Emb}^d_+(\mathbb{R}^2)$ con $f(0) = 0$ y $\mathrm{Spec}(f) \cap [1, 1+\varepsilon) = \emptyset$, para algún $\varepsilon > 0$ por lo tanto, por el Corolario 3.1.2 tenemos que $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$.

Además, f preserva la orientación y existe un rayo $f-$invariante, γ. Se sigue del Lema 4.3.9, $\Omega(f) \subset \gamma$ y que $\omega(p) = \{0\}$ o bien $\omega(p) = \emptyset$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$. □

Teorema 4.3.12. *Sea* $f \in Emb^d_+(\mathbb{R}^2)$ *con un rayo* $f-$*invariante,* γ, *y tal que* $f(0) = 0$. *Si* $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$, *entonces* 0 *es un atractor local y* $\Omega(f) = \{0\}$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{Emb}^d_+(\mathbb{R}^2)$ verifica las hipótesis del teorema, entonces también verifica las del Teorema 4.3.11 y por

tanto $\Omega(f) \subset \gamma$ y $\omega(p) = \{0\}$ o bien $\omega(p) = \emptyset$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$.

Además, como $\text{Spec}(f) \subset B(0,1)$, por el corolario al Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman 0 es un atractor local. Luego $\{p \in \gamma \ : \ \omega(p) = \{0\}\} = \gamma$ y $\Omega(f) = \{0\}$, dado que f preserva la orientación.

De acuerdo con el Teorema de Hartman Grobman, el 0 es un atractor local (ver por ejemplo [17]). Por tanto la prueba de este teorema se sigue del Teorema 4.3.11. □

La diferencia entre los Teoremas 4.3.11 y 4.3.12 es que en el primero puede no existir el $\omega-$límite de un punto y en el segundo siempre existe. Es por este motivo que introduciremos la hipótesis de disipatividad o existencia de una ventana.

Se sigue de la Proposición 4.3.7 que si $f \in \text{Emb}(\mathbb{R}^2)$ es un embebimiento disipativo entonces existe un conjunto compacto A tal que para todo $p \in \mathbb{R}^2$, el conjunto $\omega(p)$ es no vacío y $\omega(p) \subset A$. Además nótese que si $f(0) = 0$, entonces $0 \in A$. Por lo que el problema de la existencia del $\omega-$límite se consigue solventar añadiendo a la hipótesis la existencia de una ventana o que la aplicación sea disipativa.

No obstante, la Figura 1.1 (b) muestra el espacio de fases de un flujo suave transversal al círculo unidad ∂D tal que la aplicación a tiempo uno $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (inducida por el flujo), que asumiremos que es un difeomorfismo suave de $\mathbb{R}^2$, satisface

$f(D) \subset \mathrm{Int}\,(D)$ (donde D es el disco unidad) y $\omega(p) = \{0\}$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Obsérvese también que toda trayectoria del flujo que entra en ∂D es un rayo $f-$invariante. En este caso el origen no es un atractor local y por tanto no es un atractor global por lo que necesitaremos la hipótesis de la estabilidad local (ver [4] o [52] para más ejemplos de este tipo). A este respecto tenemos el primer resultado sobre atracción global.

Teorema 4.3.13. *Sea $f \in Emb_+(\mathbb{R}^2)$ tal que* $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$. *Si f es disipativa y existe un rayo $f-$invariante, γ, entonces $\omega(p) = \{0\}$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$.*
Además, si 0 es un punto fijo estable, entonces 0 es un atractor global de f.

Demostración. Como f es una aplicación disipativa, existe un conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, se verifica que $\omega(p) \neq \emptyset$ y $\omega(p) \subset D$. Por el Lema 4.3.9 se puede concluir que $\omega(p) = \{0\}$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Además, si 0 es estable, entonces 0 es un atractor global por definición y la prueba ahora está completa. □

Cabe observar que bajo las condiciones del Teorema 4.3.13, si 0 es estable, entonces tenemos que $\mathrm{Index}(f, 0) = 1$. (Ver [49].) En la Sección 4.3.2 daremos un resultado análogo al Teorema 4.3.13 en el caso de que la aplicación no preserva área y además daremos otros resultados cambiando la hipótesis de

estabilidad local por la de índice del punto fijo.

Con el Teorema 4.3.13 hemos obtenido un primer resultado topológico de estabilidad global. No obstante, en el Teorema 4.3.16 daremos condiciones sobre el espectro y la diferencial de una aplicación de clase C^1 para que se cumplan las condiciones topológicas y el origen continúe siendo atractor global.

La motivación para ese resultado fue la existencia de un atractor global cuando la diferencial de nuestra aplicación es una contracción uniforme (ver [33] para más detalles sobre contracciones en espacios métricos) como muestra la siguiente propiedad:

Proposición 4.3.14 (Principio de las aplicaciones contractivas)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Si $\|Df_p\| < 1$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, entonces 0 es un atractor global de f.*

Demostración. Sea $q \in \mathbb{R}^n$ y sea $s = \|q\|$. Como f es de clase C^1 y $\bar{B}(0, s)$ es un conjunto compacto, podemos encontrar un número real $M > 0$ tal que $\|Df_p\| \leq M < 1$, para todo $p \in \bar{B}(0, s)$. Además conseguimos que $f(\bar{B}(0, s)) \subset B(0, s)$, por lo tanto $f|_{\bar{B}(0,s)}$ es una $M-$contracción. Entonces $f^k(q) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Pero $q \in \mathbb{R}^n$ es un punto arbitrario de $\mathbb{R}^n$, así que 0 es un atractor global para el sistema dinámico discreto generado por f. □

Dado que buscamos que la aplicación sea disipativa, únicamente nos interesa que contraiga en el complementario de una bola suficientemente grande y además sólo radialmente, en vez de uniformemente. Bajo esas condiciones, el siguiente lema nos permite encontrar una ventana para una aplicación diferenciable.

