

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

LA MEDIA ARITMÉTICA: ASPECTOS COGNITIVOS, ESTRATEGIAS, ERRORES Y DIFICULTADES EN SU COMPRENSIÓN POR EL ALUMNADO.

Memoria para la obtención del grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Alexandre Joaquim Garrett

Septiembre 2008

Juan Antonio García Cruz, Profesor Titular de Didáctica de la Matemática, del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna,

CERTIFICA que la presente memoria titulada "LA MEDIA ARITMÉTICA: ASPECTOS COGNITIVOS, ESTRATEGIAS, ERRORES Y DIFICULTADES EN SU COMPRENSIÓN POR EL ALUMNADO", ha sido realizada bajo mi dirección por el Licenciado en Educación en la especialidad de Matemática don Alexandre Joaquim Garrett, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste a los efectos oportunos, firmo el presente certificado en La Laguna, a 9 de junio de 2008.

Dedicatorias

A Dios, por haberme dado salud a lo largo de este recorrido y permitir lograr mis objetivos.

A mis queridos y entrañables hijos, Jodmilson, Prisley y Jacqueline, por el sacrificio que consentisteis y por los años que os he robado de nuestra convivencia.

A Ana Paula, mi amor y compañera, por haber soportado mi ausencia a lo largo de estos años.

A mis hermanos y amigos, por la fuerza y motivación que me habéis dado para culminar esta trayectoria.

Agradecimientos

A Dios, por haberme dado salud, fuerza y valor para consumar estos estudios.

A mis hijos, Jodmilson, Prisley y Jacqueline, luces que me dieron fuerza, siempre y cuando necesitase de aliento. Espero que algún día podamos decir que valió la pena todo el sacrificio consentido a lo largo de estos años y podamos disfrutar de sus resultados.

A mi querida esposa Ana Paula, por haber sabido comprender esta separación y actuar como madre y padre de nuestros hijos. A ti mi eterna gratitud, pues sin su comprensión hubiera sido casi imposible llegar al final de este objetivo.

A mis hermanos, Edú, Bela, Sónia y Agostinho, por todo vuestro apoyo y por el ánimo que me habéis dado para continuar mi formación.

A Victor Silva, mi compadre, por la atención y colaboración en la solución de los diversos asuntos.

A mis colegas del Instituto Superior de Ciencias de la Educación-ISCED-Luanda, en especial a Biya, a Das Dores, a Vandunén, y a Augusto de Oliveira, por su disposición para solucionar mis asuntos ante nuestro patronato laboral.

Especial agradecimiento a mi Director de Tesis, Dr. Juan Antonio García Cruz, por su sabia dirección y orientación, y sobre todo por su paciencia en revisar el trabajo. Mi profundo agradecimiento por haberme dado la oportunidad de realizar esta tesis.

Al Dr. Pablo González Vera, por todo su apoyo incondicional, orientación y colaboración siempre y cuando lo necesité.

A ti Israel Alonso, por compartir conmigo los primeros pasos en esta investigación, y por toda su contribución.

A Pepi Perdomo, mi entrañable colega, por su disposición en colaborar en lo que fuese preciso y por su amistad.

A Pablo Lorenzo, por la valiosa ayuda en cuestiones técnicas y administrativas.

A Alicia Bruno y Mercedes Palarea, por sus excelentes contribuciones y comentarios para la mejora de esta memoria.

A todos los profesores del Departamento de Análisis Matemático y en especial los del área de Investigación en Didáctica de la Matemática, por sus aportaciones y comentarios al trabajo en sus diferentes fases.

A todos, que por algún motivo olvidé mencionar aquí, mi grato reconocimiento y agradecimiento por la colaboración directa o indirecta en el desarrollo de este trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN……. I

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción…… 1

1.2. La investigación en educación estadística……..... 1

1.3. La enseñanza y aprendizaje estadística como un componente cultural…….. 5

1.4. El problema general de investigación……..... 6

1.5. Caracterización de la investigación……..... 8

1.6. La estadística en los currículos escolares en Angola……..…… 11

1.6.1. Contexto geográfico y socio-político……..…..... 11

1.6.2. Estructura del Sistema de Educación……..…….……..... 14

1.6.3. Los contenidos estadísticos en los currículos de Angola..... 17

1.7. Antecedentes de investigaciones sobre la media aritmética……... 25

1.7.1. Breve reseña histórica sobre los orígenes de la estadística……. 26

1.7.2. Algunos aspectos sobre la fenomenología histórica de la media aritmética..... 28

1.7.3. Investigaciones sobre la comprensión de la media aritmética..... 32

1.8. Delimitación del problema. Objetivos, hipótesis y preguntas de investigación…….… 41

CAPITULO 2: FUNDAMENTOS TEÓRICOS. MARCO CONCEPTUAL

2.1. Introducción…… 49

2.2. La comprensión en educación matemática……. 50

2.2.1. Los puntos de vista de Skemp y su evolución……..... 51

2.2.2. La comprensión como desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos……. 53

2.2.2.1. Relaciones entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental…… 54

2.2.3. La comprensión como un acto de superar los obstáculos epistemológicos…… 58

2.2.4. La comprensión desde la perspectiva de construcción de las concepciones operacionales y estructurales……. 60

2.2.5. La comprensión y la formación de imágenes y definiciones del concepto……. 64

2.2.6. La comprensión y el significado de los objetos matemáticos…….. 65

2.2.6.1. Componentes de significado de los objetos matemáticos…… 66

2.2.6.2. Dimensiones institucional y personal del conocimiento..... 67
2.2.6.3. Significado y comprensión……... 69
2.3. Marco conceptual…….. 70
2.3.1. La taxonomía SOLO. Caracterización jerárquica de la comprensión de los estudiantes…… 70
2.3.2. Nociones sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas…… 80
2.3.2.1. Dificultades…… 80
2.3.2.2. Obstáculos……. 83
2.3.2.3. Errores…… 86
2.3.3. La ingeniería didáctica…… 88
2.3.3.1. La ingeniería didáctica como metodología de investigación…… 89
2.3.3.2. Fases de la metodología de la ingeniería didáctica…….. 90

CAPITULO 3: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN
3.1. Introducción…….. 95
3.2. Diseño de investigación y sus fases…….. 96
3.2.1. Fase exploratoria……. 96
3.2.2. Fase general…… 98
3.2.2.1. El primer estudio de la fase general de investigación……..... 99
3.2.2.2. El segundo estudio de la fase general de investigación…… 101
3.2.2.3. El tercer estudio de la fase general de investigación…… 102
3.3. Metodología en el análisis de la validez de contenido, índice de dificultad y fiabilidad del los cuestionarios…… 104
3.3.1. Validez de contenido…… 105
3.3.2. Índice de dificultad de los ítems……..... 106
3.3.3. Fiabilidad. Coeficientes de fiabilidad. Estimaciones de los coeficientes de fiabilidad……... 107

CAPÍTULO 4: FASE EXPLORATORIA
4.1. Introducción…… 113
4.2. Desarrollo de un cuestionario de evaluación de la media aritmética……..... 113
4.2.1. Características del cuestionario……... 115

4.2.2. Problemas que integran el cuestionario y sus descripciones…….. 116
4.2.3. Validez y fiabilidad del cuestionario……. 124
4.2.3.1. Sobre la validez de contenido…….…….. 124
4.2.3.2. Índice de dificultad de los ítems……... 125
4.2.3.3. La fiabilidad de los cuestionarios en fase exploratoria…….… 127
4.3. El estudio comparativo……... 128
4.3.1. Metodología……. 128
4.3.1.1. Muestra……. 128
4.3.1.2. Instrumento de recogida de datos……. 130
4.3.1.3. Análisis de datos…….…….. 131
4.3.2. Resultados…… 138
4.3.3. Análisis de las actuaciones de los estudiantes en los problemas relacionados de respuesta abierta y de elección múltiple……...……..…….. 163
4.4. Conclusiones sobre la fase exploratoria……. 172

CAPITULO 5: EL PRIMER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACION
5.1. Introducción……..……. 177
5.2. Primer estudio de la fase general de investigación…….…... 179
5.2.1. Metodología…… 179
5.2.1.1. Muestra…… 179
5.2.1.2. Instrumento de recogida de datos……. 180
5.2.1.3. Descripción del cuestionario desarrollado para la fase general…… 182
5.2.1.4. Análisis y categorización de las respuestas…….. 193
5.3. Resultados del primer estudio de la fase general…….. 215
5.4. Análisis de las actuaciones de los estudiantes en los problemas relacionados de respuesta abierta y de elección múltiple……..... 250
5.5. Resultados globales del cuestionario…….……. 257
5.5.1. Análisis de la puntuación total del cuestionario…….. 257
5.5.2. Diferencias por especialidades entre los alumnos universitarios…… 262
5.5.3. Análisis del índice de dificultad de los ítems…….. 264
5.5.4. Análisis de la fiabilidad del cuestionario……. 267
5.6. Conclusiones sobre el primer estudio de la fase general…….…….. 269

CAPÍTULO 6: SEGUNDO ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN: ENTREVISTAS. ANÁLISIS DE LOS ORÍGENES DE LAS DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES.
6.1. Introducción…… 271
6.2. Segundo estudio de la fase general de investigación: entrevistas……..… 271
6.2.1. Metodología……. 273
6.2.1.1. Muestra……..…... 273
6.2.1.2. Procedimiento en el análisis de las entrevistas…….……..... 273
6.2.2. Resultados en el análisis de las entrevistas…….……. 275
6.3. Análisis de los orígenes de algunas dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la media aritmética…… 324
6.4. Conclusiones……...… 331

CAPITULO 7: EL TERCER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN: DESARROLLO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA SOBRE LA MEDIA ARITMÉTICA
7.1. Introducción…… 337
7.2. Diseño de la propuesta de enseñanza sobre la media aritmética…… 338
7.3. Descripción de las sesiones…… 344
7.3.1. Sesión 1…….. 344
7.3.2. Sesión 2……... 349
7.3.3. Sesión 3……... 355
7.3.4. Sesión 4…….. 359
7.3.5. Sesión 5…….. 365
7.3.6. Sesión 6……... 371
7.4. Otras tareas que integraban el programa de experimento de enseñanza.……... 374
7.5. Análisis del efecto de la enseñanza sobre la comprensión de los contenidos impartido… 377
7.5.1. Resultados…… 378
7.6. Conclusiones sobre la propuesta de enseñanza…….. 400

CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES, APORTACIONES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA
8.1. Introducción……...……. 405

8.2. Conclusiones sobre los objetivos de la fase exploratoria…….…….. 406
8.3. Conclusiones sobre los objetivos de la fase general…….……. 407
8.4. Conclusiones sobre las hipótesis de la fase general……..……. 417
8.5. Aportaciones del estudio…….……... 420
8.6. Implicaciones de la investigación…….……. 422
8.7. Limitaciones y perspectivas futuras…….…….. 422

REFERENCIAS……..……. 425

ANEXOS
Anexo 1: Cuestionario administrado en la fase exploratoria con los alumnos de Tenerife….. 435
Anexo 2: Cuestionario administrado en la fase exploratoria con los alumnos de Luanda…… 437
Anexo 3: Cuestionario utilizado en los estudios de la fase general de investigación……... 439
Anexo 4: Traducción al español del cuestionario utilizado en los estudios de la fase general de investigación……. 441
Anexo 5: Transcripción de las entrevistas realizadas a los alumnos que participaron en el segundo estudio de la fase general de investigación, según el idioma original (portugués).……..... 443
Anexo 6: Traducción al español de la transcripción de entrevistas realizadas en el segundo estudio de la fase general de investigación……..... 474
Anexo 7: Transcripción, en portugués, de entrevistas realizadas a los alumnos que participaron en el experimento de enseñanza sobre la media aritmética…….….. 505
Anexo 8: Traducción al español de la transcripción de entrevistas realizadas en el tercer estudio de la fase general de investigación…… 523

INTRODUCCIÓN

Esta Memoria está dedicada a la comprensión de la *media aritmética*, un concepto de gran importancia no sólo en estadística sino también en las ciencias así como en la vida diaria. La importancia de la media aritmética no es sólo una realidad actual. La historia muestra que su uso se remonta a varios siglos en el pasado, donde se utilizó en diferentes contextos, como por ejemplo en la estimación de números grandes; como reparto equitativo; como forma de seguro por la pérdida de bienes; como método para reducir errores de observación en mediciones realizadas en astronomía, en navegación, entre otros.

Sin embargo, pese a que es un concepto básico, los diversos autores que han investigado su comprensión por el alumnado, entre los que destacan Pollatsek et al. (1981), Mevarech (1983), Strauss y Bichler (1988), Leon y Zawojewski (1991), Batanero et al. (1997), Cai (1995), Mokros y Russell (1995), Watson y Moritz (1999, 2000) y Garfield, 2003), revelan que la producción del alumnado en tareas relacionadas con este concepto, presenta dificultades de diversa índole. En este sentido, nos preguntamos sobre varios aspectos del concepto. Por ejemplo, ¿se manifiestan también en nuestro alumnado los diferentes errores y dificultades descritos en aquellos estudios? ¿Qué alcance tienen y cuáles son sus principales orígenes? Al mismo tiempo, nos interesamos sobre la forma de paliar las dificultades del alumnado en la comprensión de este concepto.

Para dar respuestas a estas y otras cuestiones nos planteamos realizar un estudio centrado en el análisis de las concepciones, errores y dificultades en la comprensión de la media aritmética en una muestra de alumnos pertenecientes al sistema educativo de la República de Angola, en concreto en la ciudad de Luanda. Nuestro análisis consideró el hecho de que este contenido figura en los currículos de matemática y estadística en los diferentes niveles de enseñanza de aquel país, y que con los datos derivados de nuestra investigación, se podría facilitar la tarea educativa del profesorado. Por otro lado, también se ha considerado que, con los mismos datos se proporcionaría información a los investigadores educativos, y así poder establecer eventuales comparaciones y realizar estudios interculturales.

En definitiva, nuestra investigación intenta mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Además de contribuir en la profundización del análisis de los errores,

obstáculos y dificultades de los estudiantes y su respectiva divulgación, aporta diferentes elementos teóricos y prácticos de interés tanto al profesorado de los diferentes niveles educativos, a las autoridades educativas, así como a los investigadores de los diferentes campos de la educación matemática.

Los contenidos presentados en esta memoria se organizan en diferentes Capítulos, tal y como se indica a continuación:

En el Capítulo 1, se contextualiza el problema general de investigación. Se ofrece una panorámica sobre la investigación en educación estadística, exponemos el estado de la enseñanza de la estadística en Angola, explicando la estructura del sistema de educación y los contenidos estadísticos presentes en los currículos. Se exponen también los antecedentes de la investigación sobre la media aritmética, incluyendo un análisis fenomenológico, y finalmente delimitamos el problema de investigación, para posteriormente formular los objetivos, hipótesis y preguntas relacionados con la investigación.

El Capítulo 2 se dedica a los fundamentos que apoyan nuestra investigación. Describimos las principales teorías sobre la comprensión en educación matemática, y el marco teórico que sostiene nuestro estudio. Nociones tales como comprensión instrumental y relacional, conocimiento procedimental y conceptual, imagen del concepto, concepción estructural y operacional de un objeto matemático, y otras acepciones relativas a la comprensión, se describen allí en términos generales. El análisis de la comprensión de los alumnos se desarrolla evaluando los significados personales de los mismos sobre diferentes aspectos de la media aritmética. Por consiguiente, los significados expresados según sus respuestas, son caracterizados en niveles, utilizando la taxonomía SOLO (*structure of the observed learning outcome*) de Biggs y Collis. También, se exponen los elementos teóricos utilizados para el análisis de los orígenes de los principales errores, obstáculos y dificultades de los alumnos en la comprensión de la media aritmética y para llevar a cabo el experimento de enseñanza. Con relación a los orígenes de los errores, obstáculos y dificultades de los alumnos, acudimos básicamente a lo que se expone en Socas (1997, 2007), mientras que la teoría de Artigue (1992) sobre ingeniería didáctica, fue la base utilizada en la planificación y desarrollo del experimento de enseñanza.

En el Capítulo 3 se describe la metodología de la investigación, explicando las fases y estudios que conforman el diseño de investigación. La investigación consta de dos fases principales: La fase exploratoria y la fase general. En cada caso, se caracteriza

la esencia de cada estudio en lo que se refiere a los objetivos, población de estudio, instrumentos de recogida de datos, la metodología en el análisis de los datos y los resultados. También se describe la teoría relativa a la validez y fiabilidad de los cuestionarios utilizados en la evaluación del conocimiento de los estudiantes.

En el Capítulo 4 se resumen los datos relativos a la fase exploratoria, desarrollado durante la fase de investigación del programa de doctorado. El análisis incluye una descripción pormenorizada del cuestionario que se construyó en esta fase, y se exponen algunos resultados derivados de un estudio comparativo entre dos grupos de alumnos: uno de Tenerife y otro de Luanda (Angola).

El Capítulo 5 recoge los datos relativos al primer estudio de la fase general de investigación. El estudio se centró en la administración del cuestionario derivado de la fase exploratoria, tras ciertas modificaciones, mejoras y ampliación del mismo. Es en este Capítulo, donde caracterizamos las respuestas del alumnado según el marco teórico SOLO. Se exponen los resultados, estableciendo una comparación entre el alumnado de secundaria y el universitario, en términos de niveles de comprensión asociados a las respuestas dadas a las diferentes tareas propuestas. También, se hace un análisis detallado de las puntuaciones globales obtenidas por aplicación del cuestionario.

El Capítulo 6 recoge los datos relativos al segundo estudio de la fase general de investigación, es decir, las entrevistas, así como el análisis del posible origen de los errores, obstáculos y dificultades del alumnado en el aprendizaje de la media aritmética.

El Capítulo 7 expone el tercer estudio de la fase general de investigación, que consiste en el desarrollo de una propuesta para la enseñanza de la media aritmética. En primer lugar se explica la racionalidad del estudio y posteriormente se describe la secuencia de actividades didácticas desarrolladas en el aula y el proceso de evaluación del experimento. Se hace una valoración de los resultados obtenidos, mostrando hasta qué punto la actividad había o no resultado efectiva en la comprensión del contenido impartido.

Y finalmente, en el Capítulo 8 se recogen las principales conclusiones de esta investigación. La presentación se desarrolla considerando los objetivos e hipótesis de investigación planteados inicialmente. Se describen también las aportaciones generales del estudio, algunas implicaciones, principalmente las relacionadas con el campo de enseñanza, así como las limitaciones del estudio y las perspectivas futuras.

En la parte final de la memoria se presentan las referencias utilizadas y un Anexo que muestra diferentes medios de apoyo a la investigación.

Durante el desarrollo de nuestra investigación hemos presentado informes parciales de la misma en diferentes foros, tanto nacionales como internacionales, que mencionamos a continuación:

- XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), celebrado en Tenerife (2007), en el que se presentó un informe general sobre el estado de esta memoria de investigación.
- X Reunión Interuniversitaria sobre Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática (realizada en la Universidad de La Laguna en 2007), en la que se presentaron los resultados expuestos en García Cruz y Garrett (2007b).
- 7th International Conference on Teaching Statistics (celebrado en Salvador de Bahía-Brazil, en 2006), en la que expusimos los resultados referidos en García Cruz y Garrett (2006a).
- VII Reunión interuniversitaria sobre Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática (realizada en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, en 2005) en la que presentamos los resultados referidos en García Cruz y Garrett (2005).
- XII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas- JAEM (celebradas en Albacete, 2005), en la que presentamos los resultados referidos en García Cruz y Garrett (2007a).
- XXIV Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemática, en las que se presentaron los datos referidos en García Alonso y Garrett (2005).

Además, hemos publicado parte del trabajo de investigación, tanto en actas de congresos, como en revistas especializadas tal como se indica a continuación:

- García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2008a). Caracterización de la comprensión de algunos aspectos de la media aritmética: Un estudio con alumnos de secundaria y universitarios. *Enseñanza de la Matemática*, 3ra Etapa, Vol. 17, Nº 1 (Por aparecer).
- García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2008b). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Korea Society*

of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, Vol. 12, No. 1, pp. 49–66**.**

- García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2007b). Algunos resultados en el análisis de la comprensión de la influencia de los valores nulos en el cálculo de la media. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X.* Universidad de La Laguna. (Por aparecer).

- Garrett, A.J. y García Cruz J.A. (2007a). Algunos resultados sobre promedios con estudiantes en Luanda y Tenerife. *Actas de las XII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* 683-690. Universidad de Castilla-La Mancha. Albacete.

- García Cruz, J.A. y Garrett, A.J. (2006a). Students' Actions in Open and Multiple-Choice Questions Regarding Understanding of Averages. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, 161-168. Charles Univertity. Prague. Czech Republic.

- García Cruz, J.A. y Garrett, A.J. (2006b). On Average and Open-Ended Questions. *Proceeding of the 7th International Conference on Teaching Statistics.* International Association for Statistical Education. Salvador, Bahía, Brazil.

- Garrett, A.J. y García Cruz, J.A. (2005). Un cuestionario y estrategias sobre los promedios. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,* Vol. VII, 197-217.

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Tal como hemos señalado en la introducción de esta memoria, nuestro problema de investigación se centra en la comprensión de la media aritmética. Con la finalidad de contextualizar el problema, comenzaremos este capítulo abordando la problemática de investigación en educación estadística, y la necesidad de proveer a los ciudadanos de conocimientos estadísticos. A continuación, describiremos el problema general de investigación y su caracterización. Haremos una síntesis de la estructura del sistema de educación de Angola, país donde se ha llevado a cabo la investigación, ejemplificando la organización de los contenidos estadísticos impartidos en algunos niveles de enseñanza.

En la parte final del capítulo, describiremos algunos antecedentes relacionados con nuestra investigación, para con ello delimitar la investigación realizada, y concretar los objetivos del estudio. Finalmente, presentaremos las cuestiones e hipótesis de investigación.

1.2. LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

En los últimos años, asistimos a un aumento progresivo de investigaciones relacionadas con el estudio y comprensión de los conceptos estadísticos. Según Shaughnessy (1992, p. 465), el cruce de metodologías y tradiciones de investigación en estadística, hace que esta rama de investigación sea una de las más ricas en educación matemática a nivel teórico. Este autor comenta que los psicólogos han jugado un papel significativo en la construcción de teorías en este campo, y que los educadores matemáticos y estadísticos de todo el mundo han hecho importantes contribuciones, particularmente, en las últimas décadas.

Shaughnessy enfatiza que la investigación en este campo ha sido verdaderamente interdisciplinaria, ya que la estadística no es únicamente un dominio de los educadores matemáticos. En la misma línea, Batanero (2001) señala que la preocupación por las cuestiones didácticas y por la formación de profesionales y usuarios de la estadística ha sido una constante de los propios estadísticos, y las

investigaciones sobre el razonamiento estocástico han tenido un gran auge en el campo de la psicología.

El creciente interés de la investigación en educación estadística viene dado por la trascendencia que asume la aplicación de estos contenidos en la vida de cualquier ciudadano. Según Shaugnessy (1992) el aprendizaje de la estadística es de gran importancia, ya que los estudiantes forman parte de una sociedad, donde el uso de datos y gráficos para la comunicación y toma de decisiones es cada vez más relevante. Para convertirlos en ciudadanos informados y consumidores responsables, es necesario que estos recurran y utilicen los conocimientos adquiridos de estadística.

Es necesario que la enseñanza y aprendizaje de la estadística se oriente adecuadamente, de modo que los alumnos adquieran la preparación que les permita afrontar con perspicacia los diferentes desafíos que les esperan en la vida. El alcance de esta meta pasa por la mejora de los sistemas educativos, de forma que ayuden a suministrar a las diferentes redes escolares, los documentos básicos de orientación necesarios. Algunos pasos en esta dirección ya se han dado en algunos países, introduciendo determinados temas estadísticos en los programas de matemática de los diferentes niveles de enseñanza, mejorando los planes curriculares, dándole mayor énfasis a los contenidos estadísticos, e incluso realizando reformas generales de los sistemas de enseñanza y aprendizaje, como se refleja en los principios y estándares para la educación matemática del NCTM (2003).

Jolliffe (1998) indica que probablemente uno de los principales propósitos de la investigación en educación estadística es que sus resultados se utilicen para mejorar la práctica de la enseñanza, la comprensión e interpretación de la estadística por parte de los alumnos. Plantea, además, que la investigación debería centrarse en la enseñanza y aprendizaje de la estadística en la relación con el conocimiento estadístico. También señala que otro objetivo de la investigación lo constituye el cómo fomentar la cultura estadística (*statistical literacy*) en el mundo, es decir, encontrar la mejor forma de enseñar todo aquello que presenta hechos estadísticos, tanto al público en general, como a los consumidores específicos de estadística.

Una reseña retrospectiva sobre el interés por la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la estadística la encontramos en diferentes autores (Vere-Jones, 1995; Jolliffe, 1998; Batanero, 2001; Ottaviani, 2002). Vere-Jones (1995) señala que en 1948 se constituyó en el seno del ISI (International Statistical Institute) el Comité de Educación, como parte de una serie de cambios constitucionales, de manera que se

ampliaron las tareas del ISI hacia el ámbito educativo en estadística, colaborando en este objetivo con la UNESCO y otras agencias de las Naciones Unidas. Según este autor, aunque la educación estadística ha sido una preocupación del ISI desde su inicio, en 1885, fue el establecimiento del Comité de Educación lo que marcó el comienzo de un programa sistemático de educación. Ottaviani (2002) plantea que desde 1949, después de la segunda guerra mundial, con la fundación del Comité de la Educación Estadística, el ISI comienza a prestar más atención a la enseñanza de la estadística para alumnos de Secundaria y Bachillerato, propiciado porque en aquellos años existían las condiciones socio-económicas necesarias, principalmente en los países desarrollados. Es más, la enseñanza de las matemáticas en las escuelas empezaba a cambiar, y en consecuencia, la estadística y la probabilidad también pasaban a tener un lugar dentro de los programas de matemáticas en los niveles de enseñanza previos a la universidad. Los estadísticos tomaron conciencia de la necesidad de profundizar más en la enseñanza y el aprendizaje, así como en los problemas a los que se tenían que enfrentar los profesores de matemática al ocuparse de la enseñanza de la estadística en las escuelas.

Ottaviani subraya que en 1976, el ISI volvía a enfatizar la importancia de la enseñanza de la estadística. Además de plantear los temas de enseñanza que podían ofrecer mejores posibilidades para influir en el desarrollo futuro de la estadística, destaca, también, la necesidad de:

- Producir libros de textos universitarios, comprensivos, con actividades relacionadas con la vida cotidiana.
- Publicar una revista que ayudase a los profesores de los diferentes niveles de enseñanza a mantenerse informados.
- Organizar encuentros generales para aquellos que estuviesen interesados en la enseñanza de la estadística, que fuesen diferentes de las mesas redondas formales del ISI, para los expertos en educación estadística.

De 1979 a 1987, el Comité de Educación del ISI se preocupa de obtener resultados importantes, a través de la creación de diversas líneas de trabajo. En 1979 en el seno del Centro Internacional sobre la Educación Estadística, en la Universidad de Sheffield, se crea la publicación "Teaching Statistics", una de las más importantes revistas de didáctica de la estadística distribuida en todo el mundo. Se realiza la primera *International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 1) en 1982, en Sheffield, donde se establece que la conferencia debería realizarse de cuatro en cuatro años y se

propone la creación del *International Association for Statistical Education* (IASE). Esta organización tiene como objetivos, promover la comprensión y el desarrollo de la educación estadística y de los temas relacionados, y fomentar el desarrollo de servicios educativos eficaces, a través de contactos internacionales entre individuos y organizaciones, incluyendo educadores estadísticos e instituciones educativas. De acuerdo con el primer deseo manifestado por los participantes, se realizó el ICOTS 2 en 1986, en Canadá (Vitoria), y el ICOTS 3 en Dunedin (Nueva Zelanda), en 1990. El éxito de estas conferencias se reflejaba no sólo en el número de participantes, que crecía año tras años, sino también en el espíritu de los debates y discusiones en el curso de las actividades desarrolladas. Se daba la posibilidad a especialistas en epistemología, a psicólogos y a educadores estadísticos, de divulgar sus teorías y resultados de las investigaciones (Ottaviani, 2002). En las palabras de Vere-Jones (1995), las conferencias del ICOTS constituyeron, posiblemente, el proyecto más importante iniciado por el Comité de Educación del ISI a lo largo de su existencia, puesto que reúne a profesores de estadística de todos los niveles, dentro de todas disciplinas, y de todos los continentes y, proporciona una oportunidad luchar por los problemas sobre la enseñanza, así como luchar por la aceptación de la estadística y otros contenidos, en las escuelas, además de permitir compartir las ideas de otros participantes.

En 1991, en la Conferencia del *International Statistical Institute* (ISI), realizada en El Cairo, se decidió crear el *International Association for Statistical Education* (IASE), como una nueva sección del ISI. De acuerdo con Ottaviani (2002), una consecuencia de esta decisión fue que las actividades de la educación estadística se transfirieron al IASE. De entre las diferentes actividades, se propuso continuar con la celebración del ICOTS. Así, el comité de transición tomó la decisión de realizar el ICOTS 4 en Marruecos, en 1994. El ICOTS 5, realizado en Singapur (1998) fue la primera conferencia completamente diseñada y organizada por el IASE.

Los ICOTS continúan hasta la actualidad. Los últimos se celebraron los años 2002 y 2006, en Sudáfrica y Brasil, respectivamente.

1.3. LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE ESTADÍSTICA COMO UN COMPONENTE CULTURAL

El énfasis curricular puesto sobre el análisis de datos propuesto en los principios y estándares de la NCTM (2003) muestra cómo la estadística se reviste de gran utilidad para cualquier ciudadano en la actividad profesional y en la vida cotidiana. Diariamente, se presenta la necesidad de tomar decisiones en diferentes facetas de la vida, tales como la política, la actividad social, la biología, etc. Los políticos y gobernantes necesitan informaciones sobre diversos fenómenos, tales como los censos, encuestas, previsión de resultados electorales, análisis de tasas de población, emigración/inmigración, estadísticas demográficas, etc.

En la actividad social son constantes las situaciones que exigen el análisis de datos. En los medios de comunicación, en el deporte, en las escuelas, en el trabajo, en la familia, encontramos diversas situaciones donde el análisis de datos es una realidad. En la investigación, en las encuestas sobre consumo, en el estudio de mercado de los productos, en los sondeos de opinión para definir estrategias comerciales, en los experimentos para valorar la seguridad y eficiencia de nuevos medicamentos y tratamientos médicos, la estimación de la duración, intensidad y extensión de los fenómenos naturales, son ejemplos de aplicación estadística en la vida.

Esta gran amplitud en su aplicabilidad, hace que se recomiende su enseñanza desde la escuela primaria, tal como lo indica Holmes [1980, citado en Batanero (2002)], puntualizando que:

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.
- Es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Asimismo, y con el propósito de reconocer el papel del conocimiento estadístico en la formación básica, se ha venido forjando el término "*statistics literacy*", que es traducido como "cultura estadística". Gal (2002) define "*statistics literacy*" como "la capacidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente la información, los argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos, que se pueden encontrar en diversos contextos; y su capacidad de discutir o comunicar sus reacciones ante tal información estadística, cuando son relevantes; su comprensión sobre el significado de la información; sus opiniones sobre las implicaciones de esta información; o sus preocupaciones respecto a la aceptación de una conclusión dada. Esta capacidad y comportamientos no se hallan en sí mismas, se componen de varios conocimientos básicos y disposiciones interrelacionados". Según él, la cultura estadística puede servir al individuo y a su comunidad de muchas formas, ya que es necesaria para que el individuo esté conciente de las tendencias y fenómenos de la sociedad, bien como su importancia personal.

Lo anterior justifica plenamente por qué es necesario educar a las nuevas generaciones en los componentes básicos, conceptuales y procedimentales, de la estadística, tal como sugieren los principios y estándares para la educación matemática de la NCTM (2003).

1.4. EL PROBLEMA GENERAL DE INVESTIGACIÓN

La media aritmética es un contenido cuya incorporación a los currículos de enseñanza, en los diferentes países, se ha generalizado en los últimos años. Su instrucción no sólo se realiza en los niveles de secundaria y primeros cursos universitarios, sino que también es una práctica común en los primeros cursos escolares de la mayoría de los países.

Como indican Cobo y Batanero (2004a), el campo de aplicación de la media aritmética abarca diferentes áreas y su comprensión forma parte de la cultura estadística básica.

En la actualidad asistimos a un aumento considerable de publicaciones e investigaciones relacionadas con la media aritmética, con la finalidad de ayudar al alumnado a comprender las ideas asociadas a este concepto, lo que no es una tarea fácil,

puesto que es necesario adaptar dichas ideas a sus capacidades cognitivas y diseñar situaciones didácticas que propicien su aprendizaje significativo (Batanero, 2000).

El estudio central de nuestra investigación es el concepto de media aritmética. Pretendemos profundizar en el análisis sobre la comprensión y los conocimientos del alumnado sobre la media aritmética; profundizar en los orígenes de las dificultades, errores y obstáculos en la adquisición de este concepto; ampliar el análisis de las estrategias del alumnado al resolver un problema relacionado con la media aritmética; examinar sus acciones en los problemas de respuesta abierta y de elección múltiple; y desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza de la media aritmética.

El estudio de la media aritmética no es un tópico nuevo, distintas investigaciones lo abordan y analizan las concepciones del alumnado sobre el mismo. Nuestro trabajo pretende ser una aportación que proporcione información sobre la adquisición de este concepto, con alumnado de Luanda (Angola). A priori, nuestros hallazgos pueden ser de interés para los profesores, didactas y autoridades de Angola, y en general, para toda la comunidad investigadora, ya que nuestros datos pueden ser útiles para contrastar información y realizar estudios interculturales. Esta línea de trabajo, concuerda con las propuestas de Shaughnessy (1992) relativas a las futuras áreas de investigaciones en estocástica. Este autor manifiesta una ausencia de estudios interculturales, ya que las investigaciones sobre las concepciones de los estudiantes en estocástica se han realizado principalmente en países occidentales, y se pregunta si los errores son propios de la cultura occidental o aparecen también en otras culturas. Sugiere, que es interesante averiguar si los errores en la estadística y la probabilidad se mantienen al cambiar de culturas.

Desde el año 2004 venimos realizando investigaciones en el campo de la media aritmética, donde destacamos un estudio piloto, que ha sido fundamental para la superación de la fase investigadora del programa de doctorado 2003-2005. El trabajo consistió en el desarrollo de un instrumento de evaluación del razonamiento del alumnado sobre la media aritmética, sus concepciones, errores y dificultades, y ha sido administrado a estudiantes de cursos previos a la universidad, en Luanda (Angola) y en Tenerife (España). El trabajo se realizó tomando como marco referencial, el estudio de Garfield (2003). Los resultados obtenidos indicaron diferentes grados de dificultades del alumnado en la comprensión de este concepto y en particular, se observaron mayores dificultades en la muestra de Luanda. Esta constatación fue una de las principales

razones que nos motivó a seguir con la investigación en Angola, con el fin de ampliar y profundizar el estudio preliminar.

Al respecto, seleccionamos estudiantes de enseñanza secundaria y universitaria, estos últimos cursaban especialidades para ejercer la docencia en escuelas primarias y secundarias, a los que se les administró un cuestionario que fue diseñado para este fin, y posteriormente, se realizaron entrevistas audiograbadas, que nos permitieron extendernos con más detalles en el conocimiento de determinados procesos, tras la aplicación del cuestionario. Estas observaciones, a pesar de no ser generalizables a todos los alumnos, aportan informaciones valiosas sobre las concepciones, errores y dificultades de los alumnos respecto al concepto de la media aritmética.

Para completar el estudio llevamos a cabo un experimento de enseñanza, concerniente a la media aritmética. El principal propósito de esta tarea consistió en proporcionar a los alumnos una construcción significativa del conocimiento y así poder ofrecer una propuesta didáctica de enseñanza de este contenido.

Nuestra investigación se enmarca en las diferentes teorías sobre la comprensión que nos ayudan a explicar las actuaciones de los alumnos, analizar jerárquicamente la complejidad estructural de sus respuestas a determinadas tareas, y hacer una caracterización de las respuestas proporcionadas por los estudiantes. Para este fin integramos diferentes marcos teóricos, relativos al desarrollo cognitivo de los alumnos, de los que destacamos la taxonomía SOLO, de Biggs y Collis (1982, 1991).

1.5. CARACTERIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Desde una perspectiva general, nuestra investigación es de carácter educativo. Está dirigida hacia el desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos científicos acerca de la educación, que podría capacitar a los educadores para determinar qué tipo de enseñanza y qué condiciones de aprendizaje deben proporcionar a los alumnos para obtener aprendizajes satisfactorios. Pretende un mejor entendimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje y de las condiciones en las cuales se puede realizar para obtener una óptima eficacia.

Esta visión, se corresponde plenamente con el planteamiento de Gutiérrez (1991) en lo que se refiere a qué debe pretender una investigación en educación matemática. Él, señala que si tomamos como punto de partida la idea que todos tenemos de la investigación como un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al

descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema, resulta entonces que sus características primarias deben ser: a) el perfeccionamiento de las actuales formas de actuación de los profesores de matemáticas y la búsqueda de otras nuevas, con el objetivo final de promover una mejor enseñanza de herramientas y conceptos matemáticos a los estudiantes; y b) el logro de una mejor comprensión de los mecanismos mentales ligados a la actividad de aprendizaje de las matemáticas, para así poder organizar buenos entornos formativos para los estudiantes y poder proporcionarles los medios necesarios para facilitar su aprendizaje.

Gutiérrez (1991) caracteriza los siguientes tipos de trabajos en didáctica de las matemáticas:

- Trabajos de elaboración de teorías de enseñanza o aprendizaje de las matemáticas, que son investigaciones laboriosas y complejas que deben abordar las diferentes componentes matemáticas, psicologías y pedagógicas que intervienen en los procesos de comprensión y aprendizaje de las Matemáticas: procesos y capacidades de razonamientos, estrategias de enseñanza, niveles de comprensión, obstáculos en el aprendizaje, formación o modificación de redes conceptuales, etc.
- Trabajos de profesores que deciden completar o sustituir el contenido del libro de texto y elaboran bloques de actividades o planes de enseñanza complementaria con los que intentan mejorar la eficiencia de su enseñanza y la profundidad del aprendizaje de sus alumnos. En este caso, no siempre se puede hablar de una actividad de investigación, sino más bien de innovación o experimentación didáctica, pues faltan algunas componentes importantes de la actividad investigadora: una planificación cuidadosa que tenga en cuenta los conocimientos disponibles sobre el tema y no sólo la experiencia personal acumulada por el profesor; la inclusión del trabajo que se va a realizar dentro de un marco conceptual concreto que permita analizarlo y relacionarlo con otras investigaciones sobre el mismo tema; un amplio conocimiento (didáctico y matemático) del tema de estudio, para identificar los orígenes de las dificultades de aprendizaje, una verificación objetiva de los logros alcanzados, más allá de la situación personal o los resultados de los exámenes. No debe deducirse que este tipo de actividad de los profesores de matemáticas sea poco interesante; al contrario, el trabajo de innovación realizado por los profesores es imprescindible

para mejorar la calidad de la formación matemática de los estudiantes, pues en muchas ocasiones, es el medio de conexión de la investigación con la docencia cotidiana y, en todo caso, significa un interés de perfección muy deseable en los profesores.

- Entre estos dos tipos de trabajo se encuentra la actividad que realizan la mayoría de los investigadores, consistente en estudiar alguna parcela de la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, haciendo un análisis de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus formas de comprensión de conceptos o las dificultades que se encuentran, desarrollando métodos de enseñanza, etc. Por lo general, se trata de investigadores individuales o que forman pequeños equipos ubicados en departamentos universitarios y centros de investigación. Estas personas o equipos no trabajan aislados, pues otra característica de la actividad investigadora es el flujo de información que circula entre los diversos miembros de la comunidad internacional interesada por un mismo tema; son las comunicaciones en congresos, los artículos en revistas y los contactos personales.

Si seguimos esta caracterización, nuestro trabajo se enmarca en la última descripción, puesto que, pretendemos profundizar en la comprensión de diferentes aspectos cognitivos sobre el concepto de media aritmética en un grupo de estudiantes en Luanda, profundizar en los errores y dificultades que cometen en este proceso, analizar sus comportamientos según la naturaleza del problema, y así ofrecer una propuesta didáctica para la enseñanza de estos contenidos. La actividad permitiría facilitar información o conocimiento obtenido a toda comunidad investigadora, para establecer comparaciones, ya que poco, o casi nada, se sabe sobre los errores y dificultades de los estudiantes angoleños en este tema. De igual forma, ayudaría a los responsables educativos, didactas y profesores a tomar decisiones que lleven a una educación más eficaz.

En cuanto al modelo de investigación, tratamos de conjugar los métodos y las técnicas de los paradigmas cuantitativos y cualitativos, principalmente, porque pretende analizar aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual adquiridos por los estudiantes. Hemos administrado un cuestionario a diversos grupos de estudiantes, y la interpretación de sus respuestas nos ha permitido establecer diferentes categorías para el análisis de las concepciones, los errores, las dificultades y las estrategias utilizadas. Con las entrevistas semiestructuradas se profundizó en los resultados y conjeturas obtenidos

con la aplicación del cuestionario, mientras que al realizar un experimento de enseñanza con un grupo de alumnos se pretendió estudiar los resultados de una forma de enseñanza centrada, fundamentalmente, en el debate y en la discusión, y que lleva al alumno a participar activamente en la búsqueda de las soluciones de las tareas propuestas.

1.6. LA ESTADÍSTICA EN LOS CURRÍCULOS ESCOLARES EN ANGOLA

En este apartado contextualizamos el Sistema Educativo en Angola, ofreciendo inicialmente una visión general del contexto socio-político y geográfico, y posteriormente, proporcionamos un panorama general sobre los currículos oficiales en algunos niveles de enseñanza, destacando solamente los contenidos estadísticos. Estas ideas ayudarán a comprender el estado actual del proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística en los diversos niveles y su posible influencia en la comprensión de los estudiantes.

1.6.1. CONTEXTO GEOGRÁFICO Y SOCIO-POLÍTICO

Angola, es un país localizado en la parte austral de África, con una superficie de 1.246.700 km^2, con una población estimada de 15.000.000 de habitantes. Es un país en donde predominan varios dialectos, siendo el portugués el idioma oficial y de comunicación entre todos los angoleños. La enseñanza formal, se realiza en el idioma oficial, aunque en la actualidad se ha abierto un debate generalizado sobre la posibilidad de incluir algunos dialectos como idiomas de comunicación en algunas escuelas.

Durante cinco siglos, Angola ha sido colonia de Portugal y en 1975 conquistó su independencia. La ley constitucional de este país, consagra la educación como un derecho de todos los ciudadanos, independientemente de su sexo, raza, etnia o religión. Dos años después de la independencia nacional, es decir, en 1977, se aprobó un nuevo Sistema Nacional de Educación y Enseñanza que fue efectivo a partir de 1978. Según se indica en el documento del ministerio de la educación, MED (2003), este nuevo sistema estaba regido por los siguientes principios generales:

- Igualdad de oportunidades para todos, en el acceso y continuidad de los estudios.
- Enseñanza gratuita en todos los niveles.
- Perfeccionamiento constante del personal docente.

La enseñanza se dividió en varios subsistemas de enseñanza:

- Enseñanza general básica, constituida por ocho cursos, de los cuales los cuatro primeros eran obligatorios.
- Enseñanza preuniversitaria, con tres cursos.
- Enseñanza media, con una duración de cuatro cursos, constituida por dos ramas (técnica y normal).
- Enseñanza superior (Universitaria).

Como consecuencia de las diferentes situaciones socio-políticas, principalmente las resultantes del escenario de guerra que vivió el país, tales como el abandono de determinadas localidades por las poblaciones, la destrucción de escuelas y diversas infraestructuras, el éxodo poblacional a las ciudades grandes, el abandono del campo, etc., el Ministerio de Educación realiza, en 1986, un diagnóstico del Sistema de Educación, y analiza los puntos débiles del mismo. De acuerdo con ese análisis, se concluyó que urgía la necesidad de una reforma del Sistema Educativo, creándose de esta forma la denominada Ley de Bases del Sistema de Educación, (Ley 13, de 31/12/2001), que fue aprobada por los órganos del poder legislativo y publicada en el diario oficial de la República.

Esta Ley establece en su capítulo I, que:

1. La educación constituye un proceso que tiene como objetivo preparar al individuo para las exigencias de la vida política, económica y social del país y que se desarrolla en la convivencia humana, en el círculo familiar, en las relaciones de trabajo, en las instituciones de enseñanza y de investigación científico-técnica, en los órganos de comunicación social, en las organizaciones comunitarias, en las organizaciones filantrópicas y religiosas y a través de manifestaciones culturales y deportivas.

2. El sistema de educación es el conjunto de estructuras y modalidades, a través de las cuales se realiza la educación, tendentes a la formación armónica e integral del individuo, con vista a la construcción de una sociedad libre, democrática, de paz y progreso social.

En cuanto a los objetivos generales de la educación, el documento apunta los siguientes.

a) desarrollar armoniosamente las capacidades físicas, intelectuales, morales, cívicas, estéticas y laborales de la nueva generación, de manera continua y sistemática y elevar su nivel científico, técnico y

tecnológico, con el fin de contribuir al desarrollo socio-económico del país.

b) Formar un individuo capaz de comprender los problemas nacionales, regionales e internacionales de forma crítica y constructiva para su participación activa en la vida social, a la luz de los principios democráticos.

c) Promover el desarrollo de la conciencia personal y social de los individuos en general y de la joven generación en particular, el respeto por los valores y símbolos nacionales, por la dignidad humana, por la tolerancia y cultura de paz, la unidad nacional, la preservación del medio ambiente y la consecuente mejora de la calidad de vida;

d) Fomentar el debido respeto a los demás individuos y a los superiores intereses de la nación angoleña en la promoción del respeto y del derecho a la vida, a la libertad y a la integridad personal;

e) Desarrollar el respeto de solidaridad entre los pueblos, en actitud de respeto por la diferencia de los demás, permitiendo una saludable integración en el mundo.

En el mismo documento se plantean los principios generales del Sistema de Educación, en el que destacan los principios de integridad, laicidad, carácter democrático y gratuito, obligatoriedad y el uso del idioma oficial en la enseñanza.

Así, se indica que el Sistema de Educación es integral, por la correspondencia entre los objetivos de formación y los de desarrollo del país, que se materializan a través de la unidad de los objetivos, contenidos y métodos de formación, garantizando la articulación horizontal y vertical permanente de los subsistemas, niveles y modalidades de enseñanza. El sistema es laico, por su independencia respecto de cualquier religión. Tiene un carácter democrático, por lo que, todos los ciudadanos, sin distinción, tienen iguales derechos en el acceso a los diversos niveles de enseñanza y de participar en la resolución de sus problemas. Es gratuito, en el sentido de que libera a los alumnos de la enseñanza primaria de cualquier pago por la inscripción, asistencia a las clases y uso del material escolar. Es obligatoria la enseñanza primaria, para todos los individuos que cursen el subsistema de enseñanza general. El idioma de enseñanza en las escuelas es el portugués, y el estado promueve y asegura las condiciones humanas y técnico-

científicas y financieras para la expansión y generalización de la utilización de dialectos en la enseñanza.

1.6.2. ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE EDUCACIÓN ANGOLEÑO

De acuerdo con la Ley de Bases del Sistema de Educación (Ley 13, de 31/12/2001), el nuevo sistema de educación se estructura en tres niveles de enseñanza; a saber, nivel primario, nivel secundario y nivel superior. Integra los siguientes subsistemas de enseñanza:

a) Subsistema de educación preescolar.
b) Subsistema de enseñanza general.
c) Subsistema de enseñanza técnico-profesional.
d) Subsistema de formación de profesores.
e) Subsistema de educación de adultos.
f) Subsistema de enseñanza superior.

El *subsistema de enseñanza preescolar* es la base de la educación que cuida la primera infancia, en una fase de la vida en que se realizan las acciones de condicionamiento y desarrollo psicomotor. Componen este subsistema, las guarderías y el jardín infantil.

El *subsistema de enseñanza general* constituye el fundamento del sistema de educación para conferir una formación integral, armoniosa y una base sólida y necesaria a la continuidad de los estudios en los siguientes subsistemas. Sus objetivos generales son:

a) conceder una formación integral y homogénea que permita el desarrollo armonioso de las capacidades intelectuales, físicas, morales y cívicas;
b) desarrollar los conocimientos y capacidades que favorezcan la autoformación para un saber-hacer eficaz que se adapte a las nuevas exigencias;
c) educar a la juventud y a otras capas sociales, de manera que adquieran hábitos y actitudes necesarias para el desarrollo de la conciencia nacional.
d) promover en la nueva generación, y en otras capas sociales, el amor al trabajo y potenciarla para una actividad laboral socialmente útil y capaz de mejorar sus condiciones de vida.

El subsistema de enseñanza general se estructura en:

a) la enseñanza primaria;
b) la enseñanza secundaria.

La *enseñanza primaria* está constituida por seis cursos, y es el punto de partida para los estudios del nivel de secundaria.

La *enseñanza secundaria*, sucede a la enseñanza primaria, y comprende dos ciclos:

a) la enseñanza secundaria del primer ciclo, con una duración de tres cursos académicos;
b) la enseñanza secundaria del segundo ciclo, organizada en diferentes áreas de conocimientos de acuerdo con la naturaleza de las especialidades de la enseñanza superior a que da acceso. Tiene una duración de tres cursos académicos y comprende las siguientes áreas: área de Ciencias Físicas y Biológicas, área de Ciencias Económico-Jurídicas, área de Ciencias Humanas, y área de Artes Visuales.

Según la Ley de Bases del Sistema de Educación (Ley 13, de 31/12/2001), los objetivos específicos del primer y segundo ciclo son respectivamente los siguientes:

Primer ciclo:

a) consolidar, profundizar y ampliar los conocimientos y reforzar capacidades, hábitos y actitudes adquiridos en la enseñanza primaria.
b) Permitir la adquisición de conocimientos necesarios al seguimiento de los estudios en los niveles y áreas de conocimientos posteriores.

Segundo ciclo:

a) preparar el ingreso de los alumnos al mercado de trabajo y/o en el subsistema de enseñanza superior;
b) desarrollar el pensamiento lógico y abstracto y la capacidad de evaluar la aplicación de modelos científicos para la resolución de problemas en la vida práctica.

El subsistema de enseñanza técnico-profesional es la base para la preparación técnica y profesional de los jóvenes y trabajadores, después de que éstos terminen la enseñanza primaria. Comprende dos tipos de formación:

a) formación profesional básica;
b) formación media-técnica.

La *formación profesional básica* pretende una mejor integración del individuo en la vida activa, pudiendo contemplar varios niveles y desarrollarse en diferentes modalidades y complementar, eventualmente, una formación escolar en el marco de la educación permanente. La Ley de Bases del Sistema de Educación establece como condición de ingreso en la misma, que el alumno haya concluido la enseñanza primaria.

La *formación media-técnica* consiste en la formación técnico-profesional de los jóvenes y trabajadores, y su objetivo es proporcionar a los alumnos conocimientos generales y técnicos para las diferentes ramas de actividad económica y social del país, lo que permite su inserción en la vida laboral, o bien, mediante determinados criterios, el acceso a la enseñaza superior. Este tipo de formación se realiza después de que el alumno haya concluido el primer ciclo de la enseñanza secundaria y, por lo general, comporta cuatro cursos.

Subsistema de formación de profesores

Según la Ley 13, de 31/12/2001, este subsistema de educación tiene como objetivos:

a) formar profesores que tengan el perfil necesario para materializar los objetivos generales de la educación;
b) formar profesores que tengan sólidos conocimientos científico-técnicos y una profunda conciencia patriótica, de manera que puedan asumir con responsabilidad la tarea de educar las nuevas generaciones;
c) desarrollar acciones de permanente actualización y perfeccionamiento de los agentes educativos.

El *subsistema de formación de profesores* se estructura en:

a) *formación media normal*, que se realiza en las llamadas escuelas normales;
b) *enseñanza superior pedagógica*, realizada en los institutos y escuelas superiores de ciencias de la educación.

La *formación media normal* se destina a la formación de profesores con nivel medio, capacitándolos a ejercer actividades en la educación preescolar y a impartir clases en la enseñanza primaria. Como nivel de entrada en esta formación se exige que se haya concluido el primer ciclo de la enseñanza secundaria y tiene una duración de cuatro cursos.

La enseñanza superior pedagógica se destina a la formación de profesores con nivel superior, habilitándolos a ejercer sus funciones, fundamentalmente, en la enseñanza secundaria y, eventualmente, en la enseñanza primaria, en la educación

preescolar y especial. También se destina a proporcionar la formación pedagógica a las personas que ejercen el profesorado, pero que adquirieron su formación en instituciones que no están diseñadas para formar docentes. Pueden acceder a la enseñanza superior pedagógica, aquellos que hayan concluido la formación media normal, el segundo ciclo de la enseñanza secundaria, o también la formación media técnica.

1.6.3. LOS CONTENIDOS ESTADÍSTICOS EN LOS CURRÍCULOS DE ANGOLA

Después de que se aprobara la Ley de Bases del Sistema de Educación en Angola (Ley 13, de 31/12/2001) que fija el marco de referencia que define los objetivos educativos y las orientaciones básicas para la configuración de la estructura y organización escolar, era necesaria la realización de una reforma curricular.

Según el documento base del Ministerio de Educación MED (2003) que versa sobre los currículos del segundo ciclo de la enseñanza secundaria en Angola, la reforma curricular constituye una componente fundamental de la Reforma del Sistema Educativo, que provoca necesarias y lógicas expectativas a las partes que se encuentran directa, o indirectamente, involucradas en el proceso educativo, incluyendo diversos sectores de la sociedad angoleña.

De esta forma, y basándose en la Ley de Bases del Sistema de Educación, fueron elaboradas propuestas de reorganización de los planes curriculares en los diferentes niveles de enseñanza, que todavía se encuentran en fase de experimentación.

Un aspecto importante a tener en cuenta, es que antes de la reforma curricular de 2003, sólo en algunos planos curriculares del subsistema de la enseñanza técnico-profesional y de la enseñanza superior se consideraba la enseñanza de la estadística. Los planes de estudio previos del subsistema de la enseñanza general no contemplaban contenidos de estadística, excepto quizá, aspectos implícitos enmarcados en algunas asignaturas.

En atención a esta situación, se vio que era importante integrar algunos contenidos básicos de la estadística en los planes curriculares de este subsistema de enseñanza, desde primaria hasta el segundo ciclo de secundaria. Tal idea parte, precisamente, de la importancia que tienen los conocimientos estadísticos en la formación del ciudadano, para desempeñar sus actividades cotidianas.

Tanto en primaria como en secundaria, la estadística se presenta en forma de unidades temáticas asociadas a la asignatura de matemáticas.

Resumimos a continuación, una visión panorámica de los contenidos estadísticos, incorporados en los programas de algunos grados, según lo previsto por la reforma curricular:

Sexto grado (enseñanza primaria): El estudio de la estadística se asocia con la recogida, organización e interpretación de datos. Se estudian las tablas, las frecuencias absolutas, las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y gráficos.

Séptimo grado (enseñanza secundaria, primer ciclo): En este grado la enseñanza de la estadística comienza con la profundización de los contenidos impartidos en el sexto grado y se estudian, además, las frecuencias absolutas acumuladas, las frecuencias relativas y los gráficos.

Octavo grado (enseñanza secundaria, primer ciclo): El primer aspecto abordado es la organización y representación de datos. Se introducen los polígonos de frecuencia y pictogramas. Se aborda también los modos de interpretación de la información estadística.

Noveno grado (último grado del primer ciclo de la enseñanza secundaria): no contempla explícitamente aspectos de estadística, aunque sugiere una revisión y aplicación de los conocimientos de los cursos anteriores.

Igual que en los grados anteriores, la enseñanza de la estadística en el segundo ciclo de la secundaria tampoco se imparte como asignatura independiente, sino que está integrada en la asignatura de matemáticas, y figura en los programas de dos, de las cuatro áreas de conocimientos para acceder a la enseñanza superior: el área de Ciencias Económico-Jurídicas y el área de Ciencias Físicas y Biológicas.

A continuación, presentamos los contenidos estadísticos integrados en los programas de matemáticas de esas áreas de conocimientos:

<u>Área de Ciencias Físicas y Biológicas</u>

En esta área, los contenidos estadísticos se imparten en el tercer curso, y constituyen la última unidad temática del programa. Para su impartición, el programa reserva quince clases, y establece los siguientes contenidos:

I. El objeto de estudio de la estadística. Conceptos básicos.

- El objeto de la estadística.
- Interpretar y dar informaciones.
- La estadística en la modelación matemática.
- Población y muestra.

- Censo y sondeo.
- Estadística descriptiva y estadística inductiva.
- Caracteres, atributos o variables estadísticas.
- Variables discretas y variables continuas.

II. Organización y presentación de datos.

- Porcentajes, estimaciones y redondeos.
- Análisis gráficos de atributos cuantitativos.
- Distribución de frecuencias y representación gráfica. Variables discretas y variables continuas.

III. Medidas de tendencia central.

- La media, la median y la moda.
- Sumatorios.
- Consideraciones generales sobre la media, la mediana y la moda.

IV. Medidas de dispersión.

- Amplitud.
- Varianza y desviación típica.

V. Distribuciones bidimensionales.

- Relación estadística. Diagrama de dispersión.
- Idea intuitiva de correlación.
- Coeficiente de correlación linear.
- Recta de regresión.

Área de Ciencias Económico-Jurídicas

En esta área, el programa reserva veinte clases al tema de estadística y se imparte en el primer curso. Los contenidos que se presentan en el programa y su estructuración es igual al del área de Ciencias Físicas y Biológicas, pero además, se extiende el estudio de la estadística a la probabilidad, con la integración de una unidad temática en el tercer curso, denominada "Cálculo de probabilidades. Análisis combinatorio y binomio de Newton".

La estadística en la formación media-técnica.

Como hemos descrito anteriormente, la formación media-técnica es parte del subsistema de enseñanza técnico-profesional y es un tipo de formación que se realiza

después de que el alumno haya concluido el primer ciclo de la enseñanza secundaria, comportando, en general, cuatro cursos. En este nivel de enseñanza, se concede una gran importancia a la enseñanza de la estadística, ya que de acuerdo con los objetivos generales de la enseñanza, se pretende desarrollar competencias científicas con la finalidad de intervenir en la vida activa de la sociedad, lo que supone proporcionar a los alumnos conocimientos generales y técnicos para las diferentes ramas de la actividad económica y social, preparando su inserción a la vida laboral y el acceso a la enseñaza superior.

Antes de la puesta en acción del programa general de reforma, la enseñanza de estadística en los cursos de las diferentes especialidades se desarrollaba como asignatura independiente. Esta situación aún se observa en algunos centros escolares, donde la reforma todavía no ha contemplado todos los grados. Sin embargo, la reforma prevé que en algunas especialidades la estadística se asocie con una asignatura de formación específica denominada cálculo financiero, formándose, en consecuencia, la asignatura *Técnicas de Cálculo y Estadística*.

A modo ilustrativo, vamos a presentar los contenidos relativos a la parte de estadística que integra el referido programa para los alumnos de la especialidad de contabilidad y gestión:

- Nociones de estadística
- El método estadístico
- Frecuencia absoluta, frecuencia relativa y frecuencia acumulada
- Representación gráfica de distribuciones
- Medidas de tendencia central (media, mediana y moda)
- Medidas de dispersión.
- Medidas de forma (asimetría y curtosis)
- Medidas de concentración (grado de concentración, curva de Lorentz, índice de Gini)
- Series cronológicas (series estadísticas, series cronológicas, componentes de una serie, cálculo de tendencias)

En algunas especialidades de la enseñanza técnico-profesional, donde la estadística aún se imparte como asignatura independiente, es posible ver los siguientes contenidos:

1. Introducción

- Concepto de estadística
- División de la estadística
    i. Estadística descriptiva
    ii. Estadística inferencial
- Fases del método estadístico

2. Distribución de frecuencia
    - Recogida y organización de datos
    - Tabla de distribución de frecuencia
    - Representación gráfica
3. Medidas de localización
    - Medidas de tendencia central
        i. Medias (aritmética, geométrica y armónica)
        ii. Mediana
        iii. Moda
    - Otras medidas de localización (Cuartiles, deciles y percentiles)
4. Medidas de dispersión
    - Necesidad de una medida de dispersión
    - Amplitud total e intervalo intercuartílico
    - Desviación media
    - Varianza y desviación típica
    - Coeficiente de variación
5. Teoría de probabilidades
6. Regresión y correlación
7. Números índices

La estadística en la Enseñanza Superior

En esta sección vamos a dar una visión panorámica de la enseñanza de la estadística en algunas instituciones de enseñaza superior. Nos limitaremos a describir los contenidos que constan en la actual estructura de los programas de la disciplina, en las escuelas de formación de profesores, más precisamente, en los cursos de matemáticas y psicopedagogía.

En el curso superior de ciencias de la educación, para los alumnos que cursan la opción de matemática, la estadística se imparte en el tercer curso, con una carga lectiva

de 4 horas semanales. Los contenidos se relacionan fundamentalmente con la estadística inferencial y la asignatura se imparte después del curso de probabilidad. El plan curricular no contempla la enseñanza de la estadística descriptiva, ni como asignatura independiente ni como optativa.

Mostramos a continuación los contenidos principales de que consta el programa, tal como se encuentran estructurados:

I. Métodos de muestreo
    1. Objetivo de la estadística matemática
    2. Breves notas históricas
    3. Conceptos de población y muestra
    4. Muestreo con y sin reemplazamiento. Muestra representativa
    5. Métodos de selección
    6. Función de frecuencia
    7. Función de distribución empírica
    8. Polígono e histograma

II. Estimadores estadísticos de los parámetros de distribución
    1. Estimadores estadísticos de los parámetros de una distribución
    2. Estimadores sesgados, no sesgados y distribuciones consistentes
    3. Media poblacional
    4. Media muestral
    5. Estimación de la media de la población a través de la media muestral
    6. Propiedad de la media
    7. Varianza poblacional
    8. Varianza muestral
    9. Una fórmula para el cálculo de la varianza
    10. Suma de varianzas
    11. Varianza muestral como estimador de la varianza poblacional
    12. Precisión de una estimación. Intervalos de confianza
    13. Intervalos de confianza en la evaluación de la media de una distribución normal (conocida)
    14. Intervalos de confianza en la evaluación de la media de una distribución normal (desconocida)
    15. Estimación del valor real de una cantidad medida

16. Intervalos de confianza en la evaluación de la desviación típica de una distribución normal

III. Métodos de cálculo de las características empíricas

1. Datos convencionales
2. Momentos empíricos
3. Método de los productos en el cálculo de la media y varianza muestral
4. Sustitución de datos equidistantes a los iniciales
5. Frecuencias empíricas y teóricas
6. Estimación de la desviación de una distribución empírica en relación a la normal

IV. Elementos de la teoría de correlación

1. Dependencia funcional y dependencia estadística, correlación
2. Medias condicionales
3. Función de regresión
4. Cálculo de los parámetros de la recta de regresión
5. Correlación
6. Cálculo del coeficiente de correlación
7. Ecuación de la recta de regresión (un ejemplo)

V. Pruebas de Hipótesis

1. Hipótesis estadísticas. Hipótesis nula y alternativa
2. Errores de tipo I y II
3. Contrastes de hipótesis. Criterios estadísticos y los valores observados
4. Región crítica, región de aceptación de hipótesis. Puntos críticos
5. Establecimiento de regiones críticas a la derecha
6. Teste unilateral a la izquierda y teste bilateral
7. Observaciones adicionales sobre la elección de la región crítica. Potencia de un test
8. Comparación de varianzas de dos poblaciones con distribuciones normales
9. Comparación de medias de dos poblaciones con distribuciones normales y varianzas conocidas (muestreos independientes)
10. Comparación de medias de poblaciones arbitrarias (muestras grandes e independientes)

En cuanto al curso de psicopedagogía, la enseñanza de esta disciplina se circunscribe a la estadística descriptiva, y los contenidos que se estudian son los siguientes:

I. Conceptos básicos
   1. Introducción. Objetivos de la estadística
   2. Noción de variable. Población y muestra
   3. Atributos o características de una población
   4. Datos discretos y continuos
   5. Fases del método estadístico

II. Distribución de frecuencias
   1. Definición. Distribución de frecuencias de variables discretas
   2. Definición. Distribución de frecuencias de variables continuas (datos agrupados en clases)
   3. Frecuencia absoluta, frecuencia acumulada
   4. Frecuencia relativa y frecuencia relativa acumulada
   5. Representación gráfica de datos estadísticos (gráfico lineal, gráfico de columnas, gráfico de barras, gráficos de sectores, histogramas y polígonos de frecuencias)

III. Medidas de tendencia central
   1. La media aritmética y su campo de aplicación. La media aritmética simple y la media aritmética ponderada. Propiedades de la media aritmética
   2. La media geométrica y su campo de aplicación. La media geométrica simple y ponderada
   3. La media armónica simple y ponderada
   4. Mediana para datos no agrupados. Mediana para datos agrupados
   5. Moda para datos no agrupados. Otras formas de obtención de moda

IV. Cuartiles, deciles y percentiles

V. Medidas de dispersión o variabilidad
   1. Dispersión o variación. Amplitud total, amplitud intercuartílica
   2. Desviación media, varianza y desviación típica
   3. Coeficiente de variación de Pearson
   4. Coeficiente de variación de Thorndike

VI. Teoría de correlación y regresión lineal

1. Modelo de regresión lineal
2. Recta de regresión e interpretación de sus coeficientes
3. Predicción usando la recta de regresión
4. Coeficiente de correlación de Pearson
5. Coeficiente de correlación de Spearman

A modo de conclusión, podemos decir que el proceso de reforma de educación que se está llevando a cabo en Angola podría constituir un paso fundamental en la reestructuración del Sistema Nacional de Educación, contribuyendo positivamente para una aproximación para los objetivos propuestos en los estándares y principios de la NCTM (2003). Sin embargo, nuestra apreciación es que los contenidos estadísticos que constan en los currículos de los diferentes niveles de enseñanza en Angola están aún lejos de los que se proponen en los referidos estándares y principios. Su extensión por cursos, así como su estructuración metodológica tanto en primaria como en secundaria, aún es muy limitada, requiriendo ajustes de diversos tipos. Por lo tanto, creemos que una revolución de fondo del Sistema Nacional de Educación, y en particular en lo que respecta a la enseñanza de la estadística, debería considerar también las líneas de trabajo expuestas en los estándares y principios del NCTM (2003). Es el caso, por ejemplo, de que los currículos no sean vistos simplemente como una colección de actividades, sino que deben ser coherentes, estar centrado en aspectos importantes y bien articulados a través de los diferentes niveles; que la enseñanza sea efectiva, en el sentido de que demande conocer lo que los alumnos saben, lo que necesitan aprender, para luego estimular y darles apoyo en el aprendizaje que promueven que los estudiantes aprendan construyendo activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos; o que la evaluación apoye el aprendizaje, y proporcione información útil a profesores y alumnos.

1.7. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIONES SOBRE LA MEDIA ARITMÉTICA

Como señalamos anteriormente, el análisis de las concepciones de los alumnos sobre la media aritmética no es un tema nuevo ya que existe en la actualidad un número considerable de investigaciones que lo abordan. Este interés se deriva de la importancia de este concepto tanto en situaciones de la vida cotidiana como en las diferentes

ciencias. Según Shaughnessy (2007), los conceptos de promedio- en particular, la media aritmética y la mediana- son conceptos fundamentales en estadística debido a que se utilizan para resumir la información de un conjunto de datos. Este autor indica que, por ejemplo, si el conjunto de datos es una muestra que proviene de una cierta población, ésta debería reflejar aspectos de la población y la media muestral debería proporcionar un estimador para la media poblacional de la que proviene la muestra en cuestión. En otras palabras, esto significa que la media de un conjunto de datos o de una muestra es representativa de esta muestra o de este conjunto de datos. En la misma línea, señala que las medias de diferentes conjuntos de datos pueden proporcionar un mecanismo eficiente para comparar y contrastar estos conjuntos de datos, si bien este proceso puede al mismo tiempo ser ambiguo. También señala que la media aritmética es una noción con mucha trascendencia en estadística y es fundamental para comprender resúmenes y test estadísticos, lo que motiva plenamente a los investigadores a estudiar las concepciones de los estudiantes sobre tal concepto, considerándolo uno de los más importantes en el conjunto de las ciencias matemáticas. Sin embargo, a pesar de lo anteriormente señalado, el enfoque de enseñanza de este concepto se reduce frecuentemente al aspecto computacional. Se pregunta entonces: ¿Qué hacen los estudiantes cuando se les da oportunidad de pensar intuitiva o conceptualmente sobre los promedios?, ¿Qué nociones de promedio emplean cuando toman decisiones en determinadas situaciones?, ¿Las nociones de los estudiantes sobre los promedios se corresponden con las nociones comunes de la estadística, tales como media o mediana, o presentan otras concepciones sobre el significado de tales conceptos?

En este apartado describiremos algunos estudios relacionados con la media aritmética. Como veremos, la amplitud de cuestiones relacionadas con la media aritmética, hace que los autores se ocupen de aspectos específicos, dejando siempre un margen para plantear otros estudios. Pero antes de todo, ofreceremos, en primer lugar, una visión epistemológica general relacionada con la historia de la estadística y con la fenomenología de la media aritmética.

1.7.1. BREVE RESEÑA HISTÓRICA SOBRE LOS ORÍGENES DE LA ESTADÍSTICA

Antes de comenzar con la descripción de algunas teorías que ayudan a reflexionar sobre la fenomenología histórica de los promedios, vamos a referirnos,

primeramente, a algunas notas históricas generales, sobre los orígenes de la estadística, puesto que los promedios están directamente vinculados con la historia de esta ciencia.

De acuerdo con Batanero (2001), los orígenes de la estadística son muy antiguos, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china (aproximadamente 1000 años a. C.), sumeria y egipcia. Incluso en la Biblia, en el libro de Números aparecen referencias al recuento de los israelitas en edad de servicio militar. Los censos propiamente dichos eran ya una práctica común en el siglo IV a.C. en el imperio romano. Sin embargo, sólo muy recientemente la estadística ha adquirido la categoría de ciencia. En el siglo XVII surge la aritmética política, desde la escuela alemana de Conring, quien imparte un curso con este título en la universidad de Helmsted. Posteriormente, su discípulo Achenwall orienta su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y en base a los cuales se hacen estimaciones y conjeturas, es decir, se observan ya los elementos básicos del método estadístico. Para los aritméticos-políticos de los siglos XVII y XVIII la estadística era el arte de gobernar; su función era la de servir de ojos y oídos al gobierno.

Batanero señala que la proliferación de tablas numéricas permitió observar la frecuencia de distintos sucesos y el descubrimiento de leyes estadísticas. Son ejemplos notables los estudios de Graunt sobre tablas de mortalidad y esperanza de vida a partir de los registros estadísticos de Londres desde 1592 a 1603, o los de Halley entre 1687 y 1691, para resolver el problema de rentas vitalicias en las compañías de seguros. En el siglo XIX aparecen las leyes de los grandes números con Bernouilli y Poisson.

Según ella, otro problema que suscita gran interés por parte de los matemáticos de aquel tiempo, como Euler, Simpson, Lagrange, Laplace, Legendre y Gauss, es el del ajuste por medio de curvas de los conjuntos de datos. La estadística logra con estos descubrimientos una relevancia científica creciente, siendo reconocida por la *British Association for the Advancement of Science*, como una sección en 1834, naciendo así la *Royal Statistical Society*. En el momento de su fundación se definió la estadística como *"conjunto de hechos, en relación con el hombre, susceptibles de ser expresados en números, y lo suficiente numerosos para ser representados por leyes"*.

Se crearon poco a poco sociedades estadísticas y oficinas estadísticas para organizar la recogida de datos estadísticos; la primera de ellas en Francia en 1800. Como consecuencia, fue posible comparar las estadísticas de cada país con los demás,

para determinar los factores determinantes del crecimiento económico y comenzaron los congresos internacionales, con el fin de homogeneizar los métodos utilizados. El primero de ellos fue organizado por Quetelet, en Bruselas, en 1853. Posteriormente, se crea la principal sociedad estadística internacional en 1885, el *Instituto Internacional de Estadística (ISI)* que celebra reuniones bianuales y que tiene como propósito específico conseguir uniformidad en los métodos de recopilación y análisis de resultados e invitar a los gobiernos al uso correcto de la estadística en la solución de los problemas políticos y sociales (Batanero, 2001).

La práctica de la estadística a lo largo del tiempo se fue diversificando, pasando de las cuestiones de estado al pasatiempo de los jugadores profesionales y de allí, a la aplicación a problemas sociales, para posteriormente extenderse a las diversas ramas científicas.

1.7.2. ALGUNOS ASPECTOS SOBRE LA FENOMENOLOGÍA HISTÓRICA DE LA MEDIA ARITMÉTICA

Bakker (2000) señala que encontró en la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas de Freudenthal (1983) un método de estudio de las relaciones entre las matemáticas, la historia y la educación, ya que permite hacer una distinción entre *phainomena* (fenómeno o estructura que queremos comprender), y *nooumena* (las entidades de pensamiento con las que organizamos estos fenómenos), donde los conceptos matemáticos son ejemplos de tales *nooumena,* con las cuales organizamos nuestro mundo experimental.

Esta visión ha sido la base para explicar su forma especial de definir la fenomenología, tal como se señala a continuación:

- La fenomenología de un concepto matemático es el estudio de las relaciones entre este concepto y el fenómeno que este organiza.
- La fenomenología histórica es el estudio del contexto histórico en el cual ciertos conceptos matemáticos surgieron para comprender por qué estos surgieron.
- La fenomenología didáctica es el estudio de la relación entre el concepto matemático y el fenómeno del cual surge con respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Según Bakker (2000, 2003), no es posible ver el fenómeno separadamente del concepto, ya que el concepto determina e influencia al fenómeno. Estudiar la historia implica ver ciertos fenómenos a través de los ojos de personas que no tenían nuestros

mismos conceptos. Lo cual se asemeja a lo que le ocurre a los estudiantes, por lo tanto, la historia nos ayuda a comprender su proceso de aprendizaje.

En su razonamiento, Bakker expresa que el análisis histórico de la media aritmética, en particular, y de los valores promedios, en general, es algo difícil por tres razones: En primer lugar, la historia se escribe a menudo, con relación a los hombres y a los bienes, y no con respecto a los conceptos. En segundo lugar, muchos estudios históricos comienzan alrededor de 1660, justo cuando la estadística y la probabilidad estaban naciendo. La estadística matemática es incluso más joven, ya que surge en el siglo XIX. En tercer lugar, la estadística es un contenido que procede principalmente de fuera de la matemática y no era vista frecuentemente como parte de la matemática. Su surgimiento y desarrollo fue debido a la astronomía, demografía, economía, medicina, genética, biometría, antropología, las ciencias sociales y tantas otras áreas, lo que probablemente podría explicar por qué muchas historias de las matemáticas prestan muy poca atención a la historia de la estadística.

A continuación presentamos algunos ejemplos relacionados con el origen y desarrollo de la media aritmética. Bakker (2000, 2003) señala que el conocimiento de los mismos podría tener una cierta relevancia para la enseñanza, ya que ayudaría al alumnado, a comprender la importancia y el uso de este concepto desde tiempos remotos.

- Estimación

Un ejemplo sobre el uso implícito de la media aritmética es el que pretende estimar el número de hojas y frutas en dos grandes ramas de un arbol extendido en la antigua India (Hacking, 1995). ¿Qué hizo Rtuparna, el protagonista de la historia? Primero estimó el número de hojas (frutas) considerando una sola ramita y después, multiplicó ese valor por el número estimado de ramitas que tenían las ramas. Se supone que eligió una ramita típica o promedia, lo que se podría entender como uso implícito (una idea intuitiva predecesora) de la media aritmética, ya que este es un número que representa a todos y es, de alguna manera, el centro de los demás; también es menor que el más grande y mayor que el más pequeño. Este uso del promedio tiene que ver, por lo tanto, con nuestra idea moderna de compensación, equilibrio y representatividad.

Otro ejemplo de estimación es un fragmento escrito por el historiador griego Herodotus (485-420 D. C.) en el antiguo Egipto:

"Ellos afirman que trescientos cuarenta y una generaciones separan el primer rey de Egipto del último mencionado (Hephaestus)- y de allí hubo un rey y un alto sacerdote que corresponden a cada generación. Considerando tres generaciones como un período de 100 años, 300 generaciones hacen 10 mil años, y las restantes 41 generaciones hacen 1340 años más; así se obtiene un total de 11.340 años…"

El aspecto más importante en esta cita es el asumir que tres generaciones son cien años. Esto ha permitido estimar la suma total de años entre el primer rey Egipcio y Hephaestus. Por supuesto que tres generaciones no siempre significan exactamente cien años; a veces un poco menos, otras veces un poco más, pero los errores de estimación eran aproximadamente iguales (Bakker, 2000). En la vida diaria, encontramos este tipo de promedio cuando realizamos estimaciones: Podemos pensar en estimar el número de personas que va a una fiesta, el número de botellas de bebidas que se necesita en la fiesta y el precio de nuestras compras etc. La situación muestra los aspectos de compensación y representatividad (número 'normal' de años por generación).

- La definición griega de media aritmética

En tiempos de Pitágoras se conocían tres tipos de media: la aritmética, la geométrica y la armónica. La teoría de estos valores medios se desarrolló en sus escuelas en referencia a la teoría musical y aritmética. Por ejemplo, en la proporción musical 6:8:9:12 el valor 8 es la media armónica entre 6 y 12, y 9 es la media aritmética de estos valores. Las matemáticas griegas tenían formas y objetivos diferentes, si las comparamos a las matemáticas modernas. Las matemáticas griegas, incluso la teoría de los números, eran altamente geométricas y visuales. Esta diferencia, entre las matemáticas griegas y las matemáticas modernas se puede ilustrar con las diferentes definiciones de la media aritmética. La definición griega era: el número medio *b* se denomina media aritmética si y sólo si $a - b = b - c$. Esta definición difiere, en cuanto a la formulación, de una definición moderna equivalente, $(a + c) / 2$, y sólo se refiere a dos valores. Según Bakker, la versión griega se centra en el valor intermedio y es difícil de generalizar, mientras que la versión moderna resalta el cálculo y es más fácil de generalizar. Señala, además, que la definición griega muestra el aspecto cualitativo mientras que la definición moderna se relaciona con el aspecto cuantitativo.

- La media aritmética como tipo de seguro: imparcialidad y redistribución.

De acuerdo con Bakker (2000), el siguiente fragmento, citado en *The World of Mathematics,* da una idea del origen etimológico probable de la palabra "*average*" y la concepción de media aritmética como forma de redistribución justa:

"Antiguamente, cuando los peligros de los viajes marítimos eran mucho más serios que hoy en día, si los barcos eran sacudidos por tormentas, se arrojaba una porción de sus cargas por la borda, y se reconocía que aquellos productos perdidos podían ser reclamados en acciones por indemnización, a cargo de aquellos productos que se entregaban de forma segura. El valor de las perdidas se repartía por acuerdo entre todos aquellos cuyas mercancías quedaban intactas en el barco. Estos daños a las mercancías, resultantes de viajes en el océano, se conocían como '*havaria'* y la palabra vino a aplicarse de forma natural a la compensación monetaria que cada individuo tenía que pagar. De esta palabra latina deriva nuestra palabra moderna promedio (*average*). Así, la idea de promedio tiene sus raíces en el seguro primitivo".

Bakker (2000) señala que esta visión se confirma por varios diccionarios etimológicos. Los alemanes, la traducen como '*averij*' y los franceses como '*avarie*', cuyos significados se refieren al daño a un barco o a su carga después de una tormenta y como término legal todavía se utiliza como coste de compensación de daños de la carga. Aquí se ve cómo el promedio (media aritmética) se relaciona con la redistribución equitativa.

En castellano, el término se transcribe por 'averia' y según el diccionario on-line de la Real Academia Española, significa: "daño que padecen las mercaderías, daño que por cualquier causa sufre la embarcación o su carga".

- Navegación y astronomía: del *midrange* a la forma general de la media aritmética.

El *midrange*, la media aritmética entre los valores extremos, resultó ser el predecesor de la media aritmética (siglo IX – XI). Hasta el siglo XVI, no se extendió la fórmula de la media aritmética a n casos: $(a_1+ a_2+ a_3+\ldots+ a_n)/n$. Cuando los marineros, en aquellos días, tenían que determinar sus posiciones, utilizaban frecuentemente el *midrange,* sobre todo cuando el barco se balanceaba y se averiaba la aguja de la brújula, tenían que hacer muchas observaciones y encontrar el valor medio. Hoy en día se sabe que muchas observaciones y errores siguen una distribución normal, por lo que, el *midrange* probablemente era un valor sensato a considerar.

El método de considerar la media para reducir los errores de las observaciones se desarrolló, principalmente, en astronomía cuando se quería conocer un valor real y no se podía medir este valor de forma exacta. Se asumía que la suma de los errores producía

un número relativamente pequeño, comparado con el total de todos los valores medidos. Quizás eso se justificaba por el hecho de que, hasta aquel momento, la noción de media era cualitativa, más que cuantitativa. Paulatinamente, la reducción de errores utilizando la media aritmética se convirtió en un método común para medir, por ejemplo, el diámetro de la luna o también cuando se pesaban monedas de oro y plata.

1.7.3. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LA MEDIA ARITMÉTICA

De los estudios previos que hemos revisados, pudimos observar que la comprensión de la media aritmética no es fácil, a pesar de ser un contenido matemáticamente elemental. Por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que incluso algunos estudiantes universitarios no consideran las frecuencias al resolver problemas de media ponderada; operan solamente con los valores de la variable y, en ocasiones, usan la media simple en lugar de la media ponderada. Estos resultados fueron constatados en un estudio realizado mediante entrevistas, en las que los estudiantes intentaban resolver problemas que involucran la propiedad de ponderación y combinación de medias para obtener una media total. La metodología utilizada consistió en lo siguiente: En la fase preliminar de la investigación se ha pasado un problema de cálculo de media ponderada a 37 estudiantes universitarios. El problema era parte de un test escrito de diagnóstico, administrado al comenzar un curso introductorio de estadística para estudiantes universitarios de psicología en la universidad de Massachussets. Para explorar con más detalle el concepto de media aritmética en los estudiantes, decidieron realizar entrevistas clínicas a 17 alumnos de entre 18 y 22 años, así como para estudiar sus intuiciones estadísticas. En las entrevistas pidieron a los estudiantes que resolvieran problemas de varios contenidos de áreas de estadística, incluyendo probabilidad y muestras, así como la media. Sin embargo, los resultados obtenidos se refieren sólo a cuatro problemas específicos sobre la media. Las entrevistas fueron individuales y grabadas en cinta. Una entrevista típica tardó de 45 a 50 minutos e incluyó de 5 a 10 problemas diferentes, dependiendo del tiempo que un sujeto tardaba en explicar su respuesta. Concluyeron que, para muchos estudiantes, calcular la media simple no era la vía más fácil o más obvia para empezar a atacar el problema, sino que era el único método que tenían disponible. La mayoría no parecía considerar que la media simple podía ser, o no, la respuesta correcta, ni siquiera tenían idea de lo que

representaban sus resultados. Para muchos estudiantes, tratar con la media era un hecho de cálculo, más que un hecho conceptual.

Mevarech (1983) llevó a cabo un estudio para investigar las capacidades procedimentales de los alumnos para resolver problemas en estadística descriptiva y los errores conceptuales destacables que están asociados. Realizó un primer experimento con 103 estudiantes universitarios de primero y segundo curso. A 56 de primero se les pasó el test después de realizar un curso introductorio con énfasis en la estadística descriptiva. Los 47 de segundo se sometieron a dos cursos introductorios de estadística (descriptiva e inferencial) y a un curso en diseño de investigación en educación. En este estudio el test asume el papel de un estudiante que comete errores que deben ser diagnosticados por los alumnos. El trabajo de los alumnos consiste en identificar los problemas resueltos incorrectamente, descubrir los pasos erróneos y sugerir la forma de corregirlos. El test lo forman 15 cuestiones que tratan del cálculo de la media, varianza y de la comprensión de distintas notaciones. En el segundo experimento participaron 139 estudiantes de primero de la especialidad de educación. Recibieron clases de estadística (curso introductorio) y se trataron los temas: distribución de frecuencias, medidas de tendencia central, medidas de dispersión y correlación. Se distribuyeron en un grupo experimental y otro de control. Al grupo de control se le enseñó según la estrategia convencional de lectura-discusión, es decir, el profesor presentaba los problemas y daba las soluciones completas de los mismos. Se enseñaba toda la teoría, explicando las fórmulas y discutiendo los conceptos. El grupo experimental se expuso a un proceso de aprendizaje usando determinadas estrategias maestras que involucran diferentes pasos, y que se diferencian de las estrategias utilizadas en el grupo control, principalmente, con respecto a la relación profesor-alumno y a la forma de corrección de las actividades. Los resultados encontrados en esta investigación indican que una explicación posible de los errores de los alumnos en el cálculo de la media, es que ellos se comportan como si creyeran que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética, constituye un grupo algebraico que satisface los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Así, para calcular la media de un conjunto grande de números, lo dividen en partes, calculando primero la media de cada parte, promediando después los resultados obtenidos (uso de la propiedad asociativa). Esto, en general no es cierto, y se puede comprobar con la media de tres

números diferentes, calculando la media de los dos primeros elementos y haciendo la media del valor obtenido con el último elemento.

Strauss y Bichler (1988) llevaron a cabo un estudio para analizar algunas propiedades del concepto de media aritmética, evaluar los efectos que podrían producir los materiales tanto con respecto al tipo de dato (continuo, discreto) como del medio de presentación (verbal, numérico y concreto), y analizar las diferentes vías para desarrollar la comprensión de algunas propiedades de la media aritmética.

En este análisis, identificaron siete propiedades, que conllevan los aspectos siguientes:

- estadístico
- abstracto
- representativo

El *aspecto estadístico* se asocia con las siguientes propiedades:

1) La media es un valor comprendido entre los extremos.
2) La suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero.
3) El valor medio queda influenciado por los valores extremos.

El *aspecto abstracto* queda reflejado en las otras tres propiedades que indicaremos a continuación, que permiten contar con valores no observados:

4) La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos.
5) El valor obtenido para la media puede ser una fracción.
6) Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.

El *aspecto representativo* se corresponde con la propiedad siguiente:

7) La media es un "representante" de los datos a partir de los que ha sido calculada.

Para el estudio se escogieron 80 alumnos, repartidos en cuatro grupos de edades 8, 10, 12 y 14 años, que no habían recibido instrucción sobre las propiedades de la media aritmética. La metodología utilizada consistió en examinar individualmente a cada alumno en una sesión de 30-60 minutos a través de un experimento, presentando diversas tareas al alumno para ver cómo evolucionan los elementos claves del concepto a lo largo de una etapa. El estudio no encontró efectos significativos respecto al tipo de datos o medio de representación empleado. Los resultados sugieren una mejora de la comprensión con la edad, y muestra diferentes clases de dificultades en la comprensión de las siete propiedades, siendo más fáciles las 1, 3 y 4 que las 2 ,6 y 7.

Leon y Zawojewski (1991) realizaron entrevistas a niños entre 12 y 14 años y examinaron el efecto de la edad en la comprensión de cuatro de las siete propiedades identificadas por Strauss y Bichler (1988), a saber: propiedad 1: La media es un valor comprendido entre los extremos; propiedad 2: La suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero; propiedad 6: Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media; propiedad 7: La media es un "representante" de los datos a partir de los que ha sido calculada. Examinaron además, las dificultades de los alumnos con estas propiedades, tanto desde el punto de vista conceptual como en la forma en que evocaban el concepto de la media, y determinaron la influencia del contexto en la comprensión de este contenido. Mediante un test administrado a 145 alumnos, observaron una influencia importante de la edad sobre la comprensión de la media. Igualmente, apreciaron que la contextualización de las tareas facilitaba mucho su resolución. Sin embargo, las propiedades como la suma de las desviaciones de los datos respecto a la media es cero, que la media es un valor representativo de los valores promediados o que hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media, continuaron siendo propiedades demasiado abstractas para una proporción importante de alumnos de 14 años. Concluyeron que los alumnos podían comprender la media como un algoritmo de cálculo, pero tenían muchas dificultades para comprenderla como un valor representativo.

Li y Shen (1992) realizan un estudio con estudiantes de secundaria y muestran ejemplos de dificultades y errores en los proyectos estadísticos desarrollados por sus alumnos. Observaron que cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto al calcular la media y se limitan a calcular la media de todas las marcas de clase. Identifican, además, varios errores en la elaboración de gráficos, como por ejemplo, la elección poco adecuada de las escalas de representación, utilizar un polígono de frecuencia con variables cualitativas, utilizar un diagrama de barras horizontal para representar la evolución del índice de producción industrial a lo largo de una serie de años, y errores de carácter técnico, como por ejemplo, omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos, no especificar el origen de coordenadas o proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Mokros y Russell (1995) realizaron un estudio, con niños entre el cuarto y octavo curso, sobre la construcción del concepto de promedio como un valor numérico

representativo para resumir un conjunto de datos. Para ello, entrevistaron a 21 alumnos. Utilizaron siete problemas de respuesta abierta que evaluaban la noción de promedio. Las entrevistas fueron administradas en el mismo orden a todos los alumnos en sesiones individuales de 45 minutos, grabadas en audio y vídeo, y transcritas posteriormente. El cuestionario incluía tres tipos de problemas: problemas de construcción, que permitían a los alumnos demostrar lo que ellos conocían sobre la media a través de la construcción de varios conjuntos de datos de media dada, con el propósito de analizar la relación entre la media y el dato; problemas de interpretación, para examinar y resumir datos presentados en un gráfico de barras, con la finalidad de averiguar la comprensión de los estudiantes sobre la relación entre un conjunto de datos y un indicador del centro; y un problema sobre media ponderada, para analizar la comprensión de los estudiantes sobre esta materia. En los resultados identificaron cinco construcciones básicas sobre representatividad en los alumnos: la media como moda, la media como algoritmo, la media como algo razonable, la media como punto medio y la media como punto matemático de equilibrio.

Cai (1995) realizó un estudio con 250 alumnos de sexto curso sobre la comprensión de la media aritmética. La investigación fue realizada particularmente para determinar informaciones sobre los conocimientos de los alumnos, destacando los aspectos relacionados con el uso del algoritmo de cálculo de la media y la comprensión conceptual. La metodología utilizada consistió en administrar dos tipos de problemas a los alumnos: 18 problemas de respuesta de elección múltiple, a los que se dedicaba 15 minutos para que cada alumno contestase y 7 problemas de respuesta abierta sobre la media aritmética, se pedía al alumno que los resolviera en 40 minutos. En estos últimos problemas se pedía al alumno que explicara cómo había llegado a la solución. Los resultados del estudio mostraron que el 90% de los alumnos conocían el mecanismo de "sumar todos y dividir" que constituye el algoritmo de cálculo. Sin embargo, sólo algunos de ellos mostraron evidencias de comprender el concepto. El estudio sugirió que el concepto de media aritmética no sólo es muy complejo respecto al algoritmo de cálculo, sino que también debería ser impartido más allá del algoritmo de cálculo.

En un trabajo de Batanero, Godino y Navas (1997) se identificaron errores conceptuales y dificultades de aplicación práctica de los conocimientos sobre promedios en maestros de Primaria en formación. Las dificultades se relacionaban con el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de los promedios; posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas; elección de la medida

de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribución. Se analizaron las respuestas de 273 estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación a un cuestionario escrito que comprendía cuatro ítems de opciones múltiples sobre distintos aspectos interpretativos de la media aritmética. Las dificultades fueron confirmadas en entrevistas posteriores a una muestra reducida de alumnos. La investigación permitió concluir que es necesario intensificar el estudio de aquellas nociones en los planes de formación de profesores, dado el nuevo énfasis sobre el tratamiento de la información y el razonamiento estadístico en la reforma de la enseñanza de las matemáticas.

Gattuso y Mary (1998) realizaron un estudio con alumnos de enseñanza secundaria, de 13 a 15 años de edad, sobre el desarrollo de la comprensión del algoritmo de cálculo de la media ponderada, usando problemas con contextos y forma de representación diferentes. En el mismo participan un total de 598 estudiantes, de los cuales 241 eran del octavo curso y no habían recibido ninguna instrucción formal sobre los promedios, 239 del noveno curso que acaban de estudiar justamente estos contenidos y 118 del décimo curso que habían estudiado los promedios en el año anterior. Las tareas presentadas fueron agrupadas en cuatro categorías: calcular medias ponderadas, analizar el efecto que el cambio de un dato produce sobre la media, hallar el valor que falta en un conjunto de datos para obtener un promedio dado y analizar la suma de la desviación de los datos con respecto a la media. Identifican las siguientes variables didácticas que afectan a la dificultad de las tareas: formato (tabla, serie de números, gráfico); si los valores de las variables son, o no, mucho mayores que los de las frecuencias (lo que influye en que el niño discrimine los dos conceptos); si una de las frecuencias es mucho mayor que las otras (de modo que se fuerce al niño a tener en cuenta las frecuencias). Observaron el efecto de estas variables y también la mejora con la instrucción. Sugieren que el efecto de las variables didácticas como los números, y el contexto, en la elección de las estrategias de solución de problemas debía ser investigado más ampliamente, ya que para ellos, no fue muy persistente en el tiempo. Concluyen que la comprensión conceptual no va paralela al número de años de instrucción en la materia en cuestión. Analizaron las respuestas de estudiantes con, o sin, instrucción previa sobre la media, y observaron que las estrategias preferidas por los estudiantes de mayor edad eran más algebraicas y además obtenían mejores resultados cuando calculaban medias de conjuntos de datos agrupados, mientras que los más

jóvenes preferían usar el conjunto de datos sin agrupar, y mostraron un nivel de éxito superior en aquéllos problemas en que se conoce la media y se pide determinar algunos datos.

Watson y Moritz (1999, 2000), estudiaron el desarrollo cognitivo de los alumnos en la comprensión de los promedios. En el primer trabajo, analizaron la aplicación de la media aritmética, por parte de estudiantes, en un contexto de resolución de problema, en el que se comparaban conjuntos de datos presentados de forma gráfica. El estudio se realizó con 88 estudiantes de tercero a noveno grado. Al comparar dos gráficos de tamaños diferentes sólo 2, de los 37 alumnos de quinto a séptimo, y 8 alumnos de los 28 de noveno utilizaron la media para comparar los conjuntos. En los contextos más complejos, en conjuntos de tamaños desiguales, las respuestas encontradas fueron categorizadas en tres niveles: *uniestructural*, cuando se referían simplemente a la comparación visual; *multiestructural*, cuando usaban diversos pasos en la comparación visual o en los cálculos numéricos que involucraban la media para comparar grupos; y *relacionales,* cuando integraban toda la información adecuada, tanto sobre la comparación visual como sobre el cálculo de medias, al validar una decisión respecto al grupo que consideraban mejor.

En Watson y Moritz (2000) se investiga el desarrollo de la compresión de la noción de promedios en niños de 8 a 15 años, de tercer hasta noveno curso. El estudio se basó en entrevistas a 137 estudiantes y se realizó en tres fases: Un estudio inicial, con una muestra que integraba 94 alumnos y dos estudios longitudinales. Para el primer estudio longitudinal realizado tres años después del inicial, se reunieron 22 alumnos que habían sido entrevistados inicialmente. De igual modo, para el segundo estudio longitudinal que se realizó cuatro años tras la primera entrevista, fueron seleccionados 21 alumnos que no integraron el primero estudio longitudinal. El cuestionario para las entrevistas constaba de problemas que permitían evaluar el nivel de comprensión de los alumnos sobre la media aritmética. La parte final del mismo cuestionario presentaba preguntas que permitían comparar grupos de tamaños diferentes. Las entrevistas se videograbaron en sesiones individuales de 45 minutos. Para la categorización del uso de la media, mediana y moda se tomó como criterio el uso de varias expresiones en las respuestas de los alumnos como "*the same as most other*" ("igual que los demás") que fue asociado con moda, o por ejemplo "*not good, not bad, but in between*" ("no es bueno, no es malo, pero en medio") que fue asociada con la mediana. Los resultados indicaron que para un gran número de niños el promedio es simplemente un valor en el

centro de la distribución (idea próxima al concepto de mediana). Pocas veces se relaciona la palabra promedio con la moda y menos aún con la media aritmética.

Carvalho (2001) realizó un estudio con estudiantes de séptimo grado de entre 11 y 15 años de edad, cuyo objetivo principal fue profundizar en cómo el trabajo en pareja en el aula genera progresos en el rendimiento académico y cognitivo de los alumnos. El estudio evaluó varias cuestiones de estadística, incluyendo la media aritmética. Se desarrolló bajo una metodología cuasi-experimental, y los estudiantes se dividieron en dos grupos de trabajo: grupo de control y grupo experimental. A los alumnos participantes en la investigación se les administró inicialmente una prueba que incluía tareas estadísticas habituales (pre-test). Los resultados del pre-test sirvieron de base para repartir los alumnos entre el grupo de control y el experimental. Los alumnos que integraron el grupo experimental resolvieron, en parejas, tareas estadísticas no habituales y participaron en una discusión general con la investigadora. Finalizada la fase de trabajo con los alumnos del grupo experimental se administró, a los dos grupos de alumnos, un post-test, que contenía tareas estadísticas habituales. Al comparar los datos del pre-test y post-test, los resultados generales mostraron que los alumnos del grupo experimental, que trabajaron en parejas, presentaron mayor progreso en cuanto al desarrollo lógico y una evolución más acentuada en relación con su rendimiento en las tareas habituales. Otro resultado obtenido es que los contenidos estadísticos causan dificultades en los alumnos. Incluso cuando se imparten con una metodología como la utilizada con los alumnos del grupo experimental, los alumnos continúan presentando obstáculos en la resolución de algunas tareas.

De igual forma, sus resultados muestran también que el dominio del conocimiento estadístico, para algunos alumnos, se concreta en un conocimiento instrumental, que no va más allá del uso de un procedimiento o del recurso al uso del algoritmo. Además, identificaron que las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos al resolver tareas estadísticas no habituales, se resumen en el ensayo-error, en estrategias de resolución aritmética y algebraica, así como de resolución gráfica con, y sin, soporte estadístico.

Cobo y Batanero (2004a) presentaron un trabajo sobre dificultades que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria tienen con las medidas de tendencia central. Llevaron a cabo una evaluación de la comprensión de la media aritmética, teniendo en cuenta el análisis epistemológico del significado de este concepto y

considerando las entidades primarias descritas en Batanero y Godino (2001a), como constituyentes del significado de la media. El estudio se basó en los resultados de un cuestionario pasado a una muestra formada por 24 alumnos y 29 alumnas de primer y cuarto cursos de ESO respectivamente. Los resultados observados en la investigación indican que a pesar de existir una buena comprensión de la media, algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia. En torno a la mitad de los alumnos de 4º es capaz de resolver problemas de media ponderada, dando ponderaciones adecuadas, mientras que en 1º, sólo alrededor de un 10% lo realiza correctamente. Además, encontraron errores de cálculo y aplicación incorrecta de otras propiedades.

Watson (2007) realizó una investigación en la que destaca el papel de la confrontación de conocimientos, en la comprensión de la media aritmética. El estudio se basó en entrevistas videograbadas, a 58 estudiantes de secundaria, de tercer, sexto y noveno grado. Tras las primeras entrevistas, se les presentaron fragmentos de entrevistas videograbadas que contenían respuestas correctas, dadas por un grupo de estudiantes que participaron en un estudio previo (Watson y Moritz, 2000), al contestar el mismo cuestionario, con la finalidad de ver si el alumno cambiaba su respuesta inicial, después de compararla con la exhibida en el video.

El estudio surge de la idea manifestada en diferentes ocasiones, de que una posibilidad para mejorar la comprensión consiste en promover conflictos cognitivos mediante la confrontación entre conocimientos inadecuados y conocimientos lógicos apropiados, partiendo de la idea de que esta metodología crea un ambiente que lleva a resultados satisfactorios en la comprensión.

El principal objetivo del estudio era analizar las dificultades en la comprensión de varios temas del currículo de estadística en la secundaria. El estudio siguió tres direcciones esenciales: (a) comparar las respuestas iniciales de un grupo de estudiantes con las respuestas observadas en un estudio previo (Watson y Moritz, 2000), utilizando un mismo cuestionario; (b) Analizar los cambios en los niveles de respuestas iniciales tras la experiencia del conflicto cognitivo; (c) Comparar los resultados encontrados en el estudio de la media aritmética, utilizando la metodología del conflicto cognitivo, con los encontrados en los estudios relacionados con otros temas del currículo.

Los resultados observados en las direcciones de investigación mencionadas anteriormente, indicaron que, en general, los niveles de interpretación observados en las respuestas iniciales de los 58 estudiantes entrevistados en los tres grados son similares a

los observados por Watson y Moritz (2000) en los grados correspondientes. Con el desarrollo del conflicto cognitivo, no encontraron ningún alumno que presentara una respuesta situada en un nivel de interpretación bajo con relación al presentado previamente. El 41% no mejora el nivel de respuesta, pero se mantiene en el mismo nivel anterior, mientras que el 59% mejora su nivel de respuesta. Sin embargo, reconocen que es posible que, la mejora observada por la resolución del conflicto cognitivo en un tiempo corto, no se sostenga a largo plazo. Con relación a otros tópicos del currículo señalan que se producen también algunas mejoras tras el conflicto cognitivo, con porcentajes de mejora entre 0 y 92%, y siendo los mayores los de las cuestiones sobre promedios y representación de gráficos, en detrimento de aquellas sobre muestra, aleatoriedad, comparación de conjunto de datos de tamaños diferentes y probabilidades.

1.8. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA. OBJETIVOS, PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN E HIPÓTESIS.

Si nos fijamos en los trabajos de investigación que constituyen nuestros antecedentes en el estudio de la media aritmética, observamos que los principales objetivos considerados se resumen en el análisis de los conocimientos de los alumnos respecto de la comprensión conceptual y algorítmica; análisis de las capacidades procedimentales de los alumnos en la resolución de problemas y de los errores conceptuales asociados; evaluación de los efectos que producen los materiales, tanto con respecto al tipo de dato como al medio de representación (verbal, numérico o concreto); análisis de las diferentes vías para desarrollar la comprensión de las propiedades de la media aritmética; caracterización de la comprensión de los alumnos según sus respuestas a ciertas tareas, entre otras. Nuestra constatación es que a pesar de la diversidad de los objetivos tratados en los diferentes trabajos, ciertas cuestiones asociadas a la comprensión de la media aritmética podrían merecer un tratamiento más profundo y exhaustivo. Tales son, por ejemplo, las cuestiones relacionadas con los orígenes de las dificultades, obstáculos y errores que cometen los alumnos en el aprendizaje de la media aritmética, o el análisis de las actuaciones de los alumnos en preguntas de respuesta abierta que tienen relación con preguntas de elección múltiple. De la literatura revisada no encontramos un abordaje pormenorizado sobre las mismas, aunque en algunos casos hubiesen sido mencionadas.

Por otro lado, constatamos pocos trabajos que aborden la caracterización de las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión. Nos referimos al análisis basado en la teoría neopiagetiana SOLO, que evalúa de forma cualitativa el aprendizaje de los alumnos. Este análisis es muy importante al permitir distinguir y clasificar el tipo de respuesta dada por el alumno, y ayuda también a evaluar si la respuesta dada por el estudiante se corresponde con el nivel exigido por la tarea, en función del grado cursado, y de este modo programar situaciones de enseñanza que potencien el desarrollo de su pensamiento. En palabras de Biggs y Collis (1982), la taxonomía SOLO permite relacionar los resultados del aprendizaje con los objetivos propuestos inicialmente, proporcionando informaciones que ayudan a valorar la retroalimentación del proceso de enseñanza y aprendizaje, y proponer mejoras siempre y cuando la situación lo requiera.

De la revisión bibliográfica, sólo en Watson y Moritz (1999, 2000), y en Watson (2007), encontramos expresamente este tipo de análisis, aunque en estas investigaciones, los estudios se desarrollan solamente con estudiantes de primaria y secundaria, y las tareas analizadas se circunscriben a situaciones de comparación de dos conjuntos de datos en forma gráfica y al uso del término promedios en situaciones cotidianas: una relativa al número de horas dedicadas a ver televisión y otra al número de hijos en una familia.

Otra cuestión es que no encontramos referencias de manera específica a concepciones sobre la media aritmética en alumnos del continente africano. La mayor parte de la información que se proporciona al respecto se basa en estudios realizados con estudiantes de otros continentes. En las actas de los últimos tres ICOTS, constatamos que las contribuciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la estadística en los países africanos se centraban fundamentalmente en progresos en la organización curricular; en las experiencias particulares de enseñanza; en las perspectivas futuras; en la influencia socio-económica y cultural de la estadística, entre otros asuntos. Es una realidad, la falta de investigaciones relativas a los promedios, con alumnos de estos países. Quizá se deba, en parte, al hecho de que en algunos países africanos y particularmente en Angola, los contenidos estadísticos no se han contemplado a nivel de secundaria, hasta los últimos años.

El objetivo general de nuestro trabajo es continuar y profundizar en el análisis sobre las dificultades que los alumnos tienen con la media aritmética. Pretendemos profundizar, ampliar y examinar distintos comportamientos en la comprensión de este concepto, considerando los aspectos cognitivos asociados con su aprendizaje y

enseñanza, con alumnado de los últimos cursos de secundaria y universitarios que participan en cursos de formación de profesores, en Luanda (Angola). La cuestión que se plantea es si las concepciones, errores y dificultades de los estudiantes en Luanda, en la comprensión de la media aritmética, tienen alguna relación con los distintos resultados conocidos hoy en día a través de los diferentes estudios. La respuesta a esta cuestión requiere de un estudio en profundidad. Por esta razón, desarrollamos esta investigación, que proporciona información sobre un grupo de estudiantes de una región de las que no se tienen datos, relativos a un concepto clave en el currículo de estadística, en todos los niveles educativos.

Nuestra investigación aborda los siguientes objetivos:

Objetivo 1: Profundizar en el análisis de los aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual sobre la media aritmética que posee el alumnado.

Este objetivo permite averiguar las diferentes concepciones de los alumnos y caracterizarlas en niveles de desarrollo cognitivo. La caracterización jerárquica se pretende establecer mediante el análisis de las respuestas de los alumnos, apoyándonos en la taxonomía SOLO descrita por Biggs y Collis (1982, 1991). El objetivo trata de dar respuestas a algunas preguntas de investigación, relacionadas con la comprensión de este concepto, tales como:

- ¿Cómo concibe el alumnado el concepto de la media aritmética?
- ¿Con qué entidades relaciona el alumnado este concepto?
- ¿Qué niveles de comprensión son más predominantes de acuerdo con la tarea que se presenta?
- ¿Existe relación entre las dificultades presentadas por el alumnado de secundaria en Luanda y las presentadas por los profesores en formación en aquella localidad?

Estas preguntas permiten explorar en el alumnado el uso y comprensión de los elementos de significado de la media aritmética que se indican en Batanero y Godino (2001a), es decir, los elementos fenomenológicos, procedimentales, representativos, intensivos y conceptuales, y de validación, lo que podría mostrar qué tipo de comprensión predomina en ellos. Godino (1996, p. 418) señala que el problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento

matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto?, ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas?, ¿Cómo se desarrollan estos componentes?

Respecto a este objetivo planteamos la siguiente hipótesis general.

Hipótesis 1: El alumnado presenta diferentes tipos de razonamientos sobre la media aritmética, correctos o incorrectos. Sus respuestas a diferentes problemas se encuadran en distintos niveles de desarrollo cognitivo, por lo que es fundamental su caracterización para ayudarles a superar sus dificultades. Creemos, además, que los maestros en formación se encuentran en un nivel cognitivo superior al del alumnado de secundaria en las tareas relativas a este concepto.

Objetivo 2: Profundizar en el análisis de las estrategias que utiliza el alunado en la resolución de problemas que involucran el concepto de media aritmética.

Este objetivo se relaciona fundamentalmente con las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué estrategias utiliza el alumnado en la resolución de problemas de media aritmética (simple o ponderada)?
- ¿Cómo construyen o completan una distribución de datos de media conocida?

Nuestra hipótesis general respecto a este objetivo es la siguiente:

Hipótesis 2: Las principales estrategias utilizadas se relacionan con el uso directo de la fórmula para el cálculo de la media aritmética, y que el alumnado de secundaria encontraría más dificultad en darse cuenta de la necesidad de invertir el algoritmo de la fórmula de cálculo de la media en las situaciones en que se requiere este procedimiento.

Objetivo 3: Profundizar en el análisis del origen de las dificultades y errores que comete el alumnado respecto de la media aritmética.

Este objetivo se relaciona con la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cuáles son los orígenes de las dificultades y errores que cometen nuestros alumnos?

Hemos formulado este objetivo bajo la siguiente hipótesis:

Hipótesis 3: Los errores y dificultades que presenta el alumnado tienen orígenes diversos, pero podrían estar, esencialmente, asociados a la complejidad del propio concepto, a los procesos de desarrollo cognitivo del alumnado, a los procesos de enseñanza del mismo o incluso a sus actitudes afectivas y emocionales hacia la estadística.

Objetivo 4: Diseñar una prueba de evaluación de conocimiento, sobre la media aritmética, que contemple diferentes elementos relacionados con la comprensión de este concepto.

El instrumento a desarrollar constituiría un medio para ayudar a examinar las dificultades, los errores y los obstáculos de los alumnos en la adquisición de este concepto y sus posibles causas, así como las estrategias que utilizan, para proponer ideas con vista a una intervención que atienda los aspectos críticos en la enseñanza de ese concepto.

Para este fin, pensamos que además de considerar los diferentes componentes de significado de la media aritmética descritos por Batanero y Godino (2001a), el referido instrumento debería contemplar, tanto preguntas de respuesta de elección múltiple, como preguntas de respuesta abierta, relacionadas en cuanto a sus objetivos. Eso ayudaría a analizar las actuaciones de los estudiantes al resolver tipos diferentes de problemas que tienen una cierta relación.

Respecto a este objetivo nos planteamos las siguientes interrogantes:

- ¿Es posible desarrollar un instrumento de medida que permita detectar los diferentes comportamientos de los alumnos al resolver problemas sobre la media aritmética?
- ¿Los estudiantes que aciertan en los problemas de respuesta de elección múltiple, realizan acciones razonables en problemas de respuesta abierta?
- ¿Son convincentes sus acciones?, es decir, ¿señalan de manera fundamentada las respuestas correctas en los problemas de respuesta de elección múltiple?

Para las cuestiones anteriores, formulamos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 4: Si consideramos los diferentes componentes del significado del concepto de media aritmética, podemos desarrollar un instrumento de medida que permite hacer una estimación de los conocimientos y capacidades que posee el alumnado sobre este concepto. También conjeturamos que la mayor parte del alumnado que elige las respuestas correctas en los problemas de respuesta de elección múltiple no lo hace con criterio fundado.

Objetivo 5: Desarrollar una propuesta de enseñanza de la media aritmética, que facilite el aprendizaje de este concepto.

Con relación a este objetivo, su materialización se concretaría en el desarrollo de un experimento de enseñanza con un grupo de alumnos utilizando una metodología que enfatiza la discusión de las tareas; el uso de estrategias y de procesos metacognitivos.

Particularmente con respecto a las estrategias de resolución de problemas nos orientamos por las ideas de Polya (1965). Schoenfeld (1992, p. 352) comenta que las estrategias de Polya son referenciadas en varios trabajos. Sin embargo, mientras su nombre es frecuentemente invocado, sus ideas son habitualmente trivializadas. Poco de lo que se hace en el nombre de Polya, conserva el espíritu de sus ideas. Según este autor, el status científico de las estrategias heurísticas discutidas por Polya en su libro, ha sido problemático, a pesar de que la evidencia parece haberse vuelto a su favor en las pasadas décadas.

En nuestro trabajo, nos parece razonable utilizar las estrategias heurísticas de Polya en el sentido indicado por Lesh y Zawojewski (2007), quienes indican que no hay que verlas como simples vías de seleccionar y llevar a cabo procedimientos y reglas, sino también como un medio para desarrollar formas de interpretación y para describir situaciones.

La cuestión que nos planteamos al respecto de este objetivo es la siguiente:

- ¿El desarrollo de una enseñanza en la que el alumno participa activamente en la construcción del conocimiento, resolviendo tareas que muestran ejemplos de la vida real, produciría cambios en el modo de pensar y de apropiación de conocimientos en nuestros sujetos?

Con relación a esta cuestión formulamos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 5: Una enseñanza apoyada en problemas contextualizados, y desarrollada bajo una metodología que hace del alumnado partícipe en la construcción

del conocimiento, y donde la discusión cobra un papel fundamental, ayuda a paliar las dificultades y errores que cometen en el proceso de aprendizaje de la media aritmética.

Nuestra reflexión parte del hecho de que la contextualización de las tareas es relevante, pues, como se indica en Garfield (2003), debe ser esta la naturaleza fundamental que debe caracterizar los contenidos estadísticos. Al respecto, Tormo (1995), señala que la utilización de ejemplos de situaciones de contexto de la vida real es fundamental para extender el concepto de media aritmética. Plantea, que nuestra tarea no debe consistir en enseñar únicamente el algoritmo. Cabría pensar que antes deberíamos plantear desarrollar nociones intuitivas sobre la media.

La propuesta de enseñanza pretende proporcionar una guía didáctica en la que los profesores pueden encontrar indicaciones en cuanto a actividades sobre la media aritmética, su tratamiento metodológico, dificultades y errores más frecuentes de los alumnos, pudiendo, de este modo, servirles de medio auxiliar en su labor, al abordar este contenido.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS. MARCO CONCEPTUAL

2.1. INTRODUCCIÓN

Una vez delimitado el problema de investigación, sus características generales y objetivos que se persiguen, presentaremos en este capítulo el marco conceptual y los fundamentos teóricos de nuestra investigación.

Comenzaremos por describir algunos puntos de vista que muestran algunas acepciones sobre la comprensión en educación matemática. Mediante esta descripción veremos de forma sintética su evolución a lo largo de las últimas décadas.

Partimos de las nociones de comprensión instrumental y relacional señaladas por Skemp (1976, 1979), y nos extendemos a otras ideas ampliamente difundidas en educación matemática, como son por ejemplo, la concepción de la comprensión como un acto de superar los obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1990); el análisis de la comprensión desde la perspectiva de la construcción de concepciones operacionales y estructurales (Sfard; 1991); las visiones de Hiebert y Lefevre (1986) y Hiebert y Carpenter (1992) que relacionan la comprensión con el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos, y que introducen las nociones de conocimiento *conceptual* y conocimiento *procedimental*; y el punto de vista de Vinner (1991) que explica la comprensión desde la perspectiva de las imágenes y las definiciones del concepto.

Se expone también el enfoque de Godino (1996) y Batanero y Godino (2001a), que analizan la comprensión, a partir del acoplamiento progresivo entre el significado institucional y el significado personal, y, los componentes del significado de los objetos estadísticos.

En cuanto al marco teórico-conceptual utilizado en nuestro trabajo, presentamos, sintéticamente, el modelo neopiagetiano SOLO, propuesto por Biggs y Collis (1982; 1991), que asume un papel destacado en la investigación, puesto que es con él con el que se caracterizan las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión. Como el trabajo pretende examinar la comprensión de los alumnos, nos pareció conveniente establecer una jerarquía sobre los diferentes razonamientos manifestados por los

alumnos. Sin embargo, el uso de este marco teórico de referencia no nos ha apartado asociar algunos comportamientos de los estudiantes a otras perspectivas, dadas las diversas interconexiones que se dan entre los elementos que se distinguen en las diferentes teorías.

Utilizamos también las ideas de Socas (1997; 2007), para analizar los orígenes de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la media aritmética en nuestros estudiantes. Asimismo, al incorporar en nuestra investigación una propuesta de enseñanza sobre un contenido determinado –la media aritmética-, encontramos en Artigue (1992) los fundamentos requeridos para el desarrollo de esta actividad, utilizando su propuesta de ingeniería didáctica como complemento a nuestro marco teórico de investigación.

A continuación, presentamos algunos significados atribuidos a la comprensión en el campo de educación matemática, y que se han utilizado como fundamentos teóricos en diversos trabajos de investigación.

2.2. LA COMPRENSIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Según Schroeder (1987), los educadores matemáticos a lo largo de los años han estado siempre preocupados por la comprensión de los estudiantes, pero en las últimas décadas, la actividad y el progreso en esta área han sido substanciales. Esta idea es corroborada por Hiebert y Carpenter (1992), quienes afirman que hay un consenso general dentro de la comunidad de educación matemática de que los estudiantes deberían principalmente comprender las matemáticas. Según ellos, el objetivo de muchas investigaciones y el desarrollo de esfuerzos en esta área de enseñanza han estado relacionados con la promoción del aprendizaje de forma comprensiva. Indican, además, que el problema de la comprensión es un tema que se extiende más allá de las fronteras de la educación matemática. Muchas teorías generales de aprendizaje, como por ejemplo las de la psicología cognitiva, vienen debatiendo ampliamente la noción de comprensión.

Al examinar los trabajos de distintos autores, como Skemp (1976, 1979), Hiebert y Lefevre (1986), Sierpinska (1990), Sfard (1991), Godino (1996), entre otros, hemos podido constatar numerosos modelos y conceptualizaciones en torno a la comprensión. Este hecho nos indica que los autores se acercan al significado de "comprensión" desde

distintos puntos de vista, aunque algunos análisis tengan elementos comunes. A continuación, presentamos algunas de estas ideas.

2.2.1. LOS PUNTOS DE VISTA DE SKEMP Y SU EVOLUCIÓN

Skemp (1976) distingue entre comprensión instrumental y comprensión relacional. La comprensión instrumental consiste en usar reglas sin una razón que las justifique, mientras que la comprensión relacional consiste en el saber qué hacer, y por qué se debe hacer así en cada momento. Según Skemp, cada una de estas formas de comprensión tiene sus ventajas. La comprensión instrumental, puede permitir un recuerdo fácil, proporcionar un acceso rápido y fácil a las respuestas, conduciendo a recompensas más inmediatas y más aparentes. Skemp comenta que es agradable obtener respuestas correctas y no sentir la importancia del éxito, cuando se encuentra el resultado. Con respecto a la comprensión relacional, Skemp indica que es más adaptable a nuevas tareas. Permite relacionar el método de resolución del problema y la posibilidad de adaptar el método a otros problemas, algo que no sucede en la comprensión instrumental, ya que en ella, es necesaria la memorización del método. La enseñanza hacia la comprensión relacional también puede involucrar contenidos más reales. Las ideas que se requieren para la comprensión de un tópico en particular, terminan por ser básicas para la comprensión de muchos otros contenidos. Los conocimientos relacionales pueden ser efectivos para lograr que esa comprensión sea una meta en sí misma, y para promover la evolución de la comprensión.

Skemp (1976) señala que, en particular, un profesor podría, de forma razonada, llevar a cabo una enseñanza para desarrollar la comprensión instrumental, si de antemano prevé que la comprensión relacional puede tomarle demasiado tiempo, también sí cree que la comprensión relacional del tópico es demasiado difícil, y los alumnos necesitan estos tópicos para sus exámenes, y para su uso en la comprensión de otras materias, antes de poder ser comprendida de forma relacional dentro de un esquema (estructura conceptual) disponible para sus alumnos.

Un año después, Byers y Herscovics (1977) propusieron dos tipos más de comprensión: comprensión intuitiva, que es la capacidad para resolver un problema sin un análisis previo del mismo, y la comprensión formal, definida como la capacidad de conectar los símbolos y la notación matemática con las ideas matemáticas relevantes, combinándolas de forma que se encadenen con el razonamiento lógico. En su modelo

los cuatro tipos de comprensión se presentan como vértices de un tetraedro, argumentando que la comprensión formal no es meramente un caso especial de la comprensión relacional. Señalan que el aprendizaje efectivo no se puede centrar solamente en un único tipo de comprensión y que en, cualquier momento, para que el estudiante comprenda un tópico particular será necesario establecer una interrelación de tipos de comprensión. Además, los tipos de comprensión no pueden estar dispuestos en una secuencia estricta. El sistema es dinámico porque los cuatro tipos de comprensión interactúan al mismo tiempo, reforzándose u obstaculizándose los unos a los otros.

Tall (1978) criticó el modelo del tetraedro porque según él, sólo representaba una porción entre tipos de comprensión. A pesar de reconocer que la comprensión es una función de tiempo, se preocupó por la dinámica de la misma y sugirió que los tipos de comprensión deberían ser vistos como facetas de un solo desarrollo. Así, la comprensión que resultaba de una búsqueda por la coherencia, Tall la identificó como comprensión relacional. Para él, la comprensión instrumental se caracteriza por la compartimentalización de las ideas. La comprensión intuitiva ocurre cuando un esquema no está aún suficientemente desarrollado para la tarea prevista, pero existen facetas del problema relacionados con el mismo. En su visión la comprensión formal tiene tanto aspectos individuales como corporativos. Los aspectos individuales se reflejan en los esquemas y sistematizan el pensamiento para ajustarlo, coherentemente, a un proceso reminiscente de operaciones formales.

En Skemp (1979) se hace un análisis relacionado con el modelo de inteligencia en el que el comportamiento humano se ve como un objetivo dirigido. Se indica que el objetivo del aprendizaje instrumental es dar respuestas correctas, siendo la regla un medio para su alcance. El alumno aprende un conjunto de reglas que pueden ser apropiadas para un número limitado de tareas, son reglas para manipular símbolos, y las conexiones son conexiones entre símbolos, y no entre conceptos. El objetivo del aprendizaje relacional es la construcción de esquemas relacionales; la respuesta correcta no es lo único que se busca, sino que constituye una referencia de que las ideas correctas han sido adquiridas, y que parte de un esquema conceptual ha sido adquirido o desarrollado por el alumno.

Skemp, establece un nuevo modelo, formado por tres tipos de comprensión: Instrumental, relacional y lógica (equivalente a la formal) y dos modos de actividad mental: Intuitiva y reflexiva. Justifica que los dos modos de actividad mental no

integran los diferentes tipos de comprensión, pero se puede establecer diversas combinaciones con ellos, como instrumental/intuitiva, relacional/reflexiva, y lógica/reflexiva. Para él la combinación instrumental/reflexiva, sería, por sí misma, contradictoria.

2.2.2. LA COMPRENSIÓN COMO DESARROLLO DE CONEXIONES ENTRE IDEAS, HECHOS O PROCEDIMIENTOS

En la visión de Hiebert y Lefevre (1986) y Hiebert y Carpenter (1992), la comprensión se relaciona con el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos. El desarrollo de la comprensión es el resultado de un proceso que consiste en conectar las representaciones a una red estructurada y cohesionada de conocimientos, donde el proceso de conexión requiere del establecimiento de la relación entre el conocimiento nuevo y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo.

Hiebert y Lefevre (1986) introducen las nociones de conocimiento *conceptual* y conocimiento *procedimental*.

El conocimiento *conceptual* se caracteriza como aquél conocimiento que es rico en relaciones. Se puede imaginar como una página de conocimientos conectados, una red en la que los vínculos están muy bien destacados como piezas discretas de información. Las relaciones extienden los hechos particulares y las proposiciones para que todas las piezas de información estén vinculadas a alguna red. De hecho, una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información; por definición, solo será una parte del conocimiento conceptual si el receptáculo reconoce su relación con otras piezas de información.

Hiebert y Lefevre describen que el desarrollo del conocimiento conceptual se alcanza mediante la construcción de relaciones entre piezas de información. Este proceso de conexión puede ocurrir entre dos piezas de información que ya han sido almacenadas en la memoria o entre una pieza de conocimiento existente y una aprendida recientemente.

El conocimiento *procedimental*, tal como lo definen, se forma de dos partes bien diferenciadas. Una de las partes se compone del lenguaje formal, o sistema representativo de símbolos matemáticos. La otra parte consiste en los algoritmos, o reglas, para completar las tareas matemáticas. La primera parte incluye un conjunto de

símbolos utilizados para representar las ideas matemáticas y la información de las reglas sintácticas para escribir los símbolos de forma aceptable.

En los niveles más avanzados de las Matemáticas el conocimiento de las formas incluye el conocimiento de configuraciones sintácticas de pruebas formales. Afirman, que en general, los conocimientos sobre símbolos y sintaxis de las Matemáticas solo implican una conciencia de las características superficiales, y no un conocimiento significativo. La segunda parte, de los conocimientos procedimentales, consiste de reglas, algoritmos utilizados para resolver tareas matemáticas. Son instrucciones paso a paso que prescriben cómo completar una tarea, cuya característica clave es que son ejecutados en una secuencia lineal predeterminada.

2.2.2.1. RELACIONES ENTRE EL CONOCIMIENTO CONCEPTUAL Y EL CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL

Hiebert y Lefevre (1986) describen las relaciones potenciales que se pueden establecer entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. En sus palabras, los conocimientos matemáticos, en el sentido más amplio, incluyen relaciones fundamentales significativas entre los conocimientos conceptuales y procedimentales. Los estudiantes no tendrían competencias suficientes en Matemáticas si hubiese deficiencias en la adquisición de estos dos tipos de conocimientos o si los mismos fuesen adquiridos como entidades separadas. Cuando los conceptos y los procedimientos no se relacionan, los estudiantes pueden disponer de un buen sentido intuitivo de las Matemáticas pero no serán capaces de resolver problemas o podrían generar respuestas pero no comprender lo que están haciendo. El vínculo crucial entre los conocimientos conceptuales y procedimentales no sólo previene a los estudiantes de estas deficiencias de desarrollo, sino que también contribuyen a desarrollar un profundo conocimiento de base.

Los beneficios de los conocimientos conceptuales al de los conocimientos procedimentales se plasman en el hecho de que con la construcción de relaciones entre estos dos tipos de conocimientos matemáticos se proporciona un desarrollo significativo a los símbolos, se contribuye a la memorización (almacenamiento y recuerdo) de procedimientos y se facilita su uso. Si los procedimientos están relacionados con el conocimiento conceptual, se almacenan como parte de una red de información,

conectados juntos a las relaciones semánticas. Así, una red es menos probable que se destruya que una pieza aislada de información, dado que la memoria es especialmente buena para relaciones que son significativas y muy bien organizadas. El recuerdo se potencia porque la estructura de conocimiento o red del cual el procedimiento es parte, viene equipada con numerosos vínculos que permiten acceder a las estructuras. Los vínculos conceptuales aumentan las oportunidades para recordar procedimientos cuando sea necesario, debido a que sirven de rutas de acceso alternativo para su recuerdo.

Además de mejorar la memoria, la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental facilita el efectivo uso de los procedimientos. Según Hiebert y Lefevre, si el conocimiento conceptual está vinculado con el de procedimiento puede: (a) realzar la representación del problema y simplificar el procedimiento exigido; (b) controlar la selección y ejecución del procedimiento; y (c) promover la transferencia y reducción del número de procedimientos requeridos.

Los problemas se resuelven mediante la construcción de representaciones mentales del problema y mediante la selección del procedimiento adecuado. El conocimiento conceptual puede convertir un problema difícil en más simple, el cual puede ser resuelto por los procedimientos disponibles.

Los conocimientos conceptuales si están enlazados con los procedimientos, pueden controlar su selección y uso y pueden evaluar la racionabilidad del resultado del procedimiento. Con respecto a la selección, el conocimiento conceptual sirve como una ayuda en la elección del procedimiento adecuado y como una limitación que disuade la selección de un procedimiento inadecuado. Igualmente, el conocimiento conceptual puede también informar al usuario de que un procedimiento es inapropiado, algo que acontece cuando el procedimiento por sí mismo viola los principios conceptuales.

Si los procedimientos son comprendidos o aprendidos de forma significativa, se transfieren más fácilmente a los problemas que están estructurados de forma similar. Esta transferencia, reduce el número de procedimientos que deberían ser aprendidos. Los procedimientos que pueden ser utilizados de forma flexible, que no están atados a tareas específicas, son procedimientos que tienen por lo menos alguna generalidad. La generalización de procedimientos elimina la necesidad de aprender diferentes procedimientos para cada tarea y, por eso, reduce el número de procedimientos que deberían ser aprendidos y acordados.

Un vínculo relacional entre los conocimientos conceptuales y procedimentales parece aumentar la utilidad del conocimiento procedimental. Los beneficios aumentan respecto de los dos tipos de conocimiento procedimental, es decir, símbolos y procedimientos. Con respecto a los símbolos se crea un sistema de representación significativo, un prerrequisito esencial para el aprendizaje e interpretación matemática de forma inteligente. Respecto a las reglas, algoritmos y procedimientos, las relaciones del conocimiento conceptual reducen el número de procedimientos que se deben aprender y aumenta la probabilidad de que un procedimiento adecuado sea recordado y utilizado de forma efectiva.

La relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental beneficia tanto al uno como al otro. Respecto a los beneficios para el conocimiento conceptual, Hiebert y Lefevre señalan que son igualmente considerables. Bajo un esquema organizativo similar al anterior, algunos beneficios para el conocimiento conceptual surgen del sistema del lenguaje formal y mediante las convenciones de la sintaxis, mientras que otros surgen del uso de las reglas y procedimientos.

Los símbolos enaltecen los conceptos. El sistema del lenguaje formal de las matemáticas proporciona una herramienta poderosa para tratar con ideas complejas. Los símbolos que han estado relacionados con referentes significativos pueden utilizarse para pensar sobre los conceptos que representan. El pensamiento se ayuda por el hecho de que los símbolos pueden representar paquetes densos o complejos de conceptos; en este caso, el esfuerzo cognitivo de tratar con los conceptos se reduce al centrarse únicamente en los símbolos.

Desde el punto de vista de la ayuda cognitiva, los símbolos permiten organizar y operar en el conocimiento conceptual. El sistema de símbolos puede también producir conocimiento conceptual, ya que el sistema de notación, o la sintaxis de símbolos matemáticos, son responsables del desarrollo de algunos conceptos claves de la matemática.

Por otro lado, los procedimientos se unen a los conceptos para resolver problemas. El conocimiento conceptual es útil para resolver tareas matemáticas solo cuando se accede al mismo y se utiliza en forma adecuada. Anderson (1983) describe una forma en la que eso podría ocurrir. Los procedimientos para los problemas no rutinarios no están disponibles, y éstos se resuelven, inicialmente, por aplicación de

hechos y conceptos, de forma laboriosa. Como repetidamente se resuelven problemas semejantes, el conocimiento conceptual (declarativo) se transforma gradualmente en un conjunto de problemas rutinarios (dualidad condición-acción) para la resolución de problemas. La pareja condición-acción constituye el elemento básico del sistema procedimental. Así, el conocimiento que inicialmente es conceptual puede convertirse luego en un conocimiento procedimental.

Los procedimientos pueden facilitar la aplicación de conocimientos conceptuales porque al convertirse en procesos rutinarios pueden reducir el esfuerzo metal requerido en la solución de un problema y, de este modo, hacer posible la solución de las tareas complejas.

Otro beneficio en esta dirección, es que los procedimientos pueden promover los conceptos. Con la introducción de nuevas notaciones de símbolos y nuevos conceptos, pueden accionarse nuevos procedimientos y estimularse el desarrollo de los conceptos, de forma particular.

Factores que inhiben la construcción de relaciones

A pesar de lo descrito anteriormente, Hiebert y Lefevre (1986) explican que la construcción de relaciones entre piezas de información no siempre ocurre de forma espontánea. Es verdad que "ser competente en las matemáticas implica conocer conceptos, conocer símbolos y procedimientos y conocer cómo éstos están relacionados". Pero "¿Por qué no se construyen relaciones? ¿Cuáles son los factores que inhiben la creación y reconocimiento de las relaciones entre conocimiento conceptual y procedimental?"

Como respuesta a estas preguntas, estos autores indican que cuando las relaciones son explicitadas, no siempre son reconocidas o interiorizadas. Existen muchos factores que pueden contribuir al fracaso del establecimiento de relaciones entre las unidades de conocimiento, destacando los siguientes, por la importancia que podrían tener en el aprendizaje de las matemáticas:

a) *Falta de conocimientos de base*: Las relaciones entre piezas de conocimiento no pueden ser construidas si el conocimiento de base no existe. Esta observación es obvia pero vale la pena considerarla debido a su importancia en el aprendizaje de las matemáticas. Un profundo conocimiento básico es necesario para que sean establecidas relaciones útiles. Las deficiencias en los

conceptos o procedimientos, aunque a veces ocultas, pueden ser la fuente de débiles conexiones o ausencia de las mismas.

b) *Dificultades en la codificación de relaciones*: Un segundo factor que inhibe la construcción de relaciones es la tendencia de los niños a no notar o fallar en la codificación de relaciones, aunque eso puede ser obvio para los adultos. Según Hiebert y Lefevre, las investigaciones sobre la codificación de informaciones en los niños, especialmente los estudios elaborados con base en tareas de asociación de piezas de información, sugieren que a veces los niños tienen problemas en construir relaciones entre las mismas. A pesar de que las relaciones conceptuales entre piezas son obvias para los adultos, los niños no las codifican fácilmente. Puede ser que el fallo en la codificación y construcción de relaciones entre unidades de información no esté únicamente limitada a tareas especiales, como la asociación de piezas de información, sino que también es probable que se extienden a otras tareas de aprendizaje más complejas. Las relaciones entre unidades de conocimiento matemático, aunque enseñadas por los adultos, utilizando métodos aparentemente adecuados, pueden no ser aprendidas e interiorizadas por los niños.

c) *Tendencia a compartimentar el conocimiento*: Un tercer factor que parece impedir la construcción de relaciones entre unidades de conocimientos es que el conocimiento adquirido a veces está limitado por el contexto. Las cosas aprendidas en un contexto particular están vinculadas inicialmente a las características de estos contextos. Eso evita que uno distinga las semejanzas entre los conocimientos adquiridos en el momento y los adquiridos previamente, sostenidos en la memoria. El conocimiento del contexto limitado no busca relaciones fuera del contexto inmediato. El conocimiento compartimentado puede permanecer aislado aún cuando esté bien desarrollado de forma particular.

2.2.3. LA COMPRENSIÓN COMO UN ACTO DE SUPERAR LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Sierpinska (1990) ofrece su punto de vista sobre el significado de la comprensión, señalando que el uso del término “comprensión” en el campo de la

educación matemática es variado. Comenta que, por ejemplo, en la práctica de la enseñanza, la pregunta, "¿Comprendes?", es exactamente otra forma usual de decir: "¿Puedo seguir?" Afirma que en la investigación, la palabra "comprensión" algunas veces se asume como una noción bien definida y se ve como algo ideal que debe ser logrado por el estudiante. Según ella, el objetivo principal de la elaboración de diseños de enseñanza, proyectos, nuevos software y libros de texto, es promover la mejor comprensión de la materia por los estudiantes. Explica que en ciertas ocasiones la comprensión se ve como el objetivo del aprendizaje, como por ejemplo en la expresión "hacer comprender" y otras veces es su precondición, como por ejemplo en el uso de la expresión "aprender sin comprensión".

La autora explica que la comprensión de un concepto matemático no se alcanza a través de la simple lectura de un texto. Requiere que los estudiantes estén involucrados en ciertas actividades, situaciones de problemas, diálogos y discusiones y la interpretación de muchos textos diferentes. Señala que la comprensión se logra con la acumulación de conocimiento sobre propiedades de los objetos, ejemplos, y desarrollo de conceptos relacionados entre clases de conceptos.

Según esta autora, los nuevos conceptos pueden asimilarse con base a analogías con lo que ya se conoce. Plantea que el principal problema reside en la incorporación de nuevos conceptos en las estructuras ya existentes. Establece una relación entre la noción de comprensión y de obstáculos epistemológicos. Afirma que toda comprensión se basa en creencias previas, juicios previos, preconcepciones, convicciones, esquemas de pensamientos inconscientes, y que por consiguiente, cuando descubrimos que esta comprensión es errónea entonces estamos en presencia de mitos, prejuicios, malas interpretaciones, opiniones preconcebidas, hábitos intelectuales. Estas convicciones constituyen formas de conocimientos. Conocemos algo en un cierto momento. Pero en el momento en que descubrimos que hay algo erróneo en este conocimiento (es decir, somos conscientes de un obstáculo epistemológico), comprendemos algo y comenzamos a conocer de otra forma. Esta nueva forma de conocer puede que comience a funcionar como un obstáculo epistemológico en una situación diferente. Señala, que quizá no todos, pero algunos actos de comprensión son a su vez actos de superación de un obstáculo epistemológico. Indica además, que algunos actos de comprensión pueden convertirse en actos de adquisición de nuevos obstáculos epistemológicos.

En palabras de Sierpinska (1990), en muchos casos superar un obstáculo epistemológico y comprender son justamente dos formas de explicar la misma cosa. La primera es "negativa" y la otra es "positiva". Todo depende del punto de vista del observador. Los obstáculos epistemológicos se enfocan de forma retrógrada, centrándose sobre lo que estaba errado, lo que era insuficiente, en la manera de conocer. Las miradas de la comprensión se remiten a las nuevas maneras de conocer. Comenta, que no sabemos realmente lo que continúa en la cabeza del estudiante hasta un momento crucial, pero si tomamos la perspectiva de sus conocimientos anteriores, vemos que ha superado un obstáculo, y si tomamos la perspectiva de los conocimientos futuros, le vemos comprender. Según explica, no podemos adoptar las dos perspectivas a la vez. Y que por lo tanto, superar un obstáculo epistemológico y comprender son dos imágenes complementarias de una realidad desconocida sobre los cambios cualitativos importantes en la mente humana. Señala, así mismo, que esto sugiere un postulado del análisis epistemológico de los conceptos matemáticos: éstos deberán contener tanto imágenes positivas como negativas, es decir, los obstáculos epistemológicos y las condiciones de comprensión.

2.2.4. LA COMPRENSIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE CONSTRUCCIÓN DE LAS CONCEPCIONES OPERACIONALES Y ESTRUCTURALES

Sfard (1991) explica que dependiendo del punto de vista asumido en un momento dado, se utilizarán dos palabras diferentes para expresar la construcción de las entidades matemáticas: la palabra "*concepto*" (algunas veces utilizada como noción) que será mencionada cada vez que una idea matemática se relaciona con su forma oficial, como un constructo teórico "dentro del universo formal del conocimiento ideal"; y la palabra "*concepción*", que se refiere al grupo de representaciones y vínculos internos evocados por el concepto, que constituye el homólogo del concepto en el universo interno, subjetivo del saber humano.

La autora señala que los conceptos matemáticos radican en una dualidad de concepción, por lo que se pueden visualizar como estáticos, instantáneos e integradores (*estructurales*) o dinámicos, secuénciales y detallados (*operacionales*).

Según Sfard, la *concepción estructural* se refiere a los objetos abstractos mientras que la *concepción operacional* tiene que ver con los procesos, algoritmos y

acciones que ocurren a nivel físico o metal. En particular una concepción estructural es, en cierta forma, isomorfa a la capacidad de ver las construcciones matemáticas avanzadas que no son entidades físicas, sino organizaciones mentales abstractas que pueden percibirse sólo en el ojo de la mente de cada individuo. Indica que esta capacidad de ver los objetos invisibles que forman el concepto matemático entra en el mundo de la visualización. Propone que las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales compactas e integradoras, en vez de representaciones verbales que requieren un proceso serial. Estas imágenes mentales permiten al estudiante realizar ideas abstractas más tangibles y las considera casi como entidades físicas en las que las operaciones relacionadas con ellas ocurren por completo en los ojos de la mente. Indica, además, que dicha visualización permite al estudiante desarrollar una visión holística del concepto, y por lo tanto permitir observaciones desde diferentes perspectivas, al tiempo que conserva la identidad de una relación dentro del concepto. A pesar de todo, considera que existe una profunda brecha ontológica entre las concepciones operacionales y estructurales. Sin embargo, las concepciones operacionales y estructurales no son mutuamente exclusivas. En particular, son complementarias en el sentido de que son dos visiones del mismo concepto matemático y son inseparables, debido a que el concepto alberga elementos tanto operacionales como estructurales. La concepción operacional observa el concepto como un proceso, y la concepción estructural iguala el concepto con un objeto estático trascendente de las raíces de su proceso. Sin embargo, ambas concepciones son necesarias para el desarrollo del concepto.

Indica que de los tipos de definiciones matemáticas, la descripción estructural parece ser más abstracta. En efecto, para hablar acerca de los objetos matemáticos, se debe ser capaz de tratar con los productos de algunos procesos sin perjudicar a los procesos en sí. Parece que el enfoque estructural debe considerarse como un nivel más avanzado de desarrollo conceptual. En otras palabras, hay buenas razones para esperar que en el proceso de la formación del concepto, las concepciones operacionales precedan a las concepciones estructurales. Eso no quiere decir que las concepciones estructurales sólo puedan desarrollarse después de la construcción de concepciones operacionales sino que significa que, conforme se estudia el desarrollo histórico de cualquier concepto matemático, se pasa por una serie de etapas que culminan en la concepción estructural.

La categorización hecha por Sfard en distinguir la concepciones estructural y operacional, parece concordar con las dicotomías que describimos anteriormente, en los análisis de Skemp (1976) en su abordaje sobre la comprensión instrumental y relacional, o en Hiebert y Lefevre (1986), en el que se detallan las diferencias entre el conocimiento conceptual y procedimental.

En un análisis más amplio, Sfard (1991) apunta que pueden distinguirse tres etapas diferentes en el proceso de formación de conceptos: (a) la generación de un proceso a partir de objetos ya familiares, (b) el reconocimiento emergente de los procesos como entidades autónomas y (c) la capacidad de concebir la nueva entidad como una estructura sintetizada similar a un objeto. Estas tres etapas corresponden a tres "grados de estructuración" que pueden denominarse, a partir de los argumentos del análisis puramente teórico de la relación entre procesos y objetos en el desarrollo de conceptos, y que son la *interiorización,* ***la*** *condensación* y la *reificación,* respectivamente.

En la etapa de *interiorización* un estudiante se familiariza con los procesos, los cuales finalmente pueden reificarse en un objeto matemático. Sfard (1991) señala que la interiorización en este contexto resulta similar al mecanismo descrito por Piaget, que comprende esencialmente un cambio de concepciones basado en las operaciones físicas hasta hacer operaciones fundadas en las representaciones mentales de los procesos.

La etapa de *condensación* corresponde a la acepción habitual de este término gramatical. En lugar de trabajar mediante una secuencia larga de procesos mentales relacionados pero distintos, la condensación permite al estudiante concebir una secuencia como un solo proceso y relacionar su entrada y salida sin los pasos que intervienen en el hecho. En esta etapa una persona se vuelve cada vez más capaz de pensar sobre un proceso dado como un todo, sin sentir el impulso de ir al detalle. Gracias a la condensación, combinar el proceso con otros procesos, hacer comparaciones y generalizaciones, se vuelve mucho más fácil. La aplicación de un nombre para la secuencia condensada da lugar a un nuevo concepto que se mantiene fijo a una orientación del proceso hasta que quede reificado.

La *reificación* se define como un salto cualitativo desde la concepción de una nueva entidad, como una conexión ligada a un proceso, hacia la concepción de la noción de una entidad como un objeto con el que se puede actuar. Es un cambio ontológico por

parte del estudiante. Este cambio permite la capacidad de ver algo familiar desde una perspectiva totalmente distinta que separa la secuencia condensada de la secuencia origen. La estructura que se presenta, a pesar de que esté invariablemente conectada al proceso que ejemplifica, puede observarse ya como un objeto estático en el ojo de la mente. La nueva entidad comienza a presentar su significado a partir de su asociación, no en el terreno de los procesos, sino como un miembro de una categoría de objetos abstractos. En algún momento, esta categoría se convierte en el fundamento máximo de las declaraciones de una nueva existencia del objeto, en vez de cualquier tipo de construcción concreta. Una persona puede investigar las propiedades generales de dicha categoría y las diversas relaciones entre sus representantes. Él o ella pueden resolver problemas relacionados con la búsqueda de todos los ejemplos de esta categoría que cumplan una condición dada. Los procesos pueden realizarse en lo que se considera una entrada para el objeto recién nacido. Los nuevos objetos matemáticos pueden construirse a parte del objeto presente.

Una vez que se ha reificado un proceso, éste produce un objeto en el que puede actuar un proceso de un nivel más elevado. En este momento el proceso se interioriza y se repite todo el ciclo, de nuevo.

Sfard, considera benéficos los efectos de la reificación en el proceso del aprendizaje del estudiante. La formación de una concepción estructural, significa reorganizar el esquema cognitivo a través de la suma de nuevos estratos, convirtiendo la secuencia totalmente dentro de estructuras jerárquicas. De este modo, dentro del enfoque estructural se dispone de más espacios para contener nuevas informaciones. Como resultado, el aprendizaje se vuelve más efectivo, más significativo. Además la retroalimentación del proceso se vuelve más rápido cuando la información necesaria se almacena en estructuras jerárquicas en forma de árbol.

En resumen, Sfard señala que la concepción estructural desempeña un gran papel en los procesos cognitivos de los estudiantes ya que facilita todo el proceso (aprendizaje y resolución de problemas), mientras que la concepción operacional es necesaria, pero no suficiente en el proceso cognitivo.