Lema 4.3.15. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Supongamos que existen $R > 0$ y $0 < \alpha < 1$ tales que $\|Df_p \cdot p\| < \alpha \|p\|$, para todo $\|p\| > R$. Entonces existen un $s_0 > R$ y un $\alpha < \mu < 1$ tales que, si $p \in \mathbb{R}^n$ and $\|p\| \geq s_0$, entonces $\|f(p)\| \leq \mu \|p\|$.*

Demostración. Como $\bar{B}(0, R)$ es un conjunto compacto y f es de clase C^1, existe un número real $M > 1$ tal que $\|Df_q\| \leq M$, para todo $q \in \bar{B}(0, R)$.

$$\text{Sean } \mu = \frac{\alpha + 1}{2} \text{ y } s_0 = \frac{2(MR - \alpha R)}{1 - \alpha}.$$

Observar que $0 < \alpha < \mu < 1$, dado que $0 < \alpha < 1$. Además,

$$s_0 = \frac{2R(M - \alpha)}{1 - \alpha} > \frac{2R(1 - \alpha)}{1 - \alpha} > R.$$

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|p\| \geq s_0$. Consideremos ahora la curva $\Psi : [0, \|p\|] \to \mathbb{R}^n$ definida como $\Psi(t) = (t\, p)/\|p\|$. Entonces,

por definición de longitud del arco,

$$\begin{aligned}\|f(p)\| &\leq \int_0^R \|(f\circ\Psi)'(t)\|\ dt + \int_R^{\|p\|} \|(f\circ\Psi)'(t)\|\ dt \\ &\leq \int_0^R \|Df(\Psi(t))\cdot\Psi'(t)\|\ dt + \int_R^{\|p\|} \|Df(\Psi(t))\cdot\Psi'(t)\|\ dt \\ &\leq MR + \alpha\,(\|p\| - R) = MR - \alpha R + \alpha\,\|p\| \\ &= \frac{1-\alpha}{2}\ \cdot\ \frac{2(MR-\alpha R)}{1-\alpha} + \alpha\ \|p\| \\ &\leq \frac{1-\alpha}{2}\ \|p\| + \alpha\ \|p\| = \mu\ \|p\|.\end{aligned}$$

Consecuentemente, para todo $\xi > R$ se verifica que $f(B(0,\xi)) \subset B(0,\xi)$.

□

Teorema 4.3.16. *Sea $f \in Emb_+(\mathbb{R}^2)$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

(i) Existen dos números reales $R > 0$ y $0 < \alpha < 1$ tales que $||Df_p \cdot p|| < \alpha\ ||p||$, para todo $||p|| > R$.

(ii) $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$.

(iii) Existe un rayo $f-$invariante γ.

Entonces 0 *es un atractor global de f.*

Demostración. De las condiciones (i) y el Lema 4.3.15 obten-

emos que f es disipativo. De la condición (ii) se sigue, por un lado que 0 es el único punto fijo de f por el Corolario 3.1.2, y por otro que el origen es atractor local por el corolario al Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman. Y dado que existe un rayo $f-$invariante y f preserva la orientación, entonces 0 es un atractor global por el Teorema 4.3.13. □

Ejemplo 4.3.17. *Consideremos la aplicación:*

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{4(1+x^2+y^2)}, \frac{\sqrt{3}x+2y}{4(1+x^2+y^2)} \right) \tag{4.2}$$

Dado que $\|f(x,y)\| \leq \zeta < 1$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(x,y)\| > R > 1$ tenemos que el sistema es disipativo. Por lo que basta con estudiar la dinámica del sistema dentro de la bola $B(0,1)$.

Además, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(x,y)\| < 1$, tenemos que

$$0 < \det(Df_p) = -\frac{-1+x^2+y^2}{8(1+x^2+y^2)^3} < 1.$$

Por lo que, $f \in \mathrm{Emb}^1_+(\mathbb{R}^2)$ y $\mathrm{Spec}(f) \subset B(0,1)$.

Entonces, como f fija el origen y el eje de coordenadas $x = 0$ es invariante por la aplicación, el origen es un atractor global del sistema discreto generado por f.

Obsérvese que con el Teorema 4.3.16 hemos probado la

Conjetura DMY en dimensión dos, en el caso de que se preserve la orientación, con las hipótesis adicionales (i) y la existencia de un rayo invariante por la aplicación. En la Sección 2.3 se muestra claramente con el Ejemplo de Szlenk que si quitamos la condición (i) el resultado es falso. y en la Sección 4.4 veremos que también es necesaria la curva invariante. Además, en la Sección 4.3.2 se dará un resultado análogo en el caso de que no se conserve la orientación.

4.3.2. Aplicaciones que no necesariamente preservan la orientación

Para probar los resultados de la Sección 4.3.1 era necesario suponer que la aplicación conserva la orientación ya que en otro caso los teoremas de P. Murthy recogidos en 4.1.1 no son ciertos (ni siquiera lo son para homeomorfismos del plano, ver [5],[6] o [24], entre otros).

No obstante, dado que la segunda iterada de una aplicación siempre conserva la orientación, todavía podremos hacer uso de los resultados del Capítulo 3 para poder dar condiciones análogas a las de la Sección 4.3.1 que puedan implicar que el sistema siga admitiendo un punto fijo de atracción global. Es decir, lo que haremos en esta sección es aplicar a la segunda iterada los resultados obtenidos en la Sección 4.3.1 para aplicaciones que preservan la orientación y preguntarnos por las

órbitas periódicas de período 2.

A este respecto tenemos el primer lema:

Lema 4.3.18. *Sea $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(0) = 0$ y $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$. Si existe un rayo $f-$invariante, γ, entonces $\Omega(f) \subset \gamma$. Además $\omega(p) = \{0\}$ o bien $\omega(p) = \emptyset$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$.*

Demostración. Si $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$, entonces podemos aplicar el Lema 4.3.9 para f^2 que siempre preserva la orientación y obtenemos el resultado. Más concretamente, como $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$, tenemos que $\Omega(f^2|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}) = \emptyset$ por la Proposición 4.1.3. En particular, $f^2|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}$ no tiene puntos fijos ni puntos periódicos, por tanto tampoco los tiene $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}$. Nos faltaría ver el conjunto de puntos no-errantes.

Queremos obtener que $\Omega(f|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}) = \emptyset$. Supongamos que no, entonces existirá $p \in \Omega(f|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma})$. Tomemos un disco pequeño $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ centrado en p tal que $U, f(U), f^2(U)$ y $f^3(U)$ sean disjuntos dos a dos. Procediendo como en la prueba del Lema 4.3.9, si se verifica la condición (4.1) podremos suponer que existe un embebimiento g que coincide con f fuera de $f(U)$ tal que g tiene un punto periódico en $f(U)$. Esto implica que g^2 tiene un punto periódico en $f(U)$ (que como mínimo es una órbita $4-$periódica para g), y consecuentemente g^2 tiene un punto fijo q perteneciente a $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma \cup U \cup f(U))$, porque g^2 preserva la orientación. Dado que g^2 y f^2 coinciden en $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma \cup U \cup f(U))$, tenemos que q es también un punto fijo de $f^2|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}$,

que es imposible. Luego, $\Omega(f) \subset \gamma$.

Sea $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, entonces $\omega(p) \subset \gamma$. Como buscamos que $\omega(p) \subseteq \{0\}$, análogamente a la demostración del Lema 4.3.9, podemos construir un embebimiento $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva la orientación verificando que $g(f^n(q)) = f(q)$ y con un punto fijo fuera de un disco contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ (donde coincide con f). Por lo tanto $\mathrm{Fix}(f|_{\mathbb{R}^2\setminus\gamma}) \neq \emptyset$, lo que contradice las hipótesis. □

Combinando el Lema 4.3.18 anterior con el Teorema 4.3.13 de la Sección 4.3.1 todavía podemos probar la estabilidad global del origen cambiando la hipótesis de preservar la orientación por la condición de que la segunda iterada tenga el origen como único punto fijo.

Teorema 4.3.19. *Sea $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(0) = 0$ y $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$. Si f es disipativa y existe un rayo $f-$invariante, γ, entonces $\omega(p) = \{0\}$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$.*
Además, si 0 es un punto fijo estable, entonces 0 es un atractor global de f.

Demostración. Como f es una aplicación disipativa existe un conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, se verifica que $\omega(p) \neq \emptyset$ y $\omega(p) \subset D$. Por el Lema 4.3.18 se puede concluir que $\omega(p) = \{0\}$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Además, si el 0 es estable, entonces 0 es un atractor global por definición y la prueba ahora está completada. □

El siguiente corolario es consecuencia directa de los Teoremas 3.2.8 y 3.1.1 del Capítulo 3. Nos permitirá sustituir en el Teorema 4.3.21 las hipótesis topológicas del Teorema 4.3.19 por otra condición sobre el espectro de la aplicación de clase C^1, obteniendo un resultado análogo a la Sección 4.3.1 cuando la aplicación no conserva necesariamente la orientación.

Corolario 4.3.20. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable tal que $f(0) = 0$. Si $\mathrm{Spec}(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, entonces f es un embebimiento con $Fix(f^2) = \{0\}$.*

Teorema 4.3.21. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 tal que 0 es un punto fijo estable.*
Supongamos que además se verifican las siguientes condiciones:

(i) Existen dos números reales $R > 0$ y $0 < \alpha < 1$ tales que $||Df_p \cdot p|| < \alpha\, ||p||$, para todo $||p|| > R$.

(ii) $\mathrm{Spec}(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

(iii) Existe un rayo $f-$invariante γ.

Entonces 0 es un atractor global.

Demostración. De la condición (ii) y el Corolario 4.3.20 se sigue que $f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$, y por el Lema 4.3.18 concluimos que $\omega(p) = \{0\}$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Como el origen

es un punto fijo estable podemos concluir que el 0 es un atractor global de f, que es lo que queríamos probar. □

Una vez que hemos probado la existencia de un atractor global suponiendo que es localmente estable, intentaremos hacer un estudio del problema introduciendo otras hipótesis.

Existen varios trabajos en la literatura donde se recogen numerosos estudios sobre dinámica de homeomorfismos del plano que conservan la orientación sin puntos fijos o con un punto fijo aislado de índice distinto de 1 (por lo tanto sin otros puntos no errantes), como por ejemplo en trabajos de P. Le Calvez, como [35], [38] y [39], o de F. Le Roux, como [40] y [41], o de otros autores como E. E. Slaminka en [56] o L. Guillou en [25].

También se han publicado trabajos relacionando la estabilidad del punto fijo con la sucesión de índices de las iteradas para homeomorfismos del plano como en [36], [37], [7], [53] o en [54].

Asimismo, para embebimientos del plano R. Ortega y E.N. Dancer probaron en [19] que si el origen es un punto fijo aislado y estable de un embebimiento que preserva la orientación, entonces su índice es 1. Además F. R. Ruiz del Portal también lo probó para homomorfismos locales que invierten la orientación en [53]. No obstante, esta condición de índice no es suficiente ni siquiera para difeomorfismos del plano ya que hay

casos en los que el índice es 1, pero el origen no es asintóticamente estable. Ver, por ejemplo, Figura 1.1.

Como nosotros buscamos la existencia de un punto fijo de atracción global, entonces el índice debe ser 1 porque en otro caso el punto fijo sería inestable, ver [19]. Posteriormente también R. Ortega dio en [48] una relación entre el índice de punto fijo de la segunda iterada y la estabilidad local como mostraremos a continuación (ver [49] o [48] para más detalles). Esto nos permitirá cambiar la hipótesis de estabilidad local por la de $\text{Index}(f^2, 0) = 1$ en los Teoremas 4.3.13 y 4.3.19:

Sea U un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. La matrix $Df|_0$ tiene un número finito de valores propios, $\{\lambda_k\}_{0<k\leq n}$. Los que son diferentes de cero los podemos reordenar de tal manera que $\|\lambda_1\| \geq \|\lambda_2\| \geq ... \geq \|\lambda_n\|$. Denotaremos μ_k, sus respectivas multiplicidades algebraicas.

Teorema 4.3.22 (Ortega, 1992)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, acotado y entorno del 0. Consideremos $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que 0 es un punto fijo aislado de f^2.*

Si $\mu_1 = 1$, $\|\lambda_k\| < 1$ con $2 \leq k \leq n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) 0 es asintóticamente estable.

ii) 0 es estable,

iii) $\mathrm{Index}(f^2, 0) = 1$.

El siguiente resultado nos recuerda al corolario del Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman en dimensión 2 y para embebimientos de clase C^1.

Corolario 4.3.23 (Ortega, 1992)**.** *Sea U un dominio de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}^2$ una aplicación continua e inyectiva de clase C^1 en U tal que $0 \in U$ y $0 < \det Df_p < 1 \quad \forall p \in U$. Entonces 0 es asintóticamente estable si y sólo si 0 es aislado con respecto a f^2 y* $\mathrm{Index}(f^2, 0) = 1$.