2.2.5. LA COMPRENSIÓN Y LA FORMACIÓN DE IMÁGENES Y DEFINICIONES DEL CONCEPTO

La comprensión también se ha abordado desde la perspectiva de las imágenes y de las definiciones del concepto. Vinner (1991) indica que la imagen del concepto es algo no verbal asociado, en nuestra mente, con el nombre del concepto. Eso puede ser una *representación visual* del concepto, en el caso de que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una *recolección de impresiones y experiencias*. Las representaciones visuales, las imágenes mentales, las impresiones y experiencias asociadas con el nombre del concepto, pueden traducirse en formas verbales. Matiza que estas formas verbales no son las primeras ideas evocadas en nuestra memoria, surgen en nuestra mente solamente en una etapa posterior. Tall (1991) puntualiza: "*…Utilizaremos el termino imagen del concepto para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales y procesos y propiedades asociadas. Se construye a lo largo de los años, a través de experiencias de todo tipo, cambiando según el individuo encuentre nuevos estímulos y madure* ".

Davis y Vinner (1986) consideran que una imagen del concepto difiere de una definición formal del mismo, en caso de que la haya, debido a que la imagen del concepto ejemplifica la manera en que un concepto particular puede observarse por parte de un individuo. La imagen del concepto involucra distintos vínculos con otras estructuras del conocimiento asociadas, ejemplares, prototipos y procesos. Como resultado, la imagen del concepto es una estructura cognitiva general construida por un estudiante; sin embargo, en contextos diferentes, sus distintos componentes aparecen en primer plano, ya que estas partes comprenden la imagen evocada, que consta de un subgrupo propio.

Esta distinción entre la imagen y la imagen evocada permite explicar cómo los estudiantes responden de manera inconsistente, proporcionando evidencia de la comprensión en una circunstancia y careciendo de comprensión en otra. La descripción de un estudiante sobre sus comprensiones puede proporcionar otras discrepancias. En particular cualquier imagen del concepto tiene una definición relacionada con la forma o palabras utilizadas por un estudiante para especificarlo. Sin embargo, esta definición del concepto puede diferir de su definición matemática formal, debido a que la definición es una descripción individualizada del mismo.

Tall (1991) explica que la construcción de estas imágenes del concepto suceden cuando el estudiante encuentra nueva información y se enfrenta a la consolidación de esta información dentro de la estructura cognitiva ya presente. El proceso de la incorporación se relaciona con las nociones de Piaget sobre la transición de un estado mental a otro y, en efecto, se refiere a la *asimilación* y la *acomodación*. La *asimilación* se relaciona con los procesos en los cuales se manifiesta la adquisición de nuevos datos y la formación de vínculos entre esta nueva información y la estructura original. En contraste, la *acomodación* es el proceso a través del cual la estructura cognitiva del individuo debe ser modificada.

De este modo, como señala Vinner (1991), comprender un concepto significa poseer su imagen. Saber de memoria una definición de un concepto no garantiza su comprensión. Comenta que "*nosotros asumimos que adquirir un concepto significa formar una imagen del mismo concepto*" (p. 69). Las definiciones ayudan a formar la imagen del concepto. Pero una vez que la imagen se ha formado, se puede prescindir de la definición.

2.2.6. LA COMPRENSIÓN Y EL SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Godino (1996) desarrolla una teoría sobre la comprensión en educación matemática destacando algunos elementos claves en este proceso. En su análisis, indica que en general los problemas no aparecen de forma aislada y las personas realizan diferentes tipos de prácticas, o acciones, para resolver un problema matemático, comunicar la solución a otras personas, validar o generalizar la solución a otros escenarios y problemas. La génesis del conocimiento de un sujeto crece como consecuencia de la interacción de las personas con el campo de problemas, que es, a su vez, mediado por el contexto institucional.

Según él, surgen, de esta forma, dos unidades primarias de análisis en el estudio cognitivo y en los procesos didácticos, que son las *prácticas significativas*, y el *significado de un objeto*, a los que se les postulan dos dimensiones independientes: la dimensión institucional y la dimensión personal.

Una práctica es significativa para una persona si cumple la función de resolver el problema, comunicar, validar o difundir la solución. Señala que esta noción es utilizada

para conceptualizar los objetos matemáticos, tanto en su faceta epistemológica como psicológica.

El sistema modelo de prácticas significativas, es decir, el sistema de prácticas eficientes para alcanzar los objetivos programados se define como *significado (personal o institucional) del objeto*. Está vinculado con el campo del problema en el que surgen estos objetos en un momento dado y se compone de entidades. Su naturaleza es opuesta al carácter intencional de los objetos y permite abordar el tema de diseños de situaciones de enseñanza y la evaluación de los conocimientos de los estudiantes.

2.2.6.1. COMPONENTES DE SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En Batanero y Godino (2001a), se describen los componentes del significado de los objetos matemáticos, tomando como ejemplo el concepto de media aritmética. Los autores, argumentan que la necesidad de desarrollar investigaciones sustentadas en educación estadística requiere el empleo de una teoría de la comprensión, donde, por ejemplo, la noción de promedios, no esté reducida a una definición mental personal. Señalan que los promedios son entidades culturales muy complejas. Para poder explicarlos es necesario considerar en primer lugar su naturaleza, y de forma general explicar cuáles son sus significados (conceptos, teoremas, teorías). Observan, que si se colocara esta situación a un teórico estadístico, probablemente éste usaría la definición, para describir el objeto estadístico de referencia, a través de sus atributos y relaciones. Sin embargo, en el campo de la educación, donde se está interesado en cómo los conceptos son construidos progresivamente, dar una lista de atributos de un concepto no describe completamente el concepto. Los autores citan a Vergnaud, comentando que se necesita un análisis más detallado, como el estudio de las propiedades que hacen este concepto significativo, y que el significado del concepto incluye también situaciones y representaciones asociadas al mismo.

En el mismo trabajo, distinguen cinco componentes, interrelacionados, en el significado del concepto:

- *Problemas y situaciones* (*Elementos Fenomenológicos*). Inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas del que surge el concepto. Cuando retrocedemos en la historia a los orígenes de un concepto dado, encontramos algunos problemas característicos. Su solución llevó

(progresivamente) a la creación del concepto. Un problema tal en el caso de la media, consiste en descubrir la mejor estimación de una cantidad desconocida cuando se disponen de varias medidas diferentes x_1, x_2, x_3, $x_4 \ldots x_n$ de tal cantidad. Como se sabe, sumando los valores de las diferentes medidas y dividendo por el número de datos – que nosotros conocemos hoy como la media aritmética – es la vía aplicada por algunos científicos del pasado.

- *Procedimientos, algoritmos, operaciones* (*Elementos Procedimentales*). Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de prácticas, que llegan a convertirse en rutinas con el tiempo. Estas prácticas pueden estar relacionadas con el uso de algoritmos específicos o procedimientos tales como sumar las cantidades x_1, x_2, x_3, $x_4 \ldots x_n$ y dividirlas por el número de datos, elaborar una tabla de frecuencias, ordenar los datos (para calcular la mediana) o realizar una representación gráfica de los datos.
- *Representaciones (Elementos Representativos).* Son las representaciones ostensivas, que tienen una función semiótica y también una función instrumental, puesto que se opera con las representaciones en vez de operar con el concepto que ha sido representado. Se trata de números, términos expresiones, símbolos, gráficos, tablas, etc.
- *La definición del concepto, sus propiedades y relaciones* (*Elementos Intensivos y Conceptuales*). Son elementos tales, como el hecho de que la media de un conjunto de datos enteros puede ser un número no entero, que puede estar influenciado por los valores extremos; la posición relativa de la media, mediana y la moda en distribuciones asimétricas, entre otros.
- *Los argumentos y la comprobación* (*Elementos de Validación*). Se emplean para convencer a los demás de la validez de las soluciones de nuestros problemas o la veracidad de las propiedades relacionadas con los conceptos.

2.2.6.2. DIMENSIONES INSTITUCIONAL Y PERSONAL DEL CONOCIMIENTO

Batanero y Godino (2001a), destacan que diferentes niveles de abstracción y comprensión pueden apreciarse en cada uno de los componentes del significado de los objetos, y en particular, el significado de la media aritmética es muy diferente para

distintos estudiantes o diferentes instituciones. Los niños de la enseñanza primaria, por ejemplo, pueden dar una definición simple de la media, reconocer una simple notación, pero no pueden comprender la fórmula algebraica y sólo son capaces de calcular la media de un conjunto pequeño de datos. Un ciudadano con cultura estadística también puede comprender el uso de la media en los medios de comunicación o en actividades de negocios (por ejemplo comprender las reservas del mercado, los precios, la situación del empleo y otros indicadores económicos que usan la media ponderada). En las actividades científicas y profesionales se puede calcular la media de un conjunto amplio de datos usando ordenadores y haciendo uso de promedios condicionales para calcular medias marginales en un conjunto de datos bivariantes o multivariantes.

Por otro lado, afirman que también podemos distinguir el significado personal e institucional con respecto a un concepto dado, al diferenciar entre el significado que ha sido propuesto o fijado para este concepto en una institución específica y el significado que una persona en particular da al concepto en la institución. Por ejemplo, un niño de primaria podría sorprenderse al obtener un valor no entero como media del número de hijos en una familia e interpretar este valor a su manera, de forma diferente al significado institucional. El objetivo de la enseñanza estadística es ayudar a los estudiantes a relacionar de forma progresiva su significado personal con el significado que los conceptos estadísticos tienen en una escuela dada, universidad o cualquier institución de enseñanza.

Respecto al mismo asunto, Batanero (2001) señala que los matemáticos y estadísticos profesionales no constituyen las únicas instituciones interesadas en resolver los problemas de los promedios. Existen otras instituciones diferentes, aunque podrían atribuir un significado más restringido al que reciben dentro de la matemática, por ejemplo:

1) En la escuela primaria los currículos proponen que se enseñe a los alumnos:
    a. La definición de la media, mediana y moda en el caso más simple, empleando una notación sencilla (se evita el sumatorio y la ponderación);
    b. algunos ejemplos de aplicación, limitando el cálculo de las medidas de tendencia central a conjuntos sencillos de datos, y haciéndolo manualmente o con calculadora;

c. discriminación respecto de otras medidas de tendencia central (mediana, moda).

2) En la escuela secundaria (y en la universidad) se amplia la definición de la media, trabajando primero con medias ponderadas y luego con medias de variables aleatorias discretas y continuas. Se enuncian y demuestran algunas propiedades de los promedios y se presentan aplicaciones a situaciones problemáticas más realistas y complejas. En la universidad se introduce la noción de media o esperanza matemática de una distribución de probabilidad y se muestra que la media es un parámetro que define algunas distribuciones de probabilidad, como la normal; al iniciar el estudio de la inferencia, distinguimos varias medias: media de la muestra, media de la población, media de la media muestral en todas las muestras de tamaño dado.

3) En la "vida diaria" encontramos la media en los medios de comunicación y el trabajo profesional, por ejemplo, cuando analizamos los números índices de la evolución de la bolsa, precios, producción, empleo y otros indicadores económicos.

Éstos son algunos ejemplos por lo que conviene distinguir entre *significado institucional* y *significado personal* de un objeto matemático.

Por otro lado, el significado de un objeto matemático se configura y evoluciona a lo largo del tiempo, según se va ampliando el campo de problemas asociado. Por ejemplo, el conocimiento sobre la media no ha sido siempre igual al actual, sino que se ha desarrollado lentamente a lo largo del tiempo, a medida que se han ido resolviendo problemas progresivamente diferentes y cada vez más complejos. Este carácter progresivo de la construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto que es un proceso lento y costoso.

2.2.6.3. SIGNIFICADO Y COMPRENSIÓN

Según Godino (1996), para que una teoría de comprensión matemática sea útil y efectiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje, debe reconocer la dualidad dialéctica entre las facetas personal e institucional del conocimiento y su comprensión.

Por ejemplo, en una clase de matemáticas el profesor sigue las directrices curriculares, los libros de texto y materiales didácticos, que marcan un significado

particular restringido para una materia determinada. Al realizar la evaluación, el profesor considera que el alumno "conoce" o "comprende" esta materia si hay un ajuste entre el significado institucional y el personal, construidos por el sujeto (Batanero, 2001).

La idea anterior, parece concordar con lo expresado por Godino (1996), que afirma que la comprensión personal de un concepto es, en su modelo, la "*captación*" del significado de dicho concepto. Expresa, además, que la construcción de este significado no debe concebirse como una entidad unitaria y absoluta, sino como algo compuesto y relativo al escenario institucional. De este modo, la comprensión de un concepto por el sujeto, en un momento dado y bajo ciertas circunstancias, implicará la adquisición de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes.

2.3. MARCO CONCEPTUAL

En este apartado presentaremos el marco conceptual que ha sustentado directamente nuestra investigación. Como hemos referido previamente al introducir este capítulo, los fundamentos presentados anteriormente son algunas de las bases que permiten tener una visión global sobre la comprensión en educación matemática y la preocupación de diferentes investigadores por el tema.

En nuestro estudio damos un énfasis considerable a la caracterización jerárquica de las estructuras presentes en las respuestas de los alumnos. Desde esta perspectiva, empezamos describiendo la taxonomía SOLO, como uno de los marcos de referencia para el análisis del aprendizaje de los alumnos, y posteriormente expondremos la teoría de Socas (1997; 2007) sobre las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas, y las ideas de Artigue (1992) relativas a la ingeniería didáctica como metodología de investigación.

2.3.1. LA TAXONOMÍA *SOLO*: CARACTERIZACIÓN JERÁRQUICA DE LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Uno de los modelos de referencia que viene siendo utilizado en la evaluación del aprendizaje de los estudiantes es la taxonomía SOLO descrita por Biggs y Collis (1982; 1991). Constituye un sistema jerárquico, cuyo acrónimo SOLO se refiere a la estructura

del resultado del aprendizaje observado (structure of the observed learning outcome), caracterizando de forma particular las respuestas de los alumnos.

Estos autores señalan que en situaciones concretas, donde hay contenidos específicos que los estudiantes deben aprender, surge la necesidad de medir la cualidad de ese aprendizaje. Esta cualidad del aprendizaje depende ya sea de situaciones externas al alumno, como por ejemplo, la calidad de la instrucción, o de situaciones intrínsecas al mismo, como su motivación, su etapa de desarrollo, sus conocimientos previos de la materia, etc. Así, si por ejemplo el alumno no tiene intención de aprender, no prestará atención a los contenidos impartidos en clase y si no tiene conocimientos previos sus respuestas serán muy vagas o ignorará ciertas cuestiones. En algunos casos, presentará respuestas puramente personales y relacionadas con sus propios asuntos o punto de vista personal. Biggs y Collis (1982) indican que Piaget usó el término egocéntrico, para describir las respuestas derivadas de tales comportamientos, que son típicas de los niños alrededor de los 4 a los 6 años de edad. Según ellos, esta caracterización proporciona una idea muy importante para comprender la relación entre etapa de desarrollo y calidad de respuestas.

Los autores consideran que a medida que progresa el nivel de respuestas, es posible discernir una interacción compleja entre: la *intención* de involucrarse lo más profundo posible en la tarea, evocando los contenidos aprendidos; intentar *relacionar* estos contenidos lo más amplio posible con los conocimientos previos más relevantes; *generalizar* los aspectos de los temas que no fueron presentados según la pauta habitual, pero que de igual forma son conceptualmente importantes. Comentan, que sin embargo, las buenas intenciones y los conocimientos previos son por si sólo insuficientes para lograr el nivel esperado, es decir, que el estudiante pueda pensar de una cierta forma sobre el contenido, que estas formas de pensamiento se parecen estrechamente a lo que Piaget y sus colaboradores estudiaron en niños de varias edades y que usaron para caracterizar las diferentes etapas en el desarrollo intelectual desde el nacimiento a la madurez.

Según indican Biggs y Collis (1982), los psicólogos cognitivos, que están interesados en el desarrollo y despliegue de los procesos cognitivos, creen, en general, que cuando un individuo aprende algo, interpreta este conocimiento en términos de estructuras de pensamiento existente, y que Piaget usó el término *asimilación* para referirse a este proceso, mientras algunos investigadores usan el término "*encoding*".

Explican que con la *asimilación* (o *encondig*) del contenido relativamente complejo, estas estructuras se modifican y se extienden por sí mismas a través de la *acomodación* o "*recoding*", según las demandas que se ponen de manifiesto en el proceso.

Con la experiencia e indudablemente, con la madurez de ciertas estructuras mentales importantes, el individuo construye de forma creciente un sistema complejo de reglas que gobiernan sus pensamientos. Algunas reglas son generales, aplicables a una variedad de situaciones y cuestiones, mientras que otras son específicas de cuestiones particulares que están siendo aprendidas. Se trata de un proceso continuo, que parte del nacimiento hacia adelante, y en él se registran diferentes puntos destacables, relativos a la cualidad del pensamiento. Biggs y Collis señalan que Piaget distinguió, efectivamente, varias etapas de pensamiento en este proceso, considerando como etapa final, la que se manifiesta con la llegada de la adolescencia.

La taxonomía SOLO de Biggs y Collis, que describiremos en este apartado, tiene sus raíces en la teoría del desarrollo evolutivo de Piaget, que consiste en caracterizar al alumno en una etapa del desarrollo determinada. Biggs y Collis (1982) mencionan algunos aspectos relacionados con esta teoría, como por ejemplo:

- Las etapas tienen una secuencia irreversible, partiendo de la más baja a la más elevada.
- Las etapas y subetapas son estables. Una vez que un individuo llega a una etapa, se asume que piensa de forma acorde a las características de esa etapa, no cabiendo ninguna otra posibilidad.
- Como consecuencia de lo anterior, la mejor forma para predecir cómo un sujeto se comportará en una tarea dada es observar cómo interpreta otras tareas relacionadas lógicamente con ella.
- Se establecen algunas excepciones a los dos aspectos anteriores, e indican que Piaget llamó a eso *décalage* (desfase), que ocurre cuando un individuo interpreta una tarea pero no es capaz de interpretar otra tarea con estructura similar. Por ejemplo, cuando el alumno puede interpretar la expresión 7 + 9 = ¿?, pero no la expresión 700 + 900 = ¿? El *décalage* es una excepción a la regla con respecto a la forma en que el individuo se comporta, considerándola como típica de su etapa del desarrollo cognitivo.

- Se etiqueta al niño, con "*pre-concreto*", "*concreto*", "*formal*", o cualquier otra denominación de las etapas de desarrollo cognitivo, cambiando de etiqueta según la etapa en que se caracteriza su respuesta.

Según estos autores, en sus trabajos cambiaron el marco de referencia, para que la cualidad del aprendizaje se convirtiese en punto de partida, en vez de la etapa de desarrollo del niño. Eso se debe al hecho de que, cuando analizaron las respuestas de los alumnos en diferentes áreas, observaron que no se ajustaban los postulados de la teoría de Piaget sobre el desarrollo por etapa. Encontraron inconsistencias al analizar las interpretaciones de los alumnos. Por ejemplo, según la respuesta dada por un alumno en una cierta disciplina, se asumía que éste pertenecía a una determinada etapa de desarrollo evolutivo; sin embargo, al mismo alumno se le caracterizaba en una etapa diferente en función de la respuesta que daba en otra disciplina. Eso conlleva a confusiones sobre cuál era realmente la verdadera etapa de desarrollo evolutivo de este estudiante.

Según Biggs y Collis (1982) la cuestión es que con la teoría de Piaget, lo que se hace es caracterizar al alumno y no la respuesta. Señalan que desde el punto de vista práctico, el cambio de etiqueta por la caracterización de la respuesta a una tarea particular, era la solución para resolver la dificultad planteada anteriormente. Con esto, no hay ninguna inconsistencia en decir que la respuesta dada a la tarea en un día dado se corresponde con una etapa determinada y que la presentada en otro día, es típica de otra etapa.

Según ellos, eso es lo que distingue precisamente el modelo SOLO de la teoría de desarrollo por etapas. En la teoría Piagetiana se caracteriza al alumno en una etapa de desarrollo determinada, según el modo específico de respuesta. Sin embargo con la taxonomía SOLO no se procede a la caracterización del estudiante, sino a la de su respuesta, que revela la cualidad del aprendizaje. Según estos autores, esta diferencia muestra la distinción entre lo que es la estructura cognitiva generalizada del individuo, que es un concepto puramente hipotético y no mensurable directamente y la estructura de la respuesta que proporciona a tareas específicas del aprendizaje. La estructura de la respuesta se relaciona con la cualidad del aprendizaje, y es mensurable, siendo los niveles de comprensión las formas equivalentes de expresar la cualidad del aprendizaje manifestada por los alumnos en una tarea particular.

Biggs y Collis (1991) señalan que la taxonomía SOLO puede usarse tanto para evaluar el aprendizaje cualitativo de los estudiantes, como para establecer los objetivos de un plan curricular, ya que los estudiantes manifiestan una secuencia consistente, o ciclo de aprendizaje, a medida que van desarrollando sus competencias. Dicho ciclo es generalizable a una gama de tareas y en particular a tareas escolares básicas, en las que se puede analizar jerárquicamente la complejidad estructural de las respuestas de los mismos, en cualquier forma de representación bajo la que se expresa el aprendizaje.

El modelo SOLO, consiste de cinco niveles básicos de comprensión: *preestructural*, *uniestructural*, *multiestructural*, *relacional* y *abstracción ampliada*. Los aspectos cruciales que caracterizan cada uno de los niveles se expresan en términos de dimensiones de *capacidad*, *operación relacionada* y *consistencia y clausura* (Biggs y Collis, 1982).

La *capacidad* se refiere a la cantidad de memoria de trabajo, o la atención que requieren los diferentes niveles de la teoría SOLO. La cantidad de memoria de trabajo de que se dispone para cualquier problema depende del nivel. De este modo, un nivel de respuesta muy alto requiere también de demasiado espacio de memoria. Por ejemplo, se necesita pensar sobre muchas cosas al mismo tiempo cuando la respuesta se relaciona con el nivel relacional o con la abstracción ampliada.

La *operación relacionada* se refiere a la forma en que se conectan la señal y la respuesta. Por ejemplo, en el caso de respuestas de tipo preestructural no hay ninguna interrelación lógica; la señal y la respuesta se combinan en una unidad confusa. Encontramos tipos de confusiones relacionadas con el nivel preestructural: La *negación*, que se da cuando el estudiante rechaza ocuparse seriamente de la tarea; *tautología,* cuando simplemente reafirma la cuestión. Al reafirmar la cuestión obviamente ésta puede no ser aceptable; y la *transducción*, en la que el estudiante intenta distinguir una respuesta relevante, pero se precipita porque no dispone de una base lógica adecuada respecto a la respuesta indicada. La *inducción* es otra operación que se puede manifestar según el nivel. Consiste en diseñar, correctamente, una conclusión a partir de ejemplos, pero en el presente contexto su significado consiste en relacionar un aspecto particular o un punto dado en el dato, con una conclusión. Por ejemplo en una respuesta de tipo uniestructural sólo se considera una característica relevante. En una respuesta de tipo multiestructural se pueden considerar varias características relevantes, pero no se establece una relación entre ellas. En las respuestas

de tipo relacional se consideran los aspectos generales o principales del concepto, aunque dentro del marco de informaciones y conceptos enseñados. Para las respuestas en el nivel de abstracción ampliada, se va más allá de la *inducción* con relación a los datos y se introducen verdaderas *deducciones* lógicas.

En cuanto a *consistencia y clausura*, Biggs y Collis (1982) señalan que se refieren a dos necesidades opuestas manifestadas por los estudiantes: una, es la necesidad de llegar a una conclusión de cualquier especie y la otra es la necesidad de hacer conclusiones consistentes para que no haya ninguna contradicción entre la conclusión y el dato o entre las diferentes conclusiones posibles. Cuanto más grande es la necesidad sentida de alcanzar una decisión rápida, mayor es la probabilidad de utilizar muy pocos datos. Luego, será mayor la probabilidad de que el resultado sea inconsistente con la señal original, el dato o el resultado. Por otro lado, un alto nivel de necesidad de consistencia, muestra la utilización de mucha información al tomar una decisión, lo que hace que la conclusión sea muy abierta probablemente.

En general, las respuestas de tipo preestructural están marcadas por una alta clausura y muy baja consistencia. De hecho, el estudiante en este nivel clausura afirmando simplemente, repitiendo la cuestión o transformando una señal en otra con cierta irrelevancia. El estudiante que da una respuesta uniestructural se aprovecha de la primera dimensión relevante que le viene a la mente pero al menos esta es relevante. Estas respuestas pueden consistir en transformaciones correctas, pero completamente inconsistentes, ya que están fuera del contexto.

En el caso de respuestas multiestructurales, la clausura se determina cuantos más aspectos se perciben, pero dado que estos aspectos no están interrelacionados, puede resultar la inconsistencia. Dos respuestas de este nivel pueden utilizar la misma cantidad de datos pero llegar a conclusiones completamente diferentes.

Con relación a las respuestas de tipo relacional, se espera una comprensión de todos los aspectos y que además las mismas sean completamente coherentes. Se presentará como una respuesta definitiva, adecuada a este contexto, pero a las mismas se podría proporcionar una generalización más extensa.

Las respuestas en el nivel de abstracción ampliada, expresan los principios y las cualidades profundas de las aplicaciones a situaciones particulares. Además ponen de manifiesto una consistencia máxima. No se observa la necesidad de clausura. Las

conclusiones son abiertas o son cualificadas para permitir, lógicamente, posibles alternativas.

En cuanto a la *estructura* de la respuesta, Biggs y Collis (1982) señalan que en el nivel preestructural podría darse un intento de conectar la señal con la respuesta mediante una característica irrelevante. En las respuestas de tipo uniestructural se considera un solo aspecto relevante del dato o característica para conectar la señal y la respuesta; En la respuesta multiestructural se consideran varios aspectos. Las respuestas de tipo relacional asocian el dato relevante en un esquema conceptual. Las respuestas en el nivel de abstracción ampliada abarcan todos los aspectos relevantes del dato y sus interrelaciones y los considera bajo una estructura abstracta hipotética que puede permitir deducciones para aplicarlas a ejemplos o datos que no han sido incluidos en el escenario original. Por consiguiente, el estudiante que da una respuesta en el nivel de abstracción ampliada puede considerar resultados alternativos, es decir, no está forzado, como en otros casos, a emplear una conclusión o un significado definitivamente cerrado.

En resumen, las características relacionadas con cada nivel de comprensión, según la descripción presentada en Biggs y Collis (1991), son las siguientes:

El *nivel preestructural* está asociado con las respuestas iniciales e indica que el aprendizaje es demasiado bajo con respecto al nivel de abstracción que exige la tarea. El estudiante se muestra despistado o atraído por aspectos sin ninguna relevancia.

En el *nivel uniestructural* se sitúan las respuestas de aquellos estudiantes que se centran en el dominio adecuado de la tarea pero consideran sólo un aspecto dentro del mismo.

El *nivel multiestructural* se caracteriza por el hecho de que la respuesta del estudiante muestra que éste aprende, cada vez, más características adecuadas y correctas, pero presenta dificultades en integrarlas.

En el *nivel relacional,* la respuesta indica que el estudiante integra las diferentes partes para, con ellas, completar una estructura coherente y significativa.

En el *nivel de abstracción ampliada,* la respuesta indica que el estudiante generaliza la estructura, y ésta conduce a nuevas y más abstractas características, que representan una nueva y forma de operación más profunda.

Estos autores indican que en algunas situaciones es posible encontrar respuestas que no se ajustan exactamente a ninguno de los cinco niveles descritos. En consecuencia, se caracterizan estas respuestas en un nivel de transición entre dos niveles dados. Consideran que, en general, este tipo de respuestas se acercan al nivel siguiente, pero no se encuadran completamente en él. Comentan también que las respuestas de transición tienden a estar marcadas por confusiones e inconsistencias. Es como si el estudiante manejase más información que la que puede acaparar su memoria de trabajo. Añaden que las respuestas típicas en el nivel transicional contienen más informaciones que las que usualmente se relacionan con un nivel de comprensión determinado, evidenciando que la respuesta alcanza una complejidad estructural por encima del nivel anterior, y que va en la dirección del siguiente nivel SOLO.

Basándose en el modelo anterior algunos autores desarrollaron marcos de estudio para caracterizar el comportamiento de los alumnos en la resolución de problemas. Por ejemplo, Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997; 1999) propusieron un modelo para describir el pensamiento probabilístico de los estudiantes en cuatro dominios específicos. Watson y Moritz (2000), establecen seis niveles de comprensión sobre el concepto de promedio.

La caracterización de Jones et al., contempla cuatro niveles de comprensión: El nivel 1, denominado pensamiento subjetivo se asocia con el nivel preestructural, siguiendo la clasificación de Biggs y Collis (1982; 1991). En este nivel el estudiante está empeñado en la tarea, pero se muestra distraído y llega a conclusiones erróneas para aspectos irrelevantes de la misma. El nivel 2 se considera de transición entre el pensamiento subjetivo y el pensamiento informal cuantitativo. Los alumnos en este nivel muestran una disposición favorable a reconocer el significado de las medidas cuantitativas. Indican que sus pensamientos parecen estar en concordancia con lo que Biggs y Collis (1982; 1991) denominaron nivel uniestructural, en el sentido de que la tarea fuerza al estudiante a dar una respuesta, aunque en general sólo se alcanza un aspecto. El nivel 3 involucra el uso del pensamiento cuantitativo informal. El pensamiento de los estudiantes en este nivel se manifiesta en el uso de estrategias al enumerar resultados de experimentos y por la capacidad de coordinar y cuantificar sus pensamientos. Para ellos, los estudiantes evaluados en este nivel parecen exhibir características, tanto del nivel multiestructural como relacional, comparando con el modelo de Biggs y Collis (1982; 1991), ya que reconocen más de una característica

relevante en una tarea y tienden a integrar diferentes características. El nivel 4 lo denominan razonamiento numérico. Señalan, que los estudiantes que exhiben este nivel de pensamiento hacen conexiones precisas, entre los diferentes resultados, en las tareas propuestas y son capaces de usar medidas numéricas válidas. Matizan, que el pensamiento de estos estudiantes es consistente con las características del nivel relacional, es decir, ahora integran aspectos relevantes de la tarea en una estructura significativa y generan abstracciones mientras estas abstracciones se relacionan con sus experiencias de la vida.

La caracterización de Watson y Moritz (2000), se fundamenta en las respuestas de los estudiantes a cuatro problemas sobre la media aritmética. Los niveles encontrados se describen a continuación:

- Respuestas *preestructuraeles o prepromedio:* Aquellas que no se relacionan claramente con ningún concepto de promedio. No se llega a usar la idea de promedio, ni siquiera de forma coloquial o con referencia a contextos cotidianos.

- Respuestas *uniestructurales***:** Se relacionan con el uso coloquial de la media, que es interpretada como algo normal o bueno, se emplean ideas imaginarias en el contexto de la tarea. Se relaciona con la idea de suma, pero no se conoce el algoritmo correcto, no se comprende el significado y se observa poco progreso en tareas complejas. En general, las respuestas en este nivel consisten en un único aspecto relevante del dominio del conjunto de tareas.

- Las respuestas *multiestructurales* contemplan dos o más aspectos del dominio de la tarea, usando expresiones como la mayoría, la mitad y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, aunque no se sea capaz de aplicar en situaciones complejas. Se confunde la media, la mediana y la moda y se producen errores en los algoritmos de cálculo. Se muestra conflicto entre el cálculo incorrecto de la media y el concepto.

- *Media como representante (nivel Relacional)*: Las respuestas en este nivel relacionan la media con su algoritmo en situaciones sencillas y a veces, también la asocian con las ideas de mayoría y mitad. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Asocian el algoritmo de la media con la posibilidad de un resultado en forma decimal. Se expresa alguna idea de

representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos y con frecuencia prefieren usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.

- *Aplicación de la media en un contexto complejo*: Además de las capacidades del nivel anterior se es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media, o calcular medias ponderadas pero no ambas cosas a la vez. No tiene clara la idea de distribución, raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.

- *Aplicación de la media en dos o más contextos complejos*: Además de las características anteriores, se es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas. Comprende la idea de distribución. Usan la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos.

Aunque la caracterización de Watson y Moritz (2000) podría ser el marco ideal para apoyar nuestro estudio, por estar relacionado con la adquisición de la media aritmética, notamos que el mismo no es completamente compatible con nuestros propósitos, pues, de acuerdo con la descripción de los niveles propuestos, algunas características no se presentan adaptables para una caracterización general de las respuestas de los alumnos. Por ejemplo, la caracterización de los dos últimos niveles (*Aplicación de la media en un contexto complejo y Aplicación de la media en dos o más contextos complejos)*, parecen ajustarse más específicamente a tres tipos particulares de problemas: problemas en que se pide construir una distribución de datos de media conocida; problemas de cálculo de media ponderada; y problemas en que se pide comparar conjuntos de datos. Sin embargo, en nuestro estudio las tareas no se circunscribirían únicamente a estos contenidos, sino que contemplarían otros aspectos más, como por ejemplo, el uso de la media como mejor estimador de una medida desconocida en presencia de errores de medición, la evaluación de la comprensión de los valores atípicos y su uso en el cálculo de la media, la comprensión del efecto de un valor cero en el cálculo de la media, entre otros componentes del significado de este concepto.

Por otro lado, algunas características que Watson y Moritz (2000) asocian con el nivel relacional, como por ejemplo, las respuestas en que los alumnos relacionan la

media con las ideas de mayoría o mitad, nos parecen más bien propias del nivel multiestructural.

Como consecuencia de lo expresado anteriormente, nos propusimos trabajar con el modelo original de Biggs y Collis (1982; 1991), por ser un marco de referencia general que permite caracterizar las respuestas de los sujetos, independientemente del tipo de tarea y del objetivo que persigue.

2.3.2. NOCIONES SOBRE DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Como hemos señalado en la introducción de este Capítulo, la teoría que presentaremos aquí se sustenta en lo expuesto por Socas (1997; 2007), y nos ayudará a organizar e interpretar mejor las dificultades, obstáculos y errores que manifiestan nuestros alumnos en el aprendizaje de la media aritmética. En primer lugar, describiremos, a grandes rasgos, las dificultades, y a continuación, los obstáculos y los tipos de errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas.

2.3.2.1. DIFICULTADES

Socas (1997) indica que aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y la quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas.

De este modo, organiza las dificultades de la forma siguientes:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.

- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos se producen debido a diversas razones. La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. Esto conduce, por tanto a diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, como por ejemplo: El conflicto de precisión, ya que el lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. El significado puede ser comunicado por alusión o asociación. Sin embargo, el lenguaje de las matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas; El problema originado por el vocabulario común de la matemática, que puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada, ya que algunas palabras tienen significados diferentes en matemáticas y en el lenguaje habitual; La existencia de palabras específicas que definen conceptos matemáticos, que por ser poco familiares y frecuentemente mal entendidas, producen en el alumno dificultades considerables, al encontrarlas únicamente en sus lecciones de matemáticas.

Según Socas otros aspectos del lenguaje de las matemáticas que difieren de la lengua común, son los que se refieren al lenguaje de los signos, y que son fuente de confusión en muchos alumnos; por ejemplo, su sintaxis –reglas formales de las operaciones- que algunas veces pueden entenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Socas (1997) indica que esto pertenece al ámbito denominado naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos. Luego, considera que para situar mejor las dificultades y errores que se originan en el desarrollo de los signos matemáticos, es importante entender los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos:

- el estadio *semiótico*, donde los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos;
- el estadio *estructural*, en el cual el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo. En este estadio estructural aparecen verdaderas dificultades cognitivas que al no ser explicadas por el sistema antiguo, se recurre a

la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado;

- y el estadio *autónomo,* donde los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior.

Socas (1997) matiza que, es éste el proceso de generalización de las matemáticas y es una característica de la misma, como parte inherente del desarrollo de sus signos. Es, por tanto el sistema nuevo, una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguos.

El autor indica que los objetos de las matemáticas se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el *estatus operacional*, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el *estatus conceptual*, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual.

En definitiva, son estos aspectos los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

Respecto a las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático indica que éstas se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático. Los modos de pensamiento matemático provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo.

En cuanto a las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, expone que éstas tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de matemática y con los métodos de enseñanza. Señala que la institución escolar debe propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje, dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñaza e indica cuatro elementos básicos a considerar como dificultades en el currículo de matemáticas:

- las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas,
- la necesidad de contenidos anteriores,

- el nivel de abstracción requerido,
- y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

Considera que los métodos de enseñanza deben estar ligados tanto a los elementos organizativos de la institución escolar, como a la organización curricular.

Con respecto a las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, señala que la posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos. Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza.

Las Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, son relacionadas con los diferentes sentimientos de los alumnos hacía los contenidos matemáticas. Socas explica que a muchos estudiantes, incluyendo a algunos de los más capacitados, no les gustan las matemáticas y que muchos de ellos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia esta disciplina. Considera, que son muchos los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático; la actitud de los profesores de matemática hacia sus alumnos; los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas. Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., son algunos de los factores apuntados en la generación de bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos.

El referido autor señala que estas dificultades se conectan y se refuerzan en redes complejas que en la práctica se concretan en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

2.3.2.2. OBSTÁCULOS

Respecto al concepto de obstáculo indica que el mismo fue introducido por primera vez por el filosofo francés Bachelard en el contexto de las ciencias

experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico y que el traslado del concepto de obstáculo epistemológico al campo de la Didáctica de las Matemáticas es objeto de debate, ya que plantea dificultades que han sido descritas por otros autores, como Brousseau, Sierpinska y Artigue, aunque de acuerdo con Brousseau, considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico, pueden ser:

- De origen *ontogénico* o *psicológico*, debido a las características del desarrollo del niño.
- De origen *didáctico*, resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.
- De origen *epistemológico*, intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Estos se pueden encontrar en la historia de los mismos conceptos. Lo que no quiere decir que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido.

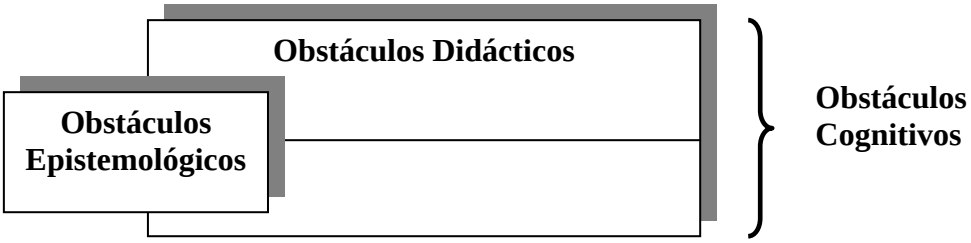
Señala que tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como "aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptar cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas".

Estas ideas se precisan, expresando que:

- Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento.
- Posee un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de conocimiento es eficaz y adecuado.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso.
- Es resistente, y resultará más resistente cuando mejor adquirido esté, o cuando más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber y aún así después de haber notado su inexactitud, continua manifestándose esporádicamente.

Luego el contexto de desarrollo del pensamiento matemático está lleno de obstáculos caracterizados como epistemológicos. Éstos, no están especificados en términos de experiencia de enseñanza reglada y organizada en el sistema educativo; no obstante, se acepta que tales organizaciones de las matemáticas en el sistema escolar pueden originar obstáculos que son caracterizados como didácticos. La adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales está salpicada de obstáculos que pueden considerarse cognitivos.

Socas (2007), señala que la propuesta que se formula en el trabajo anterior (Socas, 1997) es una propuesta de organización posible y útil de los obstáculos en términos de:



Explica que la presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como a la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de estas concepciones en los alumnos de hoy. Señala que esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy.

Esa visión de Socas en la distinción entre obstáculos epistemológicos y obstáculos didácticos concuerda plenamente con lo señalado por Herscovics (1989), que afirma que Bachelard definió los obstáculos epistemológicos en el contexto del desarrollo del pensamiento científico en general y no en términos específicos de las experiencias individuales de aprendizaje. Según Herscovics, tal como el desarrollo de la ciencia está salpicado por obstáculos epistemológicos, la adquisición de nuevos esquemas conceptuales por el alumno está salpicado por obstáculos cognitivos, y que

estos obstáculos también deberían considerarse normales e inseparables en el proceso de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

De lo señalado anteriormente, se concluye que los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los alumnos y del procesamiento interno de estas experiencias, y que suelen influir en la adquisición de nuevos esquemas conceptuales.

2.3.2.3. ERRORES

En cuanto a los errores en el aprendizaje de las matemáticas, Socas (1997) indica que éstos tienen diferentes procedencias, pero, en todo caso, reflejan la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste. Aparecen en el trabajo de los alumnos, sobre todo cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben (Socas, 2007).

El conocimiento de los principales errores que cometen los alumnos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan las materias que imparte y de este modo puede buscar vías razonables que permitan enfrentar la nueva realidad para alcanzar los objetivos propuestos. Borasi (1987) señala que los errores pueden ser una herramienta potencial para diagnosticar y corregir las dificultades derivadas del aprendizaje. Esta autora, plantea que al utilizar esta interpretación respecto al significado de los errores, la investigación ha proporcionado valiosas contribuciones a la educación matemática, como por ejemplo la toma de conciencia de las diferencias individuales y de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas; comprender que la corrección de los mismos no pasa por una simple explicación de los referidos temas mediante repeticiones o asignación de ejercicios prácticos adicionales.

En lo concerniente a las contribuciones, Socas (1997) indica dos razones básicas a tener en cuenta en la adquisición de un nuevo conocimiento: La primera, es que el conocimiento debe tener significado para el alumno y para ello debe contestar a preguntas que él se ha hecho a sí mismo, o por lo menos recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente, es decir, el alumno debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor. La segunda razón, es que el saber anterior produce

modelos implícitos que a veces son favorables con el nuevo conocimiento matemático y que, por tanto, hay que explicitarlos, y otras veces, al contrario, son un obstáculo. En ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se constituye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total.

En la teoría de Socas (1997), las causas principales de los errores en el aprendizaje de las matemáticas se pueden caracterizar en dos grupos:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo;
- Errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Estos, tendrían dos procedencias distintas: una, (a) relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos y de los procesos de pensamiento matemático, y otra, (b) relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Aceptando la complejidad de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas, y que estas dificultades se traducen en errores que cometen los alumnos y que éstos se producen por causas muy diversas, que muchas veces se refuerzan en redes complejas, el autor propone abordar los errores considerando las tres direcciones referidas a modo de tres ejes coordenados, para situarnos con más precisión en los orígenes del error y poder arbitrar, como profesores, procedimientos y remedios más efectivos.

Estos tres ejes estarían determinados por:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo.
- Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Los errores que tienen su origen en un obstáculo se relacionan tanto con las dificultades de los alumnos al utilizar diferentes elementos aprendidos, a las formas didácticas utilizadas para establecer la situación de enseñanza, o a las situaciones relacionadas intrínsecamente con el propio concepto.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se relacionan con las dificultades asociadas con la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento matemáticos. Se traducen, por ejemplo, en los significados inapropiados

atribuidos a los objetos matemáticos, a la falsa generalización de relaciones, procesos u operadores, al uso inadecuado de fórmulas o reglas de procedimiento, entre otros.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración, excesiva confianza, bloqueos, olvidos, entre otros.

Aunque el modelo descrito por Socas se desarrolla tomando como contenido matemático el lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria, nosotros lo hemos aplicado al análisis de la media aritmética con nuestros alumnos, ya que este contenido, en Angola, figura también en los planes curriculares de matemática en este nivel de enseñanza, y en los currículos de otras asignaturas en los diferentes subsistemas de la enseñanza secundaria.

2.3.3. LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Artigue (1992) señala que el concepto de ingeniería didáctica surge en la didáctica matemática al comienzo de los años ochenta. El objetivo era usar el término para identificar una forma de trabajo didáctico. Así, el significado de ingeniería didáctica se relaciona con dos actividades fundamentales:

- Los aspectos de las relaciones entre la investigación y acción en el sistema de educación;
- El papel que deberían desempeñar "las secuencias didácticas" en el conjunto de las metodologías de investigación didáctica.

Al respecto, Chevallard [citado en Artigue (1992)] expresa que el problema de la ingeniería didáctica, con respecto al desarrollo actual y futuro en la didáctica de las matemáticas, es estudiar el problema de la acción, y el significado de la acción en el sistema educativo.

Chevallard criticó vigorosamente las formas en que esas relaciones han sido tratadas tradicionalmente. De acuerdo con su concepción, respecto a la segunda actividad- el papel de las secuencias en la investigación didáctica- argumenta que las metodologías, tales como, los cuestionarios, las entrevistas, los test, que sirven de apoyo a muchas investigaciones, son más fáciles de usar y han sido reconocidas como muy productivas en términos de resultados científicos. La ingeniería didáctica se desarrolló

para superar algunas limitaciones de aquellas metodologías y tener en cuenta, científicamente, la complejidad de los sistemas que se querían investigar y encontrar vías metodológicas para tratar los complejos detalles del funcionamiento del aula. Las secuencias didácticas en las aulas tienen otra función, la cual no está asociada con la novedad teórica de este campo, es decir, experimentar un proyecto teórico que ha sido elaborado en la investigación involucrando estas construcciones en un mecanismo productivo. Por un lado, permite mostrar las relaciones entre la investigación y las acciones en términos de innovaciones o a través del proceso investigación/acción para afirmar la posibilidad de la acción racional en un sistema basado en el conocimiento didáctico, y por otro lado, destacar la importancia de las secuencias didácticas en las aulas como una práctica de investigación.

Efectivamente, esta metodología también tiene sus limitaciones. Una de ellas es que no da acceso a la "vida natural" de los sistemas didácticos, sino que trabaja con sistemas limitados. Así, nos permite validar nuestros constructos didácticos a través de la habilidad demostrada en producir o reproducir fenómenos didácticos.

A pesar de sus limitaciones, considera que puede ser un medio eficiente de aproximar la complejidad de los procesos didácticos, tanto para propósitos teóricos como para objetivos de diseños de enseñanza, por lo que la búsqueda de una complementariedad necesaria entre ella y otros métodos más naturales sería una forma adecuada de explorar esta metodología de investigación.

2.3.3.1. LA INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Según se indica en Artigue (1992), la ingeniería didáctica vista como una metodología de investigación, se caracteriza por un esquema experimental basado en secuencias didácticas en el aula:

- Diseño de secuencias de enseñanza
- Producción de secuencias de enseñanza
- Observación de secuencias de enseñanzas
- Análisis de secuencias de enseñanza

Dependiendo del tamaño de la secuencia de enseñanza que involucra la investigación, se pueden distinguir, clásicamente, dos niveles:

- Micro-ingeniería
- Macro-ingeniería

Cada uno de estos niveles tiene ventajas y desventajas, en su uso. Por ejemplo, la investigación a partir de micro-ingeniería tiene la ventaja de permitir tener más en cuenta la complejidad de los fenómenos de clase de forma local, sin embargo no permite combinar esta complejidad con la de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones en los procesos de enseñanza-aprendizaje, además, dificultar una división coherente de los objetos de conocimiento.

La macro-ingeniería se ha vuelto más frecuente. Sin embargo, conlleva dificultades institucionales y metodológicas.

Otra de las características a tener en cuenta, al comparar las ingenierías didácticas con otros tipos de metodologías de investigación, es el registro en que se sitúan y los métodos de validación usados. La evaluación de las ingenierías didácticas no se basa en el enfoque comparativo con validación externa basada en la comparación estadística del rendimiento entre el grupo experimental y el grupo control. Contrariamente, el modelo que sigue la ingeniería didáctica se basa en el modelo de estudio de casos en donde la validación es esencialmente interna, fundamentada en la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori.

2.3.3.2. FASES DE LA METODOLOGÍA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En el proceso experimental de la metodología de una ingeniería didáctica se distinguen las siguientes cuatro fases:

a) Análisis preliminares

b) Diseño y análisis a *priori* de las situaciones de la ingeniería didáctica

c) Experimentación

d) Análisis a *posteriori* y evaluación

Fase 1: Los análisis preliminares

Se realizan dentro de un marco teórico general del conocimiento didáctico adquiridos en el dominio que está siendo estudiado y se basa en unos análisis previos, siendo los más frecuentes los que se indican:

- Análisis epistemológicos de los contenidos de la enseñanza
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- Análisis de las concepciones de los estudiantes y las dificultades y obstáculos que caracterizan su desarrollo
- Análisis del campo de las restricciones en las que tendrá lugar la producción didáctica
- Toma en cuenta de los objetivos específicos de la investigación

Las actividades de esta fase constituyen, indiscutiblemente, las bases para el diseño de ingeniería, que será perfeccionado y reforzado durante las distintas fases del trabajo. Por tanto, durante la primera fase el diseño se encuentra en su primer nivel de elaboración.

En general, una vez que se definen los registros en que se trabajará, los análisis preliminares se centran en tres dimensiones:

- Dimensión epistemológica, asociada a las características del conocimiento en juego, es decir, los puntos de vistas en el desarrollo histórico de la teoría, las dificultades asociadas con su surgimiento y desarrollo, entre otros aspectos.
- Dimensión cognitiva, asociada a las características cognitivas del público que recibirá la enseñanza.
- Dimensión didáctica, asociada a las características de los trabajos en el sistema educativo.

Según Artigue (1992), estas dimensiones surgen de forma natural de la perspectiva sistémica adoptada. Indica que para la aplicación de esta fase, no se destaca un marco teórico didáctico general, puesto que aquí, la investigación se ocupa del estudio de las condiciones de variabilidad para el proceso de enseñanza. Señala que la teoría debe ser considerada por el investigador como una herramienta entre las demás. Pero eso no quiere decir que la investigación no tendrá implicaciones teóricas generales, sino que éstas no serán evidentes en esta fase; aparecerán de forma natural en la fase del análisis a posteriori y evaluación.

Resalta además que de los análisis hechos en ciertas ocasiones, parece haber un dominio de las dimensiones epistemológicas y didácticas en comparación con la

dimensión cognitiva. No se realiza un estudio preliminar de las concepciones de los estudiantes. La poca importancia asignada a la dimensión cognitiva no es típica de un análisis preliminar en una ingeniería didáctica. Por el contrario, uno de los aspectos esenciales en el diseño consiste en un fino análisis preliminar de las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y errores y la ingeniería será diseñada para producir de forma controlada, el desarrollo de estas concepciones.

Fase 2: El diseño y el análisis a *priori*

En esta fase, el investigador distingue las variables del sistema sobre las que actuará. Se distinguen dos tipos:

- Variables macro-didácticas o globales, que se refieren a la organización global de la ingeniería.
- Variables micro-didácticas o locales, que conciernen a la organización local de la ingeniería, es decir, a la organización de una sesión o de un episodio.

Las variables pueden ser, a su vez, de orden general o depender de los contenidos didácticos objetivo de la ingeniería.

En general, las primeras elecciones que se hacen, después del análisis de las restricciones son globales: recursos didácticos necesarios, limitación de la complejidad de los contenidos, métodos de enseñanza, etc. Estas elecciones han de preceder a la descripción detallada de la ingeniería, en donde se explicarán las elecciones locales. Sin embargo, hay que puntualizar que aunque las elecciones globales preceden a las locales, no son independientes de éstas.

De igual modo, una de las particularidades del método de ingeniería didáctica, reside en su modo de validación, esencialmente interno. El proceso de validación parte de la fase de diseño, por medio del análisis a *priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, estrechamente vinculado al diseño local de la misma.

Este análisis a *priori* se concibe como un *análisis del control del significado del conocimiento*. Su objetivo es determinar de qué modo las elecciones realizadas permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y los significados que construyen. Para ello, el análisis se basa en varias hipótesis, cuya validación estará indirectamente en juego durante la cuarta fase, en confrontación entre el análisis a *priori* y el análisis a *posteriori*.

Fase 3: Experimentación

En esta fase se desarrolla la ingeniería didáctica y se realizan las observaciones y anotaciones pertinentes.

Fase 4: El análisis a *posteriori* y la evaluación

Tras la experimentación, la etapa siguiente que se presenta es el análisis a *posteriori*, que se apoya en todos los datos recogidos durante la experimentación: observaciones hechas durante las sesiones de enseñanza y también trabajos de los estudiantes realizados durante y fuera de las clases. Estos datos son acompañados frecuentemente de datos obtenidos con el uso de metodologías externas, como cuestionarios o entrevistas individuales o grupales realizadas en varios momentos de la enseñanza o después de ella. Constituye la confrontación de dos análisis- el análisis a *priori* y el análisis a *posteriori*- en la que se basa la validación de las hipótesis a que se refieren la investigación.

Algunas características de esta validación son las siguientes:

- Normalmente, el análisis a priori no se puede comunicar en su totalidad, debido a su extensión, por lo que el análisis que se muestra es un resumen del análisis realizado.
- En la mayoría de los trabajos publicados sobre ingeniería didáctica, la confrontación de los dos análisis revela distorsiones, en términos de desfase, o diferencias entre los dos análisis (a *priori* y a *posteriori*); sin embargo, estas diferencias enriquecen las ingenierías.
- Las hipótesis explícitamente implicadas en el trabajo de ingeniería son, a menudo, relativamente globales, concerniendo al proceso de aprendizaje a largo plazo, y la extensión de la ingeniería no les permite necesariamente estar realmente implicadas en el proceso de validación.

Además, otra característica a considerar, aunque no es citada aquí por Artigue (1992), es que la validación no se basa en un análisis estadístico entre el grupo experimental y el de control.

Como se muestra en el Capítulo 7, las fases descritas anteriormente configuran la metodología para el desarrollo de nuestra propuesta de enseñanza de la media aritmética.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

En este Capítulo indicaremos la metodología utilizada en nuestra investigación. Nos referiremos a las fases observadas en el proceso de investigación, a los instrumentos utilizados en la recogida de datos, a la forma en que se analizaron los datos, a las características de las poblaciones y muestras, así como a los diferentes recursos utilizados.

Según hemos definido, el objetivo central de nuestra investigación es estudiar el desarrollo del concepto de media aritmética, aspirando a profundizar en: el análisis sobre la comprensión y los conocimientos del alumnado sobre tal concepto; profundizar en la identificación de los errores, dificultades y obstáculos en la adquisición de este concepto; ampliar el análisis de las estrategias del alumnado al resolver un problema relacionado con la media aritmética; desarrollar un cuestionario o prueba de evaluación amplio sobre la media aritmética que contemple aspectos que otros cuestionarios no han tenido en cuenta, como por ejemplo, examinar las acciones de los alumnos en los problemas relacionados pero diferentes en cuanto al tipo (de respuesta abierta o de elección múltiple); y desarrollar una propuesta de enseñanza de este concepto.

La concreción de estos propósitos nos obligó a seguir un esquema de investigación que combinó los paradigmas cualitativos (interpretativos) y cuantitativos (analítico). La metodología interpretativa permite conseguir una mayor comprensión de las situaciones y relaciones establecidas, a la vez que permite dar respuesta a los interrogantes de cómo los sujetos perciben, interpretan, modifican y construyen los objetos matemáticos. La analítica, tiene la cualidad de reducir el fenómeno que se estudia a dimensiones objetivables, susceptibles de medición, análisis estadístico y control experimental (Palarea, 1998).

En conformidad con lo anterior, la exploración de los comportamientos de los alumnos y su interpretación mediante informes descriptivos constituyó parte esencial del esquema, dando primacía al proceso y no simplemente a los resultados o productos del mismo. Las entrevistas semiestructuradas y la observación de conductas y

situaciones diferentes han sido fundamentales en el transcurso de la investigación, permitiendo realizar un análisis más fino sobre ciertas cuestiones que no habían quedado claras tras la administración del cuestionario.

La metodología cuantitativa, se ha basado en el tratamiento estadístico exhaustivo de la información recogida para extraer conclusiones; se utilizaron como herramientas fundamentales las tablas de frecuencias, las tablas de contingencia para el cruce de resultados, las pruebas para comparar medias, los análisis estadísticos descriptivos y las escalas para análisis de fiabilidad de ítems, entre otros.

A continuación describimos el proceso seguido en la realización de la investigación. Caracterizamos, de forma general, las fases en el diseño de investigación, sus objetivos principales, los instrumentos desarrollados para la recogida de datos y los grupos de estudios, entre otros aspectos.

3.2. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN Y SUS FASES

La investigación comienza con la fase exploratoria, donde el núcleo de la cuestión era desarrollar un estudio comparativo en la comprensión de la media aritmética entre dos grupos de estudiantes culturalmente diferentes. De los resultados obtenidos surgió la idea de continuar solamente con una de las muestras de estudio, puesto que el primer análisis no ha permitido identificar con la profundidad deseada las dificultades que presentaban los alumnos.

En definitiva, la investigación se subdividió en dos fases principales: La fase exploratoria y la fase general. En cada una de las dos fases se desarrollan estudios particulares. A continuación, describiremos cada una de fases señaladas, así como los respectivos estudios realizados.

3.2.1. FASE EXPLORATORIA

La fase exploratoria se llevó a cabo en el curso académico 2004/2005, como condición para la obtención de los créditos necesarios en la fase de investigación del programa de doctorado. El propósito fundamental era desarrollar y validar un cuestionario de evaluación de los conocimientos de los alumnos sobre la media

aritmética, y presentar algunos resultados en un estudio comparativo entre dos grupos de estudio.

La investigación consistió en dos estudios: Un primero, que se llevó a cabo con un grupo de alumnos de Secundaria en La Laguna (Tenerife), y un segundo, realizado con alumnos de un nivel equivalente en Luanda (Angola). En total, se dispuso de una población de 240 alumnos, de los cuales 94 participaron en el primer estudio y 146 en el segundo.

La recogida de datos se ha efectuado mediante la administración del cuestionario. En el primer estudio, se aplicó un cuestionario con siete preguntas, y sus apartados correspondientes. Las preguntas eran de dos tipos: las de respuesta de elección múltiple (cerradas) y las de respuesta abierta, combinando los formatos texto, texto-tabla y texto-gráfico. En cuanto a los datos numéricos, los problemas involucraban números enteros y decimales.

En el segundo estudio se utilizó el mismo cuestionario, con algunas modificaciones, puesto que se trataba de un grupo de estudio de otra realidad cultural. Las modificaciones han sido fundamentalmente de forma, por ejemplo, cambio de los nombres de las localidades, cambio de los nombres de las personas, forma de las monedas, entre otros. También se introdujeron alteraciones en aquellos aspectos que requerían mejoras en el diseño del cuestionario, tal como se verá al describir el cuestionario administrado en ese estudio.

En cuanto al análisis de los datos, el procedimiento seguido consistió en establecer un sistema de categorías, codificando las respuestas de los alumnos, con la finalidad de utilizar un paquete estadístico para el tratamiento de la información. Las categorías fueron determinadas teniendo en cuenta el tipo de ítem. Para los ítems de respuesta de elección múltiple, relacionamos la categoría con el contenido matemático del distractor, mientras que para los de respuesta abierta, establecimos como categoría la estrategia presentada por el alumno en el proceso de resolución del problema. De este modo, utilizando tablas de frecuencias absolutas y tablas cruzadas se realizó el análisis de los datos, destacando los tipos de respuestas más frecuentes, ya sean estrategias de resolución de problemas, argumentos al justificar una cuestión o tipos de concepciones según lo solicitado en la tarea.

Los resultados no fueron interpretados simplemente en términos de respuestas correctas o incorrectas. Se hizo un análisis interpretativo, en base a la teoría adoptada, discutiendo determinados aspectos sobre las actuaciones de los alumnos y formulando conjeturas. Igualmente se han podido detectar algunas diferencias entre los dos grupos de estudio con respecto a los errores y dificultades presentados en la comprensión de la media aritmética, en sus concepciones respecto a este concepto, en los aspectos relativos a la metodología de enseñanza de este contenido y otros relacionados con las actuaciones de los alumnos en la resolución de problemas de respuesta de elección múltiple, que tienen estrecha relación con ciertos problemas de respuesta abierta.

3.2.2. FASE GENERAL

Una vez cumplida la fase de investigación del programa de doctorado reflexionamos en continuar con la investigación que habíamos empezado en aquella fase. Esto requería organizar y estructurar, en forma de proyecto, las actividades fundamentales a realizar.

En el curso académico 2005/2006 se lleva a cabo la planificación de los estudios para la fase general. Se definen las líneas generales, indagándose sobre cómo y cuándo realizarlos, con qué instrumentos, y qué teorías servirían de fundamento para el trabajo. Así, se elaboró un proyecto de investigación, que fue aprobado por la Comisión Permanente de Doctorado de la ULL, División de Ciencias Experimentales y Técnicas, en su reunión de fecha 12 de mayo de 2006.

De acuerdo con este diseño de investigación, la fase general se desarrollaría totalmente en Angola, y contemplaría tres estudios principales: En primer lugar, se llevaría a cabo un estudio con alumnos de secundaria y universitarios, mediante la administración de un cuestionario; en segundo lugar, se realizaría un estudio basado en entrevistas a algunos alumnos de secundaria que habían contestado el cuestionario; y en tercer lugar, se desarrollaría un experimento de enseñanza con alumnos de secundaria, con la finalidad de proponer una guía didáctica para la enseñanza del concepto en análisis.

Los tres estudios previstos se han desarrollado en el curso académico 2006/2007. A continuación proporcionamos datos que ilustran con más detalles en qué consistió cada uno de estos estudios.

3.2.2.1. EL PRIMER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN

El primer estudio referente a esta fase se desarrolla en los meses de marzo y abril de 2007. Constituía el esquema base del trabajo, tras la fase exploratoria, puesto que con los datos obtenidos era posible analizar los diferentes objetivos formulados, respecto a la comprensión del concepto a estudiar.

Para el desarrollo del mismo, nos pusimos en contacto con las direcciones de las escuelas en las que pretendíamos llevar a cabo el estudio. Enviamos cartas solicitando autorización para realizar los estudios, a cuatro centros escolares: una escuela pública de enseñanza secundaria de segundo ciclo (equivalente al bachillerato español), que se encuadra en el subsistema de enseñanza general; una escuela pública de enseñanza secundaria vinculada al subsistema de enseñanza técnico-profesional; una escuela particular de enseñanza secundaria, vinculada, también, al subsistema de enseñanza técnico-profesional; y a la facultad de educación. No pudimos realizar el estudio con los alumnos de la primera institución, pues, observamos que los profesores no habían impartido los contenidos estadísticos que son parte del programa de matemática, y desafortunadamente se encuentran ubicados, justamente, en el último tema de la asignatura.

En el estudio participarían un total de 227 alumnos, de los que 130 eran estudiantes de secundaria y 97 universitarios.

Inicialmente, administramos el cuestionario a 72 alumnos de la escuela secundaria pública, denominada Instituto Medio de Economía de Luanda-IMEL, y a 58 alumnos de una institución de enseñanza particular afín a la primera. Posteriormente, se aplicó la misma prueba a 97 alumnos de la institución de enseñanza superior, que tiene como principal objetivo la formación de profesores para la enseñanza secundaria. Esta institución, se llama Instituto Superior de Ciencias de Educación - ISCED/Luanda. De los estudiantes universitarios evaluados, 31 eran de la especialidad de matemática y 66 eran de la de pedagogía.

La diversidad de niveles de enseñanza y edades fue intencional, pues, esto permitía observar las eventuales diferencias con otros estudios, principalmente en lo referente a la caracterización de los niveles de comprensión. Además, en uno de los objetivos formulados, queríamos profundizar en la diferencia entre las estrategias

utilizadas por los estudiantes de secundaria y las presentadas por los universitarios. Estos datos nos permitirían una reflexión con mayor criterio.

Respecto al instrumento de recogida de datos, aplicamos un cuestionario que se diferenciaba, en parte, del que se aplicó en la fase exploratoria. Éste, constaba de dos ítems más, con respecto al primero, al que se hicieron algunas modificaciones, cuyas descripciones se comentarán en el capítulo 5.

En este estudio, las respuestas de los alumnos fueron categorizadas de dos maneras: Primeramente se establecieron códigos, interpretando las respuestas de los alumnos, tal como se hizo en la fase exploratoria. Este procedimiento, proporcionó nuevas categorías, además de haber conservado la mayor parte de las categorías encontradas en la fase anterior. Otro proceso de categorización consistió en el establecimiento de niveles de comprensión siguiendo el modelo de Biggs y Collis (1982; 1991) ya utilizado por algunos autores (Watson y Moritz, 1999, 2000), aunque en estos trabajos, el estudio sólo se realizó con alumnos de secundaria, y las tareas y los contextos examinados, en general, eran distintos a los que empleamos en nuestro trabajo. Como hemos referido en el capítulo 1, nosotros extendemos nuestro estudio a los estudiantes del nivel universitario, no sólo para distinguirlo de las investigaciones anteriores, sino que teníamos diferentes propósitos, como se describió previamente.

Igual que en la fase exploratoria, tras la codificación de los datos, creamos una base de datos en un software estadístico, para analizar las frecuencias absolutas y relativas, efectuar los cruces de resultados y otros análisis relacionados con el cuestionario (fiabilidad, índice de dificultad de los ítems, correlación entre ítems y otros análisis estadísticos). Los resultados encontrados han sido interpretados en términos de suposiciones, realzando los diferentes comportamientos de los estudiantes y haciendo comparaciones con resultados de estudios previos. Conjeturamos, por ejemplo, sobre los aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual, las estrategias utilizadas por el alumnado al resolver un determinado problema, las diferentes dificultades y errores que surgían en este proceso, los posibles orígenes de las dificultades, las capacidades de argumentación de los alumnos en problemas de respuesta abierta que tenían relación con problemas de elección múltiple, entre otros aspectos.

Para profundizar en algunos resultados obtenidos, realizamos un estudio complementario en esta dirección, que consistió en unas entrevistas. Se trata, por lo tanto, del segundo estudio de la fase general de investigación.

3.2.2.2. EL SEGUNDO ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Este estudio se lleva a cabo porque habían quedado por aclarar algunas cuestiones de investigación. Es decir, no estábamos de todo seguros sobre algunas respuestas de los alumnos. Por ejemplo, algunos estudiantes marcaban la respuesta que sugería descartar el valor atípico en el cálculo de la media, en un problema de respuesta de elección múltiple; sin embargo, no procedían de la misma manera en un problema de respuesta abierta relacionado con el anterior. Queríamos saber, en este caso, el por qué de estas actuaciones diferentes. Se realizaron, pues, las entrevistas con el objetivo de profundizar en aquellos aspectos sobre la comprensión de los alumnos. Pensamos que este estudio nos ayudaría a enriquecer nuestras conjeturas sobre las actuaciones de algunos alumnos, en particular, comprender lo que realmente han manifestado en una respuesta o justificación, el por qué no contestan a una tarea dada o por qué eligen una determinada opción y no otra. En general, estos datos serían importantes para presentar conclusiones más objetivas.

Este estudio se ha desarrollado en los meses de abril y mayo de 2007, después de terminar la categorización de las respuestas de los alumnos de secundaria. Las entrevistas fueron realizadas con 8 estudiantes de secundaria, que habían contestado el cuestionario administrado en el primer estudio de la fase general de investigación. Sólo fueron entrevistados alumnos de la institución privada, porque los de la pública no manifestaron disponibilidad.

A medida que fuimos categorizando las respuestas de los alumnos a los problemas del cuestionario, fuimos anotando aquellas situaciones destacables que requerían aclaración por parte del alumno. A pesar de lo variado de situaciones encontradas, sólo seleccionamos algunas. Evidentemente, no era posible entrevistar a todos, por las condiciones que se imponían, tanto con respecto a los medios como a la disponibilidad de tiempo.

Las entrevistas fueron audiograbadas. Antes de la entrevista, se realizaba un diálogo cordial con el alumno, para facilitar la relación entre entrevistado y

entrevistador. Luego se le pedía al alumno confirmar si realmente la prueba sobre la que se le preguntaba era la suya. Entonces, de inmediato se pasaba a las preguntas, que, como dijimos, tenían un carácter aclaratorio. Cada entrevista duraba entre 15 y 25 minutos, dependiendo del número de cuestiones previstas, y de las preguntas que surgían en función de la respuesta del alumno o también de la fluidez del alumno al contestar una cuestión. Al alumno se le dio la posibilidad de exponer abiertamente su pensamiento e incluso podía ver lo que había escrito cuando contestó al cuestionario, antes o durante la respuesta.

Tras este proceso, realizamos la transcripción de las entrevistas para un análisis más cuidadoso de las informaciones obtenidas. Los resultados son analizados en términos de aclarar algunas ideas y suposiciones respecto a lo que se había interpretado de los resultados del primer estudio de la fase general de investigación.

3.2.2.3. EL TERCER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Este estudio tenía como propósito dar respuesta a uno de los objetivos planteado en el trabajo, que era desarrollar una propuesta de enseñanza de la media aritmética. La finalidad de la misma era realizar un experimento de enseñanza de este concepto, utilizando tareas no habituales y basándose en una metodología de enseñanza que lleva al alumno a participar activamente en la resolución de las tareas propuestas. De este modo, la descripción de las sesiones proporcionaría una guía didáctica, que además de aportar diferentes tipos de problemas, mostraría otros elementos, tales como, los objetivos correspondientes a cada tarea, las diferentes actuaciones de los alumnos y sus dificultades en el proceso de resolución de cada tarea, la organización de las sesiones en cuanto al contenido y su ordenación, entre otros datos.

La incorporación del estudio de la dimensión didáctica se desarrolla partiendo del hecho de que los alumnos presentan enormes dificultades en la comprensión de la media aritmética. En efecto, conjeturamos que si proporcionásemos una enseñanza dinámica, que parte de los conocimientos previos de los alumnos, basada en tareas contextualizadas, incluyendo contemplar acciones metacognitivas, quizá sería posible paliar algunas carencias que se vienen detectando en los alumnos. Pensamos, entonces, que el desarrollo de un experimento de enseñanza, materializada en diferentes sesiones

de instrucción y observando los aspectos mencionados anteriormente, era una manera de abordar el problema.

Aunque las sesiones se hayan centrado fundamentalmente en la media aritmética, se ha procurado, también, analizar otras dos medidas de posición central, es decir, la moda y la mediana, dada la relación existente entre ellas y, esclarecer las posibles confusiones que podrían manifestarse.

Este estudio se lleva a cabo en las últimas semanas del mes de mayo de 2007, con 8 alumnos de la enseñanza secundaria, de un curso que no había recibido aún instrucción sobre la estadística, aunque iban a hacerlo en el segundo semestre del mismo curso académico. Los alumnos pertenecían al segundo curso y eran de una institución privada, en la que realizamos las entrevistas y parte del primer estudio de la fase general de investigación.

En la selección de los alumnos nos interesaba, principalmente, trabajar con un grupo de estudiantes que no hubiesen recibido instrucción sobre la media aritmética y que residiesen en la cercanía de la escuela. En el momento de elección de esos alumnos, se les dijo que se precisaba de un número de alumnos, para explicarles un contenido de estadística que era utilizado, con alguna frecuencia, en la actividad cotidiana de diferentes profesiones, y que como ellos estaban adquiriendo formación en una rama de economía, les convenía conocer aquel contenido para su futuro laboral. También se les hemos dijo, que se iba a utilizar una metodología de enseñanza diferente de la habitual, pues, también se pretendía analizar si aquella manera de enseñar resultaba más eficaz de la usual. Inicialmente estaban inscritos 15 alumnos. Sin embargo, dado que los alumnos asistían a clase en turno de mañana, las sesiones se realizaban por la tarde. Como algunos residían distantes de la escuela, sólo continuamos con los que vivían cerca de la institución o no tenían dificultades para desplazarse.

En total, se realizaron seis sesiones, con una duración aproximada de una hora, cada una. Cada semana, se contemplaron dos sesiones: miércoles y jueves.

Las tareas se presentaron en forma de fichas. Eran leídas por un alumno, indicado por el profesor investigador. Entonces, se dejaba que los alumnos las analizasen durante algunos minutos. Posteriormente se pedía opiniones a los alumnos sobre la cuestión planteada y se discutían las ideas. Los alumnos podían consultarse unos con otros, mientras resolvían el problema y, en algunos casos, cuando la tarea lo

exigía, se pedía a los alumnos mostrar sus soluciones en la pizarra. El proceso se analizaba, revelando los pasos incorrectos, preguntando por vías más adecuadas o sugiriéndolas. La utilización de "preguntas de impulso", es decir, aquellas preguntas que hace el profesor para llevar al alumno a acelerar su trabajo activo durante el proceso de resolución del problema y descubrir la vía de solución, ha sido fundamental en todos los casos.

Una semana después de finalizar el experimento de enseñanza se les administró el mismo cuestionario que se aplicó a los alumnos participantes en el primer estudio de la fase general. Con los resultados en nuestras manos, entrevistamos a 5 de los 8 alumnos. El objetivo era analizar el efecto que había producido la enseñanza sobre el desarrollo de sus capacidades y en la comprensión de la media aritmética.