Definición 4.3.24. *Sea $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$, diremos que f contrae área (uniformemente) si $\forall A \in \mathcal{B} \ \exists 0 < \varrho < 1$ tal que $\mu(f(A)) \leq \varrho\mu(A)$, donde $\mathcal{B}$ es el conjunto de los Borelianos de $\mathbb{R}^2$ y μ es la medida de Lebesgue.*

Teorema 4.3.25. *Sea $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Supongamos que se verifica que:*

1. *f es disipativa y contrae área.*
2. *$\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$.*
3. *Existe un rayo $f-$invariante.*

Si $\mathrm{Index}(f^2, 0) = 1$, entonces 0 es un atractor global.

Demostración. Dado que f contrae área, al menos uno de los dos valores propios de $Df(0)$ tiene norma menor que 1. Por lo tanto sólo un valor propio puede tener norma mayor que 1 y estamos en las condiciones del Teorema 4.3.22. Entonces, como $\mathrm{Index}(f^2, 0) = 1$, el origen es localmente asintóticamente estable.

Por otro lado, como f es disipativa, por las condiciones 1 y 2 y el Lema 4.3.18 tenemos que $\omega(p) = \{0\}$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Con lo que 0 es un atractor global. □

Si la aplicación conserva la orientación obtenemos este corolario del Teorema 4.3.25:

Corolario 4.3.26. *Sea $f \in Emb_+(\mathbb{R}^2)$ de clase C^1 tal que el origen es el único punto fijo. Supongamos que f es disipativa,*

contrae área y existe un rayo $f-$invariante. Si $\mathrm{Index}(f^2, 0) = 1$, *entonces el origen es un atractor global.*

Observar que en el ejemplo de la Figura 1.1 (b), el índice de la f en el origen es 1 y no obstante el 0 no es un atractor global. Por lo que no es suficiente suponer que $\mathrm{Index}(f, 0) = 1$ en el Corolario 4.3.26.

Otra consecuencia inmediata al Teorema 4.3.25 y que facilita los cálculos a la hora de comprobar las hipótesis es el siguiente:

Corolario 4.3.27. *Sea $f \in Emb(\mathbb{R}^2)$ de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Supongamos que se verifica que:*

1. *Existe una ventana para f y $\mathrm{Spec}(Df_0) \cap B(0,1) \neq \emptyset$.*

2. $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$.

3. *Existe un rayo $f-$invariante.*

Si $\mathrm{Index}(f^2, 0) = 1$, *entonces* 0 *es un atractor global.*

Teorema 4.3.28. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 tal que $f(0) = 0$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

1. *f es disipativa y contrae área.*
2. *$\mathrm{Spec}(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.*
3. *Existe un rayo $f-$invariante γ.*

Entonces 0 es un atractor global.

Demostración. Como f contrae área, al menos uno de los dos valores propios de $Df(0)$ tiene norma menor que 1. Pero $\mathrm{Spec}(f) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, por lo que los dos valores propios de $Df(0)$ tienen norma menor que 1 y por el corolario al Teorema 1.1.25 de Hartman-Grobman 0 es un atractor local.

Si se verifica la condición 2, entonces por el Corolario 4.3.20, $f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$ y $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$. Además, como f es disipativa y existe una rayo $f-$invariante, entonces por el Lema 4.3.18 $\omega(p) = \{0\}$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, 0 es un atractor global. □

4.4. Un contraejemplo sin rayo invariante y sin órbitas periódicas

En esta sección daremos un ejemplo de un homeomorfismo disipativo que preserva la orientación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ verificando $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}(f) = \{0\}$ y tal que el origen es asintóticamente estable pero no es un atractor global.

(1) Construiremos un homomorfismo $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que el infinito es un repulsor, el origen es un atractor y $\mathrm{Fix}(h) = \{0, 1\}$.

Sea $P : [0, 1] \to [0, 1]$ un homeomorfismo tal que:

(i) $P(0) = 0,\ P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2},\ P(1) = 1.$

(ii) Para todo $x \neq \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ se verifica que $0 < P(x) < x$.

(iii) $0 < P'(0) < 1,\ P'(\frac{1}{2}) = 1,\ P'(1) > 1.$

Un ejemplo puede ser el polinomio $P(x) = \frac{1}{2}(x + 5x - 8x^3 + 4x^4)$.

Ahora extenderemos el conjunto $P([0, 1])$ al conjunto $[0, \infty)$ con un difeomorfismo $H : [0, 1] \to [0, \infty)$ de tal forma que $H(0) = 0,\ H(\frac{1}{2}) = 1,\ \lim_{x\to\infty} H(x) = \infty$.

(Un ejemplo sería $H(x) = \frac{x}{2(1-x)^2}$.)

Definimos el homomorfismo $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ como

$$h = H \circ P \circ H^{-1}.$$

(2) Sea $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación de centro el origen y ángulo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(3) Definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en polares como

$$f(r, \theta) = (h(r)\cos(\theta + 2\pi\alpha), h(r)\sin(\theta + 2\pi\alpha))$$

Entonces, por construcción f es un homomorfismo disipativo que preserva la orientación y el origen es un punto fijo localmente estable. Además, como $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}(f) = \{0\}$.

Por otro lado, cuando $r = 1$ aparece una curva cerrada Υ invariante por la aplicación f. Por lo que el origen no puede ser atractor global.

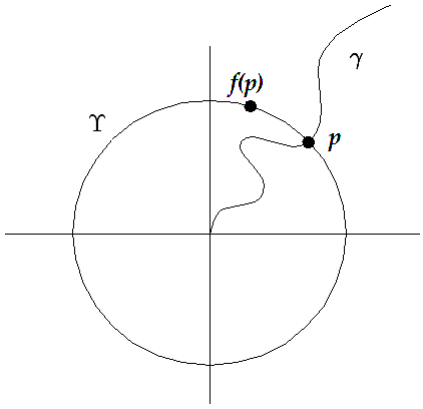

Figura 4.7: No puede existir rayo invariante γ

Además, tampoco existe ningún rayo $f-$ invariantes dado que si apareciera algún rayo γ éste tendría que intersectar a la

curva cerrada Υ en algún punto $p \in \mathbb{R}^2$. Y dado que Υ también es invariante $f(p) \in \gamma \cap \Upsilon$ por lo que Υ debería estar contenida en γ (ver Figura 4.4). Lo que sería contradictorio ya que γ es una curva simple sin autointersecciones.