3.3. METODOLOGÍA EN EL ANÁLISIS DE LA VALIDEZ DE CONTENIDO, ÍNDICE DE DIFICULTAD Y FIABILIDAD DEL LOS CUESTIONARIOS

El desarrollo de los cuestionarios atendió a los objetivos principales formulados para la investigación. Sin embargo, para que los instrumentos de recogida de datos ayudasen a evaluar realmente lo que se pretendía era necesario, ante todo, que los mismos contemplasen los diversos contenidos relacionados con los objetivos a examinar. En base a esto, nos planteamos incluir en los cuestionarios preguntas que fuesen entendibles por los alumnos, y que incluyesen diferentes aspectos del significado del concepto de media aritmética.

En esta sección, describiremos en primer lugar los pasos seguidos con respecto al análisis de la validez del contenido, y posteriormente expondremos la teoría orientadora en la que se basó la estimación de los índices de dificultad y fiabilidad de los cuestionarios. Para el estudio de estos aspectos nos hemos apoyado en informaciones de algunos autores (Muñiz, 1994; Batanero, Cobo y Díaz, 2003), cuya recopilación se presentará en los próximos apartados. Dicha información se relaciona con teorías generales, conceptos y fórmulas que nos permitirán entender mejor los pasos dados para ese fin.

3.3.1. VALIDEZ DEL CONTENIDO

En Batanero, Cobo y Díaz (2003) se explica la validez de un cuestionario, cuando provee la ausencia de sesgo. Por ejemplo, en un estudio de evaluación de conocimientos puede producirse un sesgo si la prueba de evaluación es demasiado sencilla (por lo cual los alumnos más brillantes no mostrarán toda su capacidad) o no contempla adecuadamente la variable que queremos medir (por ejemplo, si queremos evaluar la capacidad de resolución de problemas, y sólo proponemos problemas aritméticos sencillos).

En resumen, estas ideas traducen el planteamiento de muchos investigadores de que un test es válido cuando muestra que mide aquello que se presuponía o se pretendía que midiese.

En Muñiz (1994) se destacan tres grandes bloques de tipos de validez. La validez de contenido, la validez predictiva y la validez de constructo. No nos detendremos en los dos últimos tipos, aunque plantearemos a continuación en qué consiste cada tipo. Vamos a centrar nuestro objetivo en la validez de contenido.

La validez de contenido alude a la necesidad de garantizar que el test constituye una muestra adecuada y representativa de los contenidos que se pretenden evaluar con él. Para ello, se utilizan diversos procedimientos de entre los cuales, se incluye el análisis racional de los contenidos y consultas cruzadas a expertos en el área de que se trate. Como un tipo especial de validez de contenido suele incluirse la validez aparente, que se refiere a la necesidad de que el test parezca, dé la impresión a los que se aplica, que efectivamente es adecuado, tiene sentido para medir lo que se pretende.

La validez predictiva está relacionada con la cualidad de predicción. Se refiere al grado de eficacia con el que se puede predecir o pronosticar una variable de interés (criterio) a partir de las puntuaciones de este test. Se calcula mediante el coeficiente de validez, que es la correlación entre el test y el criterio. Luego, cuanto mayor sea la correlación test-criterio más precisos serán los pronósticos hechos a partir del test.

La validez de constructo se refiere a la recogida de evidencia empírica que garantice la existencia de un constructo en las condiciones exigibles a cualquier otro modelo o teoría científica. Existen otros tipos de validez de constructo, tales como la validez factorial, la validez convergente-discriminante, que nosotros no vamos a abordar.

Relativo a la validez de contenido para nuestro cuestionario, nosotros comenzamos por buscar en distintas referencias bibliográficas, diferentes problemas que se adecuasen a los objetivos de los programas de enseñanza de los niveles en que preveíamos pasar la prueba. Los distintos problemas encontrados fueron sometidos a un análisis por los miembros que constituían el equipo de investigación. Posteriormente se consultó algunos profesores para que diesen sus opiniones sobre los ítems seleccionados. En consecuencia, algunos ítems fueron retirados y otros mejorados o adaptados, según las circunstancias y el objetivo planteado. Incluso en las situaciones que lo requería hemos añadido otros ítems con la finalidad de ampliar los análisis pretendidos.

3.3.2. ÍNDICE DE DIFICULTAD DE LOS ÍTEMS

Un indicador de interés en el estudio de la validez de un test es exactamente el índice de dificultad de un ítem. Según Muñiz (1994), se entiende por índice de dificultad (ID) de un ítem la proporción de sujetos que lo aciertan de aquellos que han intentado resolverlo. Es decir $ID = \frac{p}{N}$, donde p es el número de sujetos que aciertan el ítem y N el número de sujetos que han intentado resolver el ítem.

El valor del índice de dificultad está directamente relacionado con la media del test, o sea, la suma de los índices de dificultad de los ítems es igual a la media de las puntuaciones totales de los sujetos: $\sum_{j=1}^{K} ID_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$, siendo K el número de ítems del test, X_i las puntuaciones totales de cada sujeto, y N el total de sujetos.

Muñiz (1994) señala que el índice de dificultad debería denominarse más propiamente índice de facilidad, pues a medida que aumenta indica que el ítem es más fácil, no más difícil.

En nuestro trabajo el análisis del índice de dificultad de los ítems jugará un gran papel en la valoración de los resultados globales del cuestionario, puesto que nos ayuda a ver qué ítems han resultado más sencillos y cuáles presentan un grado de dificultad mayor en su resolución, por los alumnos.

3.3.3. FIABILIDAD. COEFICIENTES DE FIABILIDAD. ESTIMACIONES DE LOS COEFICIENTES DE FIABILIDAD.

Como se describe en Batanero, Cobo y Díaz (2003), para cualquier instrumento de medida es necesario conocer la precisión de las medidas que nos proporciona, ya que esta precisión se puede usar para extender los resultados de la muestra particular a una población más general. Un instrumento de medida se considera fiable si las medidas que se hacen con él carecen de errores de medida, son consistentes.

Por lo tanto, se entiende por fiabilidad de un test, un cuestionario u otro instrumento de medida, la estabilidad de las puntuaciones que proporciona si se administra en repetidas ocasiones al mismo grupo de personas. Dado que la medida siempre produce un cierto error aleatorio, la consistencia o precisión del instrumento suele determinarse por dos medidas del mismo fenómeno sobre un mismo individuo.

El coeficiente de fiabilidad se define como la correlación entre las puntuaciones X e Y obtenidas por los sujetos en dos formas paralelas de un test X e Y. Es un indicador de la estabilidad de las medidas, pues si se aplica un test X a una muestra de sujetos y pasado algún tiempo se vuelve a aplicar a los mismos sujetos una forma paralela Y, dado que ambas formas miden lo mismo, si no hubiese errores aleatorios de medida, la correlación debería ser $r = 1$. Por tanto, el grado en el que r se aleja de 1 nos indicará en qué medida las mediciones están afectadas por errores aleatorios (Muñiz, 1994).

Existen diferentes modos de cálculo del estimador de coeficientes de fiabilidad, que serán resumidos a continuación.

Test-retest

Para calcular el coeficiente de fiabilidad por este método se aplica el mismo test en dos ocasiones a los mismos sujetos; la correlación entre las puntuaciones de las dos aplicaciones será el coeficiente de fiabilidad. Como un test es obviamente paralelo a sí mismo, el método es perfectamente congruente con el modelo, denominándose a la estimación obtenida "coeficiente de estabilidad" e indica en qué grado son estables las mediciones realizadas en la primera aplicación del test. Algunos inconvenientes implicados en la aplicación de este método se relacionan con los siguientes:

- El intervalo de tiempo que se deja entre las dos administraciones del test es difícil de determinar: tiene que ser suficiente para que no recuerden la tarea,

pero no demasiado amplio para que no se den cambios en los sujetos (aprendizaje, maduración…).

- A veces sólo podemos medir la variable una solo vez en un instante fijo de tiempo. Por ejemplo, los alumnos podrían haber ya abandonado el centro escolar.
- Una baja correlación puede ser debida no a la falta de fiabilidad sino a un cambio en el concepto subyacente, sobre todo cuanto más tiempo haya pasado entre las pruebas.

Formas paralelas

En este método de estimación se construyen dos formas paralelas del test que son administradas al mismo grupo de sujetos dejando entre ambas administraciones un período de tiempo breve para evitar cambios en los sujetos. El coeficiente obtenido se denomina coeficiente de equivalencia y nos indica la estabilidad de variaciones de la misma prueba o de ítems que han sido diseñados para medir las mismas funciones. El inconveniente de este método consiste en la dificultad de construir dos formas paralelas estrictamente equivalentes. Cualquier coeficiente calculado estará influido por la falta de similitud entre las formas.

Test-retest con formas paralelas

Se trata de una combinación de los dos procedimientos anteriores. Se administra una forma del test, se deja transcurrir un periodo de tiempo semejante al procedimiento Test-retest y se administra la forma paralela del test al mismo grupo de sujetos. El coeficiente que se obtiene se denomina coeficiente de estabilidad y equivalencia.

Existen otros procedimientos, que señalaremos a continuación, que se basan en una sola administración del test. Con estos métodos se pretende determinar el grado de consistencia de las respuestas de los sujetos, ver si los mismos responden de forma consistente a lo largo del conjunto de ítems. Por esta razón estos coeficientes se denominan de consistencia interna.

Dos mitades

Una vez pasado el test, se divide en dos mitades y se calcula la puntuación del sujeto en cada mitad. Al dividir el test se debe conseguir que las dos mitades sean equivalentes, algo que en ocasiones puede resultar difícil. Se puede dividir

aleatoriamente, según la dificultad o según el contenido y la dificultad. Se calcula la correlación entre las puntuaciones obtenidas en las dos mitades del test, con un procedimiento de corrección que pude ser el de Spearman-Brow:

$$S = \frac{2r}{1+r}$$

siendo r el coeficiente de correlación empírico entre las dos mitades del test.

Fiabilidad basada en la covariación entre los ítems del test

Su cálculo se basa en el análisis relativo de la varianza de la puntuación total del cuestionario y de las varianzas de los ítems particulares. De los diferentes métodos existentes, indicaremos dos que ilustran el cálculo de fiabilidad basado en la covariación entre los ítems del test:

- Alfa de Cronbach: refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2}{\sigma_X^2}\right)$$

en la que:

n: Número de ítems del test

$\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2$: Suma de las varianzas de los n ítems.

σ_X^2 : Varianza de las puntuaciones en el test, relativa a los X sujetos.

- Kuder-Richardson: Es un caso particular de α, cuando los ítems son dicotómicos. Su fórmula KR_{20}, denominada así por hacer precisamente el número 20 de las presentadas por los autores, es la siguiente:

$$KR_{20} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sigma_X^2 - \sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{\sigma_X^2} \right)$$

en la que:

n: Número de ítems del test

$p_j q_j = \sigma_j^2$: Las varianzas de cada ítems (por tratarse de ítems dicotómicos); p_j es la proporción de sujetos que aciertan el ítem y q_j es la proporción de sujetos que lo fallan.

σ_X^2 : Varianza de las puntuaciones en el test, relativa a los X sujetos.

La preferencia por uno de los tipos de estimación de la fiabilidad depende en parte del tipo de prueba. En primer lugar hay que distinguir entre pruebas homogéneas y no homogéneas. Una prueba muy homogénea (que evalúe los mismos contenidos), mide la misma habilidad en todas sus partes, es un asunto de coherencia interna. Si la prueba es heterogénea no hay que esperar un índice de consistencia interna muy alto. Las partes de una prueba semejante tampoco se correlacionarán positivamente si se eligen los ítems al azar. Por tanto, la única estimación con sentido de fiabilidad en las pruebas heterogéneas es la repetición de la prueba (Muñiz, 1994).

El mismo autor señala que también hay que distinguir entre pruebas de velocidad y de potencia. En la última hay suficiente tiempo para todos los ítems y se espera que cada examinando trate de responder todos los ítems. En una prueba de velocidad sería inapropiado utilizar la fiabilidad de dos mitades o de coherencia y tampoco sería válida la repetición de la prueba, si hay efecto de aprendizaje. Habría que utilizar una forma paralela del test.

En cuanto a algunos factores que afectan a la fiabilidad, señala que los más comunes son los siguientes:

- La fiabilidad de la persona que corrige la prueba o que transcribe los datos.
- Variabilidad del grupo al que se pasa la prueba. Cuanto más variable sea el grupo, mayor será la fiabilidad.

- Número de ítems de la prueba. Un test es más fiable, a mayor número de ítems, puesto que eso aumenta la varianza de la prueba.
- Índice de dificultad de los ítems. Si los ítems son extremadamente sencillos, todos los alumnos responderán todos los ítems, e igual ocurre si son extremadamente difíciles. Esto afecta a la variabilidad reduciéndola.

Los elementos descritos anteriormente permiten proporcionar una valoración más objetiva de los cuestionarios elaborados, en lo que se refiere a la correlación de los ítems que lo forman, las dificultades comparadas de los estudiantes en los ítems, así como la calidad en la evaluación de los resultados de los alumnos. A lo largo de los estudios desarrollados podremos ver con más detalle los resultados derivados de este análisis.

CAPÍTULO 4

FASE EXPLORATORIA

4.1. INTRODUCCIÓN

La fase exploratoria se llevó a cabo en el curso académico 2004/2005, y persiguió los siguientes objetivos:

1. Desarrollar un cuestionario de evaluación de los conocimientos, dificultades y errores del alumnado en la comprensión de la media aritmética.
2. Realizar un estudio comparativo con alumnos de Luanda (Angola) y Tenerife.

Respecto del primer objetivo, la investigación procuró construir un instrumento de recogida de datos, analizar su validez y fiabilidad, para poder utilizarlo como instrumento de trabajo en la enseñanza secundaria o con alumnos de los primeros cursos universitarios.

El análisis comparativo se centró en dos estudios: un primer estudio, realizado con alumnos de un instituto en La Laguna (Tenerife), y un segundo estudio, efectuado en Angola, con un grupo de alumnos de un nivel de enseñanza similar a sus homólogos de España. Las informaciones relativas a ésta última parte se presentarán más adelante. Primeramente nos dedicaremos a los aspectos relacionados con el desarrollo del cuestionario.

4.2. DESARROLLO DE UN CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA MEDIA ARITMÉTICA

Para cumplir este objetivo se inició con la revisión de diferentes referencias bibliográficas sobre la comprensión de los promedios. En este análisis, encontramos un cuestionario de evaluación del razonamiento estadístico (*Assessing Statistical Reasoning*) que constaba de veinte preguntas de respuesta de elección múltiple, relativo a conceptos básicos de estadística y probabilidad, descrito por Garfield (2003). Se trata de un instrumento inicialmente elaborado por Konold y Garfield, para evaluar la eficacia de un nuevo currículo de estadística en la educación secundaria. Posteriormente

se usó con estudiantes de *college*, no sólo para evaluar la eficacia de las materias curriculares, sino también para describir el perfil del razonamiento estadístico de los alumnos.

De acuerdo con la explicación de Garfield (2003), el razonamiento estadístico puede ser definido como la forma en que la persona razona con ideas estadísticas y descifra la información estadística. Ello tiene que ver con realizar interpretaciones basadas en conjuntos de datos, representaciones de datos, o resúmenes de datos estadísticos. En este sentido, Garfield indica las siguientes capacidades de razonamiento correcto e incorrecto relacionadas con algunas medidas estadísticas (ítems relacionados con el uso de la media aritmética):

Razonamientos correctos sobre medidas estadísticas:

- Comprender que las medidas de centro y de dispersión se refieren a conjuntos de datos.
- Saber cuales son mejores para utilizar bajo diferentes condiciones y cómo se representa un conjunto de datos;
- Saber que utilizar resúmenes para predicciones es más adecuado en muestras grandes que en muestras pequeñas;
- Saber que un buen resumen de datos incluye tanto una medida central como una medida de dispersión y que las medidas de centro y dispersión pueden ser útiles para comparar conjuntos de datos.

Razonamientos incorrectos sobre la media:

- La media es el valor más frecuente;
- Para encontrar la media se debe siempre sumar todos los números y dividir por el número de valores de datos (a pesar de los valores atípicos).
- La media es lo mismo que la mediana.
- Siempre se debe comparar grupos, centrándose exclusivamente sobre la diferencia de sus medias.

Algunos de los ítems del referido cuestionario fueron utilizados por Batanero, Godino y Navas (1997), en un estudio realizado con alumnos del curso de formación de profesores, para averiguar las concepciones de los mismos sobre los promedios. En García Cruz y García Alonso (2004a), también se abordan algunos problemas sobre la media aritmética descritos en el mismo trabajo, además de otros aspectos. De la misma

forma, encontramos también en García Cruz y García Alonso (2004b) un resumen comentado de cuatro problemas del referido cuestionario.

Estrada (2002) utilizó, también, algunos problemas del mismo cuestionario, en su trabajo de tesis, antes de analizar las actitudes hacia los contenidos estadísticos de los profesores en formación. Sin embargo en este trabajo no sólo se utilizan los problemas que evalúan el concepto de media aritmética, sino que se recurre también a otros problemas, para evaluar los conocimientos estadísticos básicos de los referidos estudiantes.

A pesar de la gran utilidad que podría tener el mismo cuestionario, considerando la descripción de Garfield (2003), era algo limitado para nuestros objetivos, pues, no contemplaba preguntas de respuesta abierta. Estaba compuesto únicamente de preguntas de respuesta de elección múltiple. Sin embargo, este tipo de preguntas, no permite saber hasta que punto los alumnos responden con criterio o sin él. Así, y teniendo en cuenta el propósito de nuestro estudio, era necesario incluir problemas de respuesta abierta. Esto, nos ha llevado a construir un cuestionario con características diferenciadas, que pasamos a describir.

4.2.1. CARACTERÍSTICAS DEL CUESTIONARIO

El cuestionario que hemos desarrollado consiste de siete preguntas, algunas de ellas con varios apartados. Con el mismo pretendemos averiguar cómo los alumnos interpretan la media aritmética, cómo comprenden y usan el algoritmo de la media (simple o ponderada), cómo analizan e interpretan los datos presentados gráficamente, qué estrategias usan en la solución de problemas de cálculo directo de la media (simple o ponderada), qué criterios usan para comparar dos conjuntos con medias iguales y cómo construyen o completan una distribución cuya media es conocida.

Presenta dos tipos de preguntas: las de elección múltiple (cerradas) y las abiertas. Además combina diferentes tipos de formato: formatos texto, texto-tabla y texto-gráfico. En cuanto a los datos numéricos hemos utilizado números enteros y decimales.

El tiempo estimado para pasar la prueba con el referido cuestionario es de una hora. Hemos prestado atención especial al contexto de las preguntas de forma que resulte cercano al alumno, dado que, como indican Leon y Zawojewski (1991), la contextualización de las tareas facilita en gran medida su resolución.

Los problemas son denominados con el contexto que los define, y se explica, en cada caso, los objetivos de los mismos, su proveniencia, las modificaciones llevadas a cabo (para los problemas adaptados de otros autores), así como el significado de los distractores, cuando estos se presentan.

En el apartado siguiente, presentaremos los problemas que conforman el cuestionario así como sus correspondientes descripciones.

4.2.2. PROBLEMAS QUE INTEGRAN EL CUESTIONARIO Y SUS DESCRIPCIONES

Del conjunto de problemas que integran el cuestionario, la mayoría han sido adaptados de diferentes autores que han trabajado en situaciones similares, pero en contextos diferentes. Atendiendo al objetivo, para el que se destinaba el cuestionario, realizamos determinados ajustes de modo que él mismo fuese adecuado a nuestro estudio.

Los problemas del cuestionario son los siguientes:

Problema 1: Pesos

Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento en una clase de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6'2	*6'0*	*6'0*	*15'3*	*6'1*	*6'3*	*6'2*	*6'15*	*6'2*

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías?

(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

_____*a. Usar el número más común, que es 6'2.*

_____*b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.*

_____*c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.*

_____*d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.*

Este problema lo hemos adaptado del cuestionario descrito en Garfield (2003) que hemos relatado anteriormente. Para entender mejor los cambios efectuados, presentamos el problema original, tal como fue diseñado:

A small object was weighted on the same scale separately by nine students in a science class. The weights (in grams) recorded by each student are shown below.

6.2 6.0 6.0 15.3 6.1 6.3 6.2 6.15 6.2

The students want to determine as ***accurately*** *as they can the actual weight of this object. Of the following methods would you recommend they use?*

____ *a. Use the most common number, which is 6.2.*

____ *b. Use the 6.15 since it is the* ***most accurate*** *weighing.*

____ *c. Add up the 9 numbers and divide by 9.*

____ *d. Throw out the 15.3, add up the other 8 numbers and divide by 8.*

En primer lugar cambiamos la redacción del problema, para hacerlo más corto y objetivo. En el distractor b) en el que se usaba la expresión "*most accurate*" que hemos traducido como "más preciso", la hemos cambiado por la expresión "con más cifras decimales", puesto que en el enunciado se plantea que los alumnos quieren determinar el peso del objeto con la mayor precisión posible, de acuerdo con la expresión "*accurately*" que ha sido utilizada. Pensamos que de no ser así, podría llevar a los alumnos a relacionar la precisión referida en el enunciado de forma general y la destacada en el apartado b), lo que probablemente les induciría a elegir este distractor como respuesta, sin que analizasen las otras opciones presentadas.

La mejor estimación para el problema viene dada por la media aritmética, de forma general, pero en el caso, se da un valor atípico que es necesario descartar antes de proceder al cálculo de la media, por ser esta muy sensible a los valores extremos.

Cada respuesta tiene un significado concreto. De esta forma, si el alumno responde al apartado:

- *Usar el número más común, que es 6'2, s*ugiere que el alumno ha elegido como respuesta la moda. En las condiciones dadas, la moda es un peor estimador que la media (Batanero, Godino y Navas, 1997; Estrada, 2002).

- *Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales,* sugiere que el alumno ha confundido la palabra precisión con mayor cantidad de cifras decimales.

- *Sumar los 9 números y dividir la suma por 9,* realiza el cálculo algorítmico de la media.

- *Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8,* conoce que la media es sensible a valores extremos y por lo tanto debe desechar el valor atípico, antes de calcular la media aritmética.

Problema 2: En Una Clase

Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación.

	Nombre de los alumnos							
	Juan	*Lucía*	*Alberto*	*Ana*	*Pedro*	*María*	*Luis*	*Clara*
Nº de preguntas	*0*	*5*	*2*	*22*	*3*	*2*	*1*	*2*

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomendarías?
(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

_____*a. Usar el número más común, que es el 2.*

_____*b. Sumar los 8 números y dividir por 8.*

_____*c. Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.*

_____*d. Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.*

Este problema, proviene también del cuestionario de Garfield. Lo modificamos fundamentalmente en el enunciado, puesto que el original, a nuestro entender presentaba un diálogo que nos parecía bastante largo y poco comprensible para el alumno. En ensayos pilotos del cuestionario se nos requirió más de una vez explicar lo que se pedía.

A continuación mostramos el problema original:

A teacher wants to change the seating arrangement in her class in the hope that it will increase the number of comments her students make. She first decides to see how many comments students make with the current seating arrangement. A record of the number of comments made by her 8 students during one class period is shown below.

Students Initials								
	A.A.	*R.F.*	*A.G.*	*J.G.*	*C.K.*	*N.K.*	*J.L.*	*A.W.*

Number of comments	*0*	*5*	*2*	*22*	*3*	*2*	*1*	*2*

She wants to summarize this data by computing the typical number of comments made that day. Of the following methods, which would you recommend she use?

___ *a. Use the most common number, which is 2.*

___ *b. Add up the 8 numbers and divide by 8.*

___ *c. Throw out the 22, and add up the other 7 numbers and divide by 7.*

___*d. Throw out the 0, and add up the other 7 numbers and divide by 7.*

Hemos preferido trabajar con nombres en vez de con iniciales, como figuraban en el original, para aproximar la información a la realidad.

El problema en sí es parecido al anterior, aunque la variable en cuestión es discreta. El valor nulo en los dados nos ayuda a averiguar la creencia de algunos alumnos, de que el cero no cambia el valor de la media. El valor atípico en este problema no debe descartarse, porque el contexto es diferente. No se pide la mejor estimación de un valor, se pide un resumen, que pretende encontrar el valor representativo del conjunto de datos.

Así, si el alumno marca la respuesta:

- *Usar el número más común, que es el 2,* introduce la moda como preferible a la media para representar los datos.
- *Sumar los 8 números y dividir por 8,* calcula el valor de la media con todos los datos.
- *Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7,* propone descartar el valor atípico.
- *Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7,* propone descartar el valor nulo.

Problema 3: Hijos por Familia

El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Si el promedio de niños por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo?
(marcar una sola de las siguientes respuestas)

_____*a. La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños.*

_____*b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.*

_____*c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.*

_____*d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.*

_____*e. El número más común de niños en una familia es 2.*

Se ha tomado del cuestionario sobre razonamiento estadístico propuesto por Garfield, con algunas adaptaciones al enunciado y desechando el apartado (f). El problema original se da a continuación:

The school committee of a small town wanted to determine the average number of children per household in their town. They divided the total number of children in town by 50, the total number of households. Which of the following statements must be true if the average children per household is 2.2?

____ *a. Half the households in the town have more than 2 children.*

____ *b. More households in the town have 3 children than have 2 children.*

____ *c. There are a total of 110 children in the town.*

____ *d. There are 2.2 children in the town for every adult.*

____ *e. The most common number of children in a household is 2.*

____*f. None of the above.*

La pregunta del cuestionario original (que decía: "¿Cuál de las siguientes frases debe ser verdad si el promedio de hijos por familia es 2'2?") la hemos cambiado. Además, no incluimos el apartado (f) porque creemos que no se identifica con el propósito de nuestra investigación.

Lo básico en este problema es evaluar la comprensión de los alumnos de las posiciones relativas de media, mediana y moda, así como la adecuada comprensión del algoritmo de cálculo de la media.

Algoritmo tradicional

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

;

Cálculo de la suma total de niños

$$\sum x_i f_i = \bar{x} \cdot \sum f_i$$

$$110 = 2'2 \cdot 50$$

Cada una de las respuestas se corresponde con distintas formas de interpretación que se dan de la media. De esta forma si marca el apartado:

a) El alumno estaría dando como solución la mediana, como valor próximo a la media

b) El alumno estaría redondeando el valor 2'2 por exceso, no creyendo que la media pueda ser un valor decimal, al tratarse de un dato de tipo discreto.

c) Requiere una comprensión correcta del algoritmo de cálculo de la media. Más concretamente, del cálculo de totales.

d) Se produce una confusión entre el "número de familias" y el "número de adultos"

e) El alumno estaría dando como solución la moda, que interpreta como valor próximo a la media.

Problema 4: Hijos

Hemos preguntado en Tenerife a 25 familias sobre el número de hijos y nos han respondido:

10 familias no tenían hijos
7 familias tenían 1 hijo
5 familias tenían 2 hijos
3 familias tenían 3 hijos
No hubo ninguna familia con 4 hijos

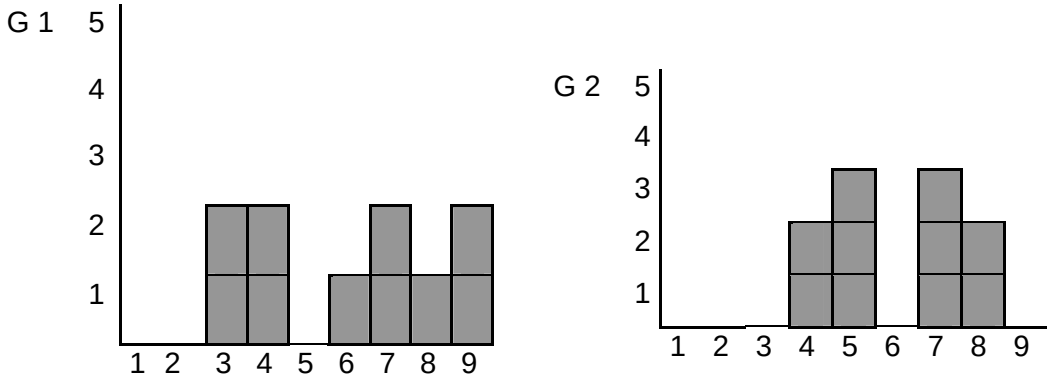
¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

Este problema ha sido diseñado por nosotros. Se trata de un problema de cálculo directo de media ponderada.

Pretendemos examinar si los alumnos son capaces de distinguir los valores de la variable de su frecuencia; comprobar si saben aplicar el algoritmo de la media ponderada; así como saber las estrategias que usan para resolverlo.

Problema 5: Gráfica de Notas

Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:



Cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1, los dos rectángulos que aparecen sobre el número 9 indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron un 9.

5.A *El Grupo 1 tiene una nota media de 6.*

a) Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 6.

b) ¿Qué grupo te parece mejor? Justifícalo.

5.B *¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?*

____ *a) El Grupo 1 es mejor que el Grupo 2 porque en el primero están los alumnos que obtuvieron más nota.*

____ *b) El Grupo 2 es mejor porque no hay alumnos con notas inferiores a 4.*

____ *c) No hay diferencia entre los dos grupos, porque la media es la misma en ambos.*

____ *d) A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo.*

Es un problema elaborado por nosotros, tras analizar uno que se presenta en el trabajo de Garfield (2003), y que mostraba un estudio sobre el efecto del sueño. El objetivo es ver cómo los estudiantes interpretan distribuciones dadas gráficamente.

Pretendemos también comprobar si los estudiantes saben extraer y manipular datos, dados gráficamente, para calcular la media.

Con el segundo apartado, es decir, **5.A. b)** se quiere examinar cómo los alumnos establecen comparaciones entre dos muestras, por su apariencia visual.

Según la respuesta dada por el estudiante en la pregunta **5.B** entendemos que:

a) Valora las diferencias, basándose sólo en los máximos de las distribuciones.

b) Juzga las diferencias entre los grupos, basándose sólo en los mínimos de las distribuciones o usando sólo parte de la distribución.

c) Valora las diferencias basándose únicamente en la media aritmética. No tiene en cuenta la variabilidad.

d) Valora las diferencias basándose, no sólo en la media aritmética sino también en la variabilidad.

Problema 6: Familia

El tamaño medio de la familia en Canarias es de 3'2 personas.

a) *Da 10 familias que cumplan este promedio.*

b) *Si los García son 5 en la casa y los Hernández son 2, ¿cómo podrían ser las otras 8 familias?*

Este problema, resultó de las adaptaciones de algunos problemas descritos en Mokros y Russell (1995), Watson y Moritz (2000) y en Cobo y Batanero (2004a). En el primer artículo, el problema no estaba descrito completamente, pero, se hablaba de un problema de construcción que consistía en poner precios a nueve paquetes de papas fritas que tenían un precio medio de $1.38. Los problemas equivalentes tratados en los otros dos artículos se corresponden mejor con este problema, aunque el enunciado y los datos son diferentes.

A continuación describimos los problemas equivalentes encontrados en Watson y Moritz (2000) y Cobo y Batanero (2004a) respectivamente:

"Let's say the average for 10 families is 2.3 children. If the Grants have 4 children, and the Coopers have 1 child, show how many children the 8 families might have?".

"Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1'2 hijos por familia. Los Garcías tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo,

¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1'2? Justifica tu respuesta".

Con el problema, se pretende averiguar la comprensión relacional de la media. Conocida la media queremos que los alumnos encuentren una distribución que tenga la media dada. ¿Qué estrategias utiliza el alumno para encontrar la distribución pedida? Además, este problema presenta un elemento importante a tener en cuenta, como es el hecho de que la media no puede formar parte de la distribución en este caso.

Problema 7: Supermercado

En un supermercado hay 8 marcas diferentes de papas fritas.

a) *¿Qué precio se puede poner a cada marca para que el precio medio sea de 1'50€?*

b) *Si hay tres marcas de papas fritas que traen un precio recomendado de 0'75€, 1€ y 2€, ¿qué precio se puede poner al resto de las marcas para que el precio medio sea 1'50€?*

La procedencia del problema es la misma que el anterior y persigue los mismos objetivos. Sin embargo, el contexto es diferente, aquí se tiene la posibilidad de usar cualquier dato, incluso la media puede formar parte de la distribución. Queríamos ver si lo de poder trabajar con números decimales facilitaría la resolución del problema o constituiría una dificultad añadida para el alumno.

4.2.3. VALIDEZ Y FIABILIDAD DEL CUESTIONARIO

Una vez desarrollado el cuestionario, era fundamental saber hasta que punto el instrumento era válido y fiable para ser utilizado por cualquier investigador.

Para el estudio de la validez y la fiabilidad nos hemos apoyado en la teoría que se describió anteriormente (Muñiz, 1994; Batanero, Cobo y Díaz, 2003) en el capítulo 3 sobre metodología de investigación.

4.2.3.1. SOBRE LA VALIDEZ DE CONTENIDO

La tabla 4.1 muestra los contenidos evaluados en la fase exploratoria. Como se puede ver, hay una gran diversidad de contenidos, lo que significa que el cuestionario es heterogéneo con respecto a la variabilidad de los contenidos evaluados. Este hecho es importante, porque según Batanero, Cobo y Díaz (2003), un cuestionario muy

homogéneo suele tener una alta fiabilidad, pero puede carecer de validez para evaluar la comprensión de un concepto o una parte de las matemáticas, ya que al ser las preguntas muy homogéneas, se evaluaría sólo parte del contenido.

Conocimientos evaluados	ítems										
	1	2	3	4	5.Aa)	5.Ab)	5.B	6.a)	6.b)	7.a)	7.b)
Definición de media	√	√	√	√	√			√	√	√	√
Definición de mediana			√								
Definición de moda	√	√	√								
La media como estimador	√										
Hallar un valor representativo		√	√	√							
Cálculo de la media	√	√	√	√	√						
La media es influenciada por los valores extremos	√	√		√							
Cálculo de la media ponderada				√	√						
Posiciones relativas de los promedios en distribuciones.			√								
El cero influye sobre la media.		√		√							
Leer los datos en el gráfico					√						
Interpretar datos en el gráfico.					√	√	√				
Comparar dos distribuciones de medias iguales.						√	√				
La varianza como indicador de referencia en las muestras.						√	√				
El contexto limita el dato a usar								√	√	√	√
La media como reparto equitativo.								√	√	√	√
Invertir el algoritmo de la media.			√					√	√	√	√
Obtener una distribución de media dada.								√	√	√	√

Tabla 4.1. Conocimientos evaluados en los problemas del cuestionario.

4.2.3.2. ÍNDICE DE DIFICULTAD DE LOS ÍTEMS

Nos hemos propuestos también analizar el *índice de dificultad de los ítems*, en las dos muestras de estudiantes. Como hemos referido previamente, el análisis del índice de dificultad de los ítems es un indicador de interés en la valoración del nivel y grado de complejidad de las cuestiones presentadas a un grupo de alumnos.

En este estudio, para determinar el índice de dificultad de los ítems y consecuentemente la fiabilidad de los ítems, fue necesario categorizar las respuestas de los alumnos en correctos e incorrectos, lo que nos ha proporcionado ítems dicotómicos. Para el resultado correcto hemos usado el valor 1, y para el incorrecto el 0.

Vemos en la tabla 4.2, los índices de dificultad (ID) de los ítems de nuestro cuestionario, en los dos estudios realizados.

	Tenerife (n= 94)	Luanda (n=146)
Problemas	ID	ID
1	0,47	0,06
2	0,49	0,40
3	0,35	0,30
4	0,34	0,03
5.A.a)	0,50	0,06
5.A.b)	0,07	0,05
5.B	0,38	0,36
6.a)	0,50	0,03
6.b)	0,49	0,03
7.a)	0,54	0,05
7.b)	0,49	0,03

Tabla 4.2. Índice de dificultad de los problemas en las dos muestras.

Este análisis nos indica qué problemas han resultado más difíciles o fáciles para el alumnado. Por ejemplo, en la muestra de Tenerife los problemas 5.A.b), 4 y 3 con índice de dificultad iguales a 0'07, 0'34 y 0'35 respectivamente, se muestran como los que presentan un cierto grado de dificultad, mientras que el problema 7.a) es el que ha parecido ser menos difícil (o más fácil). En la segunda muestra, los índices de dificultad son relativamente bajos y homogéneos, lo que sugiere que los problemas han sido algo difíciles para la mayor parte de estos alumnos. De hecho así fue, y esta circunstancia se encuentra plenamente explicada al describir los resultados y las conclusiones.

Un análisis más detallado de la tabla, sugiere que el índice de dificultad de los ítems no es tan variable en los dos grupos, a pesar de la diversidad de los contenidos evaluados. Pero eso no quiere decir que el cuestionario esté sesgado, pues como se ha visto anteriormente los contenidos son bastante heterogéneos, y las preguntas persiguen diferentes objetivos. Además, hay que tener en cuenta otros factores en este análisis. Según indica Muñiz (1994), el índice de dificultad no constituye una propiedad

intrínseca del ítem, ya que su valor depende del tipo de sujetos a los que se aplica. Si son muy competentes resultará un ítem fácil, lo aciertan muchos. Si, por el contrario, son incompetentes, el mismo ítem resultará difícil.

4.2.3.3. LA FIABILIDAD DE LOS CUESTIONARIOS EN LA FASE EXPLORATORIA

Dado que para cada muestra sólo disponemos de una administración de la prueba, hemos optado por un análisis de fiabilidad basado en la correlación entre los ítems del cuestionario. Para ello, y en cada estudio tuvimos que considerar los resultados encontrados en función de respuestas correctas e incorrectas, tal como habíamos procedido en el cálculo del índice de dificultad de los ítems. Cada apartado del problema también se ha considerado como un ítem, lo que ha contabilizado 11 ítems en total. Utilizamos el coeficiente de Kuder-Richardson, aplicable para ítems dicotómicos, que es un caso particular del coeficiente Alfa de Cronbach.

Los cálculos de los coeficientes los hemos realizado por separado en primer lugar, puesto que las muestras eran de tamaños diferentes y además por tratarse de grupos de países diferentes suponemos que por las diferencias socio-culturales la enseñanza y aprendizaje de los alumnos podrían estar afectados por metodologías diferenciadas. Al final, determinamos el coeficiente para la muestra conjunta.

Se ha utilizado el paquete estadístico SPSS, que nos proporcionó las estimaciones de coeficientes de fiabilidad que se presentan en la tabla 4.3.

Muestra	Coeficiente de Fiabilidad (alfa)
Tenerife (n = 94)	0’688
Luanda (n = 146)	0’493

Tabla 4.3. Coeficientes de fiabilidad del cuestionario.

El valor alfa que hemos encontrado en la muestra de Luanda, es efectivamente bajo, pero esto no debe constituir motivo de preocupación sobre el cuestionario desarrollado, puesto que como explica Muñiz (1994), alfa disminuye moderadamente al disminuir las semejanzas de los ítems. En los otros casos, tampoco se interpreta dicho valor como alto. La explicación anterior también es válida. El cuestionario es heterogéneo, e incluye diversa gama de contenidos, lo que lleva a que la correlación entre los ítems no sea muy elevada.

Por consiguiente, un aspecto importante a considerar en la interpretación de la relación entre fiabilidad y validez es tener que diferenciar entre pruebas homogéneas y heterogéneas. Según se indica en Batanero, Cobo y Díaz (2003), las pruebas homogéneas tienen una alta fiabilidad de consistencia interna, pero pueden no tener validez para medir ciertos rasgos al dejar de incluir aspectos importantes. En las pruebas heterogéneas puede ocurrir lo contrario. Por tanto, la fiabilidad muy alta requiere ítems muy correlacionados entre sí, y la validez muy alta en ítems poco correlacionados. Luego y de acuerdo con lo referido anteriormente, si la prueba es heterogénea (como es nuestro caso) no hay que esperar un índice de consistencia muy alto, e incluso la única estimación con sentido de fiabilidad es la repetición de la prueba (test-retest, formas paralelas o test-retest con formas paralelas).

4.3. EL ESTUDIO COMPARATIVO

El estudio comparativo se basó en un análisis realizado tras la administración del cuestionario, a dos muestras culturalmente distintas y constó, a su vez, de dos estudios. El primer estudio fue realizado con un grupo de estudiantes de Tenerife y el segundo estudio se realizó en Luanda (Angola).

El propósito de cada estudio se relacionaba con las siguientes cuestiones: ¿Cómo interpretan los alumnos la media aritmética? ¿Cómo comprenden y usan el algoritmo de la media (simple o ponderada)? ¿Cómo analizan e interpretan los datos presentados gráficamente? ¿Qué estrategias usan al resolver problemas de cálculo directo de la media (simple o ponderada)? ¿Qué criterios usan para comparar dos conjuntos de medias iguales? ¿Cómo construyen o completan una distribución de media conocida?

A pesar de que los dos grupos de estudio habían recibido instrucción sobre estos contenidos, se encontraron diferentes niveles y grados de dificultad entre los alumnos y además diferencias llamativas entre las dos muestras. En los próximos apartados, presentaremos los datos relacionados con cada estudio, las características de las metodologías, y los resultados encontrados.

4.3.1. METODOLOGÍA

4.3.1.1. MUESTRA

En el primer estudio, el cuestionario fue administrado en el mes de Noviembre de 2004. En primer lugar, establecimos contactos oportunos con el departamento de matemática de uno de los institutos de secundaria, en La Laguna, con la finalidad de

que nos facilitarían la administración de la prueba. Durante los contactos, no se había informado a qué cursos se iba administrar la prueba, ni qué contenidos serían evaluados. Únicamente se solicitó la colaboración del departamento, para que nos facilitara el número de alumnos por grupos, los cursos, los horarios y la disponibilidad de los profesores a colaborar en la actividad, ya que se pretendía administrar el cuestionario de forma simultánea.

Este estudio, se realizó con 94 alumnos del curso de bachillerato. De ellos, 48 eran de primer curso y 46 de segundo de bachillerato.

1BACH	2BACH	Total
48	46	94

Tabla 4.4. Composición de la muestra de Tenerife

En el segundo estudio, el cuestionario se administró en Marzo de 2005, posteriormente al análisis de los resultados obtenidos en el primer estudio. El estudio se llevó a cabo con 146 alumnos del onceno grado, que frecuentaban la formación media técnico-profesional en Contabilidad y Gestión, en un instituto público de Luanda (Angola). Este nivel de enseñanza, constituye una de las dos vías que permite el ingreso en la universidad, después de que el alumnado haya concluido el duodécimo grado. A parte de eso, también dota al alumnado de un perfil técnico-profesional para que éste se integre en el mercado laboral, en el caso de no continuar los estudios. Los alumnos eran heterogéneos en cuanto al sexo, y sus edades variaban entre los 17 y 23 años. Habían estudiado estadística descriptiva en el curso académico anterior, lo que suponía que habrían adquirido nociones fundamentales sobre los promedios. En el período en que se administró la prueba estaban estudiando la segunda parte de la asignatura que se relacionaba con cuestiones de probabilidad. En el momento de la prueba escogimos cuatro grupos que habían tenido profesores distintos en el curso académico previo, según la información que nos fue proporcionada, y la composición de los mismos se presenta en la siguiente tabla:

Grupos	G	H	I	J	Total
Nº de Alumnos	34	40	36	36	146

Tabla 4.5. Composición de la muestra de Luanda, por grupos.

En este segundo estudio, la actividad fue realizada con el consentimiento de la subdirección pedagógica de la institución, que delegó en el coordinador de la asignatura de estadística para disponer los medios necesarios para la aplicación de la prueba. El examen fue administrado simultáneamente en dos grupos, no dando la posibilidad de que los primeros examinados se comunicaran con los otros que esperaban su turno.

4.3.1.2. INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

Respecto al primer estudio, se utilizó íntegramente el cuestionario que describimos anteriormente. En el segundo estudio básicamente se utilizó el mismo instrumento, aunque en esta ocasión, se tradujo al portugués y se introdujo algunas modificaciones y mejoras, como resultado de algunas deficiencias que se habían observado en el primer estudio.

Las modificaciones y mejoras se centraran fundamentalmente en los problemas 4 (Hijos) y 5 (Gráfica de Notas). En el problema 4 suprimimos el dato que se refería al total de la familia (suma de las frecuencias), para averiguar si los alumnos serian capaces de encontrarlo; en el problema 5, hemos presentado las notas en conformidad con el sistema de evaluación de Angola, es decir, valores de 0 a 20, donde el aprobado se obtiene con notas de 10 a 20. Como consecuencia, también se cambió literalmente la pregunta, puesto que la media que se debería comprobar cambió en función de los nuevos datos. De igual forma, y al contrario de lo que pasó en el primer estudio, aquí se pidió al alumno para analizar la tarea en grupo 1 y no en el grupo 2.

A la par, el distractor b) del 5.B, fue sustituido por otro, que tomaba como criterio de justificación el mayor número de alumnos aprobados, puesto que esta fue la justificación más común presentada por los alumnos en el apartado b) del problema 5.A, según los resultados del primer estudio.

En algunos problemas, efectuamos determinados ajustes de naturaleza contextual, en lo que se refiere a nombres de personas y localidades, con el propósito de hacerlas más familiares al alumnado de aquel país. En el problema 7 (Supermercado) preferimos usar la moneda “dólar” en vez de “euro”, porque resultaba más conocida por los alumnos, e incluso es utilizada frecuentemente en Angola, en determinadas transacciones comerciales.

La versión del cuestionario utilizado en Angola, tal cuál como se presentó, se puede ver en los anexos de esta memoria.

4.3.1.3. ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis de datos utilizamos el software estadístico Systat. A tal fin, establecimos un sistema de categorías, codificando las respuestas de los alumnos.

Las categorías fueron determinadas teniendo en cuenta el tipo de ítem. Para los de respuesta de elección múltiple, relacionamos la categoría con el contenido matemático del distractor presente en el apartado, mientras que para los de respuesta abierta, establecimos como categoría la estrategia presentada por el alumno en el proceso de resolución del problema.

A continuación describimos los códigos utilizados para el análisis de los resultados, en los dos estudios realizados, en cada uno de los ítems que conformaban el cuestionario:

Problema 1: Pesos

Código	Descripción del código
ADALG	Elige la opción que dice "sumar los 9 números y dividir la suma por 9"
DATIP	Elige la opción "desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8".
DEC	Indica la opción que se refiere a usar el valor 6'15, por tener más cifras decimales.
MODA	Señala la opción que dice "usar el número más común, que es 6'2".
SC	Marca más de una opción.

Problema 2: En una Clase

Código	Descripción del código
ADALG	Indica la opción "sumar los 8 números y dividir la suma por 8".
DATIP	Indica la opción "Descartar el valor 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7".
DCERO	Señala la opción que dice "descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7".
MODA	Elige la opción "usar el número más común, que es 2".
SC	Marca más de una opción.
NC	No contesta

Problema 3: Hijos por Familia

Código	Descripción del código
FAMADUL	Elige la opción que dice que hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.
MED	Selecciona la opción que dice "la mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 hijos.
RDEC	- Selecciona la opción "En la ciudad hay más familias con 3 hijos que con 2".
MODA	Indica la opción que dice que el número más común de niños en una familia es 2.
STOTAL	Indica la opción que dice que hay un total de 110 niños en la ciudad.
SC	Marca más de una respuesta.

En el problema 4, que denominamos "Hijos", las categorías de respuestas encontradas en el segundo estudio (muestra de Luanda) eran considerablemente diferentes con relación a las que se habían encontrado en el primer estudio (muestra de La Laguna). Esto se debe supuestamente, al cambio que se introdujo en el cuestionario, tras la realización del estudio con los alumnos de La Laguna.

Por otro lado, algunos de los códigos utilizados para este problema, en el primer estudio, fueron sustituidos por otros, haciéndolos más comprensivos para nuestro análisis.

Por lo señalado anteriormente, vamos a describir de forma separada los códigos referentes a este problema.

Problema 4: Hijos (Categorización referente al primer estudio)

Código	Descripción del código
ALGPOND	Usa el algoritmo de la media ponderada correctamente.
MSOPER	Da un resultado correcto pero sin exponer las operación.
ALG-e1	Divide la suma de los valores de las frecuencias por la suma de los valores de la variable.
ALG-e2	Divide la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias.
ALGPOND≈	Usa el algoritmo de media ponderada correctamente pero aproxima el

	resultado.
ALGPOND-e	Usa el algoritmo de media ponderada erróneamente
MODA-e	Da como resultado un dato de la variable que erróneamente considera como moda.
NHSOPER	Da un resultado incorrecto sin exponer las operaciones.
SX	Suma los valores de la variable y divide por 25
SC	Utiliza procedimientos incoherentes.
NC	No contesta.

Problema 4: Hijos (categorías referente al segundo estudio)

Código	Descripción del código
ALGPOND	Usa el algoritmo de media ponderada
2HSOP	Indica el valor 2 como media, sin mostrar las operaciones
DEXT/2	Calcula la diferencia entre los valores extremos y divide por dos
Fi/Fi+1	Establece la proporción entre frecuencias
MED	Indican la mediana de los valores de la variable como media.
NHSOP	Da como media un valor (diferente de dos), sin mostrar las operaciones
S4X/4	Suma 4 valores de la variable y divide por 4
S5X/5	Suma 5 valores de la variable y divide por 5
SEXT/2	Suma dos valores extremos de la variable y divide por dos
SF/SX	Divide la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable
SFe/SX	Divide la suma errónea de las frecuencias por la suma de los valores de la variable
ST/SFe	Divide la suma total de hijos por la suma errónea de las frecuencias
ST/SX	Divide la suma total de hijos por la suma de los valores de la variable
SX/SF	Divide la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias
SX/SFe	Divide la suma de los valores de la variable por la suma errónea de las frecuencias
SC	Utiliza procedimientos incoherentes
NC	No contesta

Problema 5.A a): Gráfica de Notas (Categorías en el primer estudio)

Código	Descripción del código
ALG-SI	Usa el algoritmo de media simple.
ALG-SI-e	Usa el algoritmo de media simple, pero de forma errónea
ALGPOND	Usa el algoritmo de media ponderada, de forma correcta
ALGPOND-e	Usa el algoritmo de media ponderada, erróneamente
NC	No contesta
SC	Realiza transformaciones incoherente
SOPER	No realiza ninguna operación, afirma solamente que el resultado es cierto.
SX	Suma los cuatro valores de la escala del eje horizontal sobre los cuales se construyeron los rectángulos y divide por cuatro.

Problema 5.A a): Gráfica de Notas (Categorías en el segundo estudio)

Código	Descripción del código
ALG-SI	Usa el algoritmo de media simple.
ALGPOND	Usa el algoritmo de media ponderada, de forma correcta
MEDEXT	Calcula la media de los valores extremos.
NC	No contesta
SC	Realiza transformaciones incoherente
SN-e	Calcula la media de los valores de escala del eje horizontal.
ST-e	Determina incorrectamente la suma total

Problema 5.A.b): Grafica de Notas (Categorías en el primer estudio)

Código	Descripción del código
IGUMEDIA	Justifica que los grupos tienen medias iguales
MHOMO	Justifica que el grupos 2 es más homogéneo
MNOTA	Utiliza como justificación el factor mayor nota en el grupo 1
N<4	Usa como argumento, que no hay alumnos con notas inferiores a 4 en

	el grupo 2.
NAPROP	Usa como justificación la existencia de más alumnos aprobados en el grupo 2
NC	No contesta el ítem
NJUST	Indica cual de los grupos es mejor, pero no justifica
SC	Presenta una justificación bastante confusa

Problema 5.A.b): Grafica de Notas (categorías en los dos estudios)

Código	Descripción del código
IGUMEDIA	Justifica que los grupos tienen medias iguales
MHOMO	Justifica que el grupos 2 es más homogéneo
MNOTA	Utiliza como justificación el factor mayor nota en el grupo 1
N<4	Usa como argumento, que no hay alumnos con notas inferiores a 4 en el grupo 2.
NAPROB	Usa como justificación la existencia de más alumnos aprobados en el grupo 2
NC	No contesta el ítem
NJUST	Indica cual de los grupos es mejor, pero no justifica
SC	Presenta una justificación bastante confusa

Problema 5.B: Grafica de Notas B (categorías en los dos estudios)

Código	Descripción del código
IGUMEDIA	Elige como afirmación cierta, la que dice que no hay diferencias entre los grupos porque las medias son iguales.
MHOMO	Selecciona la opción que indica que el grupos 2 es más homogéneo
MNOTA	Marca la opción que toma como criterio el factor mayor nota en el grupo 1
N<4	Selecciona la afirmación que justifica que el grupo 2 es mejor por no tener alumnos con notas inferiores a 4.
NAPROB	Marca la opción que se refiere a la existencia de más alumnos

	aprobados en el grupo 2.
NC	No selecciona ninguna respuesta
NJUST	Indica que un grupo es mejor que otro, pero no justifica
SC	Marca más de una respuesta.

Problema 6. a): Familia (categorías en los dos estudios)

Código	Descripción del código
DINCOR	Presenta una distribución que no cumple con las condiciones del enunciado
DSOPER	Presenta una distribución correcta, pero sin mostrar las operaciones.
DSTOTAL	Presenta una distribución correcta, mediante la obtención de la suma total.
ST-SDIST	Determina correctamente la suma total pero no da la distribución
HDEC	Da una distribución con valores decimales
NC	No contesta
SC	Realiza varias transformaciones sin coherencia

Problema 6. b): Familia (categorías en los dos estudios)

Código	Descripción del código
DINCOR	Presenta una distribución que no cumple con las condiciones del enunciado
DSOPER	Da una distribución correcta, pero sin mostrar las operaciones.
DSTOTAL	Da una distribución correcta, determinando la suma total.
UA	Usa la misma distribución (correcta) de la respuesta en 6. a)
HDEC	Da una distribución con valores decimales.
NC	No contesta.
SC	Realiza varias transformaciones sin coherencia.

Problema 7. a): Supermercado (categorías en los dos estudios)

Código	Descripción del código
DINCOR	Presenta una distribución que no cumple con las premisas del enunciado.
DSOPER	Da una distribución correcta, pero sin mostrar las operaciones.
DSTOTAL	Da una distribución correcta, determinando la suma total.
DMEDIA	Presenta una distribución de valores iguales a la media.
ST-SDIST	Determina correctamente la suma total pero no da la distribución
NC	No contesta.
SC	Realiza varias transformaciones incoherentes.

Problema 7. b): Supermercado (categorías en los dos estudios)

Código	Descripción del código
DINCOR	Presenta una distribución que no cumple con las premisas del enunciado.
DSOPER	Da una distribución correcta, pero sin mostrar las operaciones.
DSTOTAL	Da una distribución correcta, determinando la suma total.
DMEDIA-R	Usa una distribución de media para el resto de los valores buscados
ST-SDIST	Determina correctamente la suma total pero no da la distribución
UA	Presenta la misma distribución (correcta) encontrada en el apartado anterior
NC	No contesta.
SC	Realiza transformaciones incoherentes.

4.3.2. RESULTADOS

Para reflejar mejor los resultados encontrados en los dos estudios, presentaremos tablas conjuntas en las que mostraremos las frecuencias absolutas y los porcentajes obtenidos en el análisis de los datos, de acuerdo con las opciones seleccionadas o las estrategias presentadas por los alumnos al contestar a una pregunta (de respuesta abierta

o de elección múltiple). De este modo, los resultados no se presentan únicamente en términos de respuestas correctas o incorrectas, sino que se intenta dar un enfoque interpretativo que ilustra las actuaciones de los estudiantes y, en algunos casos, se establecen comparaciones con algunos estudios previos relacionados.

A continuación presentamos los resultados obtenidos en cada problema:

Problema 1: Pesos

Recordemos que en este problema se pedía al alumno marcar la respuesta correspondiente al método que este recomendaría para determinar con mayor precisión posible el peso de un objeto.

En la tabla 4.6 presentamos los resultados.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Distractores	N	%	N	%
a. Usar el número más común, que es 6'2.	12	12'8	32	21'9
b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.	7	7'4	12	8'2
c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.	30	31'9	**93**	**63'7**
d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.	**44**	**46'8**	9	6'2
Marca más de un apartado	1	1'1	--	--

Tabla 4.6. Frecuencias y porcentajes en el problema 1.

De forma general, parece que los alumnos tenían clara la idea de que la media era la mejor estimación del peso del objeto, ya que en las dos muestras la mayoría eligió las opciones (c y d) que se relacionaban con esta medida. Encontramos un 78'7% en la muestra de Tenerife y 69,9% en la muestra de Luanda. Sin embargo, no todos se dieron cuenta que, por la naturaleza del problema, había que suprimir el valor atípico, dado que la media queda afectada por valores extremos. El 31'9% de los alumnos de Tenerife opta por calcular la media sin descartar los atípicos, mientras que en la muestra de Luanda, el número de alumnos que elige esta opción ha sido más llamativo (63'7%). El porcentaje del primer estudio es análogo al obtenido por Batanero, Godino y Navas

(1997) en un estudio realizado con alumnos del curso de formación de profesores (34'1%), a pesar de que en nuestro caso la muestra es más reducida.

En nuestro primer estudio, un 46'8% contesta correctamente el problema, mientras que en el segundo estudio sólo encontramos un 6'2% de respuestas correctas. En el estudio de Batanero, Godino y Navas el porcentaje de respuestas correctas fue de 51'5%.

Los resultados ilustran lo expresado por Batanero, Godino y Navas (1997), que dicen que el tratamiento de los valores atípicos no es fácil para los estudiantes. Pero comparativamente, esta noción parece ser mucho más desconocida a los alumnos de Luanda, si tenemos en cuenta el bajo porcentaje de alumnos que indica la respuesta correcta (6'2%). Batanero, Godino y Navas (1997), apuntan a la descontextualización de la enseñanza de la estadística y a la falta de un conocimiento funcional de lo aprendido, como causas de estas dificultades. Y una evidencia general de esto, es que cuando pasamos la prueba a los alumnos de Luanda, al dialogar con algunos docentes, nos enteramos del escaso abordaje en el proceso de enseñanza que se presta a las propiedades de la media aritmética, y de la poca descontextualización de los problemas relacionados con estos contenidos, aunque en aquel momento no pudimos profundizar más sobre los orígenes de las dificultades.

En el primer estudio, encontramos aún un 12'8% que entiende que la moda es la mejor vía para estimar el peso requerido, al marcaren la opción a), contra un 21'9% de alumnos del segundo estudio. El estudio que venimos citando (Batanero et al., 1997) ha señalado un 9'1% de preferencias para el mismo distractor, lo que es una muestra de la confusión de los alumnos, pues, proponen usar una medida que no tiene la propiedad de mejor estimador de un conjunto de datos. Asimismo, encontramos un 7'4% de alumnos del primer estudio que confunde precisión con presencia de más cifras decimales, frente a un 8'2% de la segunda muestra.

Problema 2: En una clase

Este problema es similar al anterior aunque aquí el contexto es diferente. En él, se pide resumir un conjunto de datos, quedando representado por un valor típico. Eso significa que se deben sumar todos los datos y dividir por el número total de datos. Debido al contexto la opción de descartar el 22 no es correcta.

Los resultados obtenidos con las respuestas de los alumnos se muestran en la tabla 4.7. En la misma puede verse que alrededor de la mitad de los alumnos de Tenerife

eligió el distractor correcto para la solución del problema, o sea, sumar los 8 números y dividir por 8, frente a un 40'4% de sus homólogos de Luanda. Con respecto al primer estudio encontramos todavía un 13'8% que sugiere descartar el valor 22, como valor atípico, 29 (30,9%) alumnos consideran que el cero no debe tenerse en cuenta en el cálculo de la media, y hay un 6'4% que opta por usar la moda. En la muestra de Luanda, un 24% cree que la moda es la solución del problema, y por eso señalan la opción a), el 26% prefiere el distractor d), sin tener en cuenta que el cero sí influye en el cálculo de la media, mientras que el 8'2% sugiere descartar el 22 y calcular la media de los otros siete valores, pareciendo de este modo indicar que no han comprendido en qué circunstancias se debe o no considerar un dato como valor atípico.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Distractores	N	%	N	%
a. Usar el número más común, que es 2.	6	6'4	35	24
b. **Sumar los 8 números y dividir por 8.**	**46**	**48'9**	**59**	**40'4**
c. Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.	13	13'8	12	8'2
d. Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.	29	30'9	38	26
No contesta	--	--	1	0'7
Marca más de un apartado	--	--	1	0'7

Tabla 4.7. Frecuencias y porcentajes en el problema 2.

Batanero, Godino y Navas, observaron un 22'3% de respuestas correctas, un resultado muy inferior al que encontramos en nuestros dos estudios. Sin embargo, en nuestra investigación detectamos más alumnos que creen que se debe descartar el cero en el cálculo de la media, (30'9% y 26% respectivamente), puesto que en el estudio con los profesores en formación se encontró un 10'2%. Este error, no tener en cuenta al valor cero en el cálculo de la media, fue descrito ya en otros estudios previos (Mevarech, 1983; Strauss y Bichler, 1988; Tormo, 1995), en los cuales se explica que esta dificultad refleja el carácter abstracto de esta medida, y por lo tanto, es necesario plantear el desarrollo de nociones intuitivas en lo que se refiere a la enseñanza.

Para analizar con más detalle las dificultades de comprensión relativas a los dos ítems anteriores, realizamos un cruce de datos, cuyos resultados pueden ser apreciados en la tabla 4.8.

De los 44 alumnos de Tenerife que contestaron correctamente el problema "Pesos", indicando la opción d., (categoría DATIP), 21 (47,7%) de ellos, eligieron la respuesta correcta (categoría ADALG) en el segundo problema "En una clase". Los restantes asumen diferentes posiciones: El 20% (9 alumnos) opta por desechar el 22 (DATIP), el 27% (12 alumnos) considera que el cero debe ser descartado en el cálculo de la media (DCERO) y 2 alumnos indican la moda (categoría MODA) como la solución del problema.

		Problema "En una clase"				
Problema "Pesos"		ADALG	DATIP	DCERO	MODA	Total
	ADALG	16	4	9	1	30
	DATIP	21	9	12	2	44
	DEC	3	0	1	3	7
	MODA	5	0	7	0	12
	SC	1	0	0	0	1
	Total	46	13	29	6	94

Tabla 4.8. Frecuencias en el cruce de resultados de los problemas 1 "Pesos", (en filas) y problema 2 "En una clase" (en columnas).

En el segundo problema, donde la opción correcta es la que consiste en promediar todos los valores (categoría ADALG), de los 46 alumnos que lo contestaron correctamente, identificamos un 34,7% (16 alumnos) que había marcado, en el problema anterior, la opción que consistía en determinar la media de todos los valores presentados (categoría ADALG), constituyendo una elección incorrecta en aquél caso, dada la naturaleza del problema.

El mismo análisis se realizó con los resultados encontrados en el segundo estudio, tal como se muestra en tabla 4.9.

		Problema "En una clase"						
Problema "Pesos"		ADALG	DATIP	DCERO	MODA	NC	SC	Total
	ADALG	45	5	28	13	1	1	93
	DATIP	3	2	4	0	0	0	9
	DEC	3	2	3	4	0	0	12
	MODA	8	3	3	18	0	0	32
	Total	59	12	38	35	1	1	146

Tabla 4.9. Frecuencias en el cruce de resultados de los problemas 1 "Pesos", (en filas) y problema 2 "En una clase" (en columnas).

Los resultados muestran que de los 9 alumnos que han contestado correctamente al problema "Pesos", eligiendo la opción de descartar los atípicos (categoría DATIP), sólo 3 se dieron cuenta que en el problema 2, la solución correcta debía determinarse sumando todos los valores y dividir, luego por el total de participantes (ADALG). Eso quiere decir, que de los 59 alumnos que contestaron correctamente al problema 2 (categoría ADALG), sólo el 5% (3 alumnos) ha razonado adecuadamente. El 95% restante ha elegido opciones incorrectas en el problema anterior, (categorías ADALG, DEC, MODA). Por otro lado, es llamativo que más de la mitad (18 de 32 alumnos) de los que habían indicado la opción "usar el número más común" (categoría MODA) en el primero problema hayan vuelto a señalar la misma opción en el segundo problema (*En una clase*).

Problema 3: Hijos por Familia

El propósito de este problema es evaluar la comprensión de los alumnos sobre las posiciones relativas de media, mediana y moda, así como la adecuada comprensión del algoritmo de cálculo de la media. Se da la media y el total de datos. La búsqueda de la respuesta correcta requiere del alumno que oriente su razonamiento hacia la estrategia de invertir el algoritmo de la media, para de esta forma encontrar la suma total.

Los resultados encontrados, se muestran en la tabla 4.10.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Distractores	N	%	N	%
a. La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 niños.	5	5'3	17	11'6
b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.	0	0	12	8'2
c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.	33	35'1	44	30'1
d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.	3	3'2	18	12'3
e. El número más común de niños en una familia es 2.	**52**	**55'3**	**51**	**34'9**
Marca más de un apartado.	1	1'1	2	1'4
No contesta	--	--	2	1'4

Tabla 4.10. Frecuencias y porcentajes en el problema 3.

A pesar de que en general el algoritmo de la media se usa con frecuencia en las clases para resolver diferentes problemas, nuestro estudio reveló que la opción más señalada por los alumnos en este problema fue la e), que refiere la moda como valor representativo de la media, con un 55'3 % de proponentes en la muestra de Tenerife y un 34'9% en la muestra de Luanda, lo que demuestra la gran confusión de los alumnos en pretender identificar la moda con la media.

La respuesta correcta es la opción c). Su elección requiere del alumno una interpretación adecuada del uso del algoritmo de la media. El alumno tiene que analizar la información planteada en el problema, "*dividieron el número total de niños de la ciudad por el número total de familias, que era 50*". Luego, si este cociente da como resultado el valor 2'2, que es el promedio, entonces el problema consiste en encontrar el "*total de niños en la ciudad*". Bastaba con multiplicar la media dada por el número total de familias. Sin embargo, la mayor parte de los alumnos no han podido razonar de esta forma. Sólo un 35'1% contestó correctamente el ítem en el primero estudio, frente a un 30'1% de aciertos en el segundo estudio. Estos datos muestran la ausencia de una concepción estructural (Sfard, 1991) del concepto de media aritmética.

Los resultados anteriores difieren un tanto de los encontrados por Batanero y colegas (1997), ya que ellos obtuvieron un 51% de respuestas correctas.

Aún en este problema, hay otros datos que se destacan en el segundo estudio. Vemos un 11'6% que indica como solución la mediana, como valor próximo a la media (opción a.), y el 8'2% que considera la parte decimal 0'2 como un valor entero,

redondeándola por exceso, lo que parece indicar que no aceptan que la media pueda ser un valor decimal, cuando la variable es discreta (opción b.).

Un análisis global muestra que la mayoría de los alumnos parece creer que la media, la mediana y la moda se sitúan en posiciones muy cercanas, lo que indica el desconocimiento de las posiciones relativas de los promedios en distribuciones asimétricas.

Problema 4: Hijos

Este es un problema de cálculo directo de la media ponderada. Como se ha descrito previamente, el objetivo aquí es examinar si los alumnos son capaces de distinguir los valores de la variable de las frecuencias; comprobar si saben aplicar el algoritmo de la media ponderada, así como constatar las estrategias que utilizan.

Al ser una pregunta abierta, nos permite pedir a los alumnos, que la razonen y, al justificarla, tienen libertad para emplear los diferentes elementos de significado previstos en el análisis a priori de los ítems (Cobo y Batanero, 2004a).

Dado que en el segundo estudio el problema sufrió algunas modificaciones que se reflejan de cierta manera en los tipos de respuestas presentadas por los alumnos, mostraremos separadamente las tablas de resultados.

En primer lugar, mostraremos los resultados encontrados con los alumnos de Tenerife. La tabla 4.11 muestra las estrategias utilizadas por estos alumnos. Los datos indican que el 34% de los alumnos resuelve el problema correctamente. Usan el algoritmo de cálculo de la media ponderada (22'3%) o exponen el resultado sin mostrar las operaciones que eventualmente han realizado (11'7%).

Estrategias Correctas	N	%
Usa el algoritmo de la media ponderada.	**21**	**22'3**
Da un resultado correcto pero sin exponer las operación.	11	11'7
Estrategias Incorrectas	N	%
Divide la suma de los valores de la variable por la suma de los pesos.	2	2'1
Usa el algoritmo de media ponderada correctamente pero, aproxima el resultado.	1	1'1
Divide la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable.	4	4'3
Usa el algoritmo de media ponderada erróneamente.	4	4'3

Da como resultado un dato de la variable que considera como moda erróneamente.	5	5’3
Da un resultado incorrecto sin mostrar las operaciones.	**33**	**35’1**
Suma los valores de la variable y divide por 25.	1	1’1
Utiliza procedimientos incoherentes.	8	8’5
No contesta.	4	4’3

Tabla 4.11. Frecuencias y porcentajes en el problema 4 “Hijos”, referentes al primer estudio.

Las distintas estrategias incorrectas usadas por los alumnos en el intento de solucionar el problema, han sido las siguientes: sumar las frecuencias y dividir el resultado obtenido por la suma de los valores de la variable (4’3%); dividir la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias (2’1%); usar el algoritmo de media ponderada pero determinando de forma errónea la suma total de hijos (4’3%); usar correctamente el algoritmo pero redondeado el resultado encontrado (1’1%) y elegir un dato cualquier como moda, para la solución pretendida (5’3%).

Fue notable el número de alumnos que dan un determinado valor como resultado (correcto o incorrecto) sin mostrar las operaciones realizadas (46,8%), hecho que, en aquella ocasión, limitó nuestro objetivo de profundizar más sobre las estrategias utilizadas por los alumnos.

El segundo estudio proporcionó más estrategias incorrectas que el primero. Quizá esto se debió a la omisión del dato relativo al total de familias, que se daba en el problema administrado en el primero estudio. La omisión del dato referente al total de familias fue intencional. Queríamos saber si ello constituía una dificultad añadida en la resolución del problema. Y de hecho, los resultados indicaron que así fue, si tenemos en cuenta el porcentaje extremadamente bajo de alumnos que contestaron correctamente al problema, como se muestra en la tabla 4.12.

Estrategias Correctas	N	%
Usa el algoritmo de media ponderada	4	2’7
Estrategias Incorrectas	N	%
Calcula la diferencia entre dos valores extremos de la variable y divide por 2.	4	2’7
Suma dos valores extremos de la variable y divide por dos.	1	0’7
Indica el valor 2 como media, sin mostrar las operaciones.	17	11’6
Da como media un valor (diferente de dos), sin mostrar las operaciones.	17	11’6

Indican la mediana de los valores de la variable como media.	7	4’8
Suma 4 valores de la variable y divide por 4.	7	4’8
Suma 5 valores de la variable y divide por 5.	6	4’1
Establece la proporción entre frecuencias.	1	0’7
Divide la suma errónea de las frecuencias por la suma de los valores de la variable.	4	2’7
Divide la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable.	2	1’4
Divide la suma total de hijos por la suma errónea de las frecuencias.	4	2’7
Divide la suma total de hijos por la suma de los valores de la variable.	2	1’4
Divide la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias.	10	6’8
Divide la suma de los valores de la variable por la suma errónea de las frecuencias.	3	2’1
Utiliza procedimientos incoherentes.	**38**	**26**
No contesta.	19	13

Tabla 4.12. Frecuencias y porcentajes en el problema 4 “Hijos”, referentes al segundo estudio.

Los datos muestran que el porcentaje de respuestas correctas es 2’7, frente a un 97’3% de respuestas incorrectas. Para las respuestas correctas, identificamos que los alumnos emplearon el algoritmo de cálculo de la media ponderada mientras que para las incorrectas identificamos diversas estrategias, siendo en gran parte, procedimientos incoherentes (26%). Las estrategias incorrectas que más se destacaron fueron: Dividir la suma de los valores de la variable por la suma de los valores de las frecuencias (6’8%), es decir, (0+1+2+3)/(10+7+5+3); Sumar *n* valores de la variable y dividir por *n* (8’9%); en esta estrategia observamos dos tipos: los que sumaban los valores 0, 1, 2 y 3 dividiendo la suma por 4, y los que sumaban los valores 0, 1, 2, 3, y 4, dividiendo la suma por 5; indicar un determinado valor como media (23’2%) sin mostrar las operaciones; indicar la mediana de los valores de la variable como media (4’8%); dividir la suma total de hijos por la suma errónea de las frecuencias (2’7%); y observamos también un 13% de alumnos que no contestan.

Como se puede ver, aquí el número de estrategias incorrectas ha aumentado considerablemente, en comparación con las encontradas en el primer estudio. Conjeturamos que es debido a la modificación que introdujimos. Pero de forma general, preveíamos encontrar tales problemas, puesto que la investigación de Pollatsek, Lima y Well (1981), nos había advertido de las principales dificultades de los alumnos con la media ponderada.

Sospechamos que los alumnos que indicaron el valor 2 como media han confundido, quizás, la media con la mediana, tal como lo hicieron explícitamente algunos o habrán sumado todos los valores de la variable, dividiendo la suma por 5, que ha sido también una de las estrategias incorrecta utilizada por los alumnos. Las dificultades de los alumnos en considerar la media como mediana o la media como moda las encontramos señaladas en Mokros y Russell (1995). También nos llama la atención el hecho de que algunos alumnos hayan considerado una información sin relevancia para el problema la que dice "*No hubo ninguna familia con 4 hijos",* como dato, lo que muestra cómo hacen un análisis ambiguo de la información que se les brinda.

Problema 5: Gráfico de Notas

Este problema se divide en dos bloques: el **5.A.** y el **5.B.** El primer bloque consta de dos apartados. Con en el primero se examinan los conocimientos y dificultades de los alumnos sobre las acciones de "leer los datos" en un gráfico, "leer dentro del gráfico" y al mismo tiempo verificar las estrategias que usan en el cálculo de la media, mientras que con en el segundo, se exploran los criterios usados por los alumnos para comparar dos conjuntos de datos.

El segundo bloque, consiste en un problema de elección múltiple, que refleja cuatro argumentos, para justificar la diferencia entre dos grupos con iguales medias.

Bloque 5.A

Los resultados encontrados en los dos apartados de este bloque se presentan en tablas conjuntas, a pesar de que los ítems administrados conllevaban ligeras diferencias. Tal como se comentó en el apartado que se dedicó a la descripción del cuestionario, los datos que indicaban las notas en la gráfica del segundo estudio, variaban de 8 a 14, considerándose aprobado, si la nota es igual o superior a 10 valores, de acuerdo con el sistema de evaluación vigente en Angola. Con relación al primero estudio, las notas se establecieron según el sistema de evaluación español. Los ajustes en los datos "notas" eran fundamentales, puesto que sin los mismos, los alumnos no tendrían referencias para argumentar sus respuestas en el apartado siguiente, donde se pregunta *¿qué grupo te parece mejor*?, porque el contexto sería completamente diferente.

Aunque las modificaciones que se introdujeron en el apartado **5.A. a)** para el segundo estudio, no alteraban el objetivo propuesto, los tipos de respuestas de los

alumnos, entre las dos muestras, fueron muy diferentes, excepto en las respuestas correctas.

En la tabla 4.13 mostramos los resultados obtenidos en los dos estudios para el apartado que denotamos por **5.A. a)**:

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Estrategias Correctas	N	%	N	%
Usa el algoritmo de media simple correctamente	6	6'4	5	3'4
Usa el algoritmo de media ponderada, de forma correcta.	**41**	**43'6**	4	2'7
Estrategias Incorrectas				
Usa el algoritmo de media simple, pero erróneamente	1	1'1	--	--
Usa el algoritmo de media ponderada, erróneamente.	2	2'1	--	--
Afirma que la media es 6, pero no comprueba.	14	14'9	--	--
Calcula la media de los cuatro valores de la escala del eje X sobre los cuales se construyeron los rectángulos.	7	7'4	--	--
Calcula la media de todos los valores de la escala del eje horizontal (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14).	--	--	42	28'8
Calcula la media entre los valores extremos.	--	--	1	0'7
Determina incorrectamente la suma total.	--	--	1	0'7
Utiliza procedimientos incoherentes.	6	6'4	7	4'8
No contesta.	17	18'1	**86**	**58'9**

Tabla 4.13. Frecuencias y porcentajes en el problema 5.A.a)

La mitad de los alumnos de la primera muestra (50%), comprueba correctamente el valor medio indicado, mientras que en la segunda muestra sólo un 6'1% ha sido capaz de verificar el valor referido. Lo hacen usando el algoritmo de la media ponderada, con un 43'6% en la muestra de Tenerife, contra un escaso 3'4% en Luanda, o sumando las diez notas y dividiendo la suma por diez (6'4% en el primero estudio y 2'7% en el segundo). Sin embargo hemos notado un 14'9% en la muestra de Tenerife que sólo afirma que la media es 6 y no lo comprueba. Estos alumnos los encuadramos en el grupo de los que contestaron incorrectamente, porque la respuesta dada era ya una premisa del ítem. Cuando analizamos los resultados de la primera muestra nos llamó la atención, el hecho de que algunos alumnos (7'4%) hubiesen utilizado como datos, para determinar la media, los cuatro valores de la escala del eje X sobre los cuales se construyeron los rectángulos, y obteniendo por pura coincidencia el resultado buscado. Esto nos hizo pensar que quizá el alumno intentaría encontrar otra estrategia si no

tuviese hallado ese valor. Como consecuencia, el problema planteado para el segundo estudio lo formulamos de otra manera, pidiendo que el alumno comprobase la media del otro grupo, con el propósito de ver lo que hacia. A pesar del cambio realizado, en los resultados del segundo estudio verificamos el uso de una estrategia similar. En esta ocasión, estos alumnos (28'8%) calcularon la media considerando todos los valores de la escala del eje horizontal (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14), y no sólo los valores sobre los cuales se construyeron los rectángulos, como habían procedido sus homólogos. Por coincidencia, también encontraron el valor a comprobar. Esto nos llevó a concluir que, ante una situación de desconocimiento, estos alumnos utilizan el método de ensayo-error con el fin de intentar ajustar sus respuestas a las soluciones pedidas en problemas de comprobación.

Los datos señalan un número considerable de alumnos que no responde al ítem, aunque ha sido más llamativo en el segundo estudio (58'9%) comparado con el primer estudio (18'1%). Suponemos que aquellos alumnos no respondieron porque no sabían resolver el problema. Esta suposición parece ser cierta si atendemos a los datos encontrados en la tabla 4.14, donde se cruzan los resultados referentes a este problema (en columnas) y los relacionados con el problema 4 "Hijos" (en filas), cuyos procesos de resolución podrían ser similares.

	Problema "Grafico de notas, 5.A.a)"									
Problema 4 "Hijos"		ALG-SI	ALG-SI-e	ALGPOND	ALGPOND-e	NC	SC	SOPER	SX	Total
	ALG-e1	1	0	2	0	0	0	0	1	4
	ALG-e2	0	0	1	0	0	0	1	0	2
	ALGPOND	4	0	14	0	0	1	2	0	21
	ALGPOND#	0	0	0	1	0	0	0	0	1
	ALGPOND-e	0	0	3	1	0	0	0	0	4
	MODA-e	0	0	1	0	0	0	4	0	5
	MSOPER	0	0	7	0	2	0	2	0	11
	NC	0	0	2	0	0	0	2	0	4
	NHSOPER	0	1	7	0	14	3	3	5	33
	SC	0	0	4	0	1	2	0	1	8
	SX	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	Total	6	1	41	2	17	6	14	7	94

Tabla 4.14. Frecuencias en el cruce de resultados de los problemas 4 y 5.A.a), referente al primer estudio.

Con respecto al primero estudio, observamos que de los 17 alumnos que no contestaron el apartado 5.A a), (categoría NC), cuyos resultados están en columnas, 14 de ellos han indicado un valor erróneo como media en el problema 4, sin mostrar las operaciones realizadas (categoría NHSOPER), 1 no han contestado el mismo problema (NC), y dos 2 indicaron la media correctamente, pero no mostraron ninguna operación (MSOPER), lo que no permite asegurar que hayan resuelto por su cuenta el referido

problema. En el segundo estudio, el cruce de los resultados para los mismos problemas parece ser más esclarecedor, como se puede ver en la tabla 4.15.

		Problema "Grafico de notas, 5.A.a)"							
Problema 4 "Hijos"		ALGPOND	ALGSI	MEDEXT	NC	SC	SN-e	ST-e	Total
	2HSOP	0	0	0	12	0	5	0	17
	ALGPOND	2	2	0	0	0	0	0	4
	DEXT/2	0	0	0	1	0	3	0	4
	Fi/Fi+1	0	0	0	0	0	1	0	1
	MED	0	0	0	5	1	1	0	7
	NC	0	0	0	18	0	1	0	19
	NHSOP	0	0	0	11	2	4	0	17
	S4X/4	0	0	0	1	0	6	0	7
	S5X/5	0	0	0	2	0	4	0	6
	SC	0	2	0	26	3	6	1	38
	SEXT/2	0	0	1	0	0	0	0	1
	SF/SX	0	0	0	1	0	1	0	2
	SFe/SX	0	0	0	1	1	2	0	4
	ST/SFe	1	0	0	2	0	1	0	4
	ST/SX	1	0	0	1	0	0	0	2
	SX/SF	0	1	0	4	0	5	0	10
	SX/SFe	0	0	0	1	0	2	0	3
	Total	4	5	1	86	7	42	1	146

Tabla 4.15. Frecuencias en el cruce de resultados de los problemas 4 y 5.A.a), referente al segundo estudio.

Los datos muestran que de los 86 alumnos que no contestaron el ítem 5.A. a) (categoría NC, en columna), 18 de ellos no han contestado al problema anterior (categoría NC, en filas), 26 indicaron transformaciones incoherentes (SC), 12 indicaron el valor 2 como respuesta al problema sin mostrar operaciones (2HSOPER), 11 indicaron un valor determinado como media, también sin realizar operaciones (categoría NHSOP), entre otras estrategias incorrectas.

Las tablas de resultados cruzados nos muestran otros resultados de interés, que resumimos a continuación:

- En la muestra de Tenerife observamos que de los 6 alumnos que comprobaron correctamente el valor que se indicaba en el problema 5.A. a), usando el algoritmo de media simple (categoría ALG-SI), encontramos 4 alumnos que han resuelto acertadamente el problema anterior (Hijos) usando el algoritmo de media ponderada (ALGOPOND), los otros 2 utilizan estrategias incorrectas: uno divide la suma de los

pesos por la suma de los valores de la variable (categoría ALG-e1) y el otro divide la suma de los valores de la variable por 25(categoría SX).

- De los 41 alumnos que usaron correctamente el algoritmo de media ponderada (ALGPOND) en el problema 5.A a), sólo 21 han encontrado adecuadamente la solución en el problema anterior: 14 usaron la misma estrategia (ALGPOND) y 7 presentaron la solución pretendida pero sin mostrar las operaciones (MSOPER).

En cuanto a la tabla de resultados cruzados relativa al segundo estudio, cabe destacar que de los 9 alumnos que contestaron de forma acertada el ítem 5.A.a) (categorías ALGPOND y ALG-SI, en columnas), 4 de ellos son los que han determinado de forma apropiada la solución requerida en el problema anterior, usando el algoritmo de media ponderada (categoría ALGPOND, en fila).

Apartado 5.A. b)

Para el apartado **b)** del bloque que estamos analizando, (5.A), los argumentos dados por los alumnos a la pregunta "¿Qué grupo te parece mejor y por qué?" estuvieron en torno a las ideas que resumimos en tabla 4.16.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Justificaciones	N	%	N	%
No hay diferencias entre los grupos porque ambos tienen medias iguales.	14	14'9	18	12'3
El grupos 2 es mejor porque es más homogéneo.	7	7'4	8	5'5
Afirma que el grupo 1 es mejor porque en él hay alumnos con mayor nota.	7	7'4	13	8'9
El grupo 2 es mejor porque no tiene alumnos con notas inferiores a 4.	2	2'1	--	--
El grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados.	**43**	**45'7**	30	20'5
Afirma que un grupo determinado es mejor, pero no justifica.	2	2'1	--	--
Presenta una justificación bastante confusa.	11	11'7	21	14'4
No contesta o no justifica.	8	8'7	**56**	**38'4**

Tabla 4.16. Frecuencias y porcentajes en el problema 5.A.b).

Los datos muestran que los alumnos de las dos muestras tuvieron enormes dificultades en este apartado. Sólo el 7'4% de los alumnos de Tenerife y un 5'5% de Luanda dan una justificación fundada, refiriéndose a la homogeneidad e indicando la necesidad de tener en cuenta la dispersión de los datos al comparar grupos de medias

iguales. En cada grupo de estudio, la mayoría no ha sido capaz de presentar un argumento con criterio. Como se puede ver, la justificación que más han presentado los alumnos que participaron en el primero estudio, fue la que se refiere al mayor número de aprobados (45'7%), mientras que en el segundo estudio un 20'5% da esta misma justificación. Es destacable el número de alumnos que no contesta o no justifica (38'4%) en este último grupo.

Observamos un 14'9% y un 12'3%, respectivamente, que considera que "No hay diferencias entre los dos grupos, porque ambos tienen medias iguales", lo que indica la poca importancia que los alumnos conceden a la variabilidad cuando comparan dos muestras. De igual modo, un 7'4% de alumnos de la primera muestra y un 8'9% de la segunda toma como criterio de comparación la existencia de máximos en uno de los conjuntos, al considerar que el grupo 1 es mejor porque en ese grupo hay alumnos con notas más altas. Hubo también alumnos que presentaron justificaciones bastante confusas (11'7% y 14'4% respectivamente).

Apartado 5.B.

Esta parte tiene como objetivo analizar la convicción del alumnado sobre los argumentos dados en el apartado anterior. El alumno debe elegir una opción, de las que se ofrecen, decidiendo con cuál de ellas está de acuerdo. Los resultados se muestran en la tabla 4.17.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Opciones	N	%	N	%
a. El Grupo 1 es mejor que el Grupo 2 porque en el primero están los alumnos que obtuvieron más nota.	8	8'5	17	11'6
b. El Grupo 2 es mejor porque no hay alumnos con notas inferiores a 4.	16	17	…	…
b*[1]. El Grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados.	…	…	28	19'2
c. No hay diferencia entre los dos grupos, porque la media es la misma en ambos.	23	24'5	40	27'4
d. A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo.	**36**	**38'8**	**52**	**35'6**
Marca más de una respuesta.	8	8'5	3	2'1
No contesta	3	3'2	6	4'1

Tabla 4.7. Frecuencias y porcentajes en el problema 5.B.

[1] Esta opción se introdujo como resultado de la mejora del cuestionario, ya que ha sido una de las justificaciones más observada en las respuestas de los alumnos a la pregunta del apartado 5.A. b), en el primer estudio.

En este apartado, la opción d) fue la más elegida, con un 38'8 % en la muestra de Tenerife, frente a un 35'6% en la muestra de Luanda. Esta, es la opción correcta, puesto que el argumento se refiere a la poca dispersión de las notas en el grupo 2. Estos porcentajes muestran que los dos grupos de estudio experimentaron enormes dificultades en este ítem, si comparamos con el porcentaje de opciones incorrectas seleccionadas por los mismos, añadiéndoles las incomprensiones, que se manifestaron en marcar más de una respuesta o no contestar. De igual forma, el mayor porcentaje verificado para esta afirmación, contrasta con el resultado encontrado como justificación correcta en el apartado anterior, a pesar de la semejanza de los dos problemas. En el apartado anterior sólo un 7'4% y un 5'5% respectivamente, han indicado una justificación correcta equivalente. Otro resultado que se hace notar en este problema está relacionado con la elección de la opción c) que dice que no hay diferencias entre los grupos, porque las medias son iguales, con un 24'5% de electores en la muestra del primer estudio y un 27'4% en el segundo estudio, lo que parece indicar que no tuvieron en cuenta que, en estas circunstancias, la media no es un indicador preciso para comparar dos grupos. Observamos un 17% de alumnos en Tenerife, que elige la opción que justifica la diferencia entre los dos grupos por la inexistencia de notas inferiores a 4. Esta opción se sustituyó por la opción b* (*El grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados*) en el segundo estudio, teniendo en consideraron al número de justificaciones que se relacionaron con este criterio en el problema 5.A.b), durante el primer estudio, y no habiéndose encontrado datos significativos para aquella justificación. En efecto, encontramos un 19'2% de alumnos en el segundo estudio, que han seleccionado esta opción, lo que parece mostrar que sólo se han fijado en una parte de la distribución. Entre otros resultados, vemos también un 8'5% y 11'6 respectivamente, que parece basar sus justificaciones en la existencia de máximos.

Las dificultades relativas a la comparación de muestras, en donde los alumnos se limitan a analizar sólo una parte de la distribución o a los valores máximos o mínimos también han sido señaladas por Batanero, Godino y Navas (1997) y Estepa y Sánchez (1996). Según se interpreta en Estepa y Sánchez (1996), tales dificultades se deben al hecho de que los alumnos tienen una concepción local de asociación entre variables, creyendo que éste es el análisis apropiado para explicar las diferencias entre dos muestras.

Para analizar mejor las convicciones de los alumnos en sus respuestas a las cuestiones planteadas en los apartados 5.A. b) y 5.B, hicimos un cruce de resultados, cuyos datos, para el primer estudio, se muestran en la tabla 4.18.

	Problema "Grafico de notas 5.B".							
Problema "Gráfico de notas 5.A.b)"		IGUMEDIA	MHOMO	MNOTA	N<4	NC	SC	Total
	IGUMEDIA	13	1	0	0	0	0	14
	MHOMO	0	6	0	0	0	1	7
	MNOTA	2	1	4	0	0	0	7
	N<4	0	1	0	1	0	0	2
	NAPROB	5	**14**	1	14	3	6	43
	NC	1	6	0	0	0	1	8
	NJUST	0	1	1	0	0	0	2
	SC	2	6	2	1	0	0	11
	Total	23	36	8	16	3	8	94

Tabla 4.18. Frecuencias en el cruce de resultados de los problemas 5.A.b) (en filas) y 5.B. (en columnas), con respecto al primer estudio.

Este estudio ha permitido observar que de los 36 alumnos que eligieran la opción correcta d), en el ítem 5.B, (categoría MHOMO, en columna) que indica que el grupo 2 es mejor que el grupo 1 porque es más homogéneo, sólo 6 (16'7%) habían presentado la misma justificación en el apartado anterior (categoría MHOMO, en fila). La mayor parte de ellos (83'3%) han presentado argumentos incorrectos en el ítem %. A.b). La justificación infundada que más ha sobresalido fue la que toma como criterio de comparación, la existencia de más aprobados (NAPROB), presentada por el 39% (14) de aquellos. Encontramos también 6 (17%) alumnos que no contestan (NC), otros 6 (17%) que presentan justificaciones confusas (SC), 1 que dice no hay diferencias entre los grupos porque las medias son iguales (IGUMEDIA) y 2 que miran sólo a los máximos o mínimos de la distribución (MNOTA y N<4).

En relación a los alumnos que justificaron correctamente el problema 5.A.b) (categoría MHOMO, en fila), los datos indican que prácticamente todos también acertaron el problema 5.B. excepto 1, cuya respuesta no ha sido clasificada (SC).

El mismo análisis fue realizado con los alumnos del segundo estudio (Luanda). Los resultados correspondientes se indican en la tabla 4.19.

		Problema "Grafico de notas 5.B".						
Problema "Gráfico de notas 5.A.b)"		IGUMEDIA	MHOMO	MNOTA	NAPROB	NC	SC	Total
	IGUMEDIA	16	2	0	0	0	0	18
	MHOMO	0	6	0	2	0	0	8
	MNOTA	2	3	6	1	0	1	13
	NAPROB	3	11	0	16	0	0	30
	NC	0	1	0	1	0	0	2
	NJUST	13	21	8	5	5	2	54
	SC	6	8	3	3	1	0	21
	Total	40	52	17	28	6	3	146

Tabla 4.19. Frecuencias en el cruce de resultados, en los problemas 5.A.b) (en filas) y 5.B (en columnas), con respecto a la muestra de Luanda.

De los datos se puede observar la gran similitud con respecto a los resultados del primer estudio. Vemos, que de los 52 alumnos que marcaron la opción correcta al problema 5.B (categoría MHOMO, en columna), solamente 6 (11'5%) han presentado una justificación correcta en el problema anterior 5.A.b) (categoría MHOMO, en fila). De aquellos, verificamos, que 21 (40'3%) no presentan ninguna justificación (NJUST), y 11(21'1%) dan justificaciones aludiendo al número de alumnos aprobados (NAPROB).

De entre otros resultados, se puede ver también que más de la mitad de los alumnos que han presentado la justificación basada en el número de alumnos aprobados en el problema 5.A. b) volvieron a sumarse a esta opción en el problema 5.B, lo que muestra que en general, los alumnos no atienden a las medidas de dispersión para establecer diferencias entre grupos, algo que les lleva a cometer errores en este tipo de análisis.

Curiosamente, y tal como ocurrió en el primero estudio, verificamos que casi todos los alumnos que contestaron correctamente al problema abierto (categoría MHOMO, en fila) han elegido la afirmación correcta en el problema de elección múltiple (categoría MHOMO, en columna), excepto 2 que indican la opción sobre el número de alumnos aprobados (NAPROB, en columna).

Los resultados encontrados en éstos dos apartados (5.A.b) y 5.B), parecen mostrar, en parte, cómo los alumnos no cuentan con métodos formales para comparar dos muestras que poseen apariencias visuales y hasta que punto son inconsecuentes en sus puntos de vistas.

Problema 6: Familia.

Este problema tiene dos apartados. En el primero, se trata de determinar una distribución de 10 elementos conocida la media. En el segundo apartado se da la composición de dos familias y se quiere saber cómo pueden ser las otras 8 familias, es decir, se pretende que el alumno complete la distribución, dada la media.

En los dos casos, el contexto limita el tipo de datos a utilizar, ya que estamos en presencia de una variable discreta. Luego, no deben usar números decimales para numerar los elementos de una familia.

Los resultados obtenidos para el primer apartado se describen en la tabla 4.20.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Estrategias Correctas	N	%	N	%
Da una distribución determinando la suma total, invirtiendo el algoritmo.	26	27'7	5	3'4
Da una distribución sin mostrar las operaciones	21	22'3	--	--
Estrategias Incorrectas	N	%	N	%
Da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado	4	4'3	--	--
Utiliza procedimientos incoherentes	12	12'8	18	12'3
Determina correctamente la suma total pero no da la distribución.	--	--	5	3'4
Da una distribución con valores decimales	--	--	2	1'4
No contesta	**31**	**33**	**116**	**79'5**

Tabla 4.20. Frecuencias y porcentajes en el problema 6.a).

Los resultados muestran que el 50% de los alumnos de Tenerife contestan correctamente, utilizando dos vías: Un 27'7% da la distribución determinado primeramente la suma total y un 22'3% sólo presenta la distribución sin mostrar las operaciones, que les ha permitido llegar a tal conjunto de datos. Sin embargo, en el grupo de Luanda sólo observamos un 3'4% de alumnos que llega al resultado pretendido, determinado la suma total, un resultando que muestra claramente las enormes dificultades que han tenido estos alumnos.

Los demás resultados, se relacionan con ciertas estrategias incorrectas utilizadas por éstos alumnos. Observamos un 4'3% de alumnos del primer estudio que presenta una distribución que no cumple con las condiciones del enunciado, mientras que en el grupo del segundo estudio, verificamos un 3'4% que sólo indica la suma total, no pudiendo determinar el conjunto de datos. En particular, encontramos 2 alumnos en este

último grupo de estudio, que dan distribuciones con valores decimales, sin que se percaten del contexto o del tipo de variable en uso.

En ambos grupos, encontramos un llamativo porcentaje de alumnos que no contestan, pero mucho más en el grupo del segundo estudio: 33% en Tenerife y 79'5% en Luanda. En aquel momento, no fue posible profundizar sobre las razones de tal ocurrencia. Sin embargo, conjeturamos que no sabían encontrar la distribución por las distintas dificultades que encierra este tipo de problema, pues, es necesario concebir el conjunto de datos como un todo. Cobo y Batanero (2004a) indican que este tipo de actividad es relativamente compleja, puesto que supone comprender el algoritmo de cálculo de la media, así como la idea de distribución como propiedad de un colectivo. En su estudio observaron un 62'1% de alumnos de cuarto y un 66'7% de primero que fueron capaces de resolver un problema relacionado.

Apartado 6.b)

En el segundo apartado del mismo problema, los resultados encontrados fueron muy similares, como se muestra en la tabla 4.21.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Estrategias Correctas	N	%	N	%
Da una distribución determinando la suma total, invirtiendo el algoritmo.	15	16	4	2'7
Da una distribución correcta sin exponer las operaciones.	21	22'3	--	--
Da la misma distribución correcta del apartado anterior.	10	10'6	--	--
Estrategias Incorrectas	N	%	N	%
Da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado	3	3'2	7	4'8
Utiliza procedimientos incoherentes	11	11'7	23	15'8
Da una distribución con valores decimales.			2	1'4
No contesta	**34**	**36'2**	**110**	**75'3**

Tabla 4.21. Frecuencias y porcentajes en el problema 6.b).

En este apartado, observamos un 48'9% de respuestas correctas, en la muestra de Tenerife, frente a un 2'7% en la muestra de Luanda. Los alumnos de Tenerife presentan tres vías diferentes: el 16% da la distribución calculando antes la suma total por inversión del algoritmo de cálculo, el 22'3% no expone las operaciones y 10'6% da la misma distribución presentada en el apartado anterior, al ver que reunía las

condiciones exigidas en el enunciado. Los alumnos de Luanda siguieron todos la misma estrategia: encontrar en primer lugar la suma total, invirtiendo el algoritmo de cálculo.

Tenemos un 11'7% de alumnos de la primera muestra contra un 15'8% de alumnos del segundo estudio que utilizaron procedimientos y transformaciones algébricas que no llevan a ningún lado.

Igual que en el apartado anterior, nos llama la atención el resultado referente al número de alumnos que no contesta en la muestra de Luanda (75'3% frente a un 36'2% de sus homólogos).

El cruce de resultados, como se muestra en la tabla 4.22, ha ayudado a aclarar algunos aspectos en relación con los resultados de los dos apartados.

		Problema "Familia, 6.b)"						
Problema "Familia, 6.a)"		DINCOR	DSOPER	DSTOTAL	NC	SC	UA	Total
	DINCOR	0	1	0	2	0	1	4
	DSOPER	1	15	0	1	1	3	21
	DSTOTAL	0	3	13	4	0	6	26
	NC	1	2	1	22	5	0	31
	SC	1	0	1	5	5	0	12
	Total	3	21	15	34	11	10	94

Tabla 4.22. Frecuencias en el cruce de resultados de los apartados 6.a) (en filas) y 6.b) (en columnas), referente al primer estudio.

Con respecto al primer estudio, observamos que de los 34 alumnos que no contestaron el apartado 6. b) (categoría NC, en columna), el 64'7% (22 alumnos) de los mismos no había contestado el apartado 6.a) (intersección de las categoría NC). Sólo 5 alumnos (14'7%) habían dado una respuesta correcta en el apartado anterior (categorías DSTOTAL y DSOPER en filas, intersección con NC en columnas). Los restantes presentaron transformaciones incoherentes.

Se observa también que de los 47 alumnos que contestaron correctamente el apartado 6.a) (categorías DSTOTAL y DSOPER en filas), la mayor parte de ellos (85'1%) ha respondido también acertadamente el apartado 6.b) (vea las intersección con las categorías DSOPER, DSTOTAL y UA, en columnas), lo que nos lleva a concluir que, en general, el problema ha sido resuelto por los mismos alumnos.

Al efectuar el mismo análisis en la muestra del segundo estudio, obtuvimos resultados con cierta similitud, como se muestra en la tabla 4.23.

		Problema "Familia, 6.b)"					
Problema "Familia, 6.a)"		DINCOR	DSTOTAL	HDEC	NC	SC	Total
	DSTOTAL	1	3	0	1	0	5
	HDEC	0	0	0	1	1	2
	NC	5	0	1	96	14	116
	SC	1	0	1	9	7	18
	ST-SDIST	0	1	0	3	1	5
	Total	7	4	2	110	23	146

Tabla 4.23. Frecuencias en el cruce de resultados de los problemas 6.a) (en filas) y 6.b) (en columnas), referentes al segundo estudio.

Verificamos que de los 4 alumnos que contestaron de forma correcta el apartado 6.b) (categoría DSTOTAL en columna), 3 de ellos también habían contestado correctamente el apartado anterior (ver intersección con categoría DSTOTAL en fila). El otro alumno sólo ha podido determinar la suma total.

Con respecto a los alumnos que no contestan (categoría NC), los datos muestran que de los 116 que no contestaron el apartado 6.a) (NC en filas), el 82'7% (96 alumnos) no contestó el apartado 6.b), lo que hace un 87'2% del total de alumnos que no contestaron éste ultimo apartado. Es más, de aquellos 116 el 12% (14 alumnos) utilizaron procedimientos incoherentes al intentar solucionar el apartado 6. b) (NC en filas, intersectado con SC en columna), lo que refuerza nuestra sospecha de que la mayoría de los estudiantes no contesta los dos apartados porque no domina estos contenidos.

Problema 7: Supermercado

Este también es un problema de construcción que pertenece al mismo dominio que el problema abordado anteriormente, aunque con algunas diferencias. Se presenta un contexto diferente, donde el alumno puede utilizar valores decimales, es decir, la media puede formar parte del conjunto de datos, ya que estamos ante una variable continua.

El problema esta formado por dos apartados. En el primero hay que encontrar la distribución de datos, conocida la media y el total de datos, mientras en el segundo apartado, el alumno debe completar la distribución de media dada, conocidos algunos elementos de la misma.

Veamos los resultados encontrados en el primero apartado.

Resultados en apartado 7.a)

Igual que en los resultados del problema 6, aquí también observamos que los alumnos del primero grupo de estudio (Tenerife) muestran tener mejor dominio en la resolución de problemas de construcción que sus homólogos de Luanda.

Los resultados relativos al apartado 7.a) se muestran en la tabla 4.24.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Estrategias Correctas	N	%	N	%
Da una distribución determinando la suma total, invirtiendo el algoritmo.	22	23'4	3	2'1
Da una distribución correcta sin exponer las operaciones.	17	18'1	5	3'4
Da una distribución con valores iguales a la media.	12	12'8	--	--
Estrategias Incorrectas				
Da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado	4	4'3	17	11'6
Utiliza procedimientos incoherentes	16	17	17	11'6
Determina correctamente la suma total pero no da la distribución	--	--	3	2'1
No contesta	**23**	**24'5**	**101**	**69'2**

Tabla 4.24. Frecuencias y porcentajes en el problema 7.a).

Se observa que el 54'3% de los alumnos de Tenerife presenta una distribución de valores que se ajusta a lo que se pide en el enunciado, mientras que en grupo del segundo estudio sólo un 5'5% ha podido llegar a tal resultado. Constatamos que los alumnos del primer estudio encuentran la distribución correcta utilizando tres vías de solución: determinando la suma total (23'4%), dando una distribución sin mostrar las operaciones (18'1%), y dando una distribución con valores iguales a la media (12'8%). En el grupo de sus homólogos no verificamos la utilización de esta última estrategia. El 2'1% usa la primera estrategia mientras que el 3'4% da una distribución sin mostrar las operaciones.

Para el grupo de Tenerife podemos ver también que un 24,5% no contesta, el 17% intenta resolver el problema con procedimientos algebraicos no razonables y el 4,3% da una distribución que no va de acuerdo con lo planteado en el enunciado. En el grupo de Luanda, no contesta un importante porcentaje de alumnos (69'2%), tal como sucedió en los dos apartados del ítem 6.a). Encontramos, además, 11'6% que indica una distribución que cumple con las exigencias del enunciado y un porcentaje igual que utiliza procedimientos incoherentes.

Un aspecto a resaltar es el hecho de que algunos alumnos de la primera muestra hayan reconocido el uso del dato "media" como un valor más que podía integrar el conjunto de datos en este problema y no procedieran de igual forma en el problema anterior. Esta constatación parece indicar que aquellos alumnos saben diferenciar los contextos presentados en los problemas.

Resultados en el apartado 7.b)

Los resultados encontrados en este apartado no difieren mucho de los hallados en el apartado anterior, principalmente en lo que se refiere al número de respuestas correctas y alumnos que no contestan, tal como se muestra en la tabla 4.25.

	Tenerife (94)		**Luanda (146)**	
Estrategias Correctas	N	%	N	%
Da una distribución determinando la suma total, invirtiendo el algoritmo.	22	23'4	5	3'4
Presenta una distribución correcta sin mostrar las operaciones.	13	13'8	--	--
Da una distribución media para el resto de los valores	6	6'4	--	--
Da la misma distribución (correcta) del apartado anterior.	5	5'3	--	--
Estrategias Incorrectas				
Da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado	4	4'3	19	13
Utiliza procedimientos incoherentes	19	20'2	32	21'9
No contesta	**25**	**26'6**	**90**	**61'6**

Tabla 4.25. Frecuencias y porcentajes en el problema 7.b).

Como se puede ver, casi la mitad de alumnos del primer grupo de estudio (48'9%) contestan correctamente el problema, utilizando diversas estrategias: determinar la suma total invirtiendo el algoritmo de la media (23'4%), dar una distribución sin exponer las operaciones (13'8%), usar la misma distribución (correcta) del apartado anterior (5'3%) y usar la distribución media para el resto de valores (6'4%). Sin embargo, en el segundo grupo de estudio, el porcentaje de respuestas correctas fue extremadamente bajo (3'4%), tal como se verificó en el apartado anterior. Aún más, sólo registramos una estrategia en esta dirección, que consiste en presentar el conjunto de datos calculando primero la suma total.

En los dos grupos de estudio, los demás resultados se mantuvieron relativamente similares a los encontrados en problema 6, quizá por tratarse de problemas de la misma

naturaleza. Observamos un 20'2% y 26'6% de alumnos que utilizan procedimientos incoherentes y no contestan, respectivamente, en el primero grupo, mientras que en el segundo notamos un 21'9% y un 61'6% respectivamente.

De todas maneras, esperábamos mucho más de los alumnos en este problema, dado que había la posibilidad de utilizar también valores decimales, a diferencia del anterior problema ("Familia"). Sin embargo, analizando los resultados obtenidos, vemos que ni siquiera eso ha constituido una ventaja en la resolución del problema, contrariamente a lo que habíamos supuesto.

Al cruzar los resultados de las tablas, hemos podido profundizar un poco más sobre algunos aspectos. La tabla 4.26 muestra los resultados referentes al primero estudio.

		Problema "Supermercado, 7.b)"							
Problema "Supermercado, 7.a)"		DINCOR	DMEDIA-R	DSOPER	DSTOTAL	NC	SC	UA	Total
	DINCOR	1	0	0	1	1	1	0	4
	DMEDIA	0	4	3	2	0	3	0	12
	DSOPER	2	2	9	0	1	1	2	17
	DSTOTAL	0	0	1	15	3	0	3	22
	NC	1	0	0	2	19	1	0	23
	SC	0	0	0	2	1	13	0	16
	Total	4	6	13	22	25	19	5	94

Tabla 4.26. Frecuencias en el cruce de resultados de los ítems 7.a) (en filas) y 7.b) (en columnas), referentes al primer estudio.

Se observa que de los 51 alumnos que contestaron correctamente el ítem 7.a) (categorías DMEDIA, DSOPER, DSTOTAL, en filas), el 80'4% de los mismos también contestó correctamente el apartado b) del referido problema (DMEDIA-R, DSOPER, DSTOTAL y UA, en columnas), salvo 2 alumnos que presentan distribuciones que no cumplen los requisitos del enunciado (DINCOR), 4 que no contestan (NC) y 4 que realizan transformaciones incoherentes (SC).

Por otro lado, se puede verificar que de los 25 alumnos que no contestaron el ítem 7.b) (categoría NC, en columna), el 76% (19 alumnos) de los mismos (intersección con NC, en filas) no habían contestado el ítem anterior del mismo problema.

Al ampliar este análisis a los resultados con los alumnos del segundo estudio, vemos que la situación es parecida, tal como se muestra en la tabla 4.27.

	Problema "Supermercado, 7.b)"					
Problema "Supermercado, 7.a)"		DINCOR	DSTOTAL	NC	SC	Total
	DINCOR	7	0	4	6	17
	DMEDIA	0	2	1	2	5
	DSTOTAL	0	2	0	1	3
	NC	10	1	78	12	101
	SC	2	0	6	9	17
	ST-SDIST	0	0	1	2	3
	Total	19	5	90	32	146

Tabla 4.27: Frecuencias en el cruce de resultados de los ítems 7.a) (en filas) y 7.b) (en columnas), referentes al segundo estudio.

El análisis indica que los 5 alumnos que contestaron correctamente el apartado 7.b) (categoría DSTOTAL, en columna), 4 de ellos han acertado el apartado 7.a) (intersección con las categorías DMEDIA y DSTOTAL, en filas). Se nota también que de los 90 alumnos que no contesta el ítem 7.b) (categoría NC, en columna), más de 84% de los mismos (78 alumnos) no han contestado el ítem 7.a) del mismo problema (intersección con NC, en fila).

Las tablas de resultados cruzados parecen indicar, que en los dos grupos los alumnos con dificultades han mantenido, en general, el mismo comportamiento en estos apartados.

No ha sido posible profundizar más sobre las actuaciones de los alumnos, aunque con respecto a aquellos que no contestan, conjeturamos que no han comprendido el enunciado planteado, si atendemos a las innumerables preguntas realizadas por los alumnos, en el momento en que se administró la prueba.

4.3.3. ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES EN LOS PROBLEMAS RELACIONADOS DE RESPUESTA ABIERTA Y DE ELECCIÓN MÚLTIPLE.

En esta fase, uno de nuestros propósitos es analizar las actuaciones de los alumnos en los problemas de respuesta abierta, que tienen estrecha relación con problemas de respuesta de elección múltiple. Pretendemos saber si los alumnos que eligen las opciones correctas en las preguntas de respuesta de elección múltiple mostraban evidencias de haberlo hecho con criterio, analizando las actuaciones de los mismos, al contestar a las preguntas de respuesta abierta.

Las preguntas de respuesta abierta, también denominadas como preguntas de respuesta libre en las palabras de Fox (1981), son aquellas que se formulan para obtenerse respuestas expresadas en el propio lenguaje del sujeto encuestado y que requieren que éste construya la respuesta misma. Sin embargo, en las preguntas de respuesta de elección múltiple, a veces denominadas preguntas de respuesta estructurada, de selección de respuestas o cerradas, se ofrecen un conjunto de alternativas de respuestas, para que el alumno indique la respuesta que se ajusta a la pregunta, circunscribiéndose a ellas.

Cada una de estas dos formas de obtener respuestas tiene ventajas e inconvenientes, como señalan diferentes autores (Fox, 1981; Sampieri, Collado y Lucio, 1998; McMillan y Schumacher, 2005). Las preguntas de respuesta de elección múltiple requieren de un menor esfuerzo, ya que no se tiene que escribir o verbalizar pensamientos, sino simplemente seleccionar la alternativa que describa mejor la respuesta. Este tipo de preguntas es más fácil de contestar y requiere de menos tiempo. Además, son fáciles de codificar y preparar para el análisis posterior. Su principal inconveniente reside en que limitan las respuestas de los sujetos y, en ocasiones, ninguna de las opciones describe con exactitud lo que las personas tienen en su mente, no siempre representan el pensamiento de los sujetos, ocurriendo que, a veces, se elige una opción de las dada, por azar.

De las explicaciones de los autores citados anteriormente, se desvela que las preguntas de respuesta abierta son particularmente útiles cuando no tenemos información sobre las posibles respuestas de los sujetos o cuando esta información es insuficiente, cabiendo la posibilidad de profundizar en un determinado campo-problema. Son adecuadas al permitir evaluar un cuerpo coherente de contenidos, permitiendo confiar que se ha identificado la gama pertinente de respuestas potenciales que se corresponden con las capacidades de los alumnos al respecto del tema. Su principal inconveniente es que son difíciles de codificar, clasificar y preparar para su análisis. Además, pueden presentar sesgos derivados de distintas fuentes. Por ejemplo, los alumnos con enormes dificultades pueden no contestar o hacerlo con imprecisión, generando confusión en sus respuestas. Por otro lado, responder a las preguntas de respuesta abierta exige un mayor esfuerzo y tiempo.

Según Fox (1981), cada investigador puede utilizar el modelo que mejor le convenga: El que se refiere a un único tipo de preguntas, o cualquier combinación.

Comenta que con independencia de cómo se haga esto, el investigador tiene que asegurarse de que sus modelos cumplen el doble objetivo del cuestionario: dar a todos los sujetos la posibilidad de responder de un modo que refleje razonablemente sus respuesta y proporcionar al investigador los datos que necesita, en la forma en que los necesite, para dar respuesta a la pregunta de investigación.

En relación a lo expresado anteriormente, nuestro instrumento de recogida de datos combinaba los dos tipos de preguntas mencionadas. Algunas, evaluaban ciertos aspectos similares, incorporados simultáneamente en preguntas de respuesta abierta y preguntas de selección de respuesta, ya que con esto es posible analizar las actuaciones de los alumnos en estos dos tipos de preguntas, en función de uno de los objetivos a que no habíamos propuesto.

Este análisis surge como consecuencia del debate que se viene desarrollando, sobre qué formas de evaluación son las más adecuadas. Por ejemplo, Garfield (2003) describe un cuestionario de evaluación del razonamiento estadístico, con veinte preguntas de respuesta de elección múltiple que involucran conceptos sobre Probabilidad y Estadística y plantea que la mayor parte de los instrumentos de evaluación centran más su atención en las habilidades de cálculo o resolución de problemas que en el razonamiento y la comprensión. Cobo y Batanero (2004a) destacan la importancia de las preguntas abiertas en la evaluación, y señalan, que éste tipo de preguntas no se limitan a dos opciones (correctas/incorrectas) sino que permiten pedir a los alumnos que las razonen, y al justificarlas, tienen libertad para emplear los diferentes elementos de significado previstos en el análisis a priori de los ítems. Igualmente, Cai (1995) sugiere el uso de este tipo de preguntas, para averiguar las concepciones de los alumnos sobre el concepto de la media aritmética y los procesos de resolución de problemas. Con respecto a eso, Gal (1995), indica que es difícil juzgar plenamente lo que conoce una persona sobre la media, como una herramienta para resolver problemas basados en datos, si no se proporciona un contexto (es decir, un problema real) que pueda motivar el uso de la herramienta.

Con nuestro análisis, pensamos aportar algunos elementos que pueden servir de referencia para aclarar determinadas posiciones en este debate. A tal fin, hicimos un cruce de resultados, entre pares de problemas interrelacionadas, centrándonos, fundamentalmente, en analizar las actuaciones de los alumnos en los problemas de respuesta abierta, en

aquellos que han elegido la respuesta correcta en los problemas de respuesta de elección múltiple.

En este apartado expondremos los análisis realizados en la fase exploratoria, y más adelante, en el capitulo 5, complementaremos nuestras reflexiones.

En la tabla 4.28 presentamos datos referentes al cruce de resultados de los problemas "Gráfica de Notas, 5.A. a)" (filas) y "En una clase" (columnas), referente al primer estudio.

		Problema 2 "En una clase"				
		ADALG	DATIP	DCERO	MODA	Total
Problema "Grafico de Notas, 5.A.a)"	ALG-SI	4	0	2	0	6
	ALG-SI-e	1	0	0	0	1
	ALGPOND	23	5	11	2	41
	ALGPOND-e	1	1	0	0	2
	NC	8	3	6	0	17
	SC	1	0	3	2	6
	SOPER	6	3	4	1	14
	SX	2	1	3	1	7
	Total	46	13	29	6	94

Tabla 4.28. Cruce de resultados del **problema de respuesta abierta** "Gráfica de Notas 5.A. a)" (en filas) y del **problema de respuesta de elección múltiple** "En una clase" (en columnas), referente al primer estudio.

Los datos muestran que 46 (48'9%) alumnos han contestado de forma correcta el problema de elección múltiple (categoría ADALG, en columna) frente a 47 (50%) que también responden correctamente en el problema de respuesta abierta (ALG-SI y ALGPOND, en fila). La opción correcta del problema de elección múltiple consiste en sumar todos los valores y dividir la suma por el número de datos, que corresponden con el algoritmo de cálculo de la media aritmética.

De los 46 alumnos que eligieron la opción correcta en el problema de respuesta de elección múltiple, cuando se les presentó el problema de respuesta abierta que requería interpretar los datos del gráfico antes de utilizar el algoritmo de cálculo de la media, 19 (41%) alumnos no fueron capaces de determinar la solución que se les pedía. De éstos, identificamos 8 (17%) alumnos que no contestan (NC), 6 (13%) que proporcionan un resultado numérico sin mostrar las operaciones correspondientes (SOPER), 2 alumnos que suman los valores de las variables sin considerar las frecuencias, 2 que utilizan el algoritmo de cálculo de la media erróneamente y 1 que utiliza procedimientos incoherentes. La solución correcta ha sido encontrada por 27

(59%) alumnos, que utilizaron dos vías: 4 (9%) alumnos usan el algoritmo simple de la media (ALG-SI) y 23 (50%) que utilizan el algoritmo de la media ponderada (ALGPOND).

Por otro lado, los datos muestran que, de los 47 alumnos que resolvieron correctamente el problema de respuesta abierta, 20 (43%) de ellos han indicado la opción errónea en el problema de elección múltiple (DATIP, DCERO y MODA).

Para los mismos problemas, los resultados encontrados en el segundo estudio, parecen ser aún más reveladores, tal como se muestra en tabla 4.29.

		Problema 2 "En una clase"						
Problema "Grafico de Notas, 5.A.a)"		ADALG	DATIP	DCERO	MODA	NC	SC	Total
	ALGPOND	2	0	2	0	0	0	4
	ALG-SI	3	0	2	0	0	0	5
	MEDEXT	1	0	0	0	0	0	1
	NC	32	10	14	29	1	0	86
	SC	2	0	4	0	0	1	7
	SN-e	19	2	15	6	0	0	42
	ST-e	0	0	1	0	0	0	1
	Total	59	12	38	35	1	1	146

Tabla 4.29. Cruce de resultados del **problema de respuesta abierta** "Gráfica de Notas, 5.A. a)" (en filas) y del **problema de respuesta de elección múltiple** "En una clase" (en columnas), referente al segundo estudio.

Observamos 59 alumnos (40'4%) que contestan correctamente en el problema de respuesta de elección múltiple (ADALG, en columna), frente a 9 alumnos (6'1%) en el problema de respuesta abierta (ALGPOND y ALG-SI, en filas). El análisis muestra que de los 59 alumnos que seleccionaron la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple, sólo 5 (8'5%) se mostraron capacitados al resolver el problema de respuesta abierta, es decir, el 91'5% de aquellos no han tenido idea de cómo determinar la solución pedida: 32 (54'2%) alumnos que no contestan (NC, filas) y 19 (32'2%) alumnos no han podido identificar los valores para encontrar la suma total y el total de datos para el cálculo de la media (categoría SN-e), 2 que presentan estrategias incoherentes (SC) y uno que determina la media de los valores extremos colocados en el eje horizontal.

Los resultados parecen sugerir que aquellos alumnos que indicaron la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple, sólo tenían la idea de que en tales circunstancias se podía usar el algoritmo de cálculo de la media aritmética, pues, cuando se les presentó una situación concreta no sabían cómo utilizar aquel

instrumento, quizás, porque no sabían cómo determinar los distintos elementos que integran la fórmula de cálculo de la media, una dificultad ya apuntada por Pollatsek, Lima y Well (1981).

En la tabla 4.30 ofrecemos informaciones relativas al cruce de resultados en los problemas "Familia, 6.a)" (en fila) e "3. Hijos por Familia" (en columna), en el primer estudio.

		Problema 3 "Hijos por Familia"					
		FAMADUL	MED	MODA	SC	STOTAL	Total
Problema Familia, 6.a)	DINCOR	0	0	2	0	2	4
	DSOPER	1	2	10	0	8	21
	DSTOTAL	0	0	20	0	6	26
	NC	1	2	14	0	14	31
	SC	1	1	6	1	3	12
	Total	3	5	52	1	33	94

Tabla 4.30. Cruce de resultados del **problema de respuesta abierta** "Familia 6.a)" (en filas) y del **problema de respuesta de elección múltiple** "3. Hijos por Familia" (en columnas).

Hay 33 (35%) alumnos que contestan correctamente en el problema de respuesta de elección múltiple (STOTAL, en columna), mientras que para el problema de respuesta abierta, 47 (50%) alumnos determinan de forma correcta la solución pedida (DSOPER y DSTOTAL, en filas). Aunque la búsqueda de la solución correcta de los dos ítems se apoya en la misma estrategia (inversión del algoritmo de cálculo de la media), los datos señalan que, de los 33 alumnos que eligieron la respuesta correcta en el problema de elección múltiple, sólo 14 (42%) han sido capaces de resolver el problema de respuesta abierta (intersección con DSOPER y DSTOTAL, en filas), mientras que los otros 19 (58%) presentaron varias dificultades: 14 (42%) no contestaron (NC), 2 alumnos dieron una distribución que no cumple los requisitos del enunciado (DINCOR) y 3 presentaron transformaciones algebraicas incoherentes (SC).

De los 47 alumnos que contestaron correctamente el problema de respuesta abierta, es destacable que 30 (64%) parecen haber confundido la media con la moda, ya que prefieren el distractor que se relacionaba con este concepto en el problema de elección múltiple (MODA).

Los datos referentes al segundo estudio, se muestran en la tabla 4.31 que se muestra a continuación.

	Problema 3 "Hijos por Familia"							
Problema Familia, 6.a)	FAMADUL	MED	MED>	MODA	NC	SC	STOTAL	Total
DSTOTAL	0	0	0	1	0	0	4	5
HDEC	0	1	1	0	0	0	0	2
NC	16	13	10	39	2	2	34	116
SC	1	3	1	10	0	0	3	18
ST-SDIST	1	0	0	1	0	0	3	5
Total	18	17	12	51	2	2	44	146

Tabla 4.31. Cruce de resultados del **problema de respuesta abierta** (en filas) "6. a) Familia" y del **problema de respuesta de elección múltiple** (en columnas) "3. Hijos por familia", referente al segundo estudio.

Podemos ver, que 44 alumnos (30'1%) indican la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple (STOTAL, en columna), mientras que en el problema de respuesta abierta sólo 5 (3'4%) alumnos determinan correctamente la respuesta deseada (DSTOTAL, en fila).

El cruce de resultado nos indica que de los 44 alumnos que, seleccionaron la opción correcta en el problema de respuesta de elección múltiple, sólo 4 (9'1%) alumnos fueron capaces de encontrar la solución correcta en el problema de respuesta abierta (intersección con DSTOTAL). El resto (90'9%), no proporciona vías adecuadas de cómo encontrar la solución en el problema de respuesta abierta, conforme ilustran los datos, e incluso la mayoria de los mismos (77'3%) no contesta (intersección con NC).

Sin embargo, vemos que casi todos los alumnos que contestaron al problema de respuesta abierta, también han indicado la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple.

Nos sorprende grandemente, el hecho de que la mayor parte de los alumnos que identificaron la opción correcta en el problema de respuesta de elección múltiple ni siquiera hayan podido indicar los pasos iniciales para resolver el problema de respuesta abierta, a pesar de que la metodología de solución de los dos problemas tiene la misma base. Esto nos hace pensar que los alumnos no utilizan ningún criterio al seleccionar la respuesta correcta.

El uso de la estrategia de invertir el algoritmo de cálculo de la media, es un paso fundamental para resolver los dos ítems. Como se indica en Watson y Moritz (2000), este procedimiento ha constituido el camino adecuado para el éxito, en la resolución de un problema similar, al estudiar el significado intuitivo dado por los niños al término

promedio. Pero en particular, para nuestro problema de respuesta abierta, era crucial también que los alumnos comprendieran la idea de distribución y de media como reparto equitativo, aparte de conocer el algoritmo de cálculo, tal como se explica en Cobo y Batanero (2004a). Cabe señalar también que el problema de respuesta abierta tiene otra dificultad añadida, puesto que los alumnos no pueden utilizar números decimales como datos, al construir la distribución, dado que la variable es discreta. Quizás, por todo esto, la mayor parte de los alumnos haya encontrado estas dificultades mostradas al resolver el problema de respuesta abierta.

Por último, vamos a presentar el cruce de resultados para los ítems "Gráfico de Notas, 5.A. b) (en filas)", y "Gráfico de Notas 5.B" (en columnas).

En la tabla 4.32 mostramos los resultados relativos al primer estudio.

		Problema "Grafico de notas, 5.B"						
Problema "Gráfico de notas, 5.A.b)"		IGUMEDIA	MHOMO	MNOTA	N<4	NC	SC	Total
	IGUMEDIA	13	1	0	0	0	0	14
	MHOMO	0	6	0	0	0	1	7
	MNOTA	2	1	4	0	0	0	7
	N<4	0	1	0	1	0	0	2
	NAPROB	5	14	1	14	3	6	43
	NC	1	6	0	0	0	1	8
	NJUST	0	1	1	0	0	0	2
	SC	2	6	2	1	0	0	11
	Total	23	36	8	16	3	8	94

Tabla 4.32. Cruce de resultados del **problema de respuesta abierta** "Gráfica de Notas 5.A. b)" (en filas) y del **problema de respuesta de elección múltiple** "Gráfica de Notas 5.B" (en columnas), referente al primer estudio.

La tabla, muestra que 36 (38%) alumnos señalaron la justificación correcta en el problema de respuesta de elección múltiple (MHOMO, en columna), cuya opción se refería a la homogeneidad e indicaba la necesidad de tener en cuenta la dispersión de los datos al comparar grupos de medias iguales. Respecto al problema de respuesta abierta, encontramos solamente 7 (7%) alumnos que presentaron la justificación correcta (MHOMO, en fila), considerando el mismo criterio. Ahora bien, de los 36 alumnos que eligieron la opción correcta en el problema de elección múltiple, 30 (83%) han utilizado argumentos incorrectos en el ítem de respuesta abierta, es decir, sólo 6 (17%) alumnos presentaron argumentos aceptables. La justificación infundada que más ha sobresalido es la que toma como criterio de comparación, la existencia de más aprobados (NAPROB), presentada por el 39% (14) de aquellos alumnos. Encontramos también 6 (17%) alumnos que no contestan (NC), otros 6 (17%) que presentan justificaciones

confusas (SC), 1 dice que no hay diferencias entre los grupos porque las medias son iguales (IGUMEDIA) y 2 que miran sólo a los máximos o mínimos de la distribución (MNOTA y N<4).

Con relación a los alumnos que justificaron correctamente el problema de respuesta abierta, los datos indican que prácticamente todos también acertaron el problema de respuesta de elección múltiple, excepto 1 (SC).

Los resultados encontrados en el segundo estudio fueron parecidos a los anteriores, como se muestra en tabla 4.33.

		Problema "Grafico de notas, 5.B"						
		IGUMEDIA	MHOMO	MNOTA	NAPROB	NC	SC	Total
Problema "Gráfico de notas, 5.A.b)"	IGUMEDIA	16	2	0	0	0	0	18
	MHOMO	0	6	0	2	0	0	8
	MNOTA	2	3	6	1	0	1	13
	NAPROB	3	11	0	16	0	0	30
	NC	0	1	0	1	0	0	2
	NJUST	13	21	8	5	5	2	54
	SC	6	8	3	3	1	0	21
	Total	40	52	17	28	6	3	146

Tabla 4.33. Cruce de resultados del **problema de respuesta abierta** "Gráfica de Notas 5.A. b)" (en filas) y del **problema de respuesta de elección múltiple** "Gráfica de Notas 5.B" (en columnas), referente al segundo estudio.

De los 52 alumnos (35'6%) que seleccionan la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple (MHOMO, en columna), el 88'5% (46) no había justificado adecuadamente el problema abierto. Sólo 6 (11'5%) de ellos, se basaron en la concentración de los datos alrededor de la media (intersección con la categoría MHOMO, en fila), al argumentar el problema de respuesta abierta.

Los datos muestran que el 40'4% (21) de aquellos no justifica (NJUST), el 21'2% (11) sustenta sus justificaciones en la existencia de más aprobados (NAPROB), el 5'8% (3) justifica teniendo en consideración las notas altas en uno de los grupos (MNOTA), 2 alumnos no encuentran diferencias entre los dos grupos porque las medias son iguales (IGUMEDIA), y 9 que dan justificaciones confusas o no contestan (SC y NC).

El cruce de resultados nos hace entrever que algunos alumnos que seleccionaron la respuesta correcta en el problema de elección múltiple, lo hicieron sin tener en cuenta una base formal. Algunos, se muestran inconsecuentes, pues, tras elegir la opción correcta en este tipo de problema, no se dignaron en rectificar las justificaciones

erróneas que habían dado en el problema de respuesta abierta, presentando de esta forma una dualidad de criterios para una misma situación.

Las dificultades relativas a la comparación de muestras, en donde los alumnos se limitan a analizar sólo una parte de la distribución o a los valores máximos o mínimos también han sido encontradas en Batanero, Godino y Navas (1997) y Estepa y Sánchez (1996). Según se interpreta en Estepa y Sánchez (1996), tales dificultades se deben al hecho de que los alumnos tienen una concepción local de asociación entre variables, creyendo que éste es el análisis para explicar las diferencias entre dos muestras.

En resumen, nuestro análisis ha permitido observar que muchos alumnos que eligieron la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple no han sido capaces de indicar vías razonables al resolver un problema de respuesta abierta. Las acciones de los alumnos en los problemas de respuesta abierta, en aquellos que han elegido la respuesta correcta en los problemas de respuesta de elección múltiple, sugieren que éstos han seleccionado dichas respuestas sin criterio. Como se ve en los resultados, en algunos casos, los alumnos ni siquiera dan pasos con sentido al resolver un problema de respuesta abierta. Otro dato de referencia es que algunos alumnos ni siquiera se han acordado de cambiar la justificación errónea presentada en el problema de respuesta abierta, tras elegir la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple.

4.4. CONCLUSIONES SOBRE LA FASE EXPLORATORIA

En este apartado, presentaremos de forma sucinta las conclusiones más relevantes sobre la fase exploratoria, respecto a la comprensión de la media aritmética, en el alumnado.

De igual forma, analizaremos algunos aspectos relativos al instrumento utilizado para la recogida de dato, así como algunas situaciones relacionadas a las diferentes metodologías de enseñanza, y sus posibles influencias en los resultados encontrados.

Como se ha descrito anteriormente, el objetivo fundamental, en la fase exploratoria fue, por un lado, desarrollar un cuestionario de evaluación de conocimientos sobre la media aritmética, que permitiese detectar las dificultades y errores del alumnado en la comprensión de este concepto, y por otro lado, presentar algunos resultados en un estudio comparativo con alumnos de dos muestras en contextos socio-culturales distintos.

A tal efecto, primeramente se realizó un análisis con una muestra de alumnos de bachillerato, en Tenerife y, posteriormente se llevó a cabo el segundo estudio, con un grupo de alumnos en Luanda (Angola), de un nivel de enseñanza similar a la primera muestra.

Con respecto al primer objetivo, la investigación se encaminó en aquella dirección, habiéndose construido el referido instrumento. El análisis de contenido mostró que el cuestionario es heterogéneo en lo referente a la variabilidad de los contenidos evaluados, lo que permite evaluar diferentes aspectos sobre la media aritmética. Las diferencias en las realidades socio-culturales nos han obligado a introducir modificaciones/adaptaciones al cuestionario antes de administrar la prueba, adecuándolo de esta manera, al contexto real del alumno.

Algunos problemas han resultado menos asequibles para los alumnos, como por ejemplo, el problema que se enmarca en la componente de argumentación y justificación, donde los alumnos tienen que emitir juicios en la comparación de dos conjuntos de datos, presentados gráficamente; los problemas de ponderación, donde es necesario distinguir los valores de la frecuencia de los valores de la variable para determinar la media; los problemas de construcción, así como la cuestión en la que la media se ve como mejor estimador de una cantidad desconocida. En nuestro modo de entender, éstas son algunas de las situaciones que deberían merecer mayor atención en los currículos de enseñanza.

En cuanto a los coeficientes de fiabilidad hemos encontrado valores moderados, que reflejan la poca correlación entre los ítems del cuestionario. Alfa disminuye moderadamente al disminuir las similitudes de los ítems, como se explica en Muñiz (1994).

Sin embargo, pensamos que para explorar con más detalle algunos aspectos inherentes a la comprensión de éstos contenidos, es imprescindible incorporar más ítems de respuesta abierta, principalmente en lo que se refiere a problemas de estimación de un valor desconocido, a los valores atípicos y al uso de los valores nulos en el cálculo de la media. Las preguntas de tipo abierto, como se indica en Cobo y Batanero (2004a), no se limitan a dos opciones (correctas /incorrectas). Permiten que los alumnos las razonen, y dan libertad a emplear los diferentes elementos de significado del concepto.

A pesar de que este tipo de preguntas resulten más laboriosas para el investigador, por tener que conformar un sistema de categorías para el tratamiento de la información, aportan muchos más datos sobre la forma en que los alumnos interactúan con los problemas que se les presentan. También proporcionan diferentes estrategias y procedimientos, y ayudan a distinguir los distintos errores que se cometen en el proceso de resolución de un problema dado, incluso permiten constatar dificultades que no están directamente relacionadas con el objeto a investigar, como por ejemplo los problemas con el cálculo, y sobre todo, nos ayudan a analizar si los alumnos contestan el problema con criterio o no.

Respecto al segundo objetivo, el estudio aporta un conjunto de informaciones sobre la existencia de dificultades en las dos muestras, la falta de capacidad de interpretación de algunas situaciones, así como la presencia de errores diversos en la resolución de determinados problemas.

En cada problema, los resultados han sido discutidos tomando como referencia algunos estudios anteriores y se ha establecido un análisis comparativo entre las dos muestras.

Nuestro estudio confirma algunos de los antecedentes de investigación en este campo, constatando dificultades y errores de conceptualización de la media aritmética, uso incorrecto del algoritmo de cálculo, problemas de interpretación, uso incorrecto de algunas propiedades de la media aritmética e incluso errores de cálculo. A modo de resumen, destacamos específicamente lo siguiente:

- Los alumnos no observan el efecto del valor atípico en el cálculo de la media y algunos ni si quiera comprenden las circunstancias en que se debe o no descartar. Los resultados obtenidos en el problema 1 “Pesos” y en el problema 2 “En una clase” confirman esta conclusión. En el primer caso, constatamos un 53’2% de respuestas incorrectas en la muestra del primer estudio y un abrumador 93’8% en la muestra del segundo estudio.
- Confunden el concepto de media aritmética con la moda o mediana y encuentran distintas dificultades en determinar la posición relativa de estas medidas en distribuciones no simétricas. Por ejemplo, verificamos en el problema 3 “Hijos por familia”, un 55’3% de alumnos del primer estudio que eligen la moda en el lugar de la media, frente a un 34’9% de alumnos del segundo estudio.
- No aprecian el efecto del valor nulo en el cálculo de la media. Al respecto encontramos un 30’9% de alumnos que piensan de esta manera en el grupo del

primer estudio, mientras que en el segundo encontramos un 26%, al contestar el problema 2 ("En una clase").

- Dificultades en la comprensión adecuada del algoritmo de cálculo, en situaciones donde hay necesidad de invertirlo para hallar la suma total. Con respecto a eso, el problema 3 ("Hijos por familia") nos ha permitido observar un 64'9% de alumnos con esta dificultad en el primer estudio, frente a un 69'9% de alumnos en el segundo estudio.
- Errores diversos en el cálculo de la media ponderada, calculando la media de los valores de la frecuencia o de los valores de la variable. Dificultades en diferenciar los valores de la frecuencia de los valores de la variable, y en determinar la suma total. Aún cuando plantean correctamente el algoritmo de cálculo, algunos no son capaces de ubicar correctamente los distintos elementos integrantes de la fórmula de cálculo. Estas dificultades son confirmadas por los resultados obtenidos en el problema 4 ("Hijos") donde notamos un 66% de respuestas incorrectas en la primera muestra frente a un llamativo 97'3% en la segunda.
- Presentación de argumentos infundados para justificar la diferencia entre dos muestras, dadas gráficamente, con medias iguales y con cierta apariencia visual. Los resultados encontrados en el ítem 5. A.b) ilustran claramente esta afirmación, en donde se nota un 92'6% de justificaciones inconsistentes en la muestra de Tenerife y un 94'5% de justificaciones de este tipo en la muestra de Luanda.
- Dificultades en determinar un conjunto de datos, cuando se conoce la media y el total de datos, o bajo las mismas condiciones se pide completarlo, cuando son conocidos algunos datos. Los resultados encontrados en los problemas 6 y 7, "Familia" y "Supermercado" respectivamente, muestran visiblemente este hecho, aunque con mucho más evidencia en el estudio realizado con la segunda muestra.

El análisis sobre las actuaciones de los alumnos en los problemas de respuesta abierta, en aquellos que han elegido las respuestas correctas en los problemas de respuesta de elección múltiple, ha sugerido que estos alumnos seleccionaron dichas respuestas sin criterio. Los resultados han mostrado que incluso, en algunos casos la mayor parte de aquellos, no ha podido dar los primeros pasos para resolver el problema de respuesta abierta, a pesar de que la solución del mismo problema requería la misma estrategia que se supone deberían utilizar antes de elegir la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple. Asimismo, se ha observado que algunos

alumnos ni siquiera se han acordado de cambiar la justificación errónea presentada en el problema de respuesta abierta, tras elegir la respuesta correcta en el problema de respuesta de elección múltiple.

El cruce de resultados reveló además, las incoherencias en las actuaciones de los alumnos que señalan las respuestas correctas en los problemas de respuesta de elección múltiple y que no son capaces de resolver un problema de respuesta abierta relacionado o viceversa. Se ha visto que, en general, son inconsecuentes en sus afirmaciones, ya que para una misma situación presentan dualidad de criterios.

En definitiva, los resultados en el estudio comparativo han mostrado que los alumnos que participaron en el segundo estudio (muestra de Luanda), tuvieron muchas más dificultades que sus homólogos (muestra de Tenerife) en todas las preguntas. No hemos podido indagar con detalle sobre los orígenes de estas dificultades, pero de las informaciones verbales que nos proporcionaron algunos profesores y alumnos en el momento en que se administró el cuestionario, conjeturamos (para el alumnado de Luanda) que hay falta de aplicación y poco interés en el aprendizaje por parte del alumnado. Raras veces realizan las actividades complementarias que les son propuestas, algo que les podría ayudar a comprender mejor los contenidos abordados en las clases y profundizar sobre los mismos.

Por otro lado, nos dimos cuenta de la existencia de factores de carácter metodológico, que apuntaban a que las tareas presentadas por los profesores en las clases, en general, se centraban en calcular la media de un conjunto de números, sin que se presentase un contexto de referencia e incluso no eran abordadas las propiedades de la media.

En general, los resultados muestran la necesidad de mejorar la enseñanza de estos contenidos en este y otros niveles, dedicando más espacio a los problemas no rutinarios, para ayudar en la comprensión e interpretación profunda y adecuada del concepto de la media aritmética.

CAPÍTULO 5

EL PRIMER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACION

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo exponemos los datos relacionados con el primer estudio desarrollado tras la fase exploratoria. Como ya hemos comentado, los estudios de la fase exploratoria fueron realizados como parte de la actividad programada en la fase de investigación del curso de doctorado, cumpliendo con la normativa establecida por la universidad, para la obtención de los créditos exigibles en esta fase. La investigación realizada en aquel momento, nos motivó para seguir trabajando en la misma línea, puesto que los resultados encontrados con una de las poblaciones de estudio (alumnos de Luanda) se revelaron de interés, por los diferentes tipos de dificultades identificados en estos alumnos, que mostraban una escasa comprensión del concepto de media aritmética.

Por otro lado, el instrumento desarrollado para la recogida de información mostró algunas limitaciones. Requería de una ampliación y mejora, para así profundizar en las informaciones relativas a algunos elementos de la investigación.

Como consecuencia, nos proponemos profundizar en los resultados previos obtenidos, llevando a cabo un análisis cognitivo más amplio, a través de un estudio general.

Los estudios de la fase general preveían dar respuestas a las siguientes preguntas, respecto a la enseñanza y aprendizaje del concepto de media aritmética:

- ¿Cómo concibe el alumnado el concepto de la media aritmética?
- ¿Con qué entidades relaciona el alumnado este concepto?
- ¿Qué niveles de comprensión predominan, de acuerdo con la tarea que se presenta?
- ¿Existe relación entre las dificultades presentadas por el alumnado de secundaria en Luanda y las presentadas por los profesores en formación en aquella localidad?

- ¿Qué estrategias utiliza el alumnado en la resolución de problemas de media aritmética (simple o ponderada)?
- ¿Cómo construyen o completan una distribución de datos de media conocida?;
- ¿Cuáles son los orígenes de las dificultades y errores que cometen los estudiantes en la resolución de problemas sobre la media aritmética?
- ¿Es posible desarrollar un instrumento de medida que permita detectar los diferentes comportamientos de los alumnos al resolver problemas relativos a la media aritmética?
- ¿Los estudiantes que aciertan en los problemas de respuesta de elección múltiple, realizan acciones razonables en problemas de respuesta abierta?
- ¿Son convincentes sus acciones?, es decir, ¿señalan de manera fundamentada las respuestas correctas en los problemas de respuesta de elección múltiple?
- ¿El desarrollo de una enseñanza en la que el alumno participa activamente en la construcción del conocimiento, resolviendo tareas que muestran ejemplos de la vida real, produciría cambios en el modo de pensar y de apropiación de conocimientos en nuestros sujetos?

Responder a estas preguntas implica desarrollar un estudio en las dimensiones cognitiva y didáctica. Para ello, formulamos los siguientes objetivos:

- *Objetivo 1*: Profundizar en el análisis de los aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual sobre la media aritmética que posee el alumnado.
- *Objetivo 2*: Profundizar en el análisis de las estrategias que utiliza el alunado en la resolución de problemas que involucran el concepto de media aritmética.
- *Objetivo 3*: Profundizar en el análisis del origen de las dificultades y errores que comete el alumnado respecto de la media aritmética.
- *Objetivo 4*: Diseñar una prueba de evaluación de conocimiento, sobre la media aritmética, que contemple diferentes elementos relacionados con la comprensión de este concepto.
- *Objetivo 5*: Desarrollar una propuesta de enseñanza de la media aritmética, que facilite el aprendizaje de este concepto.

La fase general fue subdividida en tres estudios. El primer estudio, consistió en obtener datos con la aplicación de un cuestionario. El análisis de las respuestas de los alumnos proporcionó diferentes interpretaciones, que constituyen nuestras conjeturas sobre cómo comprenden los contenidos evaluados. En el segundo estudio, profundizamos en algunas cuestiones derivadas del primer estudio, realizando entrevistas semiestructuradas con un grupo de alumnos. El tercer estudio, consistió en el desarrollo de un experimento de enseñanza sobre la media aritmética, cuya descripción se materializa en una propuesta de guía didáctica para la instrucción de este concepto.

A continuación, describiremos de forma detallada el primer estudio de la fase general de investigación. Presentaremos, fundamentalmente, datos referentes a la metodología de trabajo, resultados encontrados y análisis colaterales, de acuerdo con los objetivos formulados.

5.2. PRIMER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN

En esta fase, exponemos diferentes elementos del estudio de la dimensión cognitiva con nuestros alumnos, evidenciando la puesta en escena de los objetivos 1, 2 y 4, señalados en la introducción de este capítulo.

Para situarnos adecuadamente en este estudio, empezaremos por matizar los datos relacionados con la metodología.

5.2.1. METODOLOGÍA

5.2.1.1. MUESTRA

La población de estudio, en esta fase, la constituyó un conjunto de 227 alumnos de enseñanza secundaria y universitaria de Luanda.

La muestra de secundaria estaba compuesta por 130 estudiantes del subsistema de enseñanza técnico-profesional, que frecuentaban la formación media-técnica en áreas de contabilidad y administración pública. Este tipo de formación se realiza después de que el alumno ha concluido el primer ciclo de la enseñanza secundaria y, por lo general, comporta cuatro cursos. La misma, tiene como objetivo proporcionar a los alumnos conocimientos generales y técnicos para las diferentes ramas de actividad económica y social, para su inserción en la vida laboral y acceder también a la enseñaza superior. De los 130 alumnos de secundaria, 72 alumnos eran de una escuela pública, llamada

Instituto Medio de Economía de Luanda-IMEL, que pertenecían al tercer curso, y 58 eran de una escuela privada afín, que pertenecían también al tercer curso. Los alumnos de la institución pública, recibieron los contenidos de estadística en una asignatura de formación específica, denominada Técnicas de Cálculo y Estadística, como resultado de la reforma curricular que se estaba desarrollando. En la institución privada, la reforma aún no había alcanzado los últimos cursos, por lo que se impartía la estadística como asignatura independiente, según el currículo anterior.

Los alumnos universitarios, en total eran 97 estudiantes, de los cuales 31 recibían formación para profesores de matemática en primaria y secundaria, y 66 cursaban la especialidad de pedagogía. Estos últimos se encontraban en el tercer curso, mientras que los de matemática[2], 14 se encontraban en el cuarto curso y 17 el quinto, y último, curso de la carrera.

Los alumnos de la especialidad de pedagogía estudiaron la asignatura de estadística descriptiva en el curso anterior. En el currículo de matemática no se contempla la asignatura de estadística descriptiva, pero sí, la de estadística inferencial, que es impartida en el tercer curso.