Este homomorfismo f muestra que la existencia de un rayo invariante es necesaria para obtener atracción global partiendo de las hipótesis originales de la Conjetura DMY. Además como se puede observar su aparición va más allá de impedir la existencia de órbitas periódicas, permite tener un control más fuerte de la dinámica de un embebimiento disipativo que preserva la orientación con un único punto fijo.

Capítulo 5

Problemas abiertos

5.1. Aplicación a la Teoría de Osciladores

En esta sección veremos de qué manera se puede conectar el estudio topológico de la existencia de un atractor asintótico global desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales periódicas de segundo orden.

Consideremos la ecuación,

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{5.1}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 y periódico en $t \in \mathbb{R}$ tal que, para algún $T > 0$, $F(t + T, x) = F(t, x)$, para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Además, supongamos que existe unicidad de la solución del problema con condiciones iniciales asociado a (5.1).

Dado $p \in \mathbb{R}^2$, la solución de (5.1) asociada a la condi-

ción inicial $x(0) = p$ se denotará por $x(t, p)$. Esta solución está definida en un intervalo maximal $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$, con

$$-\infty \leq \alpha = \alpha(p) < 0 < \omega = \omega(p) \leq \infty.$$

Consideremos el conjunto

$$\mathbb{D} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(t, p) \text{ está definida en } [0, T]\}.$$

El conjunto $\mathbb{D}$ se puede reescribir como el conjunto de puntos del plano cuyo extremo ω es mayor que el período T y, por lo tanto es abierto. Definimos la aplicación de Poincaré

$$P : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ tal que } P(p) = x(T, p).$$

Por unicidad de la solución del problema con condiciones iniciales, la aplicación P está bien definida y es inyectiva. Además, por el teorema de dependencia continua de las condiciones iniciales, P es continua. Luego tenemos que $P \in \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$.

Por otro lado, si el campo vectorial X de la ecuación diferencial (5.1) es de clase C^r, entonces $P \in \mathrm{Emb}^r(\mathbb{R}^2)$ por el teorema de diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales. Además, por la Fórmula de Jacobi-Liouville,

$$\det DP_q = \exp\{\int_0^T \mathrm{div}_x F(t, x(t, q))\, dt\},\ \forall q \in \mathbb{R}^2, \qquad (5.2)$$

tenemos que $\det DP > 0$ en todo el plano. Por lo tanto, $P \in \mathrm{Emb}_+^r(\mathbb{R}^2)$.

Además, si todas las soluciones están definidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces $P = P(\mathbb{D}) = \mathbb{R}^2$, $P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ y por tanto, $P \in \mathrm{Dif}_+^r(\mathbb{R}^2)$. La inversa de la aplicación de Poincaré viene dada por la fórmula:

$$P^{-1}(p) = x(-T, p),\ \forall p \in \mathbb{R}^2.$$

Por otro lado, los conjuntos invariantes para el sistema definido por (5.1) se corresponderán con los de P. Las órbitas $T-$periódicas de (5.1) serán puntos fijos de P y las órbitas $nT-$periódicas de (5.1) serán las órbitas $n-$periódicas de P.

El siguiente ejemplo muestra una ecuación diferencial periódica de segundo orden para la que el origen es atractor global y donde también se verifican las hipótesis del Corolario 4.3.26.

Ejemplo 5.1.1. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\ddot{x} + c\dot{x} + (\omega^2 + \epsilon \cos t)x + gx^3 = 0 \tag{5.3}$$

Podemos reescribir el sistema como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -cy - (\omega^2 + \epsilon \cos t)x - gx^3 \end{aligned}$$

En el artículo [8], B. Campos y J. Martínez Alfaro pro-

baron, para $g > 0$, $e = \epsilon\,\omega^2$ suficientemente pequeño y para c suficientemente grande lo siguiente:

(I) La solución $x(t) \equiv 0$ es la única órbita $2\pi-$periódica de (5.3), es hiperbólica con índice 1 y $\bigwedge(0) = \mathbb{R}^2$. Obsérvese que en este caso será un rayo invariante cualquier curva continua formada por la órbita de un punto.

(II) Además, para esos valores de los parámetros, la aplicación de Poincaré asociada a (5.3) verifica $P \in \mathrm{Emb}^r_+(\mathbb{R}^2)$ y contrae área. En efecto, por la fórmula (5.2) de Jacobi-Liouville tenemos que

$$0 < \det DP_q = \exp\{\int_0^T \mathrm{div}_x\, F(t, x(t,q))\; dt\;\} = \exp\{-2\pi c\} < 1$$

Por tanto, el origen es un atractor global de la ecuación (5.3).

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real analítica y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación real analítica $T-$periódica en t. Consideremos ahora la siguiente generalización de la ecuación (5.3):

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x,t) = 0 \tag{5.4}$$

Sean $x^*(t)$ una solución $T-$periódica de (5.4). Veremos qué podemos decir de la ecuación:

1. El sistema (5.4) es analítico y periódico de período T.

2. Si $f(x)$ es estrictamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la divergencia del campo es negativa y por la Fórmula (5.2) tenemos que la aplicación de Poincaré asociada a (5.4) contrae área y $P \in \mathrm{Emb}^r_+(\mathbb{R}^2)$.

3. Si la aplicación g verificara alguna de las condiciones de los Teoremas clásicos de [51] entonces el sistema sería disipativo. Y, por tanto, existiría un número finito de órbitas periódicas de período T. (Ver [45, 50]) para más detalles. En este caso, la aplicación de Poincaré asociada al sistema (5.4) P sería disipativa y con un número finito de puntos fijos.

4. Supongamos además que se verifica

$$0 < m = inf\ f \leq sup\ f = M < \infty$$

$$g_x(x^*(t), t) \leq a - b(d + \sqrt{a}),$$

donde $b = (M - m)/2$, $d = (M + m)/2$, $a = (\pi/T)^2 + d^2/4$ y $a - b(d + \sqrt{a}) > 0$. Entonces, [50] nos dice que, si $\mathrm{Index}(P, (x^*(0), \dot{x}^*(0)) = 1$, la órbita es asintóticamente estable.

Por lo tanto, uno de los problemas abiertos relacionados con esta memoria es ver qué condiciones debe cumplir un sistema analítico de tipo (5.4) (además de las de 4) para

que la órbita periódica sea única y para que exista un rayo $P-$invariante.