Los datos generales relativos a la población de estudio se recogen en la tabla 5.1.

Niveles de enseñanza	Alumnos		**Total**
	Hombres	Mujeres	
Secundaria	54	76	**130**
Universitario	45	52	**97**
Total	**99**	**128**	**227**

Tabla 5.1. Alumnos participantes en el primer estudio de la fase general de investigación

5.2.1.2. INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

Dada la amplitud de las cuestiones que nos proponíamos investigar en esta fase, era necesario desarrollar un instrumento que permitiese recoger datos que se correspondiesen con los objetivos y preguntas de investigación formuladas.

Partiendo del hecho de que utilizando un cuestionario de evaluación era posible obtener una estimación de los conocimientos y capacidades que los alumnos poseen con respecto a un contenido determinado, encaminamos nuestros esfuerzo a adaptar los instrumentos utilizados en la fase exploratoria a la nueva etapa, para así evaluar los

[2] La carrera de formación de profesores de matemática, en el Instituto Superior de Ciencias de Educación, prevé una duración de 5 cursos académicos. Sin embargo, el programa de reforma que se está aplicando, establece un máximo de 4 cursos para todas las especialidades en este nivel de enseñanza.

significados personales que nuestros estudiantes asignaban a la media aritmética. Los cuestionarios utilizados en la fase exploratoria, fueron mejorados, modificados y ampliados, en concordancia con las nuevas exigencias.

Para la fase general, cambiamos las denominaciones de algunos problemas. También, introdujimos dos problemas, con la finalidad de ampliar el análisis de las propiedades de la media aritmética. De este modo, el nuevo cuestionario consiste de nueve problemas. Algunos de ellos tienen apartados y en total completan 13 ítems.

Nuestro objetivo, en este sentido, no era simplemente buscar un conjunto de ítems, sino garantizar la validez de contenido, es decir, garantizar que los ítems constituyesen una muestra adecuada de los contenidos.

Los ítems del cuestionario elaborado, evalúan diferentes elementos de significado sobre la comprensión de un concepto estadístico. No se restringen simplemente a examinar el conocimiento de las propiedades o el uso del algoritmo de la media aritmética. Evalúan distintos componentes de significado de este concepto, según lo expresado en Batanero y Godino (2001a), cuya teoría, constituyó uno de nuestros marcos de referencia para construir el instrumento de recogida de datos.

Tal como se describió en el capítulo sobre marcos teóricos, estos autores, distinguen cinco componentes, interrelacionados, en el significado del concepto:

- *Problemas y situaciones* que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge el concepto.
- *Procedimientos, algoritmos, operaciones*, que constituyen los distintos tipos de prácticas que un sujeto realiza, cuando se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, que pueden manifestarse con el uso de algoritmos específicos, la elaboración de una tabla de frecuencias, la ordenación de datos o la realización de una representación gráfica de los datos.
- *Representaciones* ostensivas, que tienen una función semiótica y también una función instrumental, como los números, términos expresiones, símbolos, gráficos, tablas.
- *La definición del concepto, sus propiedades y relaciones*.
- *Los argumentos y la comprobación* que empleamos para convencer a los demás de la validez de las soluciones de nuestros problemas o la veracidad de las propiedades relacionadas con los conceptos.

Obviamente, no se evalúan todos los elementos de significado en cada uno de los problemas del cuestionario. Los aspectos fueron presentados de manera que el cuestionario abarcase diversas áreas de contenido consideradas importantes y/o imprescindibles y asegurándose de que se reflejan en proporción adecuada. Esta apreciación se verá con más detalle cuando analizaremos los diversos contenidos expresados en cada ítem.

5.2.1.3. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO DESARROLLADO PARA LA FASE GENERAL

En este apartado, describimos las características del cuestionario utilizado en el estudio de la comprensión de la media aritmética, en su fase general. Explicamos los objetivos de cada problema, el origen del mismo y las modificaciones efectuadas, en los casos en que hayan existido.

Cabe mencionar, que el cuestionario, como un instrumento de medición, proporciona una estimación de conocimientos y capacidades de los sujetos, a través de las preguntas que se proponen a los encuestados. Estos conocimientos y capacidades no son accesibles por simple observación o encuesta (Dane, 1990, Barbero, 2003). De este modo, al tratar de evaluar la comprensión de la media aritmética, se tuvo en cuenta que es un constructo inobservable (León y Montero, 2002), por lo que sus características deben ser inferidas de las respuestas de los alumnos.

En la clasificación de objetivos en la construcción de cuestionarios realizada por Millman y Greene (1989), esta investigación se sitúa en un *dominio curricular*, por tanto, partimos de un análisis sistemático del concepto, contemplado sus diferentes matices. El instrumento de medida puede aplicarse a diferentes poblaciones de alumnos. En nuestro caso, nos centramos en los alumnos de secundaria y universidad, estos últimos del curso de formación de profesores, en las especialidades de matemática y pedagogía, para poder recoger datos relacionados con los objetivos establecidos en nuestro trabajo, y sugerir recomendaciones didácticas a partir de los resultados obtenidos.

El instrumento se realiza para tomar decisiones sobre la ejecución de los estudiantes con respecto a la media aritmética. Las interpretaciones de las respuestas dictarán lo que los alumnos son capaces de hacer, y así poder realizar sugerencias que ayuden a proporcionar una enseñanza adecuada de estos contenidos.

Como referimos anteriormente, el cuestionario lo constituyen nueve problemas sobre diversos aspectos de la media aritmética, algunos de ellos con apartados, y que

hacen un total de 13 ítems. La presentación de dos tipos de problemas, es decir, problemas de respuesta abierta y problemas de respuesta de elección múltiple, ha sido intencional. El propósito es contrastar las respuestas de los alumnos en dos problemas relacionados.

Los problemas se denominan atendiendo a los contextos a los que refieren y a continuación de cada uno de ellos se presenta una descripción de las características y esencia. Los problemas que conforman el cuestionario son los siguientes:

Problema 1. "Tiempo recorrido en los 100 metros"

A petición del profesor de educación física, 10 alumnos registraron de forma independiente y simultáneamente, el tiempo recorrido por un estudiante en la distancia de los 100 m. Los tiempos registrados (en segundos) fueron los siguientes:

15'05; 14'95; 15'05; 15; 10; 15; 14'90; 15; 14'95; 15;

¿Qué tiempo debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y por qué?

El problema surge para dar respuesta a nuestra intención de introducir una pregunta de respuesta abierta, que nos permitiese evaluar, si realmente, los alumnos son capaces de reconocer un valor atípico y apreciar su efecto en el cálculo de la media.

En el cuestionario administrado en la fase exploratoria, identificamos que algunos alumnos indicaban la opción relacionada con descartar el dato que se desmarcaba del conjunto de los demás valores, en un problema similar de respuesta de elección múltiple. Este comportamiento nos ha hecho reflexionar sobre si efectivamente aquellos alumnos habían actuado con criterio. Por ello, pensamos en desarrollar un problema de respuestas abierta relacionado, para estudiar cómo actuarían los estudiantes en circunstancias idénticas, ya que la naturaleza de este tipo de problema, exige que el alumno razone, obligándole a revelar vías que reflejan el significado que él mismo tiene al respecto.

En el conjunto de datos del problema, se introduce un valor atípico, 10 segundos, que debe ser descartado antes de efectuar el cálculo de la media aritmética, dado que afectaría al cálculo e introduciría un sesgo en la estimación. En este sentido, se pretende averiguar si el alumno reconoce que dicho valor se presenta como un dato extraño en el conjunto dado, esperando que se cuestione por qué en una medición realizada de forma simultánea, sólo éste valor se aleja considerablemente de los restantes, si los demás se encuentran en un entorno cercano. Se presume entonces que el

registro 10 segundos fue obtenido erróneamente. Lo más probable es que el alumno que registró este tiempo, hubiera activado el botón del cronometro tardíamente.

Evidentemente, si los estudiantes están familiarizados con los valores atípicos, y saben en qué contexto deben ser excluidos en el cálculo de la media aritmética, se espera que, en este tipo de problema, descarten estos valores, al calcular la media aritmética, puesto que el contexto referido así lo requiere.

La tarea se enmarca en el conjunto de problemas y situaciones que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge el concepto (Batanero y Godino; 2001a). Con la misma, se pretende evaluar el uso de la media como mejor estimador de un valor desconocido, en presencia de errores de medición, la influencia de los valores atípicos en el cálculo de la media, así como la posible confusión en los alumnos entre la media y otras medidas de tendencia central.

Problema 2. "En una clase de ciencia"

Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6'2	*6'0*	*6'0*	*15'3*	*6'1*	*6'3*	*6'2*	*6'15*	*6'2*

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías?

(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

a. Usar el número más repetido, que es 6'2.

b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.

c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.

d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.

Este problema lo hemos utilizado en la fase exploratoria, con la denominación de problema "Pesos". Le hemos cambiado el nombre, porque queríamos especificar las circunstancias en que se realiza la actividad. La otra alteración efectuada fue en la opción a), dado que en la fase exploratoria la redacción era "*usar el número más común, que es el 6'2*". Entendemos que la expresión "*numero más repetido*" era mucho más explicita y comprensible que decir "*numero más común*".

La descripción de este problema se ha realizado en el capítulo sobre la fase exploratoria, en la que indicamos las diferentes modificaciones aplicadas desde que se

extrajo del trabajo de Garfield (2003), sus objetivos y los significados que se atribuyen a cada uno de los distractores.

Igual que en el problema anterior, lo que se pretende aquí es que los alumnos encuentren la mejor estimación del verdadero valor del peso de un objeto, que ha sido medido con un mismo instrumento, obteniendo una serie de medidas. Se trata, por tanto, de usar la media como mejor estimador de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida, además de evaluar la diferencia entre el simple conocimiento algorítmico de la fórmula de cálculo y la comprensión relacional del concepto de media aritmética.

Este problema es uno de los ítems utilizado y descrito, también, en los trabajos de Batanero, Godino y Navas (1997) y Estrada (2002), y su inclusión en este cuestionario era trascendental, pues es con él que se desea contrastar las diferentes actuaciones de los alumnos, referidas en el problema anterior.

Recordemos que la opción correcta es la d), que sugiere desechar el valor atípico antes de calcular la media.

Problema 3. "Número de preguntas"

Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación.

	Nombre de los alumnos							
	Juan	*Lucía*	*Alberto*	*Ana*	*Pedro*	*María*	*Luis*	*Clara*
Nº de preguntas	*0*	*5*	*2*	*22*	*3*	*2*	*1*	*2*

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomendarías?

(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

a. Usar el número más repetido, que es el 2.

b. Sumar los 8 números y dividir por 8.

c. Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

d. Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

La descripción de este problema también se puede ver en el capítulo sobre la fase exploratoria, en el apartado donde detallamos el instrumento de recogida de datos. El problema tenía la denominación "En una clase". En este caso cambiamos su

denominación porque podía confundirse con el problema anterior, ya que la actividad reseñada también se desarrollaba en una clase.

Igual que en el problema anterior, la redacción de la opción *a*), que era "*usar el número más común, que es el 2*", también fue alterada, por las mismas razones ya descritas.

El objetivo del mismo, es evaluar el uso del algoritmo de cálculo, en un contexto donde no hay errores posibles en la medición de una cantidad. Se plantea una situación en que se busca un valor representante de un conjunto de valores, es decir, el número típico de preguntas que hicieron los alumnos. Se examina, asimismo, la idea que poseen algunos alumnos, de que se debe descartar el cero en el cálculo de la media, la confusión entre la media y la moda, así como el reconocimiento de la circunstancia en que se debe o no descartar un valor atípico. La opción b) es la respuesta correcta, a diferencia de lo que ocurre en el problema 2.

Este problema, también fue utilizado en los trabajos de Batanero, Godino y Navas (1997) y Estrada (2002).

Problema 4. "Hijos por familia"

El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Si el promedio de niños por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo?

(marcar una sola de las siguientes respuestas)

_____*a. La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños.*

_____*b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.*

_____*c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.*

_____*d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.*

_____*e. El número más común de niños en una familia es 2.*

Como se ha descrito, el problema ayuda a evaluar la comprensión adecuada del algoritmo de cálculo de la media, la confusión de este concepto con otras medidas de posición central (mediana y moda), así como sus posiciones relativas en distribuciones asimétricas.

La solución correcta es la opción que dice "*hay un total de 110 niños en la ciudad*", que nos revelaría, que, probablemente, el alumno ha invertido el algoritmo de cálculo de la media aritmética para determinar la suma total, dado que se conoce la media y el total de datos. Esto mostraría que el alumno tiene una comprensión relacional del concepto.

La elección de la opción a) indicaría que el alumno confunde la media con la mediana. Evidentemente, la media y la mediana estarán más cerca si la distribución tiene una forma aproximadamente simétrica, sin embargo, en distribuciones asimétricas, la media se desplaza hacia la cola más larga.

La elección de la opción b) interpreta que el alumno no acepta que la media pueda ser un valor no entero. La idea de que la media de hijos es 2'2 le produce cierta confusión, por trabajar con una variable discreta. Entonces, redondeará por exceso este valor, considerando que hay más familias con 3 niños que con 2.

Si el alumno marca la opción d) interpretamos que ha confundido los términos "adultos" y "familias", mientras que si indica la opción e) concluimos que identifica la media con la moda.

Este problema lo encontramos también descrito en los estudios que mencionamos en los problemas anteriores.

Problema 5 "Hijos"

Hemos preguntado en Luanda a determinadas familias sobre el número de hijos que tenían y obtuvimos los siguientes datos:

10 familias no tenían hijos

7 familias tenían 1 hijo

5 familias tenían 2 hijos

3 familias tenían 3 hijos

No hubo ninguna familia con 4 o más hijos

¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

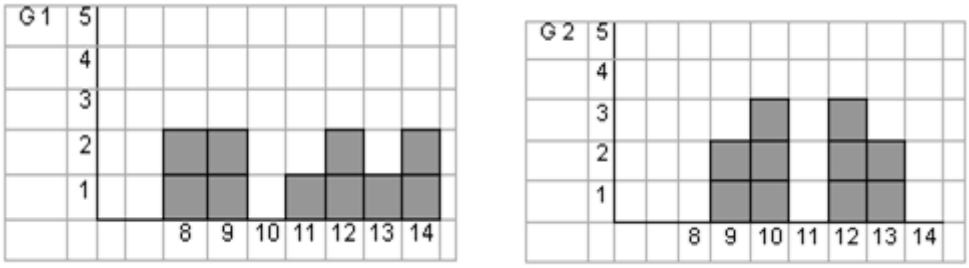
Algunos estudios que habíamos revisado nos habían sensibilizado de las diferentes dificultades que tenían los alumnos en el cálculo de la media ponderada (Pollatsek, Lima y Well, 1981; Li y Shen, 1992; Gatusso y Mary, 1998;). A pesar de los resultados constados en estos trabajos y en los estudios de nuestra fase exploratoria, queríamos seguir profundizando en la cuestión.

Con este problema, pretendemos examinar si los alumnos son capaces de distinguir los valores de la variable de sus frecuencias, comprobar si saben aplicar el algoritmo de la media ponderada, averiguar las estrategias que usan al hacerlo, así como analizar algunos aspectos conceptuales inherentes a la media aritmética: que la media puede ser un valor decimal; la media no tiene que ser exactamente un valor del conjunto de datos; la media está localizada entre los valores extremos; y que se debe tener en cuenta el cero en su cálculo.

En el problema, se presenta también un dato irrelevante (no hubo ninguna familia con 4 o más hijos), con él queríamos ver si los alumnos le concedían alguna importancia.

Problema 6. "Gráfico de notas"

Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de Matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:



Cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1, los dos rectángulos que aparecen sobre el número 14 indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron un 14.

6.A *El Grupo 1 tiene una nota media de 11.*

a) Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 11.

b) ¿Qué grupo te parece mejor? Justifícalo.

6.B *¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?*

a) El Grupo 1 es mejor que el Grupo 2 porque en el primero están los alumnos que obtuvieron más nota.

b) El Grupo 2 es mejor porque en el mismo hay más aprobados.

c) No hay diferencia entre los dos grupos, porque la media es la misma en ambos.

d) A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo.

e) Ninguna de las afirmaciones anteriores.

Como se describió en la fase exploratoria, este problema resultó de la adaptación de una de las tareas expuestas en Garfield (2003), Batanero et al. (1997) y Estrada (2002), que se refería a un estudio sobre el efecto del sueño. En nuestro caso, proporcionamos una situación completamente diferente, con dos partes que muestran, por un lado, dos ítems de respuesta abierta y por otro lado un ítem de respuesta de elección múltiple.

Se ha añadido la opción *e) "Ninguna de las afirmaciones anteriores"*, que no estaba en la fase exploratoria, pensando en que, algunos estudiantes pudieran presentar argumentos que no quedasen reflejados en las opciones sugeridas.

En el apartado a) de la primera parte del problema se evalúa una las destrezas requerida en el estudio de gráficos, que Curcio (1989) llama "leer los datos" y comprobar un conjunto de acciones llevadas a cabo para calcular la media aritmética. Con el segundo apartado, se evalúa otro nivel de comprensión en el estudio de gráficos, que Curcio denominó "leer dentro de los datos", tratando, en este caso, de identificar los criterios que utilizan los alumnos para comparar dos muestras de medias iguales, presentadas gráficamente, con cierta apariencia visual.

Aunque los objetivos de la segunda parte, eran análogos a los relacionados con el apartado 6.A.b), este apartado tenia un papel de realce, pues con él era posible averiguar la consistencia de los criterios de los alumnos, entre respuestas presentadas en ítems abiertos y en ítems de respuesta de elección múltiple.

Consideramos como argumentos correctos, aquellas respuestas que atendiesen a la concentración de los datos en torno de la media en el grupo 2, siendo esta, por tanto, la muestra más homogénea. Las reflexiones de Estepa y Sánchez (1996), García Cruz y Garrett (2006a, 2006b), han sido nuestras referencias para discutir sobre los criterios y las actuaciones de los estudiantes en este problema.

Problema 7. "Familia"

La composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas.

a) Indique 10 familias que cumplan este promedio.

b) Si los Pedalés son 5 en la casa y los Rodrigues son 2, ¿cómo podría ser la composición de cada una de las otras 8 familias?

El problema contempla dos apartados cuyo propósito es evaluar la comprensión adecuada del concepto de media aritmética. En el primer apartado, el alumno debe indicar los valores que se pueden atribuir a un conjunto de datos, del que se conoce la media y el total de datos. En el segundo apartado, se pide al alumno completar la composición de una distribución, de la que se conocen ya dos valores, además de la media y el total de datos de la distribución correspondiente.

El problema permite observar las estrategias que utilizan los estudiantes para encontrar las distribuciones requeridas. Esto, pasa por la comprensión adecuada de la fórmula de la media aritmética, puesto que necesita invertir el algoritmo de cálculo para, en primer lugar, encontrar la suma total y tras eso, efectuar el reparto. Como referimos en el momento en que describimos el cuestionario en la fase exploratoria, este tipo de actividades han sido utilizadas en algunos estudios previos (Mokros y Russel, 1995; Watson y Moritz, 2000; Cobo y Batanero, 2004a).

Otro aspecto, no menos importante, que se evalúa con este problema se relaciona con el dato numérico que debe usar el alumno, puesto que, por tratarse de una variable discreta, los valores no enteros no tienen sentido.

Problema 8. "Supermercado"

En un supermercado hay 8 marcas diferentes de papas fritas.

a) ¿Qué precio se puede poner a cada marca para que el precio medio sea de 1'50$?

b) Si hay tres marcas de papas fritas que traen un precio recomendado de 0'75$, 1$ y 2$, ¿qué precio se puede poner al resto de las marcas para que el precio medio sea 1'50$?

En este problema, también se presentan dos apartados, que cubren los mismos objetivos expresados en el problema anterior.

Aunque este problema refleja los mismos componentes del significo de la media mencionados en el problema 7, aquí se presenta un contexto diferente. Se trabaja con una variable continua, que ofrece la posibilidad de usar cualquier dato. Incluso el valor de la media puede formar parte de la distribución. Se trataba de observar si este hecho aumentaba, o no, el nivel de complejidad del problema.

Problema 9. "Peces capturados".

El número de peces capturados por seis alumnos en una actividad de ocio es 3, 4, 5, 3, 1, y 2, respectivamente, que hace un promedio de 3 peces por alumno [(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2)/6]. Más tarde se descubrió que en la actividad había participado otro alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Crees que cambiará el valor medio de peces capturados por cada alumno, al considerarse este último alumno? Justifica tu respuesta.

Esta tarea no figuraba en el cuestionario administrado en el estudio exploratorio. Se trata de un problema de reparto equitativo, con el que se pretende que el alumno ponga en evidencia la noción de que el cero debe tenerse en cuenta en el cálculo de la media, para que el reparto sea justo. Además, pone de manifiesto la propiedad de que la media aritmética se ve afectada si se añade un dato diferente de la media.

El problema fue adaptado de Strauss y Bichler (1988), y enmarca los aspectos abstracto (hay que tener en cuenta el cero en el cálculo de la media) y estadístico (la media se ve afectada si se añade un valor distinto de este valor) de esta medida.

Aparte de Strauss y Bichler (1988), este tipo de actividades han sido referidas también por otros autores (Mevarech, 1983; Leon y Zawojewski, 1991; Tormo, 1995), lo que muestra la importancia que tiene el análisis de la comprensión de tales nociones.

En la tabla 5.2 presentamos de forma resumida, los elementos de significado evaluados en el cuestionario, según cada ítem, adaptados de los cinco componentes de Batanero y Godino (2001a). Como se puede ver, se trata de cubrir una amplia gama de contenidos para analizar las diferentes concepciones de los alumnos respecto al concepto de media aritmética.

	Ítems/Contenidos	1	2	3	4	5	6.A.a)	6.A.b)	6.B	7.a)	7.b)	8.a)	8.b)	9
Problemas y situaciones	Media como mejor estimador	x	x											
	Media, reparto equitativo			x	x	x				x	x	x	x	x
Definiciones	Media como algoritmo	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x
	Media como valor típico o representativo	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x
	Media ponderada					x	x							
Propiedades	Influencia de los valores atípicos	x	x	x										
	Influencia del cero en el cálculo de la media			x		x								x
	La media puede ser una fracción				x	x								x
	Cambio de la media al añadir un valor													x
	Posiciones relativas entre media, moda, mediana				x									
	La media se sitúa entre los valores extremos					x	x							
	El contexto limita el tipo de dato a usar									x	x			
Algoritmos y procedimientos	Construir distribuciones de media dada									x	x	x	x	
	Completar distribuciones de media dada										x		x	
	Calcular media, extraer datos a partir de gráficos						x							
	Media y comparar distribuciones							x	x					
	Invertir algoritmo de la media				x					x	x	x	x	
Argumentos o comprobaciones	Usando algoritmo						x							
	Usando propiedades							x	x					
	Usando propiedades y algoritmo	x												x

Tabla 5.2. Elementos de significados asociados a los ítems del cuestionario

El número de preguntas incluidas en el cuestionario del estudio de la fase general de investigación es mayor y los contenidos evaluados son más amplios, en comparación con la fase exploratoria. Cabe, además, resaltar que en la fase exploratoria la tabla relacionada no especificó los elementos de significado.

En el apartado siguiente describiremos los códigos establecidos para las respuestas de los alumnos al cuestionario utilizado en esta etapa de la investigación.

5.2.1.4. ANÁLISIS Y CATEGORIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS

Una vez administrado el cuestionario, el siguiente paso consistió en analizar las respuestas de los alumnos y establecer un sistema de categorías, mediante códigos, que nos permitiese conformar una base de datos, para el análisis posterior, utilizando un paquete estadístico de análisis de datos.

Las categorías, expresan una estructura particular de conocimiento, sobre lo que el alumno concebía relativo a una determinada tarea. Esto requiere de una adecuada interpretación respecto al pensamiento manifestado en una determinada respuesta, principalmente cuando se trata de problemas de respuesta abierta, donde una misma respuesta podría inducir diferentes interpretaciones. En el caso de problemas de respuesta de elección múltiple, la situación no requiere de un análisis profundo, pues, para cada opción presentada, se ha establecido previamente un significado, presumiendo que corresponde con el razonamiento que el alumno realiza sobre la tarea.

Las respuestas de los alumnos indican el grado de competencia respecto a los conocimientos y capacidades evaluados en cada tarea. Las interpretaciones hechas, resumen los comportamientos manifestados al resolver un problema determinado, cuyos análisis pueden cuantificarse, no sólo en términos de respuestas correctas e incorrectas, sino también proporcionando la frecuencia de un comportamiento dado.

En este estudio, las respuestas de los alumnos no sólo fueron interpretadas en términos de significados personales, sino que también se ha caracterizado en niveles de comprensión según la estructura cognitiva presentada. Dicha caracterización constituye un sistema jerárquico de las estructuras de los resultados observados en el aprendizaje, de acuerdo con lo expuesto por Biggs y Collis (1982; 1991). Siguiendo este marco, las respuestas se categorizaron en cinco niveles, según se describe a continuación:

- En el *nivel preestructural* se incluyen las respuestas que indican un nivel bajo de aprendizaje con respecto al nivel de abstracción que exige la tarea, o que expresan fundamentos de carácter subjetivo, mostrando que el estudiante está despistado o atraído por aspectos irrelevantes. En algunas respuestas el alumno da simplemente una afirmación y no argumenta, presenta ideas incompletas, o muestra no haber hecho ningún intento real de dar una respuesta estructurada apoyada en evidencias.
- En el nivel *uniestructural*, consideramos aquellas respuestas que están fundamentadas en ideas imaginarias y/o relacionadas con sus experiencias de lo cotidiano. En algunas de ellas, el estudiante se centra en un aspecto del dato y lo usa para justificar su respuesta, o considera un atributo concreto dentro de sus propias experiencias, estimándolo suficiente para la situación.
- En el nivel *multiestructural* situamos aquellas respuestas en las que el alumno trabaja en la dirección de la tarea, muestra algunas características adecuadas de la misma, pero no integra correctamente los diferentes elementos, fundamentalmente porque atribuye significados diferentes al requerido en la tarea. Por ejemplo, utiliza la moda o la mediana en un problema que requiere el uso del mejor estimador, sin considerar el contexto del mismo. El estudiante en este nivel muestra un conocimiento aislado de definiciones, fórmulas, algoritmos y procedimientos.
- En el nivel intermedio entre el nivel *multiestructural* y el *relacional*, que denominamos nivel de *transición,* situamos las respuestas de aquellos alumnos, cuyos pensamientos se manifiestan por el uso de razonamientos adecuados, llegando incluso a proporcionar vías correctas y coordinadas. Reconocen adecuadamente los aspectos requeridos por la tarea, y sus respuestas se acercan cada vez más a la estructura deseable, e incluso podrían considerarse correctas en algunos casos. Sin embargo, sus ideas necesitan de un refinamiento (perfeccionamiento), pues, aún no muestran una estructura coherente y significativa en lo que exige la tarea.
- Por último, consideramos el nivel *relacional*. Aquí, al contestar la tarea el estudiante hace conexiones precisas entre los diferentes elementos. Integra las diferentes partes, definiciones, propiedades, fórmulas, algoritmos, procedimientos, condiciones de aplicación, en el proceso de desarrollo de la misma y con ellas completa una estructura coherente y significativa.

A continuación, describiremos, primeramente, los códigos generales establecidos para cada ítem, en función de las interpretaciones hechas a las respuestas

de los alumnos, y posteriormente, ejemplificaremos los tipos de respuestas que se han asociado con cada nivel de comprensión. Cabe matizar que para la caracterización en niveles de comprensión no consideramos los alumnos que no contestan.

Ítem 1: Problema "Tiempo recorrido en los 100 metros"

Los códigos establecidos en el análisis de las respuestas se muestran en el cuadro dado a continuación:

Códigos	Descripción de los códigos
ALG	- Suponen que se debe considerar el valor 14'49, porque es la media resultante de la suma de los 10 datos, dividida por 10.
MODA	- Contestan que se debe considerar el dato 15 segundos, porque es el que tiene más frecuencia.
<VALOR	- Indican que se debe considerar el valor 10 segundos.
>VALOR	- Indican que se debe considerar el dato mayor.
MEDIA≈	- Redondean la media calculada con todos los valores al dato 14'90 o 15.
ALGe	- Sugieren que se debe considerar la media calculada erróneamente, con todos los datos presentados.
MODAR	Indican que redondeando la mayor parte de los datos, excepto el 10, se obtiene el valor 15 segundos, ya que están muy cerca de este valor, por lo que sugieren considerar este valor.
NJ	- Indica que se debe considerar un determinado valor de los datos, pero no justifica por qué.
SC	- Presenta una justificación bastante confusa o sin coherencia.
NC	- No contesta

Para la caracterización de las respuestas en niveles de comprensión, mostramos a continuación algunos ejemplos de tipos de respuestas que fueron asociadas con cada uno de los niveles:

- **Nivel preestructural (P)**

- *Se debe considerar 10 segundos porque es el que llegó en primero lugar.*

- *El tiempo real que el estudiante recorrió debe ser de 10 segundos, porque en 100 metros sería el tiempo ideal.*

- *Se debe considerar 10 segundos como estimación del tiempo real porque 10 x 10 = 100.*

- *Para estimar el tiempo, el profesor debe considerar 14'95 segundos. Una vez que recorrió 100 metros, debemos tener en cuenta la intención, el esfuerzo, el coraje, entre otros factores.*

- *El tiempo considerado es de 10 segundos.*
- *Se debe considerar 10 segundos. Como el profesor trata de evaluar el tiempo, este no puede estar por encima de 10 segundos.*
- *Es 15 segundos, porque para un estudiante, en la distancia de 100 m, depende de su forma y capacidad para realizar este tipo de deporte o actividad y debe estar bien preparado.*
- *El tiempo que el profesor debe considerar como estimación del tiempo real es 15 segundos.*

- **Nivel uniestructural (U)**

En este nivel, clasificamos aquellas respuestas que expresan ideas tales como las siguientes:

- *Se debe considerar el tiempo de 10 segundos porque es el tiempo más corto.*
- *El profesor debe considerar los 10 segundos porque 10 es el número más próximo del record mundial actualmente.*
- *El profesor debe considerar como mejor estimación, el tiempo de espacio más corto.*
- *Se debe considerar el mayor tiempo porque los segundos pasan rápido.*
- *El profesor debe considerar los 10 segundos porque es el tiempo más reducido, y podemos decir que el alumno es más rápido.*
- *Se debe considerar 10 segundos porque en una carrera de 100 metros el tiempo mínimo es de 9'60, para mí seria casi imposible y si el profesor quiere considerar un tiempo tiene que ser 10 segundos. Además 10 es el número más próximo.*
- *Se debe considerar 15'05 segundos porque se repite dos veces.*
- *El tiempo que el profesor debe considerar como estimación del tiempo real es 15 segundos porque ningún alumno pasa de los 15'90.*

- **Nivel multiestructural (M)**

En esta clasificación, incluimos las respuestas del tipo:

- *El profesor debe considerar como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante el valor 15 segundos porque de los datos presentados es el que más se repite.*

- *El profesor debe considerar como estimación del tiempo real el valor 14'90 segundos porque es el que más se aproxima a la media 14'49.*
- *El tiempo que el profesor debe considerar es 15 segundos porque de los 10 alumnos 4 registraron este tiempo.*
- *Ninguno de los valores, porque los datos están dados de forma bruta. Es necesario agruparlos y después hallar la media del tiempo recorrido por el alumno.*
- *Se debe usar la mediana, que es el valor que está entre la quinta y la sexta posición.*

También se clasificaron en este nivel, aquellas justificaciones en las que se presentaba el algoritmo de cálculo de la media, pero sin identificar correctamente el total de datos o la suma total.

- **Nivel de transición (T)**

En las respuestas caracterizadas en este nivel, algunos alumnos utilizan la media para estimar el valor desconocido en la situación presentada. Sin embargo, no se dan cuenta de que en el conjunto de valores hay un dato extraño que es necesario descartar, antes de efectuar el cálculo, por lo que suman todos los valores y dividen por el total de observaciones, tal como se ilustra en las respuestas que se muestra a continuación:

- *La suma de los tiempos registrados es 144'9. Dividiendo encontramos 14'49. Por tanto, el tiempo es 14'49 segundos.*
- *El tiempo que debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante es 14'49, porque*

$$\frac{15'05+14'95+15'05+15+10+15+14'90+15+14'95+15}{10}=\frac{144'9}{10}=14'49$$

En algunas respuestas los alumnos redondean erróneamente el valor medio calculado con todos los valores a un valor entero, como se muestra en el ejemplo siguiente:

- *Se debe considerar el valor 14'49≈15, porque para hallar la media es preciso sumar y dividir por la cantidad de números sumados.*

A continuación, mostramos otros ejemplos de respuestas que fueron clasificadas en este nivel.

- *El profesor debe considerar como estimación, el tiempo de 14'90, porque es el número que más se aproxima a la media 14'49.*
- *El tiempo que el profesor debe considerar es 15 segundos, porque* $\bar{x} = \frac{15'05 + 14'95 + 15'05 + 15 + 10 + 15 + 14'90 + 15 + 14'95 + 15}{10} = 14'49$ *. El valor medio no se encuentra en estos intervalos, entonces sería 15 segundos, por ser el tiempo real recorrido.*
- *Fórmula:* $\bar{x} = \frac{15'05 + 14'95 + 15'05 + 15 \times 4 + 10 + 14'90 + 14'95}{10}$; $\bar{x}$ *=75'6 s. Es el tiempo que el profesor debe considerar como estimación.*

- **Nivel relacional (R)**

En este nivel, clasificamos aquellas respuestas que indicaban que para estimar el valor pretendido se debe determinar la media aritmética de los valores dados, pero descartando antes el valor 10 segundos, por ser una observación extraña en el conjunto de datos. Sin embargo, en este problema no encontramos ninguna respuesta que se asociara con este nivel como se mostrará en los resultados.

Veamos ahora otro ejemplo en un problema, en este caso de elección múltiple, que tiene relación estrecha con el problema anterior, en cuanto a sus objetivos.

Ítem 2: Problema "En una clase de ciencias"

Los códigos establecidos y sus respectivas descripciones se indican a continuación:

Códigos	Descripción de los códigos
ALG	- Señala la opción que dice: sumar los 9 valores y dividir la suma por 9.
MODA	- Indica la opción que dice: Usar el número más repetido, que es 6'2.
DEC	- Indica la opción "Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales".
DATIP	- Elige la opción que dice: Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.
NC	- No contesta

Al tratarse de un problema de respuesta de elección múltiple, la caracterización se asoció con el distractor presente en cada opción. En su forma primitiva sólo se contemplaron respuestas asociadas a los niveles multiestructural, transición y relacional. En una revisión futura del cuestionario consideramos la posibilidad de incluir el tipo de respuestas relativas a los niveles que faltan para completar la gama de elección.

En cuanto a la caracterización de las respuestas tenemos:

- **Nivel multiestructural (M)**

Aquellas en las que el alumno elige la opción que dice "*usar el número más repetido, que es el 6'2*", es decir, se sugiere como respuesta la moda, una medida que no tiene la propiedad de mejor estimador en la situación dada y la opción "*usar 6'15, puesto que es el valor con más cifras decimales*", deduciéndose que el alumno confunde mayor precisión con existencia de más cifras decimales.

- **Nivel de transición (T)**

Aquellas en las que el sujeto elige la opción "*sumar todos los valores y dividir la suma por el total de datos*". Aquí, interpretamos que conocen la media como mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medida, pero no se atiende a la observación que se distingue de las demás. Estrada (2002) señala que esta respuesta podría considerase parcialmente correcta, pues el alumno usaría la idea de media como mejor estimador, pero no tendría en cuenta la falta de robustez de esta medida frente a valores atípicos.

- **Nivel relacional (R)**

Aquí, fueron caracterizadas aquellas respuestas en las que los alumnos marcaban la opción que sugería descartar el valor 15'3, sumando los otros 8 números y dividiendo por 8. Es decir, el alumno usa la media como mejor estimador de un valor desconocido, en presencia de errores de medición, y además, parece saber que en estas situaciones es necesario atender a los valores extremos.

Ítem 3: Problema "Número de perguntas"

Este ítem también es de respuesta de elección múltiple. La interpretación de las respuestas de los alumnos siguió el mismo esquema planteado en la fase exploratoria, estableciéndose los siguientes códigos:

Códigos	Descripción de los códigos
MODA	- Indica la opción "Usar el número más repetido, que es el 2".
ALG	- Elige la opción "Sumar los 8 números y dividir por 8".
DATIP	- Señala la opción que dice "Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7".
DCERO	- Indica la opción "Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7".
SC	- Señala más de una opción.
NC	- No contesta

Igual que en el ítem anterior, para la caracterización en niveles de comprensión consideramos los distractores presentes en cada opción. Se establecieron tres niveles de comprensión: multiestructural, transición y relacional.

- **Nivel multiestructural**

En este nivel incluimos aquellos alumnos que seleccionaron las opciones "usar el número más repetido, que es el 2" y "descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7".

- **Nivel de transición**

Las respuestas en el nivel de transición las asociamos con la opción "descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7". En nuestro análisis, esta respuesta bien se podría situar en el nivel multiestructural, sin embargo, nos decantamos por este nivel, pues, en general los alumnos no tienen claro la idea sobre cuándo y cómo descartar un valor atípico en el cálculo de la media.

- **Nivel relacional**

Si el alumno elige la opción "sumar los 8 números y dividir la suma por 8" se le sitúa en el nivel relacional, suponiendo que él mismo comprende que para resumir un conjunto de datos, en las circunstancias del problema, se debe sumar todos los valores y dividir por el total de observaciones.

Ítem 4: Problema "Hijos por familias"

Este ítem es de respuesta de elección múltiple. Para la categorización general, se utilizaron los siguientes códigos:

Códigos	Descripción de los códigos
MED	- Señala la opción "La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños".
RDEC	- Señala la opción "En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños".
STOTAL	- Indica la opción que dice "Hay un total de 110 niños en la ciudad".
FAMADUL	- Elige la opción "Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad".
MODA	- Elige la opción "El número más común de niños en una familia es 2".
NC	- No contesta

En este ítem, los niveles de comprensión se caracterizan a continuación:

- **Nivel uniestructural**

Este nivel se relacionó con la elección de la respuesta "*hay 2'2 niños por adulto en la ciudad*". Suponemos que el alumno se involucró con la tarea, sin embargo, no interpretó correctamente lo que se le pedía, y confundió el término familia por adulto.

- **Nivel multiestructural**

Este nivel lo relacionamos con la elección de las opciones siguientes: "*La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 niños*", donde suponemos que confunden la media con la mediana; "*El número más común de niños en una familia es 2*", deduciéndose que confunden la media con la moda; y la que afirma que "*en la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2*", donde inferimos que los alumnos que eligen esta opción redondean por exceso el valor medio 2'2. Este dato les produce confusión, ya que se refiere a una variable discreta.

- **Nivel relacional**

Este nivel lo asociamos con la elección de la opción "*Hay un total de 110 niños en la ciudad*", pues, suponemos que los alumnos que la eligen conocen el algoritmo de la media aritmética y lo usan adecuadamente. De esta forma lo han invertido, calculando el valor de la suma total.

Ítem 5: Problema "Número medio de hijos"

Este fue el problema que más códigos ha proporcionado. Los alumnos presentan distintas estrategias al resolver el problema de media ponderada. Algunas categorías podrían integrarse en una sólo, sin embargo preferimos no hacerlo aquí, para explicitar mejor los razonamientos de los alumnos y reservamos este pormenor para el apartado de análisis de resultados.

A continuación, presentamos los códigos establecidos en el proceso de categorización de las respuestas en este problema:

Códigos	Descripción de los códigos
ALGPOND	- Usa correctamente el algoritmo de media ponderada.
ALGPI	- Usa el algoritmo de media ponderada, pero considerando el dato irrelevante.
ALGPOND≈	- Determina correctamente la media usando el algoritmo de media ponderada, pero redondea el resultado a un número entero.
MEDEXT	- Calcula la media de los valores 1 y 3, tomándolos como extremos.
MSOPER	- Presenta la media deseada, sin mostrar las operaciones.
NC	- No contesta
NHSOPER	- Indica que el número medio de hijos es un dado valor, incorrecto, sin

	mostrar las operaciones.
SC	- Realiza transformaciones incoherentes.
SF/3	- Divide la suma de tres valores de la frecuencia por 3, es decir, (7+5+3)/3.
SF/4	- Suma los valores de frecuencia y divide por 4.
SF/5	- Suma los valores de frecuencia y divide por 5
SF/ST	- Divide la suma de los valores de frecuencia por la suma total.
SF/SX	- Divide la suma de los valores de frecuencia por la suma de los valores de la variable.
SF/SXI	- Divide la suma de los valores de las frecuencias por la suma de los valore de la variable, incluyendo el dato irrelevante.
ST	- Indica como media la suma total de hijos.
ST/4	- Divide la suma total por 4
SX.SF	- Determina el número medio de hijos multiplicando la suma de los valores de la variable por la suma de los valores de frecuencia.
SX/2	- Divide la suma de los valores de la variable por 2: (1+2+3)/2
SX/3	- Suma tres valores de la variable y divide por 3, es decir, (1+2+3)/3.
SX/4	- Divide la suma de los valores de la variable por 4, es decir (0+1+2+3)/4.
SX/4≈	- Divide la suma de los valores de la variable por 4 y redondea el resultando a un número entero.
SX/SF	- Divide la suma de los valores de las variables por la suma de los valores de frecuencia.
SXI/SF	- Divide la suma de los valores de la variable, incluyendo el dato irrelevante, por la suma de los valores de frecuencia.

Al caracterizar las respuestas de los estudiantes en niveles de comprensión, en este ítem encontramos los niveles uniestructural, multiestructural, transición y relacional. A continuación, ilustramos estos niveles con algunos tipos de respuestas:

- **Nivel uniestructural**

Incluimos en este nivel, aquellas respuestas que expresan procesos de resolución que no tienen coherencia ninguna o el alumno realiza transformaciones cuyos significados no son totalmente perceptibles.

- **Nivel multiestructural**

Las respuestas relacionadas con este nivel muestran que el alumno parece tener idea de la fórmula de cálculo de la media aritmética, sin embargo no sabe identificar los elementos que la componen, ni situarlos debidamente. Por ejemplo, divide la suma de los valores de la frecuencia por la suma de los valores de las variables, o viceversa; determina correctamente la suma total, pero no sabe cuál debe ser el total de datos; determina la media de los valores de la frecuencia, y en ciertos casos, hasta incluye los datos irrelevantes; calcula la media de los valores de la variable, y en ciertos casos, hasta ignora los valores nulos; proporciona un valor determinado como resultado del

problema, sin mostrar las operaciones, por lo que suponemos que ha trabajado con datos incorrectos.

- **Nivel de transición**

En este nivel situamos aquellas respuestas que muestran el uso correcto del algoritmo de cálculo de la media ponderada, si bien, no aceptan que el resultado pueda ser un valor decimal o consideran los datos irrelevantes del problema.

- **Nivel relacional**

En este nivel situamos aquellas respuestas que muestran que el estudiante ha sido capaz de distinguir los datos de la variable de los datos de la frecuencia, y resuelve correctamente el problema usando el algoritmo de cálculo de la media ponderada, considerando los aspectos conceptuales que requerían la tarea (la media puede ser un valor decimal, está localizada entre los extremos y se debe tener en cuenta el cero en su cálculo).

Ítem 6.A. a): Problema "Gráfico de notas, 6. A.a)"

Los códigos fijados para este ítem y sus correspondientes descripciones se presentan a continuación.

Códigos	Descripción de los códigos
ALGP	- Usa el algoritmo de media ponderada.
ALGS	- Usa el algoritmo de media simple.
MEDX	- Calcula la media de todos los valores de la escala del eje horizontal.
MEXTR	- Determina la media de los valores extremos presentados en el eje horizontal.
MEDR	- Calcula la media de los valores de la escala del eje X sobre los cuales se construyeron los rectángulos (9+10+12+13)/4
MeX	- Señala la mediana de los valores presentados en el eje X.
SC	- Realiza diversas transformaciones confusas y/o incoherentes.
NC	- No contesta.

La caracterización de las respuestas en niveles de comprensión se enumera a continuación:

- **Nivel uniestructural**

Algunos ejemplos de respuestas incluidas en este nivel se relacionan con transformaciones incoherentes o revelan explicaciones sin fundamento. Por ejemplo, el estudiante afirma que ya está comprobado que la nota del grupo 2 es igual a 11, puesto que los dos grupos tienen los mismos resultados; los estudiantes que afirman que multiplicando los valores repetidos por 2, nos dará 110, y como 10 no está repetido,

dividimos por 10, lo que nos da 11; Algunos dicen que sumando las notas de los alumnos aprobados y dividiendo se obtiene 98:8 =11'5; Otros alumnos argumentan que existe disparidad en las notas de los dos grupos y no comprueban lo que se les pide; incluimos también los que afirman, sin realizar operaciones, que la nota media del grupo 2 es un valor dado, diferente del que se les pide comprobar, sin presentar otros argumentos.

- **Nivel multiestructural**

En este nivel se incluyen las respuestas de aquellos alumnos que tienen dificultades en identificar y extraer los datos a operar. Por ejemplo, algunos determinan la media de los valores de la escala sobre los cuales se construyeron los rectángulos, o determinan la media de todos los valores de la escala ubicados en el eje X. Algunos calculan la media de los valores extremos del eje horizontal, otros, aún planteando correctamente el algoritmo de la media, no reconocen el total de datos de la variable. Entre otras respuestas, incluimos también aquellas que presentan nociones imprecisas sobre el concepto de media, afirmando por ejemplo, que la nota media del grupo 2 no es 11, puesto que no hay ningún alumno con esta nota, o bien, confunden la media con otra medida.

- **Nivel relacional**

Se incluyen aquellas situaciones en las que el alumno extrae correctamente los datos de la gráfica y comprueba el resultado pretendido, usando correctamente el algoritmo de cálculo de la media simple o ponderada.

Ítem 6. A. b): Problema "Gráfico de notas, 6.A.b)"

En este apartado del problema "Gráfico de notas" se pedía a los alumnos que presentaran argumentos para comparar dos gráficos que tenían medias iguales. Las justificaciones presentadas fueron codificadas de la siguiente manera:

Códigos	Descripción de los códigos
IGUMED	- Justifica que no hay diferencias entre los grupos porque la media es la misma en los dos grupos.
NAPROB	- Considera que el grupo 2 es mejor porque en el mismo hay más alumnos aprobados.
MNOTA	- Considera que el grupo 1 es mejor porque en el mismo están los alumnos que obtuvieron notas más altas.
MHOMO	- Indica que el grupo 2 es mejor que el grupo 1, porque es más homogéneo.

NO<9	- Argumenta que el grupo 2 es mejor que el grupo 1 porque en el mismo no hay alumnos con notas inferiores a 9.
SC	- Presenta justificaciones confusas y/o incoherentes.
NC	- No contesta.
MEDAP	- Argumenta que el grupo 1 es mejor porque la nota media de aprobados de este grupo es mayor, respecto al grupo 2.

La caracterización jerárquica de las respuestas nos proporcionó cuatro niveles de comprensión, que pasamos a describir:

- **Nivel uniestructural**

En este nivel situamos aquellas respuestas cuyo significado es confuso, incompleto o incoherente respecto al objetivo pretendido o al contenido del enunciado. Algunas de estas respuestas son las siguientes afirmaciones:

- *"El grupo 2 es mejor porque tiene la mejor media"*, una respuesta que no tiene sentido puesto que se parte de la premisa de que las medias de los dos grupos son iguales.
- "*El segundo grupo es mejor porque su gráfico es más alto*". Esta situación parece indicar la falta de criterio o conocimiento sobre la cuestión, presentando una justificación fuera de contexto.
- "*Los dos grupos parecen mejor porque tienen una media buena*", sin que se perciba lo que se pretende decir con "media buena", ya que el propio problema dice que las medias de los dos grupos son iguales.
- "*Los grupos poseen la misma media, pero el grupo 1 tiene ventaja, porque se redondea por defecto*".
- "*En el segundo grupo algunos alumnos salen normal, otros intentan subir, otros bajan, suben y bajan todos*".
- "*El grupo 2 es mejor que el otro porque hay mayor asimilación*".
- "*El grupo 2 es mejor, pues los alumnos se muestran más capacitados y convencidos al dar sus respuestas*", en una situación donde el enunciado no muestra ninguna respuestas dada por los alumnos participantes al concurso referido.

- **Nivel multiestructural**

Las respuestas asociadas con este nivel muestran que el alumno sólo considera una parte de la distribución o sólo se fija en los máximos o mínimos de la distribución. Algunos ejemplos de estas respuestas fueron las siguientes:

- *El grupo 2 es mejor, porque hay más alumnos con notas positivas*.

- *No hay diferencias entre los dos grupos porque con respecto a las notas ninguno fue superior al otro.*
- *El grupo que me parece mejor es el grupo 1 porque los alumnos tienen buenas notas*.
- *El grupo 2, porque presenta menos suspensos respecto al grupo 1*.
- *El grupo 1 me parece mejor porque en él están los alumnos que obtuvieron notas más altas.*
- *Me parece mejor el grupo 1, porque en el mismo aparecen alumnos con medias superiores en relación al grupo2.*
- *El grupo que me parece mejor es el grupo 1, porque el límite inferior es 8 y el grupo 2 no tiene límite inferior.*
- *El grupo 1 es mejor, porque tiene mayor media de alumnos aprobados que el grupo 2*".

- **Nivel de transición**

Aquí, situamos las respuestas de aquellos alumnos que afirman no existir diferencias entre los grupos basándose en la igualdad de las medias, aunque este criterio por sí solo no sea el apropiado para la situación.

- **Nivel relacional**

Las respuestas que se incluyen en este nivel claramente manifiestan la variabilidad de los datos en el grupo 2, indicando que a pesar de la igualdad de medias en los dos grupos, aquel es más homogéneo.

Ítem 6. B: Problema "Gráfico de notas, 6. B"

Las categorías establecidas para esta parte del problema fueron similares a las descritas en el ítem anterior, con la única diferencia de que aquí estamos trabajando con un ítem de respuesta de elección múltiple.

En el cuadro siguiente se describen los códigos utilizados:

Códigos	Descripción de los códigos
IGUMED	- Marca la opción que dice que no hay diferencias entre los dos grupos porque la media es igual en ambos grupos.
NAPROB	- Marca la opción que se refiere a la existencia de más alumnos aprobados en el grupo 2.
MNOTA	- Elige la opción que toma como criterio el factor mayor nota en el grupo 1
MHOMO	- Selecciona la opción que indica que el grupo 2 es más homogéneo.
NING	- Indica la opción que dice "Ninguna de las afirmaciones anteriores".
NC	- No contesta

La categorización en niveles de comprensión, es la siguiente:

- **Nivel uniestructural**

Este nivel se corresponde con la elección de la opción que dice "*Ninguna de las afirmaciones anteriores*", en el caso de que en el ítem 6.A.b) también hubiera dado una respuesta asociada con este nivel uniestructural.

- **Nivel multiestructural**

En este nivel situamos las opciones que indican las siguientes respuestas: "*El grupo 1 es mejor que el grupo 2 porque en el mismo están los alumnos que obtuvieron notas más altas*"; "*El grupo 2 es mejor, porque en el mismo hay más alumnos aprobados*".

- **Nivel de transición**

Las respuestas clasificadas en este nivel son aquellas en que los estudiantes eligen la opción "*No hay diferencias entre los dos grupos porque la media es la misma en ambos grupos*", teniendo en cuenta que consideran la igualdad de medias como un criterio formal de comparación de dos conjuntos de datos, aunque evidentemente en las condiciones presentadas el criterio no es del todo suficiente.

- **Nivel relacional**

Este nivel se asocia con la elección de la opción que dice que "*A pesar de las medias ser iguales en los dos grupos, el grupo 2 es más homogéneo*".

Ítem 7. a): Problema "Familia, 7.a)"

Los códigos definidos para este ítem se muestran en el siguiente cuadro:

Códigos	Descripción de los códigos
DSTOTAL	- Presenta una distribución correcta, apoyándose en la suma total.
DSOPER	- Presenta una distribución correcta, pero sin mostrar las operaciones.
DDEC	- Da una distribución con valores decimales, sin mostrar operaciones.
DD&ST	- Presenta una distribución con valores decimales tras encontrar la suma total.
ST	- Determina la suma total, pero no presenta la distribución.
DINCOR	- Presenta una distribución, sin valores decimales, que no cumple con las condiciones del enunciado y no halla la suma total.
DI&ST	- Presenta una distribución, sin valores decimales, que no cumple con los requisitos del enunciado, aunque encuentra la suma total.
TOT/MED	- Divide el dato "total" por el dato "media".
MED/TOT	- Divide el dato "media" por el dato "total".
STPR	- Encuentra la suma total estableciendo, erróneamente, una proporción.
SC	- Realiza varias transformaciones sin coherencia.
NC	- No contesta.

En cuanto a la categorización en niveles de comprensión, las respuestas fueron clasificadas de la siguiente manera:

- **Nivel uniestructural**

En este nivel se incluyeron aquellas respuestas cuyos procesos de resolución eran inconsecuentes, incompletos o sin sentido alguno, para el objetivo de la tarea. Algunos dividen la media dada por el total de familias, o viceversa, considerando este resultado como la composición de cada familia, porque creían supuestamente que era preciso hacer algo con los datos. En las circunstancias referidas, parece que el alumno no sabe lo que se le pide o no sabe por donde empezar. Se muestran a continuación algunos ejemplos:

a)	b)	c)	d)	e)
x= 10	32-7= 25 : 8	3x10 = 30	10 familias---10 personas	10/3’125
n= 3’2	= 3 x 12	32: 10 = 3’2	10 familias---10 personas	= 3’2
m =10/3’2			10 familias---10 personas	
m= 3’125			1 familia--- 2 personas	

En el ejemplo dado en el aparado a) el alumno contesta además, que “*las 10 familias deben tener una media de 3’125*”, una respuesta inoportuna para la situación, puesto que el valor medio ya se proporciona en el enunciado y es igual a 3’2, pidiéndose construir una distribución que refleja la composición de 10 familias, y que satisface la media poblacional dada. En la misma línea de pensamiento, otro alumno sin realizar ninguna operación, contesta lo siguiente: “*las 10 familias que cumplen esta media son de 16*”.

- **Nivel multiestructural**

En el nivel multiestructural incluimos aquellas respuestas en las cuales el alumno no determina la suma total, pero presenta una distribución que no cumple los requisitos del enunciado. En tales distribuciones, la suma total tanto podía estar por encima o por debajo de la suma total real o incluso contemplaba valores decimales en el conjunto de datos. Incluimos también en este nivel algunas respuestas donde la suma total se encuentra casualmente, estableciendo una proporción, aunque tras esto no dan una distribución.

- **Nivel de transición**

Las respuestas en el nivel de transición entre el multiestructural y el relacional las asociamos con aquellas situaciones en las cuales el alumno parecía mostrarse

capacitado en resolver la tarea, puesto que indicaba correctamente la suma total, determinada, supuestamente, por inversión del algoritmo de la media, pero dando una distribución de valores que no cumple las exigencias del problema (suma de los valores por encima o por debajo de la suma total real calculada; distribución con valores decimales), o simplemente, determina la suma total, sin dar la distribución.

- **Nivel relacional**

En este nivel se incluyen las respuestas de aquellos alumnos que determinan correctamente la suma total, invirtiendo el algoritmo de la media y proporcionan una distribución de datos acorde a las condiciones del problema, o también indican simplemente esta distribución sin mostrar las operaciones realizadas.

Ítem 7.b): Problema "Familia, 7.b)"

Los códigos definidos para este segundo apartado del problema 7, no se diferenciaron casi nada de los que habían sido establecidos para el primer apartado, tal como se muestra en el cuadro siguiente.

Códigos	Descripción de los códigos
DSTOTAL	- Presenta una distribución correcta, determinando primeramente la suma total.
DSOPER	- Presenta una distribución correcta, pero sin mostrar las operaciones.
UA	- Usa la misma distribución (correcta) presentada en el apartado anterior.
DDEC	- Da una distribución con valores decimales, sin mostrar operaciones.
DD&ST	-Presenta una distribución con valores decimales tras encontrar la suma total.
DI&ST	- Presenta una distribución, sin valores decimales, que no cumple con los requisitos del enunciado, aunque encuentra la suma total.
SD/TOT	- Divide la suma de los dos valores ofrecidos como parte de la distribución, por el dato "total".
ST	- Determina la suma total, pero no presenta la distribución.
DINCOR	- Presenta una distribución, sin valores decimales, que no cumple con las condiciones del enunciado y no halla la suma total.
SC	- Realiza varias transformaciones sin coherencia.
NC	- No contesta

Para la caracterización de los niveles de comprensión seguimos la misma pauta presentada en el ítem anterior, con la diferencia de que aquí, en el nivel relacional, incluimos también aquellas respuestas en las que los alumnos utilizan la misma distribución presentada en el apartado anterior, al darse cuenta que satisface las exigencias del enunciado y en el nivel uniestructural, las respuestas en que el alumno

divide la suma de los dos valores proporcionados (del conjunto de datos) por el dato "total".

Ítem 8. a): Problema "Supermercado, 8.a)"

Tal como se describió en el apartado sobre los instrumentos de recogida de datos, el problema 8 es semejante al problema 7. Ambos se distinguen fundamentalmente por el tipo de variable utilizada, siendo discreta en el problema "Familia", mientras que en el problema "Supermercado" la variable es continua.

Veamos a continuación las categorías determinadas para el apartado 8. a).

Códigos	Descripción de los códigos
DSTOTAL	- Presenta una distribución correcta, determinando primeramente la suma total.
DSOPER	- Presenta una distribución que no cumple con las condiciones del enunciado.
DMEDIA	- Presenta una distribución de valores iguales a la media.
DINCOR	- Presenta una distribución que no cumple con las condiciones del enunciado y no determina la suma total.
DI&ST	- Presenta una distribución, que no cumple con los requisitos del enunciado, si bien encuentra la suma total.
ST	- Determina la suma total, pero no indica la distribución.
STPR	- Encuentra la suma total estableciendo, erróneamente, una proporción.
TOT/MED	- Divide el dato "total" por el dato "media".
RST	- Determina la suma total y/o indica solamente este valor como la respuesta al problema.
MED/TOT	- Divide el dato "media" por el dato "total".
SC	- Realiza varias transformaciones incoherentes.
NC	- No contesta.

La categorización jerárquica proporcionó los mismos niveles de comprensión descritos en los dos ítems anteriores, tal como se describe a continuación:

- **Nivel uniestructural**

En el nivel uniestructural se incluyen aquellas respuestas en las que los alumnos realizan transformaciones incoherentes, incompletas o sin significado alguno para el objetivo de la tarea. Por ejemplo, el alumno divide el total de datos por la media, o divide el dato "media" por el dato "total".

- **Nivel multiestructural**

Este nivel lo asociamos con las respuestas en las que el alumno realiza un conjunto de pasos incoherentes. Algunos, establecen una proporción para encontrar la suma total, o plantean incorrectamente el algoritmo de cálculo. Incluimos así mismo

aquellas respuestas en que el alumno parece tener idea de la distribución, pero no halla la suma total, presentando un conjunto de datos que no cumple los requisitos del enunciado.

- **Nivel de transición**

Las respuestas en el nivel de transición entre el nivel multiestructural y el nivel relacional se corresponden con los comportamientos en los que el alumno determina correctamente la suma total, multiplicando la media por el total de datos y/o indica este valor (la suma total) como el precio de cada marca; otros hallan correctamente la suma total, sin embargo, presentan un conjunto de datos cuya suma está por encima, o por debajo, de la suma total real.

- **Nivel relacional**

La caracterización del nivel relacional atendió a las respuestas que parecen indicar que el alumno tiene un dominio pleno de la tarea, es decir, aquellas respuestas en que se determina correctamente la suma total y se da una distribución de datos coherente con las condiciones del problema, o aquellas en que el alumno, simplemente, da una distribución sin exponer las operaciones.

Ítem 8.b): Problema "Supermercado, 8. b)"

Los códigos establecidos para este ítem se muestran en el cuadro que se presenta a continuación:

Códigos	Descripción de los códigos
DSTOTAL	- Presenta una distribución correcta, determinando primeramente la suma total.
DSOPER	- Presenta una distribución correcta, sin mostrar las operaciones.
UA	- Usa la misma distribución (correcta) presentada en el apartado anterior.
DMEDR	- Da una distribución media para el resto de las marcas.
DINCOR	- No determina la suma total y presenta una distribución que no cumple con las condiciones del enunciado.
DI&ST	- Presenta una distribución que no cumple con los requisitos del enunciado, si bien encuentra la suma total.
ST	- Determina la suma total, pero no presenta la distribución.
SD/MED	- Divide la suma de los tres valores ofrecidos por el dato "media".
SD/TOT	-Divide la suma de los tres valores ofrecidos por el dato "total".
SC	- Realiza diversas transformaciones incoherentes.
NC	- No contesta.

Para la categorización en niveles de comprensión se procedió de igual forma que en el ítem anterior, puesto que se trata de un apartado del mismo problema. Pero para el nivel relacional, además de las actuaciones referidas en ítem 8.a), incluimos también las

respuestas en las que los alumnos indican la misma distribución dada en el referido apartado, desde que esta reuniese las condiciones del enunciado, y a los que daban una distribución media para el resto de los valores pedidos. Para las respuestas clasificadas en el nivel uniestructural se consideró también aquellos casos en los que el alumno dividía la suma de los tres datos conocidos de la distribución, por la media o por el total de datos.

Ítem 9: Problema "Peces capturados"

En este ítem, la categorización de las respuestas de los alumnos proporcionó los códigos que indicamos en el cuadro siguiente:

Códigos	Descripción de los códigos
NOCERO	- Justifica que la media no varía porque el último alumno no capturó ningún pez.
TOTSI	- Argumenta que el total de datos sí varía, pero la media sigue siendo la misma.
NOMED≈	- Indica que la media no varía, pues, al considerarse el último alumno se obtiene un valor que redondeado da 3.
SIMED≈	- Justifica que la media sí varía, pues, el total de datos es siete. Sin embargo, redondea el resultado a un valor entero.
SITOTAL	- Argumenta que el valor medio sí varía, puesto que aumenta el dato referente al total de participantes, a pesar de no haber capturado ningún pez el último alumno.
SC	- Presenta justificaciones confusas y/o incoherentes.
NC	- No contesta.

Con relación a la clasificación referida a los niveles de comprensión, las respuestas de los alumnos fueron asociadas con los niveles preestructural, uniestructural, multiestructural, transición y relacional, que mostramos a continuación mediante algunos ejemplos:

- **Nivel preestructural (P)**

En este nivel incluimos algunas respuestas del tipo:

- *La media de peces capturados por alumno no se altera, porque este mismo…* [No continua la respuesta].
- *No, porque el alumno que había participado en la actividad, aunque no capturó ningún pez, no podía considerase, porque él ya había participado.*
- *No varía, aunque se considere la participación del otro alumno.*

- *Varía, al considerase la participación del otro alumno.*

- *No varía. El hecho de este no haber capturado un ejemplar no deja de ser pez y además, no sabemos cuantos peces capturó. Pero también creo que la expresión que dice aunque no tenga capturado ningún pez, significa que este alumno no existe.*

- **Nivel uniestructural (U)**

Algunas respuestas situadas en este nivel fueron las siguientes:

- *Sí varía, porque* $\frac{18}{6}=3$.

- *Sí, varía porque si ellos hicieran la división con el alumno que hizo la pesca clandestinamente…* [No sigue con el argumento, pero a continuación pone: = 3+4+5+3+1+2= $\frac{26}{6}=4$].

- *Sí varía, porque se ha considerado la media de 3 peces por cada alumno y se ha dividido el número de peces por el número de alumnos que participaron en la actividad.*

- *No varía, porque se halló el resultado de peces, lo que significa que alguien pescó más que la media, cubriendo al alumno que no pescó.*

- *Sí se altera, porque algunos participaron pero no capturaron nada, lo que quiere decir que algunos de ellos capturaron más que otros.*

- **Nivel multiestructural (M)**

Algunas de las respuestas, clasificadas en este nivel, fueron las siguientes:

- *La media de peces no varía, aunque se considere el último alumno, porque cero es un valor nulo.*

- *La media no cambia, porque el último alumno no pescó ningún ejemplar, y aunque se considere, no cambia nada.*

- *El valor medio de peces no varía porque el último alumno no capturó ningún ejemplar, luego, la media sigue siendo la misma.*

- *El valor medio es lo que se llama de variación media y esta no varía, porque a pesar de que uno de ellos no capturó ningún pez, él es parte del grupo y no debe ser excluido.*

En algunos casos, las respuestas que decían que el valor medio de peces no variaba porque el alumno no capturó ningún ejemplar, se acompañaban de un intento de comprobación, utilizando el algoritmo de cálculo de la media: (3+4+5+3+1+2)/6.

- **Nivel de transición (T)**

Ejemplificamos a continuación los tipos de respuestas que fueron caracterizadas en este nivel:

- *No varía porque considerando el séptimo alumno el resultado será el mismo. No es 3, pero redondeando se obtiene 3. Ejemplo:* $\frac{18}{6} = 3$; $\frac{18}{7} = 2'571 \approx 3$.

- $\frac{3+4+5+3+1+2}{7} = \frac{18}{7} = 2'571$. *No varía porque este último alumno no capturó ningún pez.*

- *(3+4+5+3+1+2+0)/7 = 2'5 ≈ 3. Varía porque ellos eran 7 alumnos. En el resultado la media se halló con 6 alumnos.*

- *No varía, porque la media sería 2'57 y redondeando por exceso se obtiene 3.*

- *Sí. Aunque él no pescó nada debe ser contado en la actividad. ... debe llevarse también alguna cosa.*

- $\frac{3+4+5+3+1+2}{6} = 3$ $\frac{3+4+5+3+1+0+2}{7} = 2'57 \approx 3$. *El valor varía porque la suma es igual a 18, dividiendo por 7 el resultado es de 2'57 que al redondear da 3.*

- **Nivel relacional (R)**

Veamos algunos ejemplos de respuestas caracterizadas en este nivel:

- *Sí varía, aunque él no pescó nada, debe ser contado en la actividad. Puede que él nunca participara en la actividad, pero se va a llevar también alguna cosa.*

- *Yo tengo la certeza que varía al considerarse el último alumno, porque en este caso se involucra un alumno más y al efectuar la media el resultado debe cambiar.*

- *Lógicamente la media de peces capturados se altera porque al incluir un elemento más, la media baja de 3 a 2'57.*

- *El número medio varía, porque con el último alumno no se divide por 6, pero sí por 7 y dará otro resultado que es equivalente a 2'57.*

La categorización de las respuestas de los alumnos es un paso fundamental, pues van a constituir la base para la creación de un banco de datos, que será el núcleo para llevar a cabo el análisis de los resultados. Este proceso, fue desarrollado con la ayuda del software estadístico SPSS, cuyos datos presentamos en el apartado siguiente.

5.3. RESULTADOS DEL PRIMER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL

En este apartado presentamos los resultados encontrados con los alumnos de secundaria y de universidad (estos últimos cursaban estudios de profesorado). Los resultados serán presentados por ítems, mostrando, en primer lugar, las frecuencias absolutas y porcentajes relativos a las respuestas dadas por los alumnos y, posteriormente, presentamos las frecuencias absolutas y porcentajes, derivados de la caracterización de las mismas en niveles de comprensión. Haremos también algunas valoraciones en términos de los aprendizajes adquiridos y de aquellos que realmente serían los exigibles para el ámbito de cada tarea.

Resultados del ítem 1

En la tabla 5.3 presentamos los resultados referentes al **ítem 1**, que denominamos como "Tiempo recorrido en los 100 metros". Recordemos que este ítem es una tarea que se encuadra en los problemas y situaciones que señalan de donde surge el concepto de media aritmética, y con el mismo, se evalúa la media como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición, la influencia de los valores atípicos, y también cómo se confunde la media con otras medidas.

A petición del profesor de educación física, 10 alumnos registraron de forma independiente y simultáneamente, el tiempo recorrido por un estudiante en la distancia de los 100 m. Los tiempos registrados (en segundos) fueron los siguientes:15'05; 14'95; 15'05; 15; 10; 15; 14'90; 15; 14'95; 15; ¿Qué tiempo debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y por qué?

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
ALG	29	22'3	24	24'7
MODA	41	31'5	21	21'6
<VALOR	11	8'5	6	6'2
>VALOR	2	1'5	--	--
MEDIA≈	3	2'3	--	--

ALGe	6	4’6	5	5’2
MODAR	--	--	5	5’2
NJ	1	0’8	3	3’1
SC	21	16’2	23	23’7
NC	16	12’3	10	10’3
Total	130	100	97	100

Tabla 5.3. Frecuencias y porcentajes en el ítem 1, referente al primero estudio de la fase general.

Los datos de la tabla revelan lo difícil que ha resultado este ítem para los alumnos. No encontramos ningún alumno que lo haya resuelto considerando la exigencia que requería, es decir, excluir el dato 10 segundos, para calcular la media con los restantes valores. La respuesta que se aproximó a la resolución requerida, consistió en sumar todos los datos y dividir el total por el número de datos (ALG), que ha sido manifestada por un 22’3% de los alumnos de secundaria y un 24’7% de los estudiantes para profesores. Estos alumnos consideran la media como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición, sin embargo no reconocen la influencia de los valores atípicos en su cálculo. Un 31’5% de alumnos de secundaria y un 21’6% de alumnos de profesorado en formación sugieren que se debe considerar el valor más frecuente (MODA) como la mejor estimación del tiempo real que se pretende determinar en el problema, una medida que no posee esta propiedad en las condiciones planteadas. Algunos alumnos, consideran el dato menor (<VALOR), con un 8’5% en secundaria y 6’2% en los universitarios y otros presentan diversos razonamientos para estimar el tiempo deseado. En el grupo de secundaria encontramos 2 alumnos que sugieren utilizar el dato mayor (>VALOR), 3 alumnos que redondean la media calculada con todos los valores al dato que creían más cercano a la misma (MEDIA≈), mientras que en los universitarios constatamos un 5’2% que redondea la mayor parte de los datos al valor 15 segundos (MODAR), considerando la proximidad a aquel valor.

En las dos muestras de análisis se hace notar, de forma especial, los porcentajes de alumnos que no contestan (NC) el ítem y los que presentan un argumento con significado incompleto, confuso o incoherente (SC). Al respecto, en la primera población de estudio, los datos muestran un 12’3% y 16’2%, respectivamente, mientras que en los profesores en formación los datos que correspondieron a aquellas categorías fueron 10’3% (NC) y 23’7% (SC).

Cuando caracterizamos las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión, observamos que, en este ítem, los alumnos no hacen conexiones precisas entre los diferentes aspectos intrínsecos al concepto de la media aritmética. En la tabla 5.4 mostramos los resultados referidos a este ítem.

	Secundaria		Universitarios	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	16	12,3	10	10,3
P	14	10,8	11	11,3
U	15	11,5	6	6,2
M	47	36,2	36	37,1
T	38	29,2	34	35,1
R	0	0	0	0
Total	130	100	97	100

Tabla 5.4. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 1.

Los datos muestran que ninguna de las respuestas presentadas en este problema estuvo asociada con el nivel relacional, tanto en los alumnos de secundaria, como en los profesores en formación. El reconocimiento de la observación atípica y su consecuente exclusión en el cálculo de la media, al usar esta medida como el mejor estimador del tiempo que el estudiante recorrió en los 100 metros, resultó ser una situación completamente desconocida para los alumnos.

En primer lugar, la mayor parte de las respuestas, se situaron en el nivel multiestructural, con 47 (36'2%) alumnos en secundaria y 36 (37'1%) alumnos en la facultad de educación. En segundo lugar se situaron las respuesta del nivel de transición, de las que encontramos 38 (29'2%) respuestas del grupo de secundaria y 34 (35'1%) de los profesores en formación. En el primer caso, es decir, con respecto al nivel multiestructural, las respuestas indican que los alumnos tienen ciertos conocimientos, como resultado de la enseñanza que han recibido, pero no saben asociarlos con el objetivo de la tarea. Unos alumnos escriben el algoritmo de cálculo de la media de forma incorrecta; otros señalan el valor más frecuente, es decir, la moda; y otros utilizan la mediana, incluso mal definida, como mejores estimadores, entre otras respuestas.

En el segundo caso, las respuestas presentadas, revelan un conocimiento cercano al nivel relacional, aunque para ello faltase de ciertos refinamientos. Estas respuestas indican que el alumno reconoce la media como la medida que reúne la propiedad de mejor estimador en las circunstancias dadas, faltándoles solamente una apreciación más depurada de los datos proporcionados en el problema, lo que se debía traducir en la exclusión del valor atípico antes de calcular la media, para que el razonamiento fuese caracterizado como del referido nivel.

Las respuestas de tipo uniestructural se destacaron más en la secundaria, con un 11'5%, que en los estudiantes para profesores, con un 6'2%. Algunas respuestas caracterizadas en este nivel, se basaron en argumentos derivados de las propias experiencias de los alumnos, otras se centraron en un aspecto del dato o consideraron un atributo en concreto, estimándolos suficiente para la situación. En definitiva, parece que el alumno quiere contestar, encontrar una respuesta, no importándole si realmente es, o no, el argumento deseable.

Los datos relacionados con las respuestas de nivel preestructural fueron muy parecidos en los dos niveles de enseñanza. Encontramos un 11% de respuestas de este tipo en los estudiantes de secundaria y en los futuros profesores. En general, sus argumentos muestran una laguna en la comprensión del problema presentado y del alcance del mismo. Quizá fue por eso por lo que algunos alumnos sólo proporcionan una afirmación sin argumentar o dan justificaciones incompletas.

De forma global, los resultados evidencian que los alumnos desconocen el uso de la media como la medida que tiene la propiedad de mejor estimador de un conjunto de datos en presencia de errores de medición, y la influencia que tienen los valores extremos en su cálculo. Aunque el reconocimiento de los valores atípicos sea una de las principales dificultades que tienen los alumnos en el cálculo de la media aritmética, nos sorprende de forma considerable, que de los alumnos evaluados no encontrásemos al menos uno que se diera cuenta de la existencia del dato extraño en el conjunto de valores que se proporcionan, si atendemos a variabilidad de nuestra población, en donde creemos que, al menos, los universitarios poseerán diferentes experiencias de la vida, para indagar sobre lo poco probable que resultaría encontrar un alumno que haga un tiempo de 10 segundos en la carrera de 100 metros, ya que muchos atletas profesionales de alto rendimiento no llegan siquiera a obtener esta marca.

Las dificultades con los valores atípicos también fueron observadas en el estudio de Batanero, Godino y Navas (1997), con maestros de primaria en formación, donde explican que las mismas se deben a la descontextualización de la enseñanza de la estadística recibida en sus estudios previos y la falta de un conocimiento de lo aprendido. Nosotros estamos de acuerdo con este planteamiento, pues, constatamos, a través de una encuesta realizada a profesores que imparten la asignatura de estadística, que, en general, los conocimientos sobre la influencia de los valores, y sobre cuándo se debe o no descartarlos en el cálculo de la media, no son abordados de forma expresa.

Resultados del ítem 2

El **ítem 2**, que denominamos "En una clase de ciencias" evalúa básicamente los mismos aspectos expresados en el primer ítem, con la diferencia de que aquí, nos encontramos ante una pregunta de respuesta de elección múltiple. Los resultados encontrados en este ítem se muestran en la tabla 5.5.

Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación: 6'2; 6'0; 6'0; 15'3; 6'1; 6'3; 6'2; 6'15; 6'2
Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías? ...

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
ALG	61	46,9	41	42,3
MODA	45	34,6	40	41,2
DEC	2	1,5	4	4,1
DATIP	19	14,6	12	12,4
NC	3	2,3	--	--
Total	130	100	97	100

Tabla 5. 5. Frecuencias y porcentajes en el ítem 2, en el estudio de la fase general.

Los datos sobre este ítem, muestran que un número considerable de alumnos de secundaria (61'5%) y profesores en formación (54'7%) reconocen que la media es la medida adecuada para estimar un conjunto de datos en presencia de errores de medición (ALG y DATIP). Sin embargo, no todos ellos atendieron a la influencia que tiene el valor atípico dado, en el cálculo de la media. Como puede verse, sólo un 14'6% de alumnos de secundaria y un 12'4% de alumnos universitarios parecen reconocer que este tipo de valores afecta al cálculo y que, por eso, es necesario descartarlo al calcular la media (DATIP). Este desconocimiento llevó a que el 46'9% de secundaria y el 42'3% de universitarios eligieran la alternativa, que consiste en sumar todos los datos sin excluir el dato atípico (ALG).

Vemos también que un número importante de alumnos (34'6% en secundaria y 41'2% en los universitarios) eligen la opción que se refiere al uso del valor más repetido (MODA), no percibiendo que este valor no reúne la propiedad de mejor estimador. El porcentaje de alumnos que sugiere usar el valor con más cifras decimales (DEC) y los que dejan el ítem en blanco (NC) ha sido insignificante.

En cuanto a la caracterización en niveles de comprensión, los datos referidos se muestran en la tabla 5.6.

	Secundaria		Universitarios	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	3	2’3	0	0
P	0	0	0	0
U	0	0	0	0
M	47	36,2	44	45,4
T	61	46,9	41	42,3
R	19	14,6	12	12,4
Total	130	100	97	100

Tabla 5.6. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 2.

Las opciones del problema sólo reflejaban respuestas asociadas con el nivel multiestructural, con el de transición entre multiestructural y relacional, y con el nivel relacional.

El número de sujetos que indicó la opción de nivel relacional fue reducido, no obstante a que, dado el tipo de pregunta (de respuesta de elección múltiple), cada alternativa ofrecía, por sí misma, la posibilidad de ver qué respuesta era más factible respecto a lo que la tarea requería. Este nivel, se asoció con la elección de la opción que sugiere descartar el valor 15’3, y calcular la media sólo con los otros 8 números, para determinar, con la mayor precisión posible, el peso real de un objeto pequeño, que ha sido medido con un mismo instrumento. Solamente encontramos, 19 (14’6%) alumnos de secundaria y 12 (12’4%) en el grupo de alumnos universitarios, lo que muestra que no hay diferencias importantes en términos de razonamiento entre los dos grupos, en la resolución de esta tarea.

En relación con las respuestas en el nivel de transición, éstas reflejaban que los alumnos reconocen la media aritmética como la mejor estimación en presencia de errores de medida pero sin atender al valor atípico. Los datos muestran 61 (46’9%) alumnos de secundaria que razonaron en este sentido y 41 (42’3%) alumnos universitarios.

Los datos referentes a las respuestas caracterizadas en el nivel multiestructural se corresponden con los estudiantes que indican las opciones referentes al valor más repetido o al uso del valor con más cifras decimales. En este sentido respondieron 47 (37%) y 44 (45’4%) alumnos, en secundaria y universidad, respectivamente.

Resultados del ítem 3

En el **ítem 3**, denominado “Número de preguntas”, se quiere resumir un conjunto de datos mediante un valor típico. Aquí, no se pone de manifiesto la circunstancia de error de medición. Esta es la diferencia con los dos ítems anteriores. De

las cuatro alternativas presentadas el alumno debía decantarse por una de ellas. Los resultados encontrados se muestran en la tabla 5.7.

Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación: 0;5;2;22;3;2;1;2
La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomendarías? ...

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
MODA	20	15,4	22	22,7
ALG	67	51,5	38	39,2
DATIP	10	7,7	6	6,2
DCERO	29	22,3	30	30,9
NC	4	3'1	1	1
Total	130	100	97	100

Tabla 5.7. Frecuencias y porcentajes en el ítem 3, en el estudio de la fase general.

La opción correcta es la que propone sumar los ocho números y dividir la suma por el total de datos (ALG). Más de la mitad (51'5%) de los alumnos de secundaria eligieron esta opción, contra un 39'2% de profesores en formación. Un 15'4% de estudiantes de secundaria elige el valor más frecuente (MODA) como la solución para el problema, mientras que el porcentaje de alumnos universitarios que consideran esta opción es del 22'7%.

En los dos grupos observamos un número importante de alumnos que erróneamente entienden que se debe suprimir el cero en el cálculo de la media (DCERO), obteniendo esta opción un 21'5% de alumnos de secundaria y 30'9% en el grupo de universitario. La alternativa que sugiere descartar el número 22 y después determinar la media de los otros 7 números (DATIP), fue la menos elegida por los estudiantes de los dos niveles de enseñanza, con un 8'5% en secundaria y un 6'2% en universidad.

Los datos correspondientes a la caracterización en niveles de comprensión se muestran en la tabla 5.8.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	4	3,1	1	1,0
P	0	0	0	0
U	0	0	0	0
M	49	37,7	52	53,6
T	10	7,7	6	6,2
R	67	51,5	38	39,2
Total	130	100	97	100

Tabla 5.8. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 3.

Los alumnos de secundaria proporcionaron más respuestas asociadas con el nivel relacional que los alumnos de la enseñanza superior, en concreto, un 51'5% frente a un 39'2%. A través de sus respuestas, recomendaban utilizar el valor medio calculado con todos los valores, mostrando, así, que reconocen el uso de la media aritmética como valor representativo de un conjunto de datos.

Por otro lado, se observa que el grupo de estudiantes universitarios presenta más respuestas relacionadas con el nivel multiestructural (53'6%), en comparación con los estudiantes de secundaria (37'7%), contrariamente a lo que se podía esperar. Es decir, hay más alumnos universitarios que de secundaria que no tienen en cuenta la influencia del cero en el cálculo de la media o consideran la moda como el valor que mejor representa los datos en la tarea dada.

Notamos una cierta similitud, en los porcentajes de respuestas situadas en el nivel de transición en los dos niveles de enseñanza.

Resultados del ítem 4

En la tabla 5.9 presentamos los resultados del **ítem 4**, denominado "Hijos por familia". La respuesta correcta es la opción c): "Hay un total de 110 hijos en la ciudad".

El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Si el promedio de niños por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo?
a. La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños.
b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.
c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.
d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.
e. El número más común de niños en una familia es 2.

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
MED	13	10,0	17	17,5
RDEC	6	4,6	8	8,2
STOTAL	60	46,2	37	38,1
FAMADUL	19	14,6	7	7,2
MODA	29	22,3	25	25,8
SC	--	--	1	1,0
NC	3	2,3	2	2,1
Total	130	100	97	100

Tabla 5. 9. Frecuencias y porcentajes en el ítem 4, en el estudio de la fase general.

De acuerdo con los datos de la tabla, la alternativa más preferida fue la c) (STOTAL), con un 46'2% de alumnos de secundaria y un 38'1% de profesores en formación. Como premisas del problema, se conocía la media y el total de datos.

Invirtiendo la fórmula de la media aritmética el alumno debía determinar la suma total, que, en este caso, es el total de hijos.

Además, podemos ver que algunos alumnos confunden la media con la moda (MODA) o con la mediana (MED). En el primer caso los datos muestran un 22'3% de estudiantes de secundaria frente a un 25'8% de profesores en formación, mientras que en el segundo caso los registros fueron del 10% y 17% respectivamente.

Los datos referentes a los alumnos que redondean la media a un valor entero (RDEC), no creyendo que esta pueda ser un valor decimal, por el contexto presentado, indican un 10% de preferencias en secundaria y un 17'5% de estudiantes para profesores, mostrando cómo hasta los futuros profesores necesitan ser instruidos en este aspecto.

También observamos alumnos que confunden los términos "familia" y "adulto" (FAMADUL), quizá por no analizar de forma adecuada lo que pide el problema, aunque el dato fue más notable en los alumnos de secundaria, donde encontramos más del doble del porcentaje correspondiente a los profesores en formación.

Cabe destacar que en la fase exploratoria, la opción que más se eligió fue la e) que refleja una cierta proximidad entre la media y la moda (MODA) con un 55'3% en la muestra de Tenerife, aunque la muestra era de menor tamaño. Respecto a la alternativa correcta, el mayor porcentaje se ha encontrado también en los alumnos de Tenerife (35'1%).

Los resultados sobre la caracterización jerárquica de las respuestas de los alumnos se indican en la tabla 5.10.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	3	2,3	2	2,1
P	0	0	0	0
U	19	14,6	7	7,2
M	48	36,9	51	52,6
T	0	0	0	0
R	60	46'2	37	38,1
Total	130	100	97	100

Tabla 5.10. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 4.

Los datos muestran más respuestas del nivel relacional en los alumnos de secundaria (46'2%) que en los profesores en formación (38'1%), lo que parece indicar que, en la tarea en análisis, hay más alumnos de secundaria que tienen una visión más completa e integral sobre el algoritmo de la media aritmética que los profesores en

formación. Los datos relativos a las respuestas de tipo multiestructural parecen reforzar la conclusión anterior, ya que, como puede verse, los profesores en formación son los que presentan más respuestas de este tipo (52'6%), comparados con los alumnos de secundaria (36'9%). Esto parece apuntar, a que la idea sobre la concepción de la media, en la mayor parte de los profesores en formación, carece todavía de formación y complementariedad. En este nivel, se esperaba que fuesen capaces de distinguir plenamente la media de la moda, o de la mediana, reconocer los diferentes contextos, o conocer que las tres medidas sólo se aproximan cuando la distribución presenta una cierta forma simétrica, pero si la distribución es asimétrica, entonces la media se desplaza hacia la cola más larga.

Los datos referentes al nivel uniestructural no parecen bastante destacables en la muestra de estudiantes universitarios (7'2%).

Resultados del ítem 5

El **ítem 5**, que denominamos "Hijos", evalúa distintos aspectos sobre la media ponderada. Los resultados encontrados en este ítem se muestran en tabla 5.11, mostrando que este ítem ha resultado particularmente difícil para los alumnos.

Hemos preguntado en Luanda a determinadas familias sobre el número de hijos que tenían y obtuvimos los siguientes datos:

10 familias no tenían hijos
7 familias tenían 1 hijo
5 familias tenían 2 hijos
3 familias tenían 3 hijos
No hubo ninguna familia con 4 o más hijos

¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
ALGPI	1	0,8	--	--
ALGPOND	6	4,6	5	5,2
ALGPOND≈	1	0,8	5	5,2
MEDEXT	2	1,5	--	--
MSOPER	1	0,8	1	1
NHSOPER	24	18,5	24	24,7
SF/3	2	1,5	1	1
SF/4	3	2,3	3	3,1
SF/5	2	1,5	--	--
SF/ST	5	3,8	9	9,3
SF/SX	12	9,2	9	9,3
SF/SXI	1	0,8	--	--
ST	1	0,8	--	--
ST/4	1	0,8	--	--
ST/SXI	--	--	1	1

SX.SF	1	0,8	--	--
SX/2	11	8,5	--	--
SX/3	12	9,2	5	5,2
SX/4	6	4,6	5	5,2
SX/4≈	3	2,3	--	--
SX/SF	7	5,4	1	1
SX/SF≈	--	--	1	1
SXI/SF	1	0,8	--	--
SC	16	12,3	17	17,5
NC	11	8,5	10	10,3
Total	130	100,0	97	100

Tabla 5.11. Frecuencias y porcentajes en el ítem 4, en el estudio de la fase general.

Sólo un 5'4% de alumnos de secundaria y un 6'2% de estudiantes para profesores resolvió correctamente este ítem, utilizando el algoritmo de media ponderada (ALGPOND) o indicando el valor medio requerido sin mostrar las operaciones (MSOPER). De las otras respuestas destacamos aquellas que siguen diferentes estrategias incorrectas, de las cuales algunas vamos agrupar en categorías generales, para facilitar la interpretación de los resultados.

Las categorías SF/3, SF/4 y SF/5 podrían agruparse bajo una misma categoría general, en la que los alumnos dividen la suma de N valores de frecuencia por esta cantidad (SF/N), es decir, determinan la media de N valores de la frecuencia. Encontramos un 5'3% de alumnos en secundaria que usan este razonamiento y un 4'1% de alumnos universitarios.

Otra estrategia consistió en dividir la suma de los valores de frecuencia por la suma de los valores de la variable (SF/SX), considerando, en ocasiones, el dato irrelevante "*no hubo ninguna familia con 4 o más hijos*" que se ofrece en el problema (SF/SXI). Estas actuaciones han sido constatadas en un 10% de alumnos de secundaria frente a un 9'3% de profesores en formación.

También encontramos respuestas que realizan el proceso inverso al descrito anteriormente, es decir, dividir la suma de los valores de variable por la suma de los valores de frecuencia (SX/SF), existiendo también respuestas en las que en este mismo proceso incluyen el dato irrelevante (SXI/SF), y otras que redondean el resultado a un valor entero (SX/SF≈). En total, encontramos un 6'2% y un 2%, en los de secundaria y universidad, respectivamente.

En otras respuestas, dividen la suma de N valores de la variable por esta cantidad, o sea, calculan la media de estos N valores (SX/2, SX/3, SX/4 y SX/4≈). Los que usaron la estrategia SX/4≈, redondearon el resultado a un valor entero; los que usaron la estrategia SX/3 omitieron el dato "no tenían hijos", supuestamente por no

atender al valor nulo; los que utilizaron la estrategia SX/2 sumaron todos los valores y dividieron por 2, existiendo algunos que denotaron el resultado como "Me=3", pareciendo que se referían a la mediana. En general, este razonamiento ha sido observado en un 24'6% de estudiantes de secundaria frente a 10'4% de profesores en formación.

Otra estrategia errónea llamativa, aunque haya sido más en la muestra de profesores en formación (con un 9'3%), fue dividir la suma de los valores de frecuencia por la suma total (SF/ST). De igual forma, un dato bastante importante es que algunos indicaron un valor erróneo, como el valor medio pretendido, sin mostrar operaciones (NHSOPER), a pesar de que se les había advertido que debían mostrar los pasos dados para encontrar una solución. Observamos un 18'5% de alumnos de secundaria que proceden de esta manera, frente a un 24'7% de estudiantes para profesores.

Los resultados muestran además, un número importante de alumnos que no contestan (NC) o presentan transformaciones incoherentes que no hemos clasificado (SC).

Las diferentes actuaciones de los alumnos en la resolución de esta tarea, fueron, posteriormente, caracterizadas de forma jerárquica, con las frecuencias y porcentajes que se ofrecen en la tabla 5.12.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	11	8,5	10	10,3
P	0	0	0	0
U	9	6,9	8	8,2
M	101	77,7	68	70,1
T	2	1,5	5	5,2
R	7	5,4	6	6,2
Total	130	100	97	100

Tabla 5.12. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 5.

Este análisis, muestra que de los 227 alumnos (secundaria y profesores en formación) el 94'3% no han sido capaces de enlazar los elementos que se requieren para calcular adecuadamente la media ponderada, lo que evidencia las enormes dificultades que ha presentado esta tarea para los alumnos.

No hubo, prácticamente, diferencias entre las actuaciones de los alumnos de secundaria y los profesores en formación y, en particular, las respuestas de nivel relacional han sido extremadamente reducidas en las dos muestras de estudio. Sólo un 5'4% de alumnos de secundaria y un 6'2% de profesores en formación estuvieron en ese

nivel, lo que indica que cuestiones como: establecer diferencia entre datos de variable y datos de frecuencia; las posiciones correspondientes a la suma total y a la suma de las frecuencias, en la formula de cálculo; que el total de datos es la suma de los valores de frecuencia; que no se debe redondear el resultado cuando este es un valor decimal, entre otros aspectos, no son del dominio pleno de la mayoría de los alumnos.

Más de la mitad de alumnos en cada grupo de estudio presentan una respuesta de nivel multiestructural, confundiendo el rango a que pertenece cada dato, determinando la media de una clase particular de datos, aunque en algunos casos plantearon correctamente la fórmula de la media ponderada.

Los datos relativos a las respuestas del nivel uniestructural, no son significantes. Estas respuestas se refieren a aquellas que exhibían procesos de resolución incompletos y/o incoherentes, transformaciones cuyo significado no era perceptible, tanto en secundaria como en los profesores en formación. Tampoco son significativas las respuestas del nivel de transición.

Los resultados de la fase exploratoria, principalmente los que encontramos con los alumnos de la muestra de Luanda, fueron análogos a los presentados en este estudio. En aquella ocasión, sólo un 2'7% de los 146 alumnos proporcionaron una respuesta correcta, frente a un 34% de 94 alumnos en Tenerife que lo resolvieron con todos los requerimientos.

Resultados del ítem 6.A.a)

El **ítem 6.A.a),** es el apartado a) de la primera parte del problema "Gráfico de notas", en el cual, el objetivo fundamental es evaluar si los alumnos son capaces de extraer los datos presentados gráficamente y calcular la media aritmética. Los resultados encontrados en este apartado se muestran en la tabla 5.13.

Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de Matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso se muestran en los gráficos…

6.A.a) *El Grupo 1 tiene una nota media de 11. Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 11.*

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
ALGPOND	21	16,2	15	15,5
ALGS	17	13,1	18	18,6
MEDX	35	26,9	16	16,5
MEXTR	2	1,5	--	--
MEDR	11	8,5	2	2,1
MeX	1	0,8	1	1,0
SC	20	15,4	24	24,7
NC	23	17,7	21	21,6
Total	130	100	97	100

Tabla 5.13. Frecuencias y porcentajes en el ítem 6.A.a), en el estudio de la fase general.

Los sujetos que comprobaron correctamente que la media del grupo 2 era también igual a 11 valores, lo hicieron por una de las dos vías: utilizando el algoritmo de media ponderada (ALGPOND) o mediante el uso del algoritmo de media simple (ALGS). En general, un 29'3% de estudiantes de secundaria resuelve correctamente la tarea, frente a un 34'1% de profesores en formación que procede de la misma forma. Los datos de la fase exploratoria habían señalado enormes dificultades de los alumnos de la muestra de Luanda, al resolver esta actividad, con sólo un 6'1% de aciertos.

Un dato de interés es que una parte importante de los alumnos de secundaria (26'9%) han realizado una actuación errónea, que consiste en calcular la media de todos los valores que se refieren a la escala del eje X. También algunos profesores en formación (16'5%) se han decantado por esta vía. Esta actuación ya la habíamos verificado en la fase exploratoria, confirmando, una vez más, la dificultad que los alumnos tienen al leer datos de una gráfica. Una estrategia errónea semejante, fue la que presentó el 8'5% de alumnos de secundaria, calcularon la media de los valores de la escala del eje X, sobre los cuales se construyeron los rectángulos que indican la frecuencia de las notas en el gráfico (MEDR).

Por otro lado, los datos muestran más estudiantes universitarios que no contestan (NC) o presentan transformaciones confusas y/o incoherentes (SC), que estudiantes de secundaria, cuyos porcentajes se revelan algo llamativos.

Los datos concernientes a la caracterización de las respuestas en niveles de comprensión, se muestran en tabla 5.14.

	Secundaria		Universitarios	
	N	%	N	%
NC	23	17,7	21	21,6
P	0	0	0	0
U	9	6,9	12	12,4
M	60	46,2	31	32,0
T	0	0	0	0
R	38	29,2	33	34,0
Total	130	100	97	100

Tabla 5.14. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 6.A.a).

En general, las respuestas de los alumnos se asociaron más con el nivel multiestructural, lo que evidencia sus limitaciones en la lectura de datos presentados en una gráfica. Alrededor de la mitad de alumnos de secundaria (46'2%) presentaron respuestas que se clasificaron en este nivel, mientras que en los profesores en formación se dio un 32%. En este nivel se incluyeron aquellas respuestas en que los alumnos calcularon la media de todos o de algunos valores del eje X; los que indicaron la media como mediana (Me); los que determinaron la media de los valores extremos del eje X y algunas respuestas en las cuales los alumnos plantearon el algoritmo de cálculo de la media aritmética de forma errónea.

Respecto a las respuestas clasificadas en el nivel relacional, se observa, un 29'2% y un 34% entre alumnos de secundaria y profesores en formación respectivamente. Estos datos se refieren a los estudiantes que, además de extraer adecuadamente los datos de la gráfica, fueron capaces de comprobar la exigencia de la tarea, situando correctamente aquellos datos en la fórmula que proporcionaban. En este sentido, sus acciones no sólo mostraban que habían adquirido el saber necesario para resolver la tarea, sino que manifestaban, también, el poder (capacidades, habilidades, etc.), reflejando la unidad entre la apropiación del conocimiento y su aplicación. Considerando que éstas son las acciones deseables en el proceso de enseñanza y aprendizaje, los porcentajes encontrados no se revelan nada satisfactorios, por lo que creemos es imprescindible insistir más en este tipo de actividades durante las clases.

Aunque los datos referentes a las respuestas de nivel uniestructural no hayan sido importantes (6'9% en secundaria y 12'4% en la universidad), nos llama la atención algunas explicaciones y razonamientos dados en este nivel, tales como "*ya está comprobado que la nota del grupo 2 es igual a 11, puesto que los dos grupos tienen los mismos resultados*"; "*multiplicando los valores repetidos por 2, nos dará 110 y como 10 no está repetido, dividimos por 10 lo que nos da 11*"; "*existe disparidad en las notas de los dos grupos*", entre otros, que aparte de revelar una debilidad cognitiva en

nuestros alumnos, muestra también una falta de regulación y control en la resolución de la tarea.

Resultados del ítem 6.A.b)

Los resultados referentes al **ítem 6.A.b)**, que es también un apartado de la primera parte del problema "Gráfico de notas", se muestran en la tabla 5.15. En este ítem se evalúa el criterio utilizado por los alumnos en la comparación de dos muestras de medias iguales, presentadas gráficamente.

Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de Matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso se muestran en los gráficos… **6.A. b)** *¿Qué grupo te parece mejor? Justifícalo.*

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
IGUMEDIA	33	25,4	23	23,7
NAPROB	32	24,6	26	26,8
MNOTA	22	16,9	8	8,2
MHOMO	6	4,6	5	5,2
NO<9	1	0,8	--	--
MEDAP	--	--	1	1,0
SC	13	10,0	20	20,6
NC	23	17,7	14	14,4
Total	130	100	97	100

Tabla 5.15. Frecuencias y porcentajes en el ítem 6.A.b), en el estudio de la fase general.

Esta tarea se ha mostrado igualmente difícil para los estudiantes, tal como sucedió en la fase exploratoria. En los dos grupos son escasos los estudiantes que presentan argumentos plausibles, al comparar los gráficos exhibidos. El factor de comparación debía residir en el análisis de la variabilidad de las notas en cada grupo, es decir, ver en qué muestra hay mayor concentración de notas en torno a la media, para decidir qué grupo es más homogéneo (MHOMO). De la tabla vemos que sólo un 4'6% de alumnos de secundaria presenta justificaciones acordes a la situación dada, frente a un 5'2% de profesores en formación que también proceden de la misma forma.

Un número considerable de alumnos de los dos niveles de enseñanza, se declinó por argumentos que reflejan tener en cuenta solamente una parte de la distribución, basándose por ejemplo, en el número de alumnos aprobados (NAPROB), (un 24'5% de alumnos de secundaria y un 26'8% en los universitarios); o en el número de alumnos con mayor nota (MNOTA), (un 16'9% en los alumnos de secundaria y un 8'2% en los alumnos universitarios).

De igual forma, observamos que el 25'4% de estudiantes de secundaria y el 23'7% de profesores en formación no ven diferencias entre los dos gráficos, por la igualdad de las medias (IGUMEDIA), no siendo este criterio por sí solo suficiente para el análisis.

Los datos relativos a los alumnos que no contestan (NC) o presentan una justificación confusa y/o incomprensible (SC) son, también, llamativos.

La caracterización de las respuestas en niveles de comprensión muestra visiblemente los tipos de razonamientos que predominaron en esta tarea, como se puede ver en tabla 5.16.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	23	17,7	14	14,4
P	--	--	--	--
U	5	3,8	13	13,4
M	63	48,5	42	43,3
T	33	25,4	23	23,7
R	6	4,6	5	5,2
Total	130	100	97	100

Tabla 5.16. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 6.A.b).

La mayor parte de las respuestas se identificaron con el nivel multiestructural, verificándose un 48'5% en secundaria, frente a un 43'3% en profesores en formación. Estos datos se corresponden con los alumnos que consideraron como criterios de comparación, el existir notas más altas; mayor número de aprobados; notas inferiores a 9 (NO<9), o que presentaron argumentos incomprensibles.

El porcentaje relativo a las respuestas de tipo relacional, o sea, aquellas en que se considera la homogeneidad al comparar los dos conjuntos de datos, estuvo muy lejos del deseable, como se vio en el análisis de la tabla previa. Sin embargo, un porcentaje casi igual de estudiantes de los dos grupos (25'4% en secundaria y 23'7% en los profesores en formación) usa un criterio formal de comparación, analizando las medias, aunque este factor, por sí solo no era suficiente para decidir si había, o no, diferencias entre las dos distribuciones. Este hecho hizo que estas respuestas se clasificasen en el nivel de transición entre el nivel multiestructural y el nivel relacional.

Las respuestas situadas en el nivel uniestructural, es decir, los argumentos incompletos, y en algunos casos sin sentido, no fueron reveladores, aunque se hicieron notar más en los estudiantes universitarios (13'5%). Las características de tipo preestructural no fueron registradas en este ítem.

Resultados del ítem 6.B.

Con relación al **ítem 6.B**, que es la segunda parte del problema "Gráfico de notas", el número de alumnos que indica el criterio adecuado al comparar los dos gráficos presentados en la tarea, aumentó relativamente con respecto al encontrado en el ítem anterior. Ambos problemas evalúan los mismos objetivos, diferenciándose solamente en cuanto al tipo de respuesta (abierta o de elección múltiple). Pensamos que eso se debe a que aquí la tarea se ha propuesto con opciones elegibles.

Los resultados encontrados se muestran en la tabla 5.17.

6. B *¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?*
a) El Grupo 1 es mejor porque en el primero están los alumnos que obtuvieron más nota.
b) El Grupo 2 es mejor porque en el mismo hay más aprobados.
c) No hay diferencia entre los dos grupos, porque la media es la misma en ambos grupos.
d) A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo.
e) Ninguna de las afirmaciones anterior

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
MNOTA	17	13,1	10	10,3
NAPROB	23	17,7	23	23,7
IGUMEDIA	51	39,2	25	25,8
MHOMO	27	20,8	25	25,8
NING	3	2,3	8	8,2
SC	--	--	1	1,0
NC	9	6,9	5	5,2
Total	130	100	97	100

Tabla 5.17. Frecuencias y porcentajes en el ítem 6.B, en el estudio de la fase general.

La opción correcta, la d), que dice "a pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo" (MHOMO), ha sido elegida por un 20'8% de estudiantes de secundaria y por un 25'8% de estudiantes para profesores. En el primero caso, se observa un incremento de un 16'2%, mientras que en el segundo caso estuvo cerca del 21%.

Independientemente de esta situación, los datos muestran que la opción preferida es la que expresa que "no hay diferencias entre los grupos, porque ambos tienen la misma media" (IGUMEDIA), observándose un 39'2% de alumnos de secundaria, y un 25'8% de estudiantes de enseñanza superior. Eso muestra cómo, erróneamente, algunos alumnos sólo atienden a la igualdad de medias para comparar dos muestras, olvidándose del factor variabilidad, que debería ser preponderante en este análisis.

De igual forma, la alternativa, cuyo argumento se basa en la existencia de más alumnos aprobados (NAPROB), fue también una de las más indicadas, tanto por los

estudiantes de secundaria (17'7%) como por los estudiantes para profesores (23'7). Los estudiantes que dejan en blanco el problema (NC), que eligen más de dos opciones (SC) o que marcan la opción "Ninguna de las afirmaciones anterior" (NING) han sido muy pocos, como se muestra en la tabla.

Un análisis más fino sobre las actuaciones de los alumnos en el ítem 6.A.b), de respuesta abierta, entre aquellos que contestan correctamente el ítem 6.B, de respuestas elegibles, se desarrolla en el apartado 5.4 del capítulo que estamos describiendo, donde se ve que no todos los que marcan la opción correcta en el ítem 6.B habían indicado un argumento fundado en el ítem 6.A.b) relacionado, de respuesta abierta.

Las frecuencias y porcentajes en la caracterización jerárquica se muestran en la tabla 5.18.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	9	6,9	5	5,2
P	--	--	--	--
U	3	2,3	7	7,2
M	40	30,8	35	36,1
T	51	39,2	25	25,8
R	27	20,8	25	25,8
Total	130	100	97	100

Tabla 5.18. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 6.B.

Se observa un 30'8% de respuestas de tipo multiestructural en los alumnos de secundaria frente a un 36'1% en los estudiantes para profesores. Esta clasificación se asoció con las afirmaciones dadas en los apartados a) y b), y los casos en que se eligió más de una opción.

La alternativa de comparar dos grupos basándose en la media, constituyó la respuesta de nivel de transición entre el nivel multiestructural y el nivel relacional, ya que se trata de un criterio que requiere de un análisis complementario por la igualdad de las medias. Los datos muestran que hay más alumnos de enseñanza secundaria (39'2%) categorizados en este nivel que futuros profesores (25'8%).

Con relación al nivel relacional, la clasificación consideró aquellos alumnos que eligieron la opción del apartado d) "*A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo*", cuyos datos son los que reflejan la categoría MHOMO, analizada anteriormente en este mismo ítem (20'8% en estudiantes de secundaria y 25'8% en estudiantes para profesores).

Las respuestas clasificadas en el nivel uniestructural no sobresalieron, a pesar de haberse registrado en los dos grupos.

En general, constatamos la ausencia de criterios formales para comparar conjuntos de datos de medias iguales, presentados gráficamente. Las estrategias de comparación basadas en el análisis de las medias, de las sumas totales, de la proporción o porcentaje de casos, o analizando las distribuciones de frecuencia, podrían tener sentido si los grupos fueran de medias diferentes. Sin embargo, tratándose de muestras de igual tamaño y medias iguales, el análisis de la variabilidad es primordial, pues permite ver cómo están espaciados los datos en cada distribución, por lo que creemos transcendental fomentar estas ideas en la enseñanza, combinando una amplitud de situaciones contextualizas.

Resultados del ítem 7.a)

Los resultados encontrados para el **ítem 7.a)** se muestran en tabla 5.19. Este ítem, es el apartado a) del problema 7 ("Familia") y refleja una tarea en que se pide al alumno construir una distribución de 10 elementos, dada la media. El tipo de dato a usar esta limitado, porque se trabaja con una variable cuantitativa discreta.

***7**. La composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas.*
***a)** Indique 10 familias que cumplan este promedio.*

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
DSTOTAL	61	46,9	20	20,6
DSOPER	4	3,1	17	17,5
DDEC	2	1,5	12	12,4
DD&ST	4	3,1	3	3,1
MED/TOT	3	2,3	--	--
TOT/MED	1	0,8	--	--
STPR	1	0,8	5	5,2
ST	5	3,8	2	2,1
DINCOR	2	1,5	13	13,4
DI&ST	11	8,5	--	--
SC	8	6,2	5	5,2
NC	28	21,5	20	20,6
Total	130	100	97	100

Tabla 5. 19. Frecuencias y porcentajes en el ítem 7.a), en el estudio de la fase general.

La mitad de los alumnos de secundaria y el 48'1% de estudiantes para profesores presentó un conjunto de datos que satisfacía las condiciones del problema, utilizando dos vías. Por un lado, aquellos que determinan la suma total, invirtiendo el

algoritmo de cálculo de la media (DSTOTAL) y por otro lado, los que solamente presentan la distribución, sin exhibir operaciones (DSOPER). Los resultados referentes a la fase exploratoria, nos habían proporcionado un 27'7% de alumnos de secundaria de Tenerife que indicaron una distribución, determinando previamente la suma total, y otro 22'3% que sólo presentó la distribución, sin mostrar las operaciones que les habían permitido llegar a tal conjunto de datos. En la muestra de alumnos de secundaria de Luanda, el porcentaje de alumnos que proporcionó una composición de 10 familias que cumplía los requisitos del enunciado fue extremadamente bajo (3'4%), y lo hicieron por la vía del cálculo de la suma total.

En cuanto a los procedimientos incorrectos, observando los datos de nuestro estudio general, se nota, en los estudiantes para profesores, un 12'4% que presentan distribuciones con valores decimales, sin mostrar operaciones (DDEC) y 3'1% dan una distribución de mismo tipo, si bien determinan previamente la suma total (DD&ST). Estos alumnos no reconocen que el contexto del problema no permite usar estos datos; el 13'4% da una distribución, que aunque no contiene valores decimales, sus valores tienen una suma total superior o inferior a la suma total real, que no han calculado previamente (DINCOR), por lo cual no cumple con los requisitos del enunciado; el 5'2% encuentra la suma total, planteando, erróneamente, una proporción (STPR); y un 2'1% que determina solamente la suma total (ST), no proporcionando ningún conjunto de valores.

En secundaria, los datos referente a los alumnos que presentan una composición de familias con valores decimales, determinando previamente la suma total (DD&ST) o sin exhibir operaciones adicionales (DDEC) fue 3'1% y 1'5% respectivamente, siendo este último muy bajo, comparado con los profesores en formación. Lo mismo se puede decir con respecto a los que dan una distribución, que no contiene valores decimales y que suma por encima o por debajo de la suma total real, que no han determinado previamente (DINCOR; 1'5%). Encontramos un 8'5% de alumnos de secundaria que actúan en la misma línea, después de haber encontrado la suma correctamente (DI&ST), mientras que ningún profesor en formación había procedido de esta manera. Se observa, además, un número insignificante de alumnos que procede dividiendo la media por el total de datos (MED/TOT; 1'5%), o viceversa (TOT/MED; 0'8%), mostrando no comprender el problema. El porcentaje de alumnos que sólo determina la suma total (ST) fue de 6'2.

Los datos referentes a los alumnos que no contestan (NC) o presentan transformaciones incoherentes (SC) fueron importantes. Con respecto a los que no contestan, se observa un 21'5% en secundaria frente a un 20'6% en los universitarios, mientras que se ve un 6'2% de respuestas confusas (SC) en secundaria ante un 5'2% en los estudiantes para profesores. Los resultados relativos a este ítem, en la fase exploratoria, habían sido bastante llamativos en la muestra de Luanda (79'5% de NC y 12'3 de SC).

La caracterización de las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión, se presenta en la tabla 5.20.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	28	21,5	20	20,6
P	--	--	--	--
U	9	6,9	4	4,1
M	8	6,2	31	32
T	20	15,4	5	5,2
R	65	50,0	37	38,1
Total	130	100	97	100

Tabla 5.20. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 7.a).

El porcentaje de alumnos que presentan respuestas asociadas con el nivel relacional fue mayor en los estudiantes de secundaria (50%) que en los estudiantes para profesores (38'1%). Estos datos se corresponden con los alumnos que han podido dar una distribución que cumple con los requisitos del enunciado, mostrando, o no, las operaciones que les han permitido llegar a tal resultado.

Contrariamente a lo anterior, las respuestas que se relacionaron con el nivel multiestructural, tuvieron mayor énfasis en los profesores en formación (32%) que en los estudiantes de secundaria (8'5%). Esta clasificación atendió a aquellas respuestas en las cuales el alumno no determina la suma total, pero presenta una distribución que no cumple los requisitos del enunciado, evidenciando, solamente tener la idea de "conjunto de datos". Incluimos también aquellas respuestas en las que los alumnos encontraron casualmente la suma total, estableciendo erróneamente una proporción, aunque después de eso no daban la distribución, y algunas respuestas que mostraban procesos de resolución confusos.

Con relación a las respuestas situadas en el nivel de transición entre el nivel multiestructural y el relacional, la diferencia no fue tan grande entre los dos grupos de alumnos. Notamos un 13'1% en secundaria frente a un 8'2% en los universitarios, cuyas

acciones parecen mostrar que están en el dominio correcto de la tarea. Determinan la suma total, invirtiendo el algoritmo de la media, pero proporcionan una distribución de valores que no cumple las condiciones del problema (suma de los valores por encima o por debajo de la suma total real calculada; distribución con valores decimales), o simplemente, determinan la suma total, sin dar la distribución.

Las respuestas categorizadas en el nivel uniestructural no se destacaron mucho en los dos grupos de estudio. Las mismas, mostraban situaciones en las que los procesos de resolución eran inconsecuentes, incompletos o sin sentido, para el objetivo de la tarea, y en algunos casos, se dividía la media dada por el total de familias, considerando el resultado como la composición de cada familia. Las acciones de estos alumnos, muestran que no contaban con herramientas requeridas para resolver la tarea, aunque parecían buscar el camino de resolución.

Resultados del ítem 7.b)

Los resultados relativos al **ítem 7.b)**, se muestran en la tabla 5.21. Se trata del segundo apartado del problema 7, en el que se pretende que el alumno complete una distribución, de la que se conocen ya dos elementos, y la media.

***7**. La composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas.*
***b)** Si los Pedalés son 5 en casa y los Rodrigues son 2, ¿cómo podría ser la composición de cada una de las otras 8 familias?*

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
DSTOTAL	29	22,3	11	11,3
DSOPER	12	9,2	7	7,2
UA	4	3,1	3	3,1
DDEC	1	0,8	2	2,1
DD&ST	3	2,3	--	--
ST	2	1,5	--	--
DI&ST	3	2,3	3	3,1
DINCOR	11	8,5	26	26,8
STPR	--	--	1	1,0
SD/TOT	1	0,8		
SC	8	6,2	10	10,3
NC	56	43,1	34	35,1
Total	130	100	97	100

Tabla 5.21. Frecuencias y porcentajes en el ítem 7.b), en el estudio de la fase general.

A diferencia de los resultados encontrados en el ítem 9, que constituye el primer apartado del mismo problema, aquí, el porcentaje de alumnos que proporcionó una distribución afín a las condiciones de lo que se pedía, decreció substancialmente. Pero

aún así, encontramos más respuestas correctas (DSTOTAL, DSOPER, UA) en secundaria (34'6%) que en los profesores en formación (21'6%). De estos, la mayor parte determina previamente la suma total (DSTOTAL), notándose concretamente un 22'3% en secundaria y un 11'3% en los universitarios. El 9'2% de estudiantes de secundaria da una distribución sin mostrar cómo han llegado a la misma (DSOPER), frente a un 7'2% en los estudiantes para profesores. El resto de estudiantes, da la misma distribución presentada en el apartado anterior (UA), tras reconocer que cumplía las exigencias del enunciado.

Es considerable, el porcentaje de alumnos que da una distribución que no satisface las condiciones del problema (DDEC, DD&ST, DINCOR, DI&ST), siendo más elevado en los profesores en formación, donde se constata un 32%, ante el 13'9% en los alumnos de secundaria. En particular, el 4'6% de alumnos de secundaria indica una distribución con valores decimales (DDEC, DD&ST), aunque algunos hayan encontrado correctamente la suma total (DD&ST; 2'3%), mientras que en los profesores en formación se destaca el 26'8% de alumnos que presenta una distribución sin valores decimales, pero con una suma total incongruente con la suma total real (DINCOR).

También ha sido llamativo el número de alumnos que no contesta (NC) el ítem, entre los dos niveles de enseñanza, deduciéndose, de los datos obtenidos en las entrevistas, que los mismos no sabían qué hacer.

Los resultados de la fase exploratoria nos habían brindado un 48'9% de alumnos de Tenerife y sólo un 2'7% de alumnos de Luanda que indicaron un conjunto de datos acorde a la situación, y el porcentaje de alumnos que no contesta fue 36 '2% y 75'3%, respectivamente.

Cruzando los resultados del ítem 7.a) y los del 7.b), que se muestran en las tablas 5.22 y 5.23, profundizamos en lo que pasó concretamente con los alumnos que habían contestado correctamente el apartado 7.a) y no procedieron de la misma forma en el apartado 7.b).

Por ejemplo, con respecto a los alumnos de secundaria (Tabla 5.22), de los 65 alumnos que han contestado correctamente el apartado 7. a) (DSTOTAL y DSOPER, en filas), verificamos que 26 (40%) de los mismos se perdieron totalmente al resolver el apartado 7.b) (en columnas), destacándose 7 alumnos que indican una distribución con valores no decimales, que no satisface las condiciones del enunciado (intersección con DINCOR, en columna) y 16 que no contestan (NC).

		Ítem 7. b)											
		DSTOTAL	DSOPER	DDEC	ST	UA	DINCOR	SC	NC	SD/TOT	DI&ST	DD&ST	Total
Ítem 7. a)	DSTOTAL	23	9	0	1	3	7	1	16	0	1	0	61
	DSOPER	0	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
	DDEC	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
	ST	2	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	5
	DINCOR	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2
	SC	0	0	0	0	0	0	3	5	0	0	0	8
	NC	0	0	0	0	0	2	1	25	0	0	0	28
	MED/TOT	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	3
	TOT/MED	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	DI&ST	3	0	0	1	0	1	0	5	0	1	0	11
	DD&ST	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3	4
	STPR	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Total		29	12	1	2	4	11	8	56	1	3	3	130

Tabla 5.22. Cruce de resultados en los ítems 7.a) y 7.b), con los alumnos de secundaria.

Con respecto a los profesores en formación (Tabla 5.23), vemos que de los 37 alumnos que indican una distribución correcta en el apartado 7.a) (DSTOTAL y DSOPER, en filas), alrededor del 46% (17 alumnos) no dio una distribución adecuada en el apartado 7.b), constatándose 8 alumnos que indican una distribución con valores no decimales, con suma total superior o inferior a la suma real (DINCOR), 6 alumnos que no contestaron (NC), 1 alumno que indica una distribución con valores decimales, sin determinar la suma total, y 2 que presentan transformaciones incomprensibles (SC).

		Ítem 7. b)									
		DSTOTAL	DSOPER	DDEC	UA	DINCOR	SC	NC	STPR	DI&ST	Total
Ítem 7. a)	DSTOTAL	9	1	0	1	5	2	2	0	0	20
	DSOPER	1	6	1	2	3	0	4	0	0	17
	DDEC	0	0	0	0	5	2	4	0	1	12
	ST	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2
	DINCOR	0	0	0	0	8	0	4	0	1	13
	SC	1	0	0	0	2	1	1	0	0	5
	NC	0	0	1	0	3	2	14	0	0	20
	STPR	0	0	0	0	0	1	3	1	0	5
	DD&ST	0	0	0	0	0	1	1	0	1	3
Total		11	7	2	3	26	10	34	1	3	97

Tabla 5.23. Cruce de resultados en los ítems 7.a) 7.b), con los alumnos universitarios.

De los resultados anteriores, concluimos que la tarea de completar una distribución se ha presentado más difícil que la tarea de construirla, en las condiciones indicadas. Quizá, porque no se dan cuenta, de que en el caso de completar, sólo hay que redistribuir la diferencia entre la suma total y la suma de los valores ofrecidos, siendo la búsqueda de la suma total la clave para resolver el problema.

La caracterización de las respuestas en niveles de comprensión, muestra más respuestas de nivel relacional en secundaria (34'6%) que en el grupo de estudiantes para profesores (21'6%), como se puede ver en tabla 5.24.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	56	43,1	34	35,1
P	--	--	--	--
U	8	6,2	10	10,3
M	13	10	29	29,9
T	8	6,2	3	3,1
R	45	34,6	21	21,6
Total	130	100,0	97	100,0

Tabla 5.24. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 7.b).

Tal como se describió en el apartado sobre el análisis y categorización de las respuestas, los datos inherentes a esta clasificación, ilustran el porcentaje de alumnos que presentan una distribución ajustada a las condiciones a las que se refieren en el ítem.

El mismo análisis, muestra un porcentaje mayor de respuestas de tipo multiestructural en los profesores en formación (29'9%) que en los estudiantes de

secundaria (10%), notándose cómo los primeros han sido más propensos a ideas generales no concluyentes, una situación análoga a la observada en el ítem 7.a).

Las respuestas vinculadas con el nivel de transición entre el pensamiento multiestructural y relacional, es decir, las situaciones en las que el alumno fue capaz de hallar la suma total, pero presentando una distribución incorrecta, no fueron abundantes. La tabla muestra un 6'2% de alumnos de secundaria y un escaso 3'1% de profesores en formación.

Se observa, asimismo, un 10'3% de profesores en formación y un 6'2% de estudiantes de secundaria que dan respuestas que reflejan ideas incompletas, incoherentes, o confusas, las cuales se incluyeron en el nivel uniestructural.

Resultados del ítem 8.a)

Los resultados referentes al **ítem 8.a),** se presentan en la tabla 5.25. Se corresponde con el apartado a) del problema 8 "Supermercado", en el que se pide al alumno que construya una distribución, dada la media y el número total de datos. Su diferencia con el apartado a) del problema 7, reside en el hecho de que aquí, el alumno puede utilizar el valor de la media, a pesar de ser un valor decimal. Incluso, puede presentar una distribución con todos los valores iguales a la media dada (DMED).

8. *En un supermercado hay 8 marcas diferentes de papas fritas.*
a) *¿Qué precio se puede poner a cada marca para que el precio medio sea de 1'50$?*

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
DSTOTAL	13	10,0	2	2,1
DSOPER	3	2,3	3	3,1
DMED	12	9,2	4	4,1
MED/TOT	14	10,8	11	11,3
TOT/MED	1	0,8	1	1,0
RST	16	12,3	12	12,4
ST	1	0,8	1	1,0
STPR	--	--	5	5,2
DINCOR	14	10,8	22	22,7
DI&ST	--	--	1	1,0
SC	9	6,9	5	5,2
NC	47	36,2	30	30,9
Total	130	100	97	100

Tabla 5.25. Frecuencias y porcentajes en el ítem 8.a), en el estudio de la fase general.

De los datos, observamos que los alumnos han tenido muchas dificultades en la resolución de esta tarea. El porcentaje de respuestas correctas (DSTOTAL, DSOPER, y

DMED), en los alumnos de secundaria, estuvo alrededor del 22%, mientras que en los profesores en formación fue algo más bajo (9'3%). Como se muestra en la tabla, la respuesta adecuada se ha encontrado de tres maneras: dando una distribución, y hallando expresamente la suma total (DSTOTAL); dando una distribución sin mostrar las operaciones que les condujeron a la misma (DSOPER); y presentar un conjunto de datos con todos los valores iguales a la media (DMED).

Algunos estudiantes contestan, explícitamente, que el precio que se debe poner a cada marca de paquete de papas fritas es, exactamente, la suma total (RST), aunque no todos indican como la han encontrado. Los datos muestran un 12'3% de alumnos de secundaria que proceden de esta manera, frente a un 12'4% de estudiantes para profesores. El porcentaje de alumnos que únicamente determina la suma total (ST) fue insignificante en los dos grupos.

Un 5'2% de alumnos universitarios calculó la suma total planteando una especie de proporción (STPR), aunque el procedimiento utilizado, no es válido en general. Curiosamente, esta estrategia, en este apartado sólo se ha registrado con estos alumnos. Hay alumnos, que proceden dividiendo la media dada por el total de datos (MED/TOT), tanto en secundaria (10'8%) como en los universitarios (11'3%). El uso del procedimiento inverso (TOT/MED) fue casi nulo. En los dos casos, los alumnos indican el cociente calculado como el precio a poner a cada marca de paquete de papas. Pretenden determinar un valor que representase el precio de todas las marcas, siendo ese valor la propia media.

Es destacable el porcentaje de alumnos que plantea un conjunto de datos que suma por encima, o por debajo, de la suma total real (DINCOR). Se observa un 22'7% de futuros profesores que indican este tipo de distribuciones, frente a un 10'8% de alumnos de secundaria.

Un resultante importante es el porcentaje de alumnos que dejan en blanco la pregunta, constatándose un 36'2% en secundaria y cerca del 31% en los profesores en formación, evidenciando aún más las dificultades que tuvieron los alumnos con esta tarea.

En la fase exploratoria, los resultados nos habían revelado un 54'3% de alumnos de Tenerife que presentaron un conjunto de valores ajustado a lo que se pide frente a un escaso 5'5% de alumnos en Luanda. En cuanto a los alumnos que no contestaron, también fueron mucho más en esta última muestra, un poco más del 69%.

Al establecer la jerarquía de las respuestas de los alumnos observamos los niveles uniestructural, multiestructural, transición entre multiestructural y relacional, y relacional. Los datos resultantes de esta clasificación se muestran en la tabla 5.26.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	47	36,2	30	30,9
P	--	--	--	--
U	23	17,7	14	14,4
M	15	11,5	31	32,0
T	17	13,1	13	13,4
R	28	21,5	9	9,3
Total	130	100	97	100

Tabla 5.26. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 8.a).

Las respuestas de nivel relacional, se presentaron en un 21'5% en los estudiantes de secundaria frente al 9'3% en los estudiantes para profesores. En este caso, suponemos que los alumnos dieron las respuestas de ese tipo, han comprendido correctamente la idea de distribución, pues han podido efectuar, de forma adecuada, el reparto del precio total de las 8 marcas de papas, referidas en el problema.

En el nivel de transición entre el multiestructural y el relacional incluimos las respuestas en las que se halla correctamente la suma total, aunque los alumnos indicasen este valor (suma total) como la respuesta del problema. La diferencia entre los alumnos de secundaria (13'1%) y universitarios (13'4%) es casi nula. En realidad, las situaciones en que se presenta explícitamente la referida respuesta, podrían caracterizarse en el nivel multiestructural, ya que dicha respuesta conduce a una distribución incoherente con el enunciado del problema. Sin embargo, no lo hemos asociado directamente con ese nivel, ya que encontraron adecuadamente la suma total. Admitimos que han reflexionado con sensatez, a pesar de necesitar de cierta orientación para conseguir satisfactoriamente el objetivo pretendido.

Con relación a las respuestas de nivel multiestructural, las hemos vinculado, fundamentalmente, con las situaciones en las que el alumno, sin determinar la suma total, presenta una distribución incompatible con las premisas del enunciado. Incluimos también en este nivel aquellos alumnos que plantean una especie de proporción para calcular la suma total, y algunas situaciones particulares en las que el alumno realiza varias transformaciones inconsecuentes, dejando entrever el uso del algoritmo de la media. En esta caracterización hubo más alumnos universitarios (32%), que de secundaria (11'5%).

Las respuestas de nivel uniestructural también se hicieron notar en los dos niveles de enseñanza (17'7% en secundaria y 14'4% en los profesores en formación). Aunque la mayor parte de estas respuestas se relacionan con los alumnos que dividen la media por el total de datos, o viceversa, también situamos en esta categoría, algunas resoluciones incompletas y/o confusas.

Resultados del ítem 8.b)

Los resultados referentes al **ítem 8.b)** se presentan en la tabla 5.27. Este ítem es el segundo apartado del problema 8, en que se dan tres valores del conjunto de datos, y se pide al alumno que indique otros posibles valores que completan un conjunto de 8 valores de media igual a $1.50.

8. *En un supermercado hay 8 marcas diferentes de papas fritas.*
b) *Si hay tres marcas de papas fritas que traen un precio recomendado de 0'75$, 1$ y 2$, ¿qué precio se puede poner al resto de las marca, para que el precio medio sea 1'50$?*

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
DSTOTAL	8	6,2	7	7,2
DSOPER	1	0,8	3	3,1
DMEDR	2	1,5	4	4,1
UA	3	2,3	--	--
ST	--	--	1	1,0
DINCOR	18	13,8	16	16,5
DI&ST	3	2,3	3	3,1
SD/MED	2	1,5	2	2,1
SD/TOT	3	2,3	--	--
SC	15	11,5	12	12,4
NC	75	57,7	49	50,5
Total	130	100	97	100

Tabla 5.27. Frecuencias y porcentajes en el ítem 8.b), en el estudio de la fase general.

Según la tabla, un 10'8% de alumnos de secundaria y un 14'4% de profesores en formación resuelven correctamente el problema. Los alumnos de secundaria presentan cuatro maneras diferentes de respuesta correcta: el 6'2% da una distribución hallando la suma total (DSTOTAL), el 0'8% indica una distribución, sin mostrar operaciones (DSOPER); el 1'5% determina primeramente la diferencia entre la suma total y la suma de los valores dados y con ella, halla la media del resto de los valores de la distribución (DMEDR) y; el 2'3% proporciona el mismo conjunto de datos utilizado en el apartado anterior, por cumplir con los requisitos del problema (UA). En cuanto a los profesores en formación, la estrategia más usada fue multiplicar la media por el total de datos antes

de indicar la distribución (DSTOTAL; 7'2%). Ningún alumno universitario presenta la misma distribución utilizada en el apartado 8.a).

De entre las estrategias incorrectas, se destaca el número de alumnos que sin hallar la suma total, proporciona un conjunto de datos que suma un valor total diferente del esperado (DINCOR). Al respecto, los datos señalan un 13'8% de alumnos en secundaria y un 16'5% de estudiantes universitarios. El porcentaje de alumnos que trabaja de forma análoga, pero indicando correctamente la suma total (DI&ST) estuvo muy por debajo de los valores anteriores (2'3% y 3'1% respectivamente).

De igual forma, la tabla muestra que los datos referentes a los alumnos que suman los tres valores dados, dividiéndolos por la media o por el total de marcas de papas fritas, no es significativo. Sin embargo, no se puede decir lo mismo respecto a los alumnos que no contestan (NC) o presentan formas de resolución incompletas y/o incomprensibles (SC). En cada nivel de enseñanza, más de la mitad de los alumnos (57'7% en secundaria y 50'5% en los universitarios) dejaron en blanco la pregunta, mientras que los porcentajes de respuestas confusas o incompletas se situaron alrededor del 12% en cada grupo.

La clasificación de las respuestas según los niveles de comprensión, se muestra en la tabla 5.28.

	Secundaria		**Universitarios**	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	75	57,7	49	50,5
P	--	--	--	--
U	19	14,6	12	12,4
M	19	14,6	18	18,6
T	3	2,3	4	4,1
R	14	10,8	14	14,4
Total	130	100	97	100

Tabla 5.28. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 8.b).

El porcentaje de respuestas de tipo relacional fue de 10'8 y 14'4, en estudiantes de secundaria y profesores en formación, respectivamente, configurándose con aquellos alumnos que indican una distribución conforme a las condiciones descritas en el problema, independientemente de cómo han llegado a la solución.

Pocas respuestas fueron situadas en el nivel de transición entre el nivel multiestructural y el nivel relacional. Recordemos que para este ítem las respuestas asociadas con este nivel son aquellas en que el alumno sólo determinaba correctamente

la suma total, o encuentra la suma total y da una distribución que no cumple con los requisitos del enunciado.

Las respuestas caracterizadas en los niveles uniestructural se refieren a los casos en que el alumno suma los valores dados y divide este resultado por la media o por el total, y también algunos que presentaban procesos de resolución incompletos o confusos. Respecto a este proceder, observamos un 14'6% en secundaria frente a un 12'4% de profesores en formación.

Por otro lado, identificamos también un 14'6% de respuestas de alumnos de secundaria, clasificadas en el nivel multiestructural, frente a un 18'6% de estudiantes para profesor. Estos alumnos, básicamente, son los que facilitan un conjunto de datos sin hallar la suma total, indicando que parecen tener idea sobre lo que es una distribución. Sin embargo, en la distribución que indican, sus valores suman por encima, o por debajo, de la verdadera suma total y no muestran señales de saberla calcular. Se han incluido también algunos que realizan procesos de resolución inconsecuentes, llegando a expresar incorrectamente el algoritmo de cálculo de la media.

Resultados del ítem 9

Los resultados referentes al **ítem 9** se presentan en la tabla 5.29. Este ítem, se refiere al problema 9 "Peces capturados", que evalúa la influencia del cero en el cálculo de la media, así como la noción de que la misma cambia, si se añade un dato diferente al conjunto de valores.

9. *El número de peces capturados por seis alumnos en una actividad de ocio, es 3, 4, 5, 3, 1, y 2 respectivamente, que hace un promedio de 3 peces por alumno [(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2)/6]. Más tarde se descubrió que en la actividad había participado otro alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Crees que cambiará el valor medio de peces por alumno, al considerarse este último alumno? Justifica tu respuesta.*

	Secundaria		Universitarios	
Códigos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
SITOTAL	31	23,8	28	28,9
NOCERO	51	39,2	33	34,0
NOMED≈	14	10,8	1	1,0
SIMED≈	1	0,8	1	1,0
TOTSI	3	2,3	2	2,1
NJ	1	0,8	5	5,2
SC	9	6,9	14	14,4
NC	20	15,4	13	13,4
Total	130	100	97	100

Tabla 5.29. Frecuencias y porcentajes en el ítem 9, en el estudio de la fase general.

Los resultados muestran la enorme dificultad que poseen los estudiantes en la comprensión de la propiedad sobre la influencia del cero en el cálculo de la media. La justificación correcta ha sido presentada por un 23'8% de estudiantes de secundaria y un 28'9% de estudiantes para profesores. Las respuestas dadas argumentan que, en las circunstancias consideradas, el valor medio sí cambia, dado que aumenta el total de datos, que pasa de seis a siete alumnos, aunque la suma total sea la misma (SITOTAL).

Alrededor del 14% de estudiantes de secundaria y un 4'1% de futuros profesores parece estar en la dirección adecuada en la solución de la pregunta, aunque hayan mostrado otros errores con la media. Es el caso de los alumnos que consideran que sólo varía el total de datos, pero la media sigue igual (TOTSI); o, el de los que dicen que la media no varía, porque después de efectuar los cálculos, considerando siete alumnos, han redondeado el resultado a un entero, obteniendo el mismo valor (NOMED≈); y por último, los que justifican que sí varía, a pesar de que en sus cálculos, redondean también el valor decimal encontrado (SIMED≈). Estos últimos, no entienden que la media pueda ser un valor no entero, por lo que se sienten obligados a redondear el valor encontrado. Esta dificultad, es una de las que fue analizada en el estudio de Strauss y Bichler (1988), sobre la concepción de los niños en el desarrollo de la media aritmética. Según estos autores, a los alumnos les cuesta aceptar que el valor promedio pueda ser un número decimal en situaciones que involucran variables discretas. Señalan que incluso los alumnos que obtuvieron la solución correcta al resolver una tarea que evaluaba el conocimiento de esta noción, al argumentar lo que pensaban de sus resultados, revelaron que sus soluciones no tenían sentido o no eran lógicas.

El dato que más ha destacado, tanto en secundaria (39'2%) como en los profesores en formación (34%) se corresponde con los que justifican, que la media no varía porque el último participante no capturó ningún ejemplar, dejando entrever que para ellos el valor nulo no influye en el cálculo de la media. Otro dato que llama la atención es el referente a los alumnos que no contestan (NC), con un 15'4% en secundaria y un 6'9% en los universitarios; así como los alumnos que presentan justificaciones confusas y/o incoherentes (SC), con un 13'4% y un 14'4% de estudiantes de secundaria y futuros profesores, respectivamente.

La caracterización de las respuestas en niveles de comprensión se muestra en la tabla 5.30.

	Secundaria		Universitarios	
	N	**%**	**N**	**%**
NC	20	15,4	13	13,4
P	3	2,3	9	9,3
U	7	5,4	5	5,2
M	51	39,2	38	39,2
T	18	13,8	5	5,2
R	31	23,8	27	27,8
Total	130	100	97	100

Tabla 5.30. Resultados relativos a la caracterización en niveles de comprensión para el ítem 9.

Tanto en el grupo de secundaria, como en el de los universitarios, las respuestas clasificadas en el nivel multiestructural fueron las que tuvieron mayor frecuencia, siendo igual en los dos grupos (39'2%). Las mismas se asociaron, principalmente, con argumentos que expresan que el valor medio no varía al tomar en consideración al alumno que no pescó ningún ejemplar. Así, se considera que el cero es un valor nulo que no afecta al resultado, aunque algunos intentan ilustrar sus ideas planteando la fórmula de cálculo de la media, manteniendo el total con seis alumnos.

Los datos, también muestran que hay más respuestas del nivel de transición en la muestra de alumnos de secundaria, 13'8%, que en la muestra de alumnos universitarios, donde sólo encontramos un 5'2%. Algunas respuestas situadas en este nivel, ilustran, mediante la representación simbólica, que el total de datos ya no es el mismo, es decir, pasa de 6 a 7; sin embargo, redondean el resultado a un valor entero, encontrando la misma media calculada con 6 alumnos y dando como respuesta que la media no varía. Esto indica que para estos alumnos la media no puede ser un valor decimal. Algunos alumnos, a pesar de mostrar en sus cálculos el aumento en el total de datos, justifican verbalmente que la media no varía, ya que "un alumno no pescó ningún ejemplar".

En cuanto a las respuestas de nivel relacional, aquellas que muestran que el alumno ha desarrollado una imagen mental compacta y holística del concepto, de acuerdo con la situación presentada, sólo encontramos 31 alumnos en secundaria (alrededor del 24%) y 27 alumnos universitarios (28%). Los resultados indican que esta tarea ha resultado difícil, incluso para los alumnos universitarios, donde cerca del 72% de los mismos no ha podido presentar una respuesta asociada al nivel relacional. Esto nos lleva a ser escépticos respecto del tipo de enseñanza que desarrollarían estos futuros profesores, si no llegan a superar los obstáculos que presentan en la comprensión de las nociones que exige la tarea.

Por otro lado, constatamos también respuestas situadas en los dos niveles de comprensión más bajos. Con respecto al nivel uniestructural, los porcentajes fueron casi iguales (5'4% en los de secundaria y 5'2% en los universitarios). En las respuestas caracterizadas en este nivel se ve que el alumno intenta repetir la fórmula expuesta en el enunciado, además de presentar un argumento simple, relacionado con un dato del enunciado del problema, usándolo sin ajustarse al objetivo pretendido.

Con respecto a las respuestas de nivel preestructural, los datos muestran un porcentaje relativamente superior (9'3%) en los estudiantes para profesores en comparación con el dato observado en los estudiantes de secundaria (2'3%), cuya diferencia llama la atención, atendiendo al nivel de enseñanza cursado por el primer grupo de estudiantes. Este tipo de respuestas se relacionan con aquellas situaciones en las que el alumno no justifica su afirmación, presentando exclusivamente una proposición afirmativa o negativa, o utilizando un argumento que indica que no ha comprendido la tarea.

Nuestros análisis apoyan los estudios de Strauss y Bichler (1988) y Leon y Zawojewski (1991). Estos han revelado que la comprensión de la propiedad sobre la influencia del cero en el cálculo de la media resulta difícil a los alumnos, tal vez por su carácter abstracto. Strauss y Bichler sugieren revisar los materiales curriculares para el estudio de las propiedades de la media, adaptándolos adecuadamente a la construcción del concepto, desarrollar distintas actividades y analizar su repercusión en la enseñanza. Leon y Zawojewski destacan que es muy importante suministrar un contexto concreto.

A modo de conclusión, podemos decir que el análisis centrado en identificar la manera en la que los alumnos relacionaban las informaciones que poseían cuando intentaban resolver los problemas, nos ha permitido ver que los estudiantes presentan dificultades conceptuales, de cálculo, uso de los procedimientos y de los algoritmos. Las respuestas situadas en los niveles de comprensión más bajos se han observado casi en las mismas proporciones tanto en los alumnos de secundaria como en los universitarios, lo que muestra claramente la falta de capacidad interpretativa en situaciones en que se requiere el uso del concepto de media aritmética.

Más adelante examinaremos casos particulares de errores y dificultades de los alumnos, analizando de forma específica algunos de sus orígenes. Por ahora, completaremos los resultados obtenidos en el cuestionario, con informaciones sobre las

actuaciones de los alumnos en problemas de respuesta abierta que tiene estrecha relación con determinados problemas de respuesta de elección múltiple.

5.4. ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES EN LOS PROBLEMAS RELACIONADOS, DE RESPUESTA ABIERTA Y DE ELECCIÓN MÚLTIPLE.

En este apartado vamos a reflexionar sobre el comportamiento de los alumnos en los problemas abiertos, cuando seleccionan la alternativa correcta en un problema relacionado de elección múltiple, o viceversa. El referido análisis, es un complemento del estudio iniciado en el capítulo 4 (fase exploratoria), y examina las cuestiones de investigaciones que hemos planteado inicialmente. En concreto, saber si los alumnos que seleccionan la respuesta correcta en un problema en el que se les sugiere un número limitado de alternativas, realizan acciones razonables en un problema relacionado, donde las respuestas son determinadas por ellos mismos, de forma abierta, y saber si sus actuaciones en estas últimas preguntas, convencen realmente que han señalado con fundamento las respuestas referidas en el primero caso.

Como explicamos en el análisis desarrollado en la fase exploratoria, este estudio constituye una aportación al debate que se viene realizando sobre la conveniencia, o no, de usar un tipo particular de preguntas en la investigación educativa, sobre todo cuando utilizamos la técnica del cuestionario en el proceso de recogida de datos.

En esta reflexión partimos de la conjetura de que la mayor parte de los estudiantes que elige la alternativa correcta en un problema de respuesta de elección múltiple no es capaz de presentar vías adecuadas en el proceso de resolución de un problema de respuesta abierta. Así mismo, cuando se muestran capacitados en resolver este último tipo de problemas, podrían seleccionar una alternativa que no se corresponde con la respuesta correcta. En este sentido, nos inclinamos por la idea de que las preguntas de respuesta abierta parecen ser más determinantes, en la investigación aunque haya puntos de vista contrarios a esta afirmación. Nuestro pensamiento concuerda con lo expresado por Schoenfeld (1992; pp. 365), quien indica que las formas actuales de evaluación, especialmente las pruebas estandarizadas de elección múltiple fomentadas por muchos investigadores que las practican, abarcan solamente una porción ínfima de capacidades y de perspectivas del "potencial matemático", que posee

el alumno, señalando, además, que el desarrollo de formas adecuadas de evaluación, tanto en lo individual como en las escuelas, o en distintos niveles, constituye un desafío práctico y una tarea teórica.

Centrándonos en nuestro objetivo, empezaremos por analizar los ítems 1 y 2. Los dos problemas se encuadran en el conjunto de problemas y situaciones que inducen a la actividad matemática y definen el campo de problemas y situaciones de donde surge un concepto dado, según lo expuesto en Batanero y Godino (2001a). Con los mismos, se pretende evaluar el uso de la media como mejor estimador de un valor desconocido, en presencia de errores de medida, la influencia de los valores atípicos en el cálculo de la media, así como la posible confusión en los alumnos entre la media y otras medidas de tendencia central.

El ítem 1, se corresponde con el problema denominado "Tiempo recorrido en los 100 metros", y es un problema de respuesta abierta que no figuraba en el cuestionario administrado en la fase exploratoria, mientras que el ítem 2, se refiere al problema denominado "En una clase de ciencias", que constituye una pregunta de respuesta de elección múltiple. Al cruzar los resultados en el estudio con los alumnos de secundaria encontrados los datos que se muestran en la tabla 5.31.

		Problema "En una clase de ciencias"				Total
		NC	**M**	**T**	**R**	
Problema "Tiempo recorrido en los 100m"	**NC**	0	8	6	2	16
	P	1	4	9	0	14
	U	1	9	4	1	15
	M	1	22	19	5	47
	T	0	4	23	11	38
Total		3	47	61	19	130

Tabla 5.31: Cruce de resultados en el problema de respuesta abierta "Tiempo recorrido en los 100 m" (en filas) y en el problema de respuesta de elección múltiple "En una clase de ciencias" (en columnas), con los alumnos de secundaria.

En primer lugar, haremos el análisis de las actuaciones de los alumnos en los problemas de respuesta abierta, teniendo en cuenta sus respuestas en el problema de elección múltiple. De los datos, identificamos que de los 19 alumnos que seleccionan la respuesta caracterizada en el nivel relacional en el problema de elección múltiple (R, en columna), que consiste en descartar el valor atípico y calcular la media con los restantes valores, al contestar el problema de respuesta abierta (en filas), 11 indican un argumento que se caracteriza en el nivel de transición entre el nivel multiestructural y el relacional. Del resto, observamos 5 que presentan justificaciones asociadas con el nivel multiestructural, 1 que da una justificación de tipo uniestructural y 2 no contestan.

Asimismo, vemos que de los 61 alumnos cuyas respuestas están situadas en el nivel de transición, en el problema "En una clase de ciencias", sólo 23 dan una respuesta del mismo nivel en el problema de respuesta abierta. La mayoría presenta respuestas situadas en los niveles inferiores, e incluso 6 no contestan al referido problema.

Haciendo ahora el análisis inverso, observamos que de los 38 estudiantes que dan una respuesta situada en el nivel de transición entre el multiestructural y el relacional en el problema de respuesta abierta (en filas), 11 de los mismos eligen la opción de nivel relacional en el problema de elección múltiple, 23 seleccionan la opción de nivel de transición y 4 seleccionan la opción que se clasificó en el nivel multiestructural.

Los comportamientos de los estudiantes para profesores fueron análogos a los descritos anteriormente, tal como se muestra en la tabla 5.32.

		Problema "En una clase de ciencias"			Total
		M	**T**	**R**	
Problema "Tiempo recorrido en los 100m"	**NC**	4	4	2	10
	P	3	6	2	11
	U	2	2	2	6
	M	25	7	4	36
	T	10	22	2	34
Total		44	41	12	97

Tabla 5.32: Cruce de resultados en el problema de respuesta abierta "Tiempo recorrido en los 100 m" (en filas) y en el problema de elección múltiple "En una clase de ciencias" (en columnas), con los alumnos universitarios.

Así, vemos que de los 12 alumnos que presentan respuestas clasificadas en el nivel relacional (en columnas), en el problema de respuesta de elección múltiple ("En una clase de ciencia"), sus respuestas en el problema de respuesta abierta, se asocian con los niveles de transición (2), multiestructural (4), uniestructural (2) y preestructural (2). Otros 2 alumnos no contestaron.