Existen varias publicaciones al respecto. Por ejemplo, en [10] J. Campos y P. Torres utilizaron técnicas parecidas a las de esta memoria para estudiar la ecuación de Liénard:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t).$$

En este resultado prueban que la existencia de una solución acotada implica la existencia de una única solución periódica que atrae a todas las soluciones acotadas. También describen el conjunto de condiciones iniciales correspondientes a soluciones acotadas.

5.2. Existencia de un rayo invariante

En los capítulos anteriores hemos visto que la existencia de un rayo invariante para un embebimiento disipativo f del plano que preserva la orientación puede ser crucial a la hora de determinar si la región de atracción de un punto fijo es todo el plano. Esto se debe principalmente a que, si la aplicación tiene un único punto fijo, entonces $\mathrm{Fix}(f) \subset \gamma$. Lo que significa que la aplicación fuera de la curva es un embebimiento sin puntos fijos que preserva la orientación y toda la dinámica se reduce al comportamiento del sistema dentro de una curva unidimen-

sional.

No obstante, determinar la existencia de un rayo invariante por una aplicación puede llegar a ser complicado. Si el rayo fuera uno de los ejes de coordenadas o una recta cualquiera, sería relativamente fácil, pero si es una curva más complicada los cálculos pueden ser computacionalmente costosos. Por lo que uno de los problemas abiertos es dar condiciones suficientes que garanticen la existencia de un rayo invariante por la aplicación.

Uno de los criterios para ver si existe curva invariante es estudiar las simetrías del sistema. En ese caso, cada eje de simetría sería un rayo $f-$invariante.

Si la aplicación f fuese un difeomorfismo, se podría ver como el tiempo 1 de un flujo y podríamos construir la órbita de un punto que salga del infinito y vaya al origen. O, si fuera un homeomorfismo intentaríamos construir un arco de traslación cuya línea de traslación fuera homeomorfa a $\mathbb{R}$ (ver [6]). Esto a veces nos lleva a probar directamente que $\bigwedge(0) = \mathbb{R}^2$, puesto que estas construcciones no suelen depender del punto.

Otro criterio para escapar de la existencia de la curva invariante es suavizar la definición de rayo invariante. En la Sección 4.3 ya se introdujo el concepto de continuo Σ invariante. En este caso, bastaría con estudiar la dinámica topológica dentro del continuo al igual que ocurre con el rayo. Además,

sería suficiente con suponer que este continuo intersectara con la región de atracción del origen sin que necesariamente lo contenga.

Por otro lado, una de las preguntas que surgen al estudiar estas técnicas es que ocurriría si tengo más puntos fijos. Obviamente, el origen ya no es un atractor global, pero también podríamos intentar describir la dinámica en el caso de que existiera un continuo Σ invariante tal que $\mathrm{Fix}(f) \subset \Sigma$ y el complementario continuara siendo homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Al igual que en el caso del atractor global podríamos disminuir una dimensión el sistema y estudiar la dinámica únicamente en el continuo o en el rayo, si existiera. Observar que en el Ejemplo 2.2.8 Σ serían los ejes coordenados. En este caso sí que habría puntos fuera de los ejes cuyo $\omega-$límite está en el rayo invariante, como son las separatrices que forman las variedades estables de los puntos de silla.

5.3. Extensión a $\mathbb{R}^n$

Esta memoria se basa en el Teorema 4.1.1 que afirma que un embebimiento del plano que preserva la orientación sin puntos fijos no tiene órbitas periódicas. Este resultado es cierto en $\mathbb{R}^2$, pero no está probado en general para dimensiones mayores. No obstante, J. Campos publicó en [10] un resultado similar para homeomorfismos definidos en $\mathbb{R}^3$ que verifican una

cierta condición de monotonía cerca del infinito. En esta línea, se podría suponer, análogamente, la existencia de un continuo Σ, que contuviera al origen y tal que $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ fuera a su vez homeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

5.4. Dinámica de la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe

En el Capítulo 2 vimos que las hipótesis originales de la Conjetura Discreta de Markus-Yamabe no son suficientes para garantizar la existencia de un atractor global para aplicaciones que no son triangulares. Otro de los problemas que están relacionados con esta memoria es el estudio de la dinámica de las aplicaciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 que fijan el origen y cuyo espectro está contenido en la bola unidad.

En este caso, la dinámica se centra en el comportamiento del sistema en una corona. La técnica en este caso es estudiar las propiedades del recubrimiento universal que vuelve a ser, en este caso $\mathbb{R}^2$. Hay varios trabajos relacionados con la dinámica de un homeomorfismo en una corona. Ver, por ejemplo, [23] y [25]. Obviamente la aparición de órbitas periódicas dependerá del número de rotación de la aplicación.

TABLA DE EJEMPLOS SIGNI FICATIVOS

Sea $f \in \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$ tal que el 0 es el único punto fijo y
f preserva orientación o bien $\mathrm{Fix}(f^2) = \{0\}$

CONDICIONES PARA QUE EL ORIGEN SEA ATRACTOR GLOBAL

(I) El origen es estable
(II) f es disipativa o bien $\exists \omega(p),\ \forall p \in \mathbb{R}^2$
(III) Existe un rayo $f-$invariante

Ejemplo	Verifica	Observaciones
Ejemplo 1.1.17	(II) y (III)	Los Teoremas 4.3.13 y 4.3.19 prueban que $\bigwedge(0) = \mathbb{R}^2$. Falta estabilidad del punto fijo.
Ejemplo 1.1.18	(I) y (III)	Los Lemas 4.3.9 y 4.3.18 prueban que $\omega(p) = \{0\}$ o bien $\omega(p) = \emptyset$, $\forall p \in \mathbb{R}^2$. Necesito existencia del $\omega-$límite.
Teorema 2.2.8	(I)	Primer contraejemplo a la Conjetura DMY. Falta existencia del $\omega-$límite.
Teorema 2.4.4	(I) y (II)	Segundo contraejemplo a la Conjetura DMY. Únicamente falta la existencia de la órbita periódica, pero $\mathrm{Per}(f) \neq \{0\}$.
Ejemplo Sección 4.4	(I) y (II)	No tiene rayo invariante. El origen no es atractor global pese a que $\mathrm{Per}(f) = \{0\}$.
Ejemplo 2.2.4	(I), (II) y (III)	Ejemplo de aplicación triangular verificando todas las hipótesis.
Ejemplo 4.2	(I), (II) y (III)	Ejemplo de aplicación racional verificando todas las hipótesis.

Índice de Contenidos

$\#S$, 34, 81, 82, 93, 100
$\mathrm{Dif}(\mathbb{R}^2)$, 37
$\mathrm{Dif}^r_+(\mathbb{R}^2)$, 37
$\mathrm{Dif}_+(\mathbb{R}^2)$, 37
$\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^2)$, 36
  $\mathrm{Emb}^d(\mathbb{R}^2)$, 36
  $\mathrm{Emb}_+(\mathbb{R}^2)$, 36
  $\mathrm{Emb}^d_+(\mathbb{R}^2)$, 36
$\mathrm{Emb}^r(\mathbb{R}^2)$, 36
$\mathrm{Emb}^r_+(\mathbb{R}^2)$, 36
$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$, 37
$\mathrm{Hom}_+(\mathbb{R}^2)$, 37
$\Omega(f)$, 35
$\bigwedge(M)$, 37
$\mathrm{Fix}(f)$, 34
$\mathrm{Per}(f)$, 34
$\mathrm{CR}(f)$, 35

Aplicación
  G_A, 87
  G^n_p, 92
  Φ, 84
  de Poincaré, 158
  difeotópica a, 43, 127
  disipativa, 128
  Homotópica a, 42
  isotópica a, 42
  linealmente triangularizable, 54
  preserva la orientación, 36
  que contrae área, 149
  triangular, 54

Cadena
  $\epsilon-$cadena, 35
Conjetura
  Discreta de Markus-Yamabe DMY, 21, 52
  débil de Markus-Yamabe, 51

de Markus-Yamabe, 21, 50
Conjunto
$\omega-$límite, 34
positivamente invariante, 34
Contraejemplo
sin rayo invariante, 153
Contraejemplo Conjetura DMY
Caso polinomial $n \geq 3$, 57
Caso racional $n = 2$
Ejemplo Szlenk, 56, 58
con infinito repulsor $n = 2$, 74
Difeomorfismos en $\mathbb{R}^n$, 56

Embebimiento topológico, 36
Difeomorfismo, 37
Homeomorfismo, 37
Espectro
de una aplicación, 43
de una matriz, 43

Fórmula de Jacobi-Liouville, 158

Homotecia
matriz, 88
Homotopía, 42
Difeotopía, 42
Isotopía, 42

Iterado enésimo de un punto, 33

Levantamiento, 87

Norma
de una matriz, 70

Principio de las aplicaciones contractivas, 139
Punto
no errante, 35
periódico, 34
recurrente por cadenas, 35
Punto de equilibrio, 38
asintóticamente estable, 39
Punto fijo, 34
asintóticamente estable, 38
atractor, 38
hiperbólico, 44
atractor global, 38
de silla, 44

estable, 38
hiperbólico, 44
región de atracción, 37
repulsor, 38

Radio espectral
de un difeomorfismo, 70
de una matriz, 70
Rayo $f-$invariante, 127

Teorema de
Cima, Gasull y Mañosas
Caso polinomial $n = 2$, 55
Caso triangular en $\mathbb{R}^n$, 54
Darboux, 90
Dillen, 55
Lyapunov, 49
Murthy, 121
para puntos recurrentes por cadenas, 121
Ortega, 149

Variedad
estable, 44
inestable, 44
Ventana, 128

Índice de punto fijo, 43

Órbita, 34

Índice de figuras

1.1. Punto fijo atractor no estable. 39
1.2. Diagrama de atractores. 40
1.3. Ejemplo de atractores no estables. 41
1.4. Ejemplo de asintóticamente estable no atractor global. 41

2.1. Índice en el infinito para $k = 1{,}1$. 67
2.2. Octante invariante para F^4. 68
2.3. Dinámica de la iterada F^4 de Szlenk. 69
2.4. Aplicación ϕ del Lema 2.4.2. 72

3.1. Aplicación Φ caso valores propios reales y mismo signo 84
3.2. Aplicación Φ caso valores propios reales y signo distinto 85
3.3. Aplicación Φ caso valores propios iguales 85
3.4. Aplicación Φ caso valores propios complejos . . 85
3.5. Aplicaciones Φ y Φ_π correspondientes a la fig. 3.1 86
3.6. Aplicaciones Φ y Φ_π correspondientes a la fig. 3.2 86

3.7. Aplicaciones Φ y Φ_π, para una matriz con valor propio doble negativo 87

4.1. Construcción de abiertos U. 122
4.2. Cómo hacer suave un homeomorfismo en una frontera 126
4.3. Ejemplo de generalización de rayo invariante . . 128
4.4. Construcción de los embebimientos 131
4.5. Construcción del difeomorfismo H difeotópico a la identidad 132
4.6. Construcción de abiertos U. 135
4.7. No puede existir rayo invariante γ 154

Bibliografía

[1] B. Alarcón, V. Guíñez y C. Gutierrez. Hopf bifurcation at infinity for planar vector fields. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 17(2), 247–258, 2007.

[2] B. Alarcón, V. Guíñez y C. Gutierrez. Planar embeddings with a globally attracting fixed point. *Nonlinear Analysis*, 69, 140–150, 2008.

[3] B. Alarcón, C. Gutierrez y J. Martínez-Alfaro. Planar maps whose second iterate has a unique fixed point. *J. Difference Eqns.*, 14(4),421–428, 2008.

[4] N. P. Bhatia y G. P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 2002.

[5] M. Brown. A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs. *Houston J. Math.*, 10(1), 35–41, 1984.

[6] M. Brown. Homeomorphisms of two-dimensional manifolds. *Houston J. Math.*, 11(4), 455–469, 1985.

[7] M. Brown. On the fixed point index of iterates of planar homeomorphisms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 108(4), 1109–1114, 1990.

[8] B. Campos y J. Martínez Alfaro. Bifurcations of Links of Periodic Orbits in Mathieu Systems. *Progress of Theoretical Physics*, 104(1), 1–21, 2000.

[9] J. Campos. Massera's theorem for monotone dynamical systems in three dimensions. *J. Math. Anal. Appl.*, 269, 607–615, 2002.

[10] J. Campos y P. Torres. On the structure of the set of bounded solutions on a periodic Liénard Equations. *Proc. Amer. Math. Society*, 127(5), 1453–1462, 1999.

[11] N. V. Chau y C. Gutierrez. On nonsingular polynomial maps of $\mathbb{R}^2$. *Ann. Polon. Math.*, 88(3), 193–204, 2006.

[12] N. V. Chau y C. Gutierrez. A remark on an eigenvalue condition for the global injectivity of differentiable maps of $\mathbb{R}^2$. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 17(2), 397–402, 2007.

[13] A. Cima, A. Gasull y F. Mañosas. The Discrete Markus-Yamabe Problem. *Nonlinear Analysis*, 35, 343–354, 1999.

[14] A. Cima, A. van den Essen, A. Gasull, E. Hubbers y F. Mañosas. A polynomial counterexample to the

Markus-Yamabe Conjecture. *Advances in Mathematics*, 131(A1971673), 453–457, 1997.

[15] M. Cobo, C. Gutierrez y J. Llibre. On the injectivity of C^1-maps of the real plane. *Canad. J. Math.*, 54(6), 1187–1201, 2002.

[16] B. Coll, A. Gasull y R. Prohens. On a criterium of global attraction for discrete dynamical systems. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 5(3), 537–550, 2006.

[17] W. de Melo y J. Palis Jr. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. IMPA, 1978.

[18] F. Dillen. Polynomials with constant hessian determinant. *J. Pure and Applied Algebra*, 71, 13–18, 1991.

[19] E. N. Dancer y R. Ortega. The index of Lyapunov stable fixed points in two dimensions. *J. Dynamics and Diff. Equations*, 6(4), 631–637, 1994.

[20] A. Fernandes, C. Gutierrez y R. Rabanal. On local diffeomorphisms of $\mathbf{R}^n$ that are injective. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 4(2), 255–262, 2003.

[21] A. Fernandes, C. Gutierrez y R. Rabanal. Global asymptotic stability for differentiable vector fields of $\mathbb{R}^2$. *J. Differential Equations*, 206(2), 470–482, 2004.

[22] R. Fessler. A solution of the two dimensional global asymptotic jacobian stability conjecture. *Annales Polonici Mathematici*, 62, 45–75, 1995.

[23] J. Franks. Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 8 *(Charles Conley Memorial Issue), 99–107, 1988.

[24] J. Franks. A new proof of the Brouwer plane translation theorem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 12(2), 217–226, 1992.

[25] L. Guillou. A generalized translation theorem for free homeomorphisms of surfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(10), 3243–3250, 1995.

[26] C. Gutierrez. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12(6), 627–671, 1995.

[27] C. Gutierrez y R. Rabanal. Injectivity of differentiable maps $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ at infinity. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 37(2), 217–239, 2006.

[28] C. Gutierrez y A. Sarmiento. Injectivity of C^1 maps $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ at infinity and planar vector fields. *Astérisque*, 287, xviii, 89–102, 2003. Geometric methods in dynamics. II.

[29] C. Gutierrez y M. A. Teixeira. Asymptotic stability at infinity of planar vector fields. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 26(1), 57–66, 1995.

[30] Hartman P. *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., 1964.

[31] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, New York, 1976.

[32] M. W. Hirsch y S. Smale *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.

[33] A. Katok y B. Hasselblatt *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge Uni. Press, New York, 1995.

[34] J. P. LaSalle. *The Stability of Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. With an appendix: "Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations" by Z. Artstein, Regional Conference Series in Applied Mathematics.

[35] P. Le Calvez y A. Sauzet. Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer. *Topology*, 33(2), 331–351, 1994.

[36] P. Le Calvez y J. C. Yoccoz. Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Annals of Mathematics*, 146, 241–293, 1997.

[37] P. Le Calvez. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice>1. *Topology*, 38(1), 23–35, 1999.

[38] P. Le Calvez. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4e série*, 36, 139–171, 2003.

[39] P. Le Calvez. Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer. *Comment. Math. Helv.*, 79, 229–259, 2004.

[40] F. Le Roux. Migration des points errants d'un homéomorphisme de surface. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(3), 225–230, 2000.

[41] F. Le Roux. Homéomorphismes de surfaces: théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable. *Astérisque.*, 292, vi+210, 2004.

[42] L. Markus y H. Yamabe. Global stability criteria for differential systems. *Osaka Math. J.*, 12, 305–317, 1960.

[43] R. F. Martins. *Dinâmica de sistemas dissipativos e não-autónomos com uma coordenada angular*. PhD thesis, Universidade de Lisboa, 2005.

[44] P. Murthy. Periodic solutions of two-dimensional forced systems: The Massera theorem and its extension. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 10(2), 275–302, 1998.

[45] Nakajima F. and Seifert G. *The number of periodic solutions of* $2-$*dimensional periodic systems*, *J. Diff. Eqns*, 49, 430-440, 1983.

[46] C. Olech. On the global stability of an autonomous system on the plane. *Contributions to Differential Equations*, 1, 389–400, 1963.

[47] C. Olech. Global phase-portrait of a plane autonomous system. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 14(fasc. 1), 87–97, 1964.

[48] R. Ortega. A criterion for asymptotic stability based on topological degree. *World Congress of Nonlinear Analysts '92, Vol. I–IV (Tampa, FL, 1992).* De Gruyter, Berlin, 383–394,1996.

[49] R. Ortega. Some applications of the topological degree to stability theory. *Topological methods in differential equa-*

tions and inclusions (Montreal, PQ, 1994), Kluwer Acad. Publ. 472, 377–409, 1995.

[50] Ortega R. and Zitan A. *Existence of asimptotically stable periodic solutions of a forced equations of Lienard Type*, *Nonlinear analysis, Theory, Methods and Applications*, 22, 8, 993-1003, 1994.

[51] Pliss, V.A. *Nonlocal problems of the theory of oscillations Academic Press New York and London*, 1966.

[52] C. Robinson. *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics and Chaos.* CRC Press, 1999.

[53] F. R. Ruiz del Portal. Planar isolated and stable fixed points have index=1. *J. Differential Equations*, 199(1), 179–188, 2004.

[54] F. R. Ruiz del Portal y J. M. Salazar. A stable/unstable manifold theorem for local homeomorphisms of the plane. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 25, 301–317, 2005.

[55] F. R. Ruiz del Portal y J. M. Salazar. A Poincaré formula for the fixed point indices of the iterates of arbitrary planar homeomorphisms. *Preprint.*

[56] E. E. Slaminka. A Brouwer translation theorem for free homeomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 306(1), 277–291, 1988.

[57] A. van den Essen. *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, volume 190 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[58] A. van den Essen y E. Hubbers. Chaotic polynomial automorphisms: Counterexamples to several conjectures. *Advances in Applied Mathematics*, 18(AM960516), 382–388, 1997.