Vemos incluso que de los 41 alumnos que marcan la opción clasificada en el nivel de transición, en el problema de elección múltiple (en columnas), sólo poco más de la mitad (22) manifiesta ese tipo de razonamiento en el problema de respuesta abierta.

Analizando ahora las actuaciones de los alumnos en los problemas de elección múltiple, tras dar una respuesta en el problema de respuesta abierta, observamos que de los 34 alumnos que presentan la respuesta del nivel más alto (transición) en el problema

de respuesta abierta, 2 de ellos seleccionan la alternativa de tipo relacional en el problema de elección múltiple, 22 marcan la alternativa situada en el nivel de transición y 10 en la de nivel multiestructural.

A continuación, vemos los datos relacionados con otros dos problemas que tenían semejanza, aunque en la fase exploratoria ya habíamos realizado la misma reflexión sobre estos problemas y se pretende ratificar los resultados. Nos referimos al ítem 6.A.b), que es uno de los apartados del problema "Gráfico de notas", y del ítem 6.B que constituye la segunda parte del mismo problema. El primero, es una cuestión de respuesta abierta, donde se pedía al alumno justificar qué grupo era mejor, si ambos se dan gráficamente y tienen la misma media. La segunda cuestión es de respuesta de elección múltiple. En ese caso, se proporciona un conjunto de alternativas que reflejan eventuales argumentos al comparar dos conjuntos de datos de medias iguales, presentados gráficamente, y sólo una de ellas constituye la respuesta correcta, caracterizada en el nivel relacional.

Los resultados encontrados con los alumnos de secundaria se muestran en la tabla 5.33. En filas están los resultados del problema de respuesta abierta, mientras que en columnas se indican los resultados del problema de elección múltiple.

		Problema "Gráfico de notas, **6.B**"					Total
		NC	U	M	T	R	
Problema "Gráfico de notas, **6.A.b)**"	NC	7	0	4	7	5	23
	U	0	1	2	0	2	5
	M	2	1	33	12	15	63
	T	0	1	1	31	0	33
	R	0	0	0	1	5	6
Total		9	3	40	51	27	130

Tabla 5.33. Cruce de resultados en el **problema de respuesta abierta** "Gráfico de notas, 6.A .b)" (en filas) y en el **problema de respuesta de elección múltiple** "Grafico de notas, 6. B" (en columnas), con los alumnos de secundaria.

La respuesta de nivel relacional es aquella en la que el estudiante señala la variabilidad como factor principal para diferenciar los dos conjuntos de datos. Este criterio de comparación se utilizó por sólo 6 alumnos (aproximadamente 5%), en el problema de respuesta abierta, frente a 27 (20'7%) alumnos en el problema de elección múltiple. Según los datos, de los 27 alumnos que señalan la opción de tipo relacional (R) en el problema de elección múltiple (en columnas), sólo 5 proporcionan un argumento de este tipo en el problema de respuesta abierta. Los demás utilizan

diferentes criterios no válidos para la situación, así 15 alumnos de los mismos presenta argumentos de tipo multiestructural, basándose, por ejemplo, en el número de alumnos aprobados, en el factor mayor nota o en la no existencia de notas inferiores a 9. Incluso 5 alumnos no contestan.

Respecto de los 6 alumnos que presentan el argumento de tipo relacional en el problema de respuesta abierta, 5 de ellos fueron coherentes al contestar el problema de respuesta de elección múltiple, y 1 alumno prefiere la opción caracterizada en el nivel de transición entre los niveles multiestructural y relacional, tomando en cuenta la igualdad de medias.

En estos mismos problemas, observamos que las actuaciones de los estudiantes universitarios no se diferencian tanto de los de secundaria, como se puede ver en la tabla 5.34.

		Problema "Gráfico de notas, **6.B**"					Total
		NC	U	M	T	R	
Problema "Gráfico de notas, **6.A.b)**"	NC	3	1	3	3	4	14
	U	0	2	5	1	5	13
	M	2	3	27	3	7	42
	T	0	1	0	18	4	23
	R	0	0	0	0	5	5
Total		5	7	35	25	25	97

Tabla 5.34. Cruce de resultados en el **problema de respuesta abierta** "Gráfico de notas, 6.A .b)" (en filas) y en el **problema de respuesta de elección múltiple** "Grafico de notas, 6. B" (en columnas), con los alumnos de universitarios.

En el problema de respuesta abierta (en filas), sólo 5 (5%) alumnos presentan justificaciones afines al nivel relacional, mientras que en el problema de respuesta de opción múltiple observamos 25 (26%) alumnos que indican la respuestas de este tipo. Todos los alumnos que presentan argumentos de tipo relacional en el problema de respuesta abierta, también eligen la alternativa asociada con este mismo nivel en el ítem de respuesta de elección múltiple. Sin embargo, de los 25 alumnos que contestan correctamente este último tipo de problema, 20 de ellos no muestran criterios formales al contestar el problema de respuesta abierta. De acuerdo con los datos, 7 alumnos dan un argumento de tipo multiestructural, 5 dan una respuesta de tipo uniestructural, 4 no contestan y otros 4 dan respuestas situadas en el nivel de transición entre las respuestas de tipo multiestructural y relacional.

Para terminar con el análisis que estamos desarrollando, reflexionamos ahora sobre las actuaciones de los estudiantes en otros dos ítems: "Hijos por familia" y

"Familia, 7. a)", cuyo análisis ya se había desarrollado también en la fase exploratoria y se trata de confirmar resultados.

En el problema "Hijos por familia" se proporciona, como hipótesis, la media y el total de datos. Al alumno se le pide indicar qué opción es la correcta, de entre varias dadas, en función de lo expuesto en el enunciado. Evidentemente, la respuesta correcta es la que dice "hay un total 110 niños en la ciudad", la cual indica que el alumno ha invertido el algoritmo de cálculo de la media para determinar la suma total. Esa alternativa la caracterizamos en el nivel relacional, de acuerdo con la exigencia cognitiva de la tarea.

En cuanto al problema "Familia, 7. a)", que creemos que su nivel de complejidad es relativamente mayor, en comparación con el problema anterior, el alumno debe dar una distribución acorde a lo expuesto en el enunciado, aparte de encontrar la suma total. Por lo tanto, el determinar la suma total es solamente una vía para llegar al objetivo propuesto. La respuesta se caracteriza en el nivel relacional si el alumno da una distribución que satisface las premisas del enunciado.

En la tabla 5.35 presentamos los datos relativos a los alumnos de secundaria tras efectuar el cruce de los resultados de los dos ítems.

		Problema "Hijos por familia"				Total
		NC	U	M	R	
Problema "Familia, 7. a)"	NC	1	1	16	10	28
	U	0	1	1	7	9
	M	1	1	4	2	8
	T	0	4	4	12	20
	R	1	12	23	29	65
Total		3	19	48	60	130

Tabla 5.35. Cruce de resultados en el **problema de respuesta abierta** "Familia 7. a)" (en filas) y en el **problema de respuesta de elección múltiple** "Hijos por familia" (en columnas), con los alumnos de secundaria.

La tabla muestra 60 (46%) alumnos) que indican la opción caracterizada en el nivel relacional en el problema de respuesta de elección múltiple (en columnas) y 65 (50%) alumnos que dan una respuesta de tipo relacional en el problema de respuesta abierta (en filas). En cuanto a aquellos que seleccionan la opción asociada con el nivel relacional en el problema de elección múltiple, vemos que sus actuaciones en problema de respuesta abierta son diversas, ya que sólo 29 de los 60 alumnos determinan la respuesta deseable. Del resto (31 de 60) destacamos 12 alumnos cuyas respuestas se caracterizan en el nivel de transición entre los niveles multiestructural y relacional

(categorías ST, DD&ST y DI&ST); 7 que dan respuestas de tipo uniestructural; y 10 que dejan en blanco la pregunta (NC).

Con relación a los 65 alumnos que contestan correctamente el problema de respuesta abierta (en filas), sobresalen 23 alumnos que prefieren opciones categorizadas en el nivel de comprensión multiestructural (MODA, MED, RDEC) y 12 que indican la opción de tipo uniestructural (FAMADUL).

Las incoherencias mostradas en estos dos problemas, donde los alumnos que marcan la opción correcta en el problema de elección múltiple no resuelven adecuadamente el problema de respuesta abierta o viceversa, también han sido observadas en los estudiantes universitarios que recibían formación para profesores. Los datos al respecto se muestran en la tabla 5.36.

		Problema "Hijos por familia"				Total
		NC	U	M	R	
Problema "Familia, 7. a)"	NC	0	2	14	4	20
	U	0	1	3	0	4
	M	1	2	13	15	31
	T	0	1	1	3	5
	R	1	1	20	15	37
Total		2	7	51	37	97

Tabla 5.36. Cruce de resultados en el **problema de respuesta abierta** "Familia, 7.a)" (en filas) y en el **problema de respuesta de elección múltiple** "Hijos por familia" (en columnas), con los alumnos de universitarios.

De los 37 alumnos que seleccionan la respuesta de tipo relacional en el problema de elección múltiple (en columnas), sólo 15 alumnos dan una respuesta caracterizada en este nivel al resolver el problema de respuesta abierta. Los procesos de resolución mostrados por los restantes (22 de 37) dejan entrever muchas dificultades en la resolución de esta tarea, puesto que la mayoría (15 alumnos) da respuestas de tipo multiestructural, donde algunos dan una distribución con valores decimales o intentan determinar la suma total estableciendo proporción, 4 dejan en blanco la pregunta y 3 dan respuestas caracterizadas en el nivel de transición entre los niveles multiestructural y relacional, por haber determinado al menos la suma total.

Si efectuamos el análisis al revés, notamos también que de los 37 alumnos que determinaron la solución requerida en el problema de respuesta abierta, y caracterizada en el nivel relacional, 22 de ellos no habían seleccionado la opción que se ajustaba al enunciado en el problema de elección múltiple. La mayoría (20 alumnos) prefiere alternativas de tipo multiestructural, pues confunden la media con la moda o con la mediana.

En general, el análisis de los resultados muestra que la mayor parte de los alumnos que seleccionan la respuesta de tipo relacional en los problemas de respuesta de elección múltiple, tienen enormes dificultades en sus actuaciones en problemas similares de respuesta abierta. Asimismo, también vemos que hay alumnos que dan una respuesta de tipo relacional en un problema de respuesta abierta, y que no marcan la alternativa deseable en el problema de elección múltiple. Esto nos indica que si nos basamos solamente en la respuesta señalada en los problemas de elección múltiple, al evaluar la comprensión de los alumnos sobre un determinado contenido, podemos llegar a una conclusión equivocada sobre el dominio, o no, de las materias evaluadas. Parece ser que la verdadera información para juzgar lo que el alumno ha aprendido sobre un determinado tema proviene de las preguntas de respuesta abierta.

Los resultados encontrados en este estudio general confirman lo que ya habíamos constatado en la fase exploratoria, donde identificamos que la mayor parte de las actuaciones de los alumnos en los problemas de respuesta abierta, en aquellos que han elegido la respuesta correcta en los problemas de respuesta de elección múltiple relacionados, mostraban que habían seleccionado dichas respuestas sin criterio, ya que algunos al resolver un problema de respuesta abierta ni siquiera habían podido dar los pasos elementales que requerían la resolución del problema.

5.5. RESULTADOS GLOBALES DEL CUESTIONARIO

Una vez analizados los resultados en los diferentes ítems, trataremos ahora de presentar algunos datos relativos a la valoración global de los resultados en el total del cuestionario. Con este análisis se pueden observar los resultados globales obtenidos con la aplicación del cuestionario, apreciar el grado de dificultad de los alumnos en cada ítem, así como, valorar la fiabilidad del cuestionario.

De este modo, empezamos con el análisis de la puntuación total del cuestionario en los dos grupos de estudios, y posteriormente, presentamos los índices de dificultades de los ítems y el análisis de la fiabilidad.

5.5.1. ANÁLISIS DE LA PUNTUACIÓN TOTAL DEL CUESTIONARIO

Para realizar el análisis de la puntuación total del cuestionario asignamos el valor 1 por cada respuesta correcta y el valor 0 para cada respuesta incorrecta. Como el

cuestionario tiene un total de 13 ítems, eso significa que la puntuación de cada alumno (número de preguntas contestadas correctamente) puede variar entre 0 y 13.

En el histograma de frecuencia (figura 5.1) presentamos datos relativos a los alumnos de secundaria. Se observa la puntuación obtenida por los alumnos; la puntuación media, que es de 3'13, y la desviación típica de 1'85.

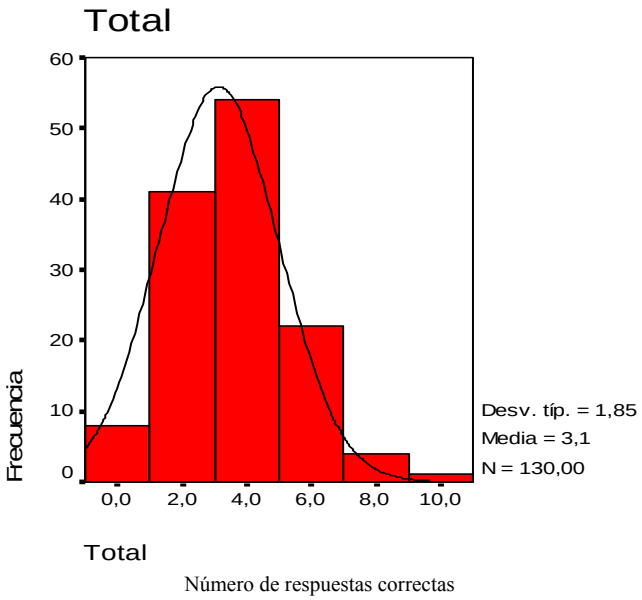


Figura 5.1. Puntuación total en el cuestionario de los alumnos de secundaria

		Estadístico	Error típ.
Media		3,13	,162
Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	2,81	
	Límite superior	3,45	
Mediana		3,00	
Moda		4,0	
Varianza		3,432	
Desv. típ.		1,853	
Mínimo		0	
Máximo		10	
Rango		10	
Asimetría		,467	,212
Curtosis		,567	,422
Percentiles	25	2,0	
	50	3,0	
	75	4,0	

Tabla 5.37. Estadísticos descriptivos de la puntuación total de los alumnos de secundaria

Atendiendo a que las puntuaciones pueden variar de 0 a 13 valores, la puntuación media de 3’13 con el intervalo de confianza que se da en la tabla 5.37, indica que, en general, estos alumnos presentan enormes dificultades respecto al contenido evaluado, confirmando, de este modo, los diferentes tipos de errores analizados en los distintos ítems. Hay alumnos que no aciertan ninguna pregunta y el número máximo de preguntas contestadas correctamente es 10. Vemos que las puntuaciones cercanas a la puntuación máxima son considerablemente bajas, y hay pocos alumnos con un número de respuestas correctas entre 8 y 10. La tabla de los estadísticos descriptivos correspondiente (Tabla 5.37) muestra que más del 75% de los alumnos no ha podido responder correctamente la mitad de las preguntas formuladas, pues el tercer cuartil es igual a 4, siendo también éste el número más frecuente de preguntas correctas.

Con relación a los alumnos universitarios, los datos siguen la misma tendencia, incluso el número medio de respuestas correctas es más bajo, aunque hay que considerar que la muestra de estudio con estos estudiantes es algo inferior en comparación con la de los alumnos de secundaria. El histograma de frecuencia (Figura 5.2) muestra que el número de respuestas correctas varía entre 0 y 10, aunque el número de alumnos que obtienen las puntuaciones extremas son insignificantes. La media del número respuestas correctas por alumno es de 2’72, con una desviación típica de 2’11. Se aprecia que hay una ligera deformidad de datos en este grupo de alumnos, en comparación con los alumnos de secundaria aunque la diferencia no parece ser tan importante.

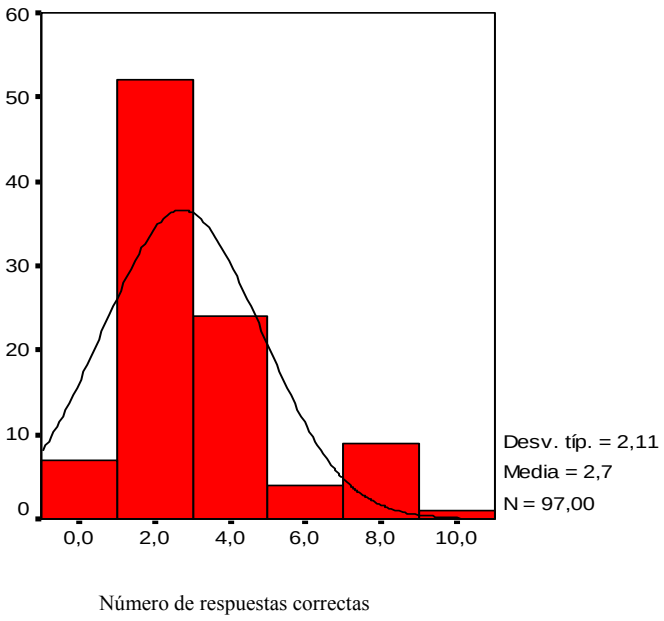


Figura 5.2. Puntuación total en el cuestionario de los alumnos universitarios

		Estadístico	Error típ.
Media		2,72	,214
Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	2,30	
	Límite superior	3,15	
Mediana		2,0	
Moda		2,0	
Varianza		4,453	
Desv. típ.		2,110	
Mínimo		0	
Máximo		10	
Rango		10	
Asimetría		1,361	,245
Curtosis		1,589	,485
Percentiles	25	1,00	
	50	2,0	
	75	3,5	

Tabla 5.38. Estadísticos descriptivos de la puntuación total de los universitarios

La tabla 5.38 de los estadísticos descriptivos muestra que tampoco hubo alumnos con un número de respuestas correctas superior a 10. Asimismo, se observa también que más del 75% de los alumnos no ha podido contestar correctamente la

mitad de las preguntas formuladas, ya que al tercer cuartil corresponde con el valor 3'5. El número más frecuente de preguntas correctas por alumno es 2.

En resumen, los datos muestran que los alumnos universitarios experimentaron grandes dificultades al contestar el cuestionario. El valor medio obtenido para el número total de respuestas correctas es relativamente inferior en estos alumnos en comparación con el encontrado para los alumnos de secundaria (Figura 5.3).

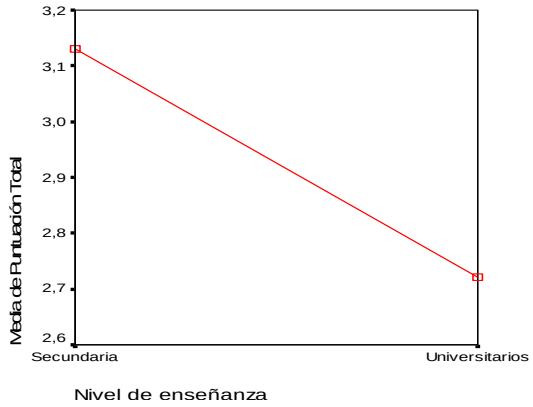


Figura 5.3. Comparación de medias de puntuaciones totales entre secundaria y universitarios

Los diagramas de caja (Figura 5.4) y los estadísticos descriptivos (tablas 5.37 y 5.38) muestran que el 50% de los datos centrales en la muestra de secundaria se sitúan entre 2 y 4 respuestas correctas y en la muestra de universitarios se sitúan entre 1 y 3'5 respuestas correctas. Luego, las correspondientes amplitudes intercuartiles son de 2 y 2'5, respectivamente, mostrando que hay más variabilidad de datos en los universitarios, aunque la diferencia no sea tan apreciable. Los diagramas muestran también que los alumnos con 10 respuestas correctas se presentan como casos extremos.

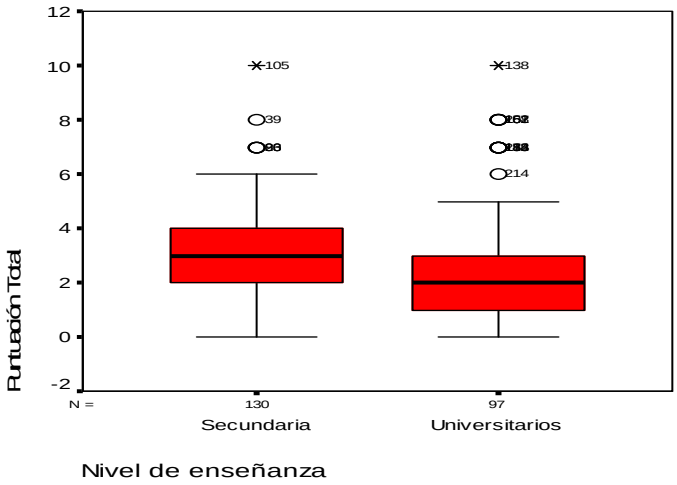


Figura 5.4. Diagramas de cajas para la puntuación total entre los niveles de enseñanza

Para contrastar la diferencia entre las medias encontradas en los dos grupos de estudiantes utilizamos la prueba *t* para muestras independientes, cuyos resultados se presentan en la tabla 5.39. La prueba de Levene que comprueba el supuesto acerca de la igualdad de varianzas en los dos grupos, da un resultado no significativo, por lo que debemos asumir que las varianzas son iguales. Utilizando la prueba *t* correspondiente al caso de varianzas iguales, concluimos que no existe diferencia significativa entre las medias encontradas entre los grupos de secundaria y universitarios, puesto que el SSPS nos proporciona una probabilidad de 0'122, que no se encuentra por debajo del 5% utilizado usualmente en la comparación.

		Varianzas iguales	Varianzas diferentes
Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	F	0,334	
	Sig.	0,564	
Prueba T para la igualdad de medias	t	1,550	1,521
	gl	225	191,132
	Sig. (bilateral)	0,122	0,130
	Diferencia de medias	0,41	0,41
	Error típ. de la diferencia	0,264	0,264
	Intervalo de confianza para la diferencia		
	inferior	-0,111	0,929
	superior	-0,121	0,940

Tabla 5.39. Prueba de muestras independientes para la puntuación total del cuestionario

5.5.2. DIFERENCIAS POR ESPECIALIDADES ENTRE LOS ALUMNOS UNIVERSITARIOS

En los análisis anteriores, el grupo de alumnos universitarios se constituyó agrupando los datos de los alumnos de dos especialidades: matemáticas y pedagogía. Eso se hizo así, ya que la composición de la muestra de estudiantes que cursaban la especialidad de matemática era más reducida en comparación con la muestra de estudiantes que cursaban pedagogía.

En esta sección comparamos el número total de preguntas correctas en función de las dos especialidades.

En la tabla 5.40 y en la figura 5.5 presentamos datos que muestran algunos estadísticos descriptivos y las diferencias entre las dos especialidades. Se puede ver que el número medio de preguntas correctas por alumno ha sido algo superior en el grupo de

estudiantes de matemática (3'71) que en el de pedagogía (2'26), aunque en ambos casos es un valor muy bajo, considerando que se ha contestado a un total de 13 ítems. Los datos muestran que en general hay más variabilidad en los estudiantes de la especialidad de matemáticas que en los de pedagogía, aunque eso no suceda con el 50% de los datos centrales, ya que la amplitud intercualtil es la misma en las dos especialidades.

La mediana de preguntas correctas es de 3 en la especialidad de matemáticas y 2 en la de pedagogía. También podemos ver que el número máximo de preguntas contestadas correctamente es de 10 y 8, en matemática y pedagogía, respectivamente. Asimismo, vemos que en la especialidad de pedagogía hay alumnos que no contestan correctamente ninguna pregunta, algo que no sucede en el grupo de matemática.

		Matemática	Pedagogía
	Media	3,71	2,26
Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	1,81	1,81
	Límite superior	2,70	2,70
	Mediana	3,00	2,00
	Moda	2,00	2,00
	Varianza	5,680	3,271
	Desv. típ.	2,383	1,809
	Mínimo	1	0
	Máximo	10	8
	Amplitud intercuartil	2,00	2,00

Tabla 5.40. Estadísticos descriptivos por especialidad, en los alumnos universitarios (Matemática y Pedagogía)

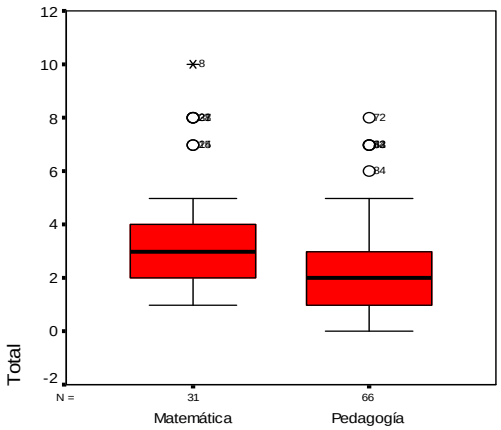


Figura 5.5. Diferencias por especialidades en los alumnos universitarios (Matemática y Pedagogía)

En la prueba de contraste de diferencia de media entre las dos especialidades, que se muestra en la tabla 5.41, asumimos varianzas iguales, ya que la prueba de Levene nos da una probabilidad mayor que 0'05, que indica que no hay diferencias estadísticamente significativas entre las varianzas de los grupos. En consecuencia, la prueba t nos proporciona una probabilidad de 0'001< 0'05, revelando que existe diferencia entre las medias de los estudiantes de la especialidad de matemáticas y de pedagogía.

		Varianzas iguales	Varianzas diferentes
Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	F	3,415	
	Sig.	0,068	
Prueba T para la igualdad de medias	t	3,321	3,010
	gl	95	46,844
	Sig. (bilateral)	0,001	0,004
	Diferencia de medias	1,45	1,45
	Error típ. de la diferencia	0,437	0,482
	Intervalo de confianza para la diferencia		
	inferior	0,584	0,481
	superior	2,320	2,423

Tabla 5.41. Prueba de muestras independientes

El referido análisis indica que a pesar de que ambos grupos manifestaron enormes dificultades en la resolución de las 13 cuestiones dadas, los alumnos de la especialidad de matemática presentan en media más preguntas correctas que sus homólogos de la especialidad de pedagogía. Además, si consideramos los diferentes datos presentados previamente, podemos concluir que, en general, esos alumnos se han mostrado más capacitados que sus colegas en la interpretación y resolución de las situaciones presentadas en la prueba.

5.5.3. ANÁLISIS DEL ÍNDICE DE DIFICULTAD DE LOS ÍTEMS

Para este análisis utilizamos la misma categorización desarrollada para el estudio de la puntuación total del cuestionario. Las respuestas de los alumnos se habían categorizado únicamente en correctas o incorrectas, considerando las respuestas en blanco como incorrectas. Al primer tipo de respuestas (correctas) les asignamos el valor 1, mientras que a las segundas se les dio el valor 0.

Igual que el análisis realizado en la fase exploratoria, aquí también seguimos la teoría de Muñiz (1994), entendiendo por índice de dificultad (ID) de un ítem como la proporción de sujetos que lo aciertan de aquellos que han intentado resolverlo.

Nótese que cuánto mayor es el índice de dificultad, el ítem es más sencillo para los estudiantes, no más difícil. De este modo, en dependencia con las competencias de los alumnos es posible ver qué ítems han resultado más fáciles o más difíciles.

En nuestro análisis particularizaremos los índices encontrados en cada uno de los grupos de estudiantes: secundaria y universidad. Con base a las proporciones encontradas, analizamos qué preguntas fueron más fáciles o difíciles, de acuerdo al grupo de estudio. En la tabla 5.42 presentamos los resultados encontrados.

	Estudiantes de secundaria (N= 130)	Estudiantes universitarios (N=97)
ÍTEMS	**Índice de dificultad**	**Índice de dificultad**
ITEM1	0,00	0,00
ITEM2	0,15	0,12
ITEM3	0,52	0,39
ITEM4	0,46	0,38
ITEM5	0,05	0,06
ITEM6.A.a)	0,29	0,34
ITEM6.A. b)	0,05	0,05
ITEM6.B	0,21	0,26
ITEM7. a)	0,50	0,38
ITEM7. b)	0,35	0,22
ITEM8.a)	0,22	0,09
ITEM8. b)	0,11	0,14
ITEM9	0,24	0,28

Tabla 5.42. Índice de dificultad de los ítems en los alumnos de secundaria y universitarios

En general, los resultados indican que casi todos los ítems han sido difíciles para los alumnos de los dos grupos, pues la mayor parte de los índices de dificultades encontrados son muy bajos.

Sin embargo, de forma especial podemos destacar algunos ítems que han resultado más difíciles. A continuación, describimos los mismos para aclarar mejor sus características:

- Ítem 1: El índice de dificultad encontrado para este ítem fue cero en los dos grupos. Es decir, ningún alumno indicó una respuesta correcta al problema, si consideramos la completitud de la respuesta. Recordemos que este problema es de respuesta abierta y con el mismo se evaluaba el conocimiento de los valores atípicos en el cálculo de la media y el reconocimiento de esta medida como el mejor estimador en presencia de errores de medición. Como se ha visto, aunque

algunos alumnos reconociesen que la media era la medida indicada para la situación, no descartaban el valor extraño que se proporcionaba con el conjunto de datos, al calcular la media.

- Ítem 5: El índice de dificultad encontrado es 0'05 y 0'06, en los alumnos de secundaria y en los alumnos universitarios, respectivamente. Este problema evaluaba el cálculo de la media ponderada, estando los datos dados en el problema de forma resumida, según las frecuencias de cada valor de variable.
- Ítem 6.A.b): En este problema encontramos el mismo índice de dificultad (0'05) tanto en los estudiantes de secundaria como en los universitarios. El problema examina los criterios utilizados por los alumnos al comparar dos muestras dadas gráficamente con cierta apariencia visual.
- Ítem 8.b): Este ítem proporcionó un índice de dificultad de 0'11 en los estudiantes de secundaria y 0'14 en los universitarios. Es el segundo apartado del problema 8, y en el mismo, se pedía completar una distribución de 8 datos, conocidos tres elementos y la media. Como se ha visto un porcentaje considerable de alumnos no lo ha contestado.
- Ítem 8.a): Los datos de la tabla muestran que este ítem fue uno de los más difíciles para los alumnos universitarios, con un índice de dificultad de 0'09. Es la primera parte del problema 8, donde se solicita al alumno construir una distribución de media dada. Igual que el ítem anterior gran parte de los alumnos no lo contestaron.
- Ítem 2: Este ítem es de respuesta de elección múltiple. Los índices de dificultad verificados fueron, respectivamente, 0'15 y 0'12 en secundaria y en los universitarios. Es similar al ítem 1, y cubría los mismos objetivos. Igual que en el ítem 1, aquí también un porcentaje considerable de alumnos eligió la respuesta parcialmente correcta, poniendo de parte la opción íntegra que sugería descartar el valor atípico antes de calcular la media.

Algunos ítems, tales como el 3, el 7.a) y el 4, parecen ser memos difíciles para los alumnos de secundaria. Los índices de dificultad constatados fueron, respectivamente, 0'52, 0'5 y 0'46. El primero se refiere a un problema de respuesta de elección múltiple en el que se evalúa, entre otros aspectos, el uso de la media como el valor representativo de un conjunto de valores. En el segundo, se pide la composición de cada una de las 10

familias, para obtener una media de 3'2, mientras que en el tercer caso se evalúa el uso adecuado del algoritmo para el cálculo de la media.

Pero a pesar de que esos ítems hayan sido más fáciles para los alumnos de secundaria, no podemos asegurar con tanta firmeza que los mismos hayan también resultado fáciles, o menos difíciles, para los alumnos universitarios ya que al ser, los índices de dificultades, iguales a 0'39, 0'38 y 0'38, respectivamente, no se observa una diferencia substancial respecto a los otros índices, mostrando de este modo que los alumnos han experimentado también un grado de dificultad apreciable en los mismos ítems.

5.5.4. ANÁLISIS DE LA FIABILIDAD DEL CUESTIONARIO

Tal y como se hizo en la fase exploratoria, el análisis de la fiabilidad del cuestionario para la fase general de investigación se ha realizado utilizando el coeficiente de Kuder-Richardson $KR_{20} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{\sigma^2 x}\right)$, ya que en la categorización de los ítems para este análisis asignamos el valor 1 para las respuestas correctas y el 0 para las respuestas incorrectas.

Como señalamos en su momento, este coeficiente es un caso particular del coeficiente de Cronbach $\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \sigma^2{}_j}{\sigma^2 x}\right)$, cuando los ítems son dicotómicos, siendo la varianza $\sigma_j^{\,2} = p_j q_j$ (p_j es la proporción de sujetos que aciertan el ítem j y q_j la proporción de los que lo fallan). Luego, y tal cual explica Muñiz (1994), α refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test, es decir, es un indicador de la consistencia interna del test.

	Estudiantes de secundaria (N= 130)		Estudiantes universitarios (N=97)	
ÍTEMS	**Media**	**Desv. típ.**	**Media**	**Desv. tip.**
ITEM1	0,00	,000	0,00	0,000
ITEM2	0,15	0,355	0,12	0,331
ITEM3	0,52	0,502	0,39	0,491
ITEM4	0,46	0,500	0,38	0,488
ITEM5	0,05	0,227	0,06	0,242
ITEM6.A.a)	0,29	0,457	0,34	0,476
ITEM6.A. b)	0,05	0,211	0,05	0,222
ITEM6.B	0,21	0,407	0,26	0,440
ITEM7. a)	0,50	0,502	0,38	0,488
ITEM7. b)	0,35	0,478	0,22	0,414
ITEM8.a)	0,22	0,413	0,09	0,292
ITEM8. b)	0,11	0,311	0,14	0,353
ITEM9	0,24	0,428	0,28	0,451
Puntuación Total	3,13	1,853	2,72	2,11

Tabla 5.43. Resultados relacionados con el análisis de la fiabilidad del cuestionario

La estimación del coeficiente de fiabilidad para los 13 ítems con los 130 alumnos de secundaria es α = 0'4432, mientras que los mismos ítems para los 97 estudiantes universitarios es α = 0'6115. Esta diferencia de coeficientes resulta de las diferencias en las varianzas de las puntuaciones totales en el cuestionario y en las varianzas de los ítems particulares (Tabla 5.43). Es decir, α crece si disminuye la suma de las varianzas de los ítems y aumenta la varianza de las puntuaciones totales, haciendo que el cociente entre ellos, en la fórmula, sea menor.

Los coeficientes encontrados resultan relativamente diminutos debido, fundamentalmente, a la poca semejanza entre los ítems. Como se ha visto, a pesar de evaluarse un único concepto, los ítems incluyen diferentes aspectos sobre la media aritmética, en cumplimiento de los objetivos que nos habíamos propuesto.

Diferentes factores externos, como las condiciones de trabajo en el terreno, la disponibilidad de los alumnos, las programaciones académicas en las escuelas, etc., nos han limitado realizar un juicio más amplio acerca de la unidimensionalidad de los ítems, mediante el uso de otras técnicas (formas paralelas, test- retest, teste-retest con formas paralelas o dos mitades), por lo que nos hemos guiado únicamente en la consistencia interna, con plena consciencia de algunas de sus limitaciones.

5.6. CONCLUSIONES SOBRE EL PRIMER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL

Para finalizar este capítulo expondremos de forma sucinta las principales conclusiones con respecto al trabajo desarrollado en este primer estudio de la fase general de nuestra investigación.

Lo primero que podemos decir, es que el instrumento de medida nos ha facilitado diferentes informaciones sobre cómo nuestros alumnos comprenden el concepto de la media aritmética. El cuestionario, que fue desarrollado para este propósito, resultó de una ampliación del cuestionario utilizado en la fase exploratoria, al que se le añadió otros problemas, y modificaciones que creímos oportunas, en función de algunas situaciones observadas al administrarlo a los estudiantes que participaron en la fase exploratoria. No obstante, aunque esto ha satisfecho nuestros objetivos, pensamos seguir mejorándolo, fundamentalmente en lo que respecta a los problemas de elección múltiple, con relación a otros tipos particulares de opciones.

En cuanto a los resultados obtenidos, podemos asegurar que los alumnos presentan diferentes tipos de dificultades, errores y obstáculos en la adquisición y uso del concepto de media aritmética. Hemos notado que, en general, muchos alumnos conocen la fórmula de cálculo de la media aritmética, sin embargo, presentan dificultad al trabajar con ella en situaciones donde no se plantea el uso directo del algoritmo, o en las que se ven obligados a reconocer los elementos que integran el algoritmo. La comprensión conceptual es, sobre todo el aspecto más crítico. Algunos alumnos no dominan ciertas propiedades de la media, principalmente, el reconocimiento de la influencia de los valores extraños en el cálculo de la media y las que reflejan su aspecto más abstracto, como, por ejemplo, que la media puede ser un valor decimal, que está comprendida entre los valores extremos o que el cero influye en su cálculo. Son notables también las dificultades de los alumnos con la media ponderada, confirmando muchos de los aspectos manifestados por Pollatsek, Lima y Well (1981) y Gatusso y Mary (1998) en sus trabajos.

La inclusión de preguntas de respuesta abierta relacionadas con preguntas de respuesta de elección múltiple ha permitido ver que muchos alumnos no son consistentes en sus respuestas. La mayor parte de los alumnos que elige una respuesta correcta en un problema de elección múltiple no son capaces de dar una respuesta fundada en un problema de respuesta abierta relacionado con este. Igualmente, hemos observado que algunos alumnos podían dar una respuesta correcta en un problema

abierto, y sin embargo, indicaban una alternativa incorrecta en el problema de elección múltiple relacionado.

La caracterización jerárquica de las respuestas de los alumnos ha permitido observar que no hay diferencias significativas entre los estudiantes de secundaria y los universitarios, en cuanto a los niveles de interpretación verificados. Obviamente, esperábamos un mayor desempeño por parte de los estudiantes universitarios, si atendemos a que ellos son de un nivel de escolaridad superior y se supone que poseen una mayor madurez y tienen mayor experiencia. Incluso algunos deberán impartir en un futuro estos contenidos. Aquí, no coincidimos con los resultados de Watson y Moritz (1999, 2000) que verificaron en sus estudios que el nivel de comprensión aumenta con el grado cursado.

De forma general, los resultados obtenidos nos permiten pensar que aunque el concepto de media aritmética está caracterizado por aspectos de naturaleza abstracta, que hacen difícil su comprensión, gran parte de las dificultades y errores cometidos por los alumnos se derivan del propio proceso de enseñanza. En este sentido, hacemos nuestras, las ideas de Socas (1997) sobre lo imprescindible que resulta que los profesores tengan las habilidades necesarias para desarrollar las capacidades que definen la competencia de un alumno, atiendan a la necesidad de contenidos anteriores y los relacionen con los nuevos conocimientos, además de atender al nivel de abstracción requerido, y a la naturaleza lógica de los propios contenidos escolares.

CAPÍTULO 6

SEGUNDO ESTUDIO DE FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN: ENTREVISTAS. ANÁLISIS DE LOS ORÍGENES DE LAS DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES.

6.1. INTRODUCCIÓN

En este Capítulo presentamos los datos relativos a las entrevistas llevadas a cabo con un grupo de alumnos de Educación Secundaria, y en el mismo analizamos, también, los posibles orígenes de algunas dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la media aritmética encontrados en la Población de estudio.

El estudio relativo a la administración del cuestionario proporcionó datos generales sobre la forma en la que los alumnos razonan frente a determinados aspectos evaluados. Varias fueron las cuestiones que requerían explicaciones. Luego, creímos que un análisis minucioso de las respuestas de los alumnos ayudaría a conocer las dificultades reales de los estudiantes y analizar con criterio el por qué de sus actuaciones.

Comenzaremos nuestro análisis con la presentación de datos referentes a las entrevistas y posteriormente presentaremos el análisis de los orígenes de los errores cometidos por los alumnos y finalizaremos con las conclusiones correspondientes a este Capítulo.

6.2. SEGUNDO ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN: ENTREVISTAS

Como hemos señalado en el capítulo relativo a la metodología de investigación, las entrevistas se llevan a cabo con el propósito de profundizar en algunos aspectos evaluados tras la aplicación del cuestionario. La flexibilidad y adaptabilidad de esta técnica de recogida de datos, la posibilidad que tiene de proporcionar un alto grado de objetividad y uniformidad, permitiendo la comprobación y aclaración de las respuestas

de los alumnos mediante una interacción personal al nivel consciente (McMillan y Schumacher, 2005), constituyen los factores principales que justifican el uso de esta técnica en nuestra investigación.

En función de nuestros objetivos nos decidimos por entrevistas semiestructuradas. Pretendíamos indagar varios aspectos no aclarados por la simple administración del cuestionario, entre otros, saber cómo el alumno había llegado a una determinada respuesta, por qué se había planteado uno u otro camino, por qué elegía una determinada alternativa de entre las varias dadas, qué significado atribuía a un determinado concepto. Partíamos de la respuesta que el alumno mismo dio al contestar el cuestionario que se le administró en la primera fase del estudio general.

El uso de las entrevistas semiestructuradas ofrece varias ventajas. Como señala Fox (1981), aunque el entrevistador enumere preguntas concretas, no está limitado a esta lista y tiene libertad para hacer preguntas complementarias, para repetir otras y para dar rodeos que prometan dar una información útil para los propósitos de la investigación, y para ayudar a contestar a las preguntas de investigación.

Con respecto a la forma de registro de los datos, nos planteamos audiograbar las respuestas. La razón es que eso nos permitía concentrarnos en nuestro papel esencial de formular las preguntas. Fox (1981), indica que este proceder también permite al entrevistador prestar atención a los aspectos no verbales de la respuesta tales como la posición del cuerpo, la expresión facial y la posición de las manos. Además, como el entrevistador no tiene que escribir sin cesar, a medida que el sujeto va hablando, hay más posibilidades de que pueda crear la relación humana que tiene tanta importancia para el éxito de la interacción personal.

Es importante señalar que a un mismo alumno no se le preguntó sobre todos los problemas del cuestionario que había contestado. Se ha preguntado, sobre aquellos aspectos que resultaban importantes para profundizar, de acuerdo con las anotaciones que se efectuaron en el proceso de categorización de las respuestas, tras la administración del cuestionario. De esta forma fue posible, comprobar y aclarar dichos aspectos, para emitir un juicio más coherente sobre el razonamiento de los alumnos y para analizar también la posible procedencia de algunas dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la media aritmética.

Cada una de las entrevistas incluyó un diálogo inicial informativo y de acercamiento al alumno, a pesar de que cuando se administró el cuestionario se les había avisado que algunos serían entrevistados, aunque en ese momento no se

comentara sobre los objetivos de la entrevista. El diálogo constituyó un preámbulo a la entrevista, y mediante el mismo se explicó también el propósito de la actividad. Se pretendía, entre otros aspectos, crear un ambiente favorable y de entendimiento mutuo, proporcionando una relación cómoda, tanto para el entrevistador como para el entrevistado, y para que este último ganase confianza. McMillan y Schumacher (2005) consideran que estos aspectos son de extrema importancia cuando se lleva a cabo esta técnica de recogida de datos.

6.2.1. METODOLOGÍA

6.2.1.1. MUESTRA

Las entrevistas fueron realizadas con 8 alumnos de enseñanza secundaria, del grupo de alumnos de la institución privada que describimos en el capítulo sobre metodología de la investigación.

A todos los entrevistados se les había administrado el cuestionario tres semanas antes de este estudio. La selección no se realizó atendiendo a ningún criterio especial. Simplemente fueron convocados algunos de aquellos alumnos cuyas respuestas suscitaron dudas al investigador en el proceso de análisis y/o necesitasen de aclaración.

Así, terminado el proceso de análisis de las respuestas, solicitamos a los responsables de la institución que informaran a los alumnos aludidos, para una sesión de entrevistas personales. En aquella ocasión, sólo se coordinó la fecha y el horario provisional para cada alumno, pero no se entró en detalles sobre lo que se iba a preguntar concretamente.

Para preservar la identidad de los estudiantes, usamos códigos que se relacionan con su posición en la base de datos desarrollada para el primer estudio de la fase general y su respectivo género.

6.2.1.2. PROCEDIMIENTO EN EL ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

McMillan y Schumacher (2005) señalan que el estudio cualitativo es un proceso relativamente sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación, que nos proporciona explicaciones sobre el único fenómeno de interés y que por consiguiente, los análisis de datos cualitativos varían mucho dependiendo de las diferentes investigaciones, objetivos, estrategias de formulación de datos y modos de

encuestar. Indican que analizar datos cualitativos es una actividad ecléctica, es decir, no existe una manera "correcta" y los datos pueden analizarse desde más de una manera.

Con base en estos presupuestos, en nuestro proceso tratamos de combinar en un todo las operaciones de organización, análisis e interpretación, partiendo de las preguntas de investigación y las cuestiones previamente programadas, derivadas de las respuestas de los alumnos al cuestionario que se les administró, de sus concepciones respecto a un determinado concepto, los procesos, procedimientos y argumentos presentados al resolver un problema dado, o sus actuaciones al resolver dos tipos diferentes de preguntas (de respuesta abierta y de respuesta de elección múltiple) que tenían cierta relación.

Las entrevistas fueron audiograbadas y posteriormente se hizo la transcripción de las mismas. En los anexos, presentamos la transcripción original en portugués y su respectiva traducción al español. Cada entrevista tardó entre 15 y 25 minutos, aproximadamente. El tiempo dependía de la capacidad de argumentación del alumno y del tipo de respuesta presentado.

Al alumno se le dio la posibilidad de ver la prueba que realizó, leer la pregunta y ver la respuesta que dio en el cuestionario, de forma que se situase en la cuestión que se planteaba. Aunque las respuestas ya estaban codificadas, los alumnos no se enteraron del significado de cada código, pues, no se señalaba si la respuesta era correcta o incorrecta.

Para el tratamiento de la información, partimos de las respuestas dadas en cada ítem. El análisis consistió en encontrar aspectos relevantes en las respuestas proporcionadas, que resultasen de interés para la investigación. Se analizaron primeramente todas las respuestas dadas en un mismo ítem, resumiendo los aspectos principales en una hoja. Posteriormente se marcaron los fragmentos o partes de las entrevistas que describían el razonamiento de un alumno respecto a una cuestión dada. Estos fragmentos o partes de entrevistas, al constituir unidades de significado que revelan la idea del alumno sobre una cuestión, fueron utilizados en el análisis de resultados para ilustrar mejor los pensamientos de los alumnos, como se mostrará en el siguiente apartado.

6.2.2. RESULTADOS EN EL ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

A continuación describimos sintéticamente las informaciones obtenidas de las respuestas de los alumnos, con base a las cuestiones que se les preguntó en cada ítem.

- **Resultados del ítem 1 "Tiempo recorrido en los 100 metros"**

Se preguntó a 5 alumnos, de los 8 entrevistados, sobre diferentes aspectos que se asociaban con las respuestas dadas. Las cuestiones iban encaminadas a saber si al considerar la media o la moda para estimar el valor pretendido se había basado o no en algún conocimiento de referencia, si reconocían la existencia de un valor anómalo en el conjunto de datos o si tenían consciencia de la necesidad de descartar el valor extraño presentado en la situación, antes de calcular la media.

De este modo, indagamos en las direcciones mencionadas, aunque en algunos casos el diálogo condujo a otras cuestiones, derivadas del contenido de las respuestas proporcionadas.

Veamos algunas respuestas dadas por los alumnos con respecto de los aspectos citados.

Sobre el uso de la media como mejor estimador de una medida

Este aspecto fue cuestionado a dos de los cinco alumnos a los que se les preguntó sobre este ítem. Sus respuestas del por qué usan esta medida no muestran ninguna razón de fondo. En los extractos que se mostrarán a continuación, se podrá apreciar con más detalle las respuestas dadas por cada alumno.

En el caso de **A103CF**, al contestar el cuestionario que se le administró en el estudio de la primera fase, suma todos los datos y divide la suma por 10, obteniendo el valor 14'49 y además escribe que "e*l profesor debe considerar como estimación, el tiempo de 14'49 segundos porque es el tiempo recorrido por el alumno*". Luego se preguntó por qué había pensado de esta forma.

(Ver traducción al español en la página 477)

86. *Entrevistador: ... tu respondeste que o professor deve considerar o valor 14.49 segundos, que é a média. Por que pensaste neste valor?*
87. *Aluno: Ehhhh, até já não me lembro.*
88. *Entrevistador: Não te lembras, não?*
89. *Aluno: [**Lê o problema e diz:**] Achei melhor esta forma porque, assim, podia ver…, bem, deram os tempos registados, que são este e assim para achar o tempo que o professor devia considerar achei melhor somar todos os tempos que nos deram e dividir por…, um, dois, três, quatro…*

90. Entrevistador: São dez tempos.

91. Aluno: Sim, são dez. E dividi por 10.

92. Entrevistador: E por que usaste este procedimento?

93. Aluno: Por que? ... Porque é o que eu achei melhor.

El alumno no emplea el término media, pero escribe su notación simbólica. En su respuesta dice utilizar este procedimiento porque es el que él cree mejor. Sin embargo, esta idea no es totalmente esclarecedora, pues no se sabe si se refiere al uso de la media como el mejor estimador, como el valor que mejor describe o representa un conjunto de datos u otra situación. Es probable que se decantara por este procedimiento porque se utiliza frecuentemente en varias situaciones donde se trabaja con datos. No obstante, quedamos con la idea de que ve en la media la medida adecuada para estimar un valor desconocido.

El alumno **A99CF**, también procedió de manera similar al anterior. Al contestar el cuestionario, suma todos los datos y divide la suma por 10. Sin embargo, a pesar de haber encontrado el valor 14'49, al justificar no escribe correctamente este valor. Dice que "*el profesor debe considerar como estimación del tiempo recorrido el valor 144'9"*. Este error nos pareció un simple *lapsus*, por lo que no nos centramos en ese detalle. Nos centramos en saber por qué había utilizado la media para estimar el valor pretendido.

(Ver traducción al español en la página 480)

*143. Entrevistador: No problema 1, que diz, "O professor de educação física… [**lê-se o problema completo**], o que fizeste foi somar todos os valores…*

144. Aluno: Sim, somar todos os valores e dividir por 10.

145. Entrevistador: Por que achas que esta deve ser a estimação do tempo real percorrido pelo aluno?

146. Aluno: Porque temos que somar os números e dividir pelo número de observações.

Este alumno tampoco utilizó el término media en su respuesta, ni siquiera escribió la notación de esta medida cuando contestó el cuestionario. Según él, para estimar el tiempo deseado se debe sumar todos los valores y dividir por el número de observaciones. Aunque no da detalles sobre el procedimiento usado, la idea que hace prevalecer es que se usa la media para estimar un valor desconocido.

Sobre los que indican el valor más frecuente como el mejor estimador

El segundo aspecto cuestionado al respecto de este ítem se relacionó con la indicación del valor más frecuente como el mejor estimador para el tiempo pretendido en la situación planteada. De los 5 alumnos a los que se les preguntó sobre este ítem, a 3 de ellos se les interrogó sobre el uso del valor más frecuente. Los argumentos presentados no indican una razón especial sobre el uso de esta medida, tal como se puede ver en los extractos de diálogos mantenidos con estos alumnos.

Por ejemplo, **A97CF**, no contestó la pregunta cuando se le pasó el cuestionario. Le preguntamos por qué no lo había hecho, y le pedimos reflexionar sobre la misma pregunta durante la entrevista.

(Ver traducción al español en la página 474)

1. *Entrevistador: Vejo que não respondeste a pergunta número 1. O que é que achaste dela. Era muito difícil ou tiveste outros motivos?*
2. *Aluno: A princípio estava complicada.*
3. *Entrevistador: Não se entendia.*
4. *Aluno: Sim, não se entendia. Então preferi ir fazendo as outras.*
5. *Entrevistador: Mas veja o que se pede aí por exemplo.*
6. *Aluno: [**Lee el problema en voz baja**]*
7. *Entrevistador: Agora de forma mais fria, qual é o tempo que você acha que deve considera o professor como estimação do tempo real percorrido pelo aluno.*
8. *Aluno: Um momento só. Foram 10 alunos?*
9. *Entrevistador: Sim, 10 alunos.*
10. *Aluno: [**Volta a ler o problema e pergunta**]: E estes 10 alunos cada um deu o seu tempo?*
11. *Entrevistador: O problema diz que os dez alunos registaram o tempo dum aluno que estava a correr. O registo foi feito ao mesmo tempo e de forma independente.*
12. *Aluno: [**Permanece em silencio algum tempo e diz**]: Por mim deve considerar-se o 15.*
13. *Entrevistador: Por que?*
14. *Aluno: Porque é o número que está mais repetido. Só por isso. Porque é o número que está mais repetido.*
15. *Entrevistador: Ou seja, como é o valor que mais está repetido para ti então é a melhor estimação do tempo, não é assim?*
16. *Aluno: Sim, no meu ver é por isso.*

De sus palabras, concluimos que no contestó porque no entendió el enunciado. Sin embargo, tras habérsele explicado el problema con detenimiento, consideró que el valor más frecuente era el indicado para estimar el tiempo desconocido, simplemente porque es el tiempo que más se repite. Así da a entender que no sabe que la moda no tiene la propiedad de mejor estimador en la situación dada.

Otro aluno, en este caso **A106CF**, al contestar el cuestionario escribió que "*el profesor debe considerar el valor 15 segundos porque es el tiempo registrado por 4 alumnos*". Le interrogamos sobre los fundamentos de su respuesta.

(Ver traducción al español en la página 490)

375. *Entrevistador: ... tu respondeste que o professor deve considerar 15 segundos, não é?*
376. *Aluno: Sim.*
377. *Entrevistador: Por que consideraste este tempo?*
378. *Aluno: Porque foi o tempo que 4 alunos registaram.*
379. *Entrevistador: OK. E isso que significa?*
380. *Aluno: Eu escolhi o 15 porque foi o número que o maior número de alunos escolheu. Tipo registou; Eu achei que fosse esse o melhor número que o professor pediu.*
381. *Entrevistador: E se por exemplo o professor somasse todos os valores registados e dividisse por 10, podia ser também?*
382. *Aluno: Esses todos que estão aqui?*
383. *Entrevistador: Sim.*
384. *Aluno: Acho que também podia ser.*
385. *Entrevistador: E se excluíssemos um dos valores e se somasse os outros 9, dividindo a soma por 9. Por exemplo excluir o 10, somar os outros 9 números e dividir a soma por 9, achas que também se podia fazer?*
386. *Aluno: Eu acho que tinha que ser mesmo somar os 10 valores e dividir por 10. Acho que por 9...*
387. *Entrevistador: Não podia ser, não?*
388. *Aluno: Acho que não.*
389. *Entrevistador: Isso significa que a resposta que deste ao questionário não está certa?*
390. *Aluno: Não, eu não disse que a minha resposta não está certa. Eu considerei o 15 porque era o número que estava mais repetido. Para estimar, considerei que é o número que o professor devia considerar.*

Aunque considera que el profesor debe utilizar el valor que más se repite, en su respuesta deja entrever que también se puede usar la media en esta situación, aunque en

este caso cree que no se debe descartar ningún dato al calcularla, aunque éste sea un valor atípico. Igual que en el caso anterior, el alumno indica el 15 simplemente porque es el tiempo más frecuente. En ningún momento se refiere al término moda, ni expone razones especiales que podrían justificar el uso de esta medida.

De igual manera, **A121CF** prefiere la moda cuando contesta a este ítem. Escribió que "*El tiempo que el profesor debe considerar es 15 segundos, porque fue el número que más veces fue registrado; fue el número identificado 4 veces, y al aparecer con más frecuencia lo considero como la estimación del tiempo real*". En función de eso le preguntamos:

(Ver traducción al español en la página 494)

469. *Entrevistador: ... Por que achas que o valor que mais se repete é o que se deve considerar na estimação?*
470. *Aluno: Porque se formos a ver, por exemplo, um teste, para saber se os alunos cabularam, ou para saber se são inteligentes…. eu vou pelo maior número de casos que se repetem,… observando o número de coincidências.*
471. *Entrevistador: Ou seja, as coincidências te indicam o resultado?*
472. *Aluno: Sim, através das coincidências eu suponho que o resultado pode ser o desejado. Se a maioria lhes deu este resultado, acho que é o que se deve considerar.*

Aquí, el alumno cree que se debe considerar como estimación del tiempo deseado, el valor que más se repite atendiendo a las coincidencias en el registro. Incluso, da algunos ejemplos, para convencer que este método es aconsejable en esta circunstancia. En la respuesta, no expresa abiertamente el término moda, y tampoco da una explicación que muestre una razón de fondo para usar la moda en la situación planteada.

Sobre el reconocimiento de los valores atípicos y su tratamiento en el cálculo de la media

Respecto a este aspecto, las preguntas fueron formuladas primeramente para saber si los alumnos tenían consciencia de que el valor 10 es un dato extraño en el conjunto dado. Tratándose de registros de tiempo en una carrera de 100 metros es difícil creer que un estudiante haya obtenido esta marca. En este sentido, se esperaba, al menos, que los alumnos manifestasen dudas sobre la inserción de ese valor en el conjunto proporcionado.

Por otro lado, la intención de las preguntas buscaba una aproximación respecto a la decisión del alumno de excluir o no ese valor en el cálculo de la media.

Evidentemente, esta actuación requería, en primer lugar, que el alumno tuviese conocimiento sobre la existencia de este tipo de valores.

Veamos a continuación, algunos ejemplos que muestran las ideas de dos alumnos entrevistados al respecto.

Alumno A99CF

(Ver traducción al español en la página 480)

147. *Entrevistador: Mas você antes de realizar esta operação, não notou nenhuma diferença entre os dados que foram registados pelos alunos?*
148. *Aluno: Diferença?*
149. *Entrevistador: Sim, diferenças entre os dados.*
150. *Aluno: Uns percorreram em mais tempo outros em menos, não? [**O aluno parecia não entender que os valores se referiam aos registos do tempo percorrido por um mesmo estudante. Mas ainda assim o entrevistador não fez caso a situação**]*
151. *Entrevistador: Sim, esta é uma das diferenças. Mas não notas algo que chame mais atenção?*
152. *Aluno: [**Permanece calado por alguns segundos e depois responde**]: Não.*
153. *Entrevistador: Não? Olha! Os tempos estão dados em segundos, não? Vamos ver se te ajudo a entender melhor o problema. Olha para os valores registados pelos alunos: 15.05, 14.95, 15.05, 15, 10, 15, 14.90, ... [**o aluno continua**].*
154. *Aluno: 15, 14.95 e 15.*
155. *Entrevistador: OK. Não achas que a maioria dos tempos registados estão muito próximo de 15 segundos, excepto um deles?*
156. *Aluno: O 10?*
157. *Entrevistador: Sim, o 10. Não achas que este valor parece ser um dado estranho no conjunto dos demais valores?*
158. *Aluno: Acho que foi o aluno que correu em menos tempo.*
159. *Entrevistador: Não. Eles registaram o tempo dum aluno que estava a correr a distancia de 100 metros. Ou seja, um aluno estava a correr e os outros estavam a registar o tempo deste, cada um com o seu cronómetro.*
160. *Aluno: Ahh [**parecendo dizer que agora entendeu**]*
161. *Entrevistador: Não tiras nenhuma conclusão com relação a isso?*
162. *Aluno: [**Permanece em silencio durante alguns segundos e depois diz**]: Mas há uma coisa que eu não entendo.*
163. *Entrevistador: O que é que não entendes?*
164. *Aluno: Se todos começaram a registar o tempo ao mesmo tempo, como é que uns registaram 15.05, uns 14.95, 15, tempos tão diferentes? Acho que tinha que ser o mesmo tempo, não?*

165. *Entrevistador: Isso sempre sucede assim?*

166. *Aluno: Não porque na pergunta diz que todos registaram ao mesmo tempo.*

167. *Entrevistador: Sim. Podia dar-se o caso de que um aluno activou antes o cronómetro, ou activou com atraso. Isso pode acontecer, não?*

168. *Aluno: Ahhh, sim pode ser. É possível.*

169. *Entrevistador: E então, não notas nenhuma diferença nos dados?*

170. *Aluno: Acho que não tem.*

A pesar de la explicación del entrevistador, el alumno no ha sido capaz de reconocer que el tiempo 10 segundos es un dato anómalo en el conjunto presentado. Encuentra diferencias en los datos, pero considerando aspectos sin importancia dentro del análisis que se pretende.

Tal como el alumno anterior, las respuestas de **A106CF**, también muestran claramente que la idea de descartar un valor no se tiene en cuenta. El extracto de la entrevista que se muestra a continuación refleja precisamente su desconocimiento sobre la referida noción.

(Ver traducción al español, en la página 490)

385. *Entrevistador: E se excluíssemos um dos valores e se somasse os outros 9, dividindo a soma por 9. Por exemplo excluir o 10, somar os outros 9 números e dividir a soma por 9, achas que também se podia fazer?*

386. *Aluno: Eu acho que tinha que ser mesmo somar os 10 valores e dividir por 10. Acho que por 9…*

387. *Entrevistador: Não podia ser, não?*

388. *Aluno: Acho que não.*

Para el alumno, la idea de descartar el valor atípico antes de calcular la media no parece algo razonable, aunque la situación lo requiera. Supone que lo mejor es sumar todos los valores y dividir por 10. No sabe en cuánto afecta el valor extremo a la estimación deseada.

- **Resultados del ítem 2 "En una clase de ciencias"**

Como hemos explicado en otros capítulos de nuestro estudio, este ítem tiene relación con el ítem 1, con la diferencia de que el ítem 2, es un problema de respuesta de elección múltiple, mientras que el 1 es un problema de respuesta abierta. Además los dos problemas requerían de una misma solución, ya que los contextos presentados son similares.

Indagamos varios aspectos en las entrevistas, donde destacamos las siguientes cuestiones:

- ¿por qué elige el alumno una alternativa en particular?
- ¿por qué no selecciona en el ítem 2 la opción relacionada con la respuesta dada en el ítem 1?
- ¿qué cree el alumno que pasaría si se indicase una opción diferente de la que ha elegido?
- ¿por qué no selecciona el alumno la opción que sugiere descartar el valor atípico?

A continuación presentamos algunos extractos que muestran las respuestas de los alumnos y nuestras interpretaciones al respecto sobre los argumentos dados.

Ya vimos que **A97CF** no contestó el ítem 1. Pero cuando le pedimos reflexionar sobre el referido problema, indicó el valor 15 segundos como el tiempo que el profesor debía considerar como estimación del tiempo real porque es el valor que se repite más veces. En el ítem 2, marca justamente la opción que se relaciona con ese mismo planteamiento, por lo que le preguntamos sobre los motivos de esta elección y por qué no indicó la opción que sugería descartar el valor atípico.

(Ver traducción al español, en la página 474)

19. *Entrevistador: Achas que o número mais repetido é o ideal para estimar o peso desejado?*
20. *Aluno: Acho que sim.*
21. *Entrevistador: Por que não escolheste por exemplo a opção d)*
22. *Aluno: A que diz descartar o 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8?*
23. *Entrevistador: Sim.*
24. *Aluno: [**Depois de permanecer em silencio durante um longo tempo responde**]: Acho que…acho que somar os oito números e depois dividir, ia dar muita volta. Se desse para fazer assim, ehhh, tirar o 15 que é o número que tem maior valor, depois dividir por 8, assim ainda seria mais o menos. Agora somar os oito e depois dividir por … acho que ia dar muita volta.*
25. *Entrevistador: É muito trabalho?*
26. *Aluno: Umhum.*

De la respuesta dada se ve que prefiere el valor más frecuente porque es la vía menos laboriosa. Sólo tiene que indicar un valor, sin efectuar cálculos y además se obtiene sin utilizar otros datos. Eso lleva a creer que el alumno no se siente cómodo al tratar con varios datos, por los diversos procesos que conlleva. Se piensa que eso podría

derivarse del hecho de no estar familiarizado con el procedimiento que debe utilizarse en la situación dada.

En cuanto al alumno **A103CF**, en el ítem 1 sugirió sumar todos los datos y dividir por el número total de observaciones. En el problema 2, prefirió descartar el valor atípico y calcular la media con los restantes valores. Por ello, se quiso saber los motivos de esta falta de coherencia en dos situaciones similares.

(Ver traducción al español en la página 478)

102. *Entrevistador: … Olha que no primeiro problema somaste todos os valores e dividiste a soma por 10. Mas neste problema, que é mais ou menos similar ao anterior, escolheste a opção d) que diz: "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". Por que achas que aqui se devia excluir este valor?*
103. *Aluno: [**Lê o problema novamente e responde**]: Acho que cometi um erro. Deveria somar os 9 números.*
104. *Entrevistador: Deverias somar os 9 números e dividir a soma por 9. Te referes a opção c)?*
105. *Aluno: É. Só que esta prova, ou o teste que fizemos não é estatística, por isso, também não podíamos por coisas de estatística. Não nos disseram que era para revisar. Então a maior parte das perguntas que eu fiz, ehhh, fiz, tive que escolher uma delas.*

De acuerdo con esta respuesta, procuramos mostrar al alumno que, en el conjunto de datos, había un valor que resaltaba más, comparándolo con los demás, igual que en la situación anterior (problema 1).

106. *Entrevistador: OK. Não importa. Mas veja também como estão os dados, comparados com os que se apresentam no problema 1. Não notas que há um valor que parece ser estranho?*
107. *Aluno: Sim, o 15.3.*
108. *Entrevistador: Os demais são mais ou menos iguais. Então, entre a opção "somar os nove números e dividir a soma por 9" e a que diz "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8", na sua opinião, qual deve ser a solução?*
109. *Aluno: Assim acho que deveria ser a opção d). Tendo em conta que aqui o valor 15.3 não tem nada a ver com os outros dados, acho deveria ser excluído.*

Al comenzar dijo que la elección de la opción relativa al descarte del valor atípico era un error. Pero después de hacerle ver que uno de los datos resultaba ajeno al conjunto de datos, se convenció que realmente había que descartar este valor. Esta actuación muestra que el alumno no estaba muy seguro de la respuesta elegida. Indicó la alternativa sin considerar una argumentación convincente.

Respecto de las inconsistencias, **A99CF** suma todos los valores proporcionados en el ítem 1, y divide por el total de datos. Sin embargo en el problema 2, sugiere usar el valor más frecuente. Se quiso averiguar, en primer lugar, el motivo de la diferencia de sus actuaciones.

(Ver traducción al español en la página 481)

171. *Entrevistador: ... sugeriste que para tal eles deveriam "usar o número mais repetido, que é o 2". Por que não indicaste também o valor mais repetido como solução, na pergunta anterior?*
172. *Aluno: Por que? Eu nem sequer pensei nisso.*
173. *Entrevistador: Não pensaste nisso?*
174. *Aluno: Eu só sabia que fiz a primeira, quando acabei a primeira fiz a segunda, e já. Não pensei em ver a diferença entre as duas.*

Esta respuesta muestra claramente que el alumno no percibe la relación entre los dos problemas, por lo que es poco probable que dé una misma respuesta en ambas situaciones. Se pregunta, entonces, si además de la alternativa que marcó se podría elegir también otra, como solución para el problema. En este caso, le interrogamos justamente sobre la alternativa similar al procedimiento que usó en el primer problema y a la idea de descartar el valor que sobresalía de entre los datos.

(Ver traducción al español en la página 481)

175. *Entrevistador: OK. Mas tu achas que por exemplo neste problema se podia utilizar a opção c) "somar os 9 números e dividir a soma por 9"?*
176. *Aluno: A alínea c)?*
177. *Entrevistador: Sim, ou por exemplo a opção d) "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8"?*

...

184. *Aluno: [**Depois de um silencio prolongado, responde**]: Acho que também dava para utilizar a alínea c) (somar os 9 números e dividir a soma por 9). Mas a alínea d) (descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8) acho que não. Por que temos que descartar o valor 15.3, se também faz parte dos dados?*

El alumno cree que se pueden sumar todos los datos y dividir la suma por el total de observaciones. Sin embargo, entiende que no se debe descartar ningún valor porque se eliminaría un dato que es parte de los valores proporcionados, a pesar de habérsele explicado sobre lo diferente que es un dato en comparación con los demás. De sus respuestas, deja entrever que no está seguro de sus actuaciones. No contesta con

convicción, y muestra no tener noción de valor atípico y mucho menos sobre cuándo se debe o no descartar este tipo de valor en un conjunto de datos.

Otro estudiante, **A106CF,** elige la opción referida al uso del valor más frecuente en el problema 2 del cuestionario, una respuesta similar a la que dio en el problema 1. Se le pregunta por qué no se decidió por otras opciones, como por ejemplo, sumar los 9 valores y dividir por 9 o descartar el valor 15'3, sumar los 8 valores restantes y dividir por 8, habiendo contestado lo siguiente:

(Ver traducción al español en la página 491)

403. *Entrevistador: … Neste problema escolheste a alínea a) "usar o número mais repetido, que é o 6.2" como o melhor método que recomendas aos alunos para determinar com maior precisão possível o valor real do peso.*
404. *Aluno: Sim.*
405. *Entrevistador: Tu achas que se podia escolher por exemplo a alínea c) que diz "somar os 9 números e dividir a soma por 9"?*
406. *Aluno: Acho que sim.*
407. *Entrevistador: Por que?*
408. *Aluno: Acho que podia. Eles querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto. Acho que poderia.*
409. *Entrevistador: Então neste caso seriam duas soluções?*
410. *Aluno: Mas como só dava para escolher uma…*
411. *Entrevistador: E no caso da alínea d) que diz "excluir o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8" Achas que também podia considera-se como solução do problema?*
412. *Aluno: Acho que também podia considerar-se, porque 15.3 é um número que fugiu muito dos demais. Aqui temos o 6.2, 6.0, e aqui temos o 15.3… que fugiu muito dos outros.*
413. *Entrevistador: Dizes isso porque eu fiz este comentário com relação ao problema anterior?*
414. *Aluno: Também [**Risos**]*

El alumno no dudó en contestar que se podría elegir más de una opción. En su opinión se podría usar tanto la opción asociada a la moda, a la media o a descartar primeramente el valor atípico y después calcular la media con los otros valores. Otro aspecto es que reconoce que su decisión al respecto del último procedimiento, se debe a los comentarios realizados por el entrevistador en el problema 1, cuando le hizo ver la existencia de un valor anómalo en el conjunto de datos. En general, sus respuesta muestran que no tiene criterio sobre qué método es el más adecuado para la situación,

por lo que considera que las tres vías son factibles para encontrar el peso más preciso, sin atender a las ventajas o inconvenientes que resultarían del uso de uno u otro método.

En el mismo análisis, observamos también inconsistencias en las respuestas de **A121CF**. Al contestar el cuestionario, indicó el valor más frecuente en el ítem 1, pero en el ítem 2 marcó la opción que sugiere descartar el valor atípico, sumar los 8 números y dividir por 8. Le preguntamos, en primer lugar, si era consciente de las respuestas que señaló, a lo que contestó que no podía diferenciar las opciones presentadas.

(Ver traducción al español en la página 495)

483. *Entrevistador: Está bem. Tu escolheste a opção da alínea d). Gostaria de saber por que escolheste esta opção e não a da alínea c) por exemplo?*

484. *Aluno: Não sei, porque isso é tipo tudo a mesma coisa, e eu estava muito em dúvida. Mas eu fui mais pela opção da alínea d), achei que podia ser esta., que podia ser esta.*

Sin embargo, al insistirle sobre su actuación, dio una explicación que concuerda plenamente con la respuesta esperada para el referido problema. Hace referencia a la forma en cómo se presentan los datos, considerando que uno de ellos se aleja excesivamente de los otros.

(Ver traducción al español en la página 495)

485. *Entrevistador: Então foi só por isso? Não te baseaste em nada para escolhê-la?*

486. *Aluno: [**Risos**]. É que também não me lembro bem, pelo tempo. Também descartei este valor, o 15.3, por ser o maior número no seio dos outros. A maioria deu 6.1, 6.2, 6 vírgula qualquer coisa. Como eu disse antes, as maiores coincidências dos números. Vi que os outros números eram aproximados, porque podiam ser reais. Então, pensei nesta onde se ignora o 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8.*

Esta última respuesta nos llevó a interrogarle sobre la diferencia entre la respuesta que dio en este problema y la dada en el problema de respuesta abierta, puesto que dejó entrever que reconocía que el valor 15'3 se diferenciaba en gran medida de los restantes valores dados, algo que no vio en el problema anterior, pese a que ambos cubrían básicamente los mismos objetivos.

487. *... Se aqui pensaste em ignorar o 15.3, por que não procedeste da mesma forma no problema 1, se também há um valor que apresenta mais ou menos as mesmas características?*

488. *Aluno: É, por acaso há. Sim, o 14. Temos o 14.90 e o 14.95.*

489. *Entrevistador: Qual é o valor que está mais ou menos distante dos outros, se consideramos o que explicaste no problema 2?*

490. Aluno: Neste caso é o 10, não é? O 10. Mas como o 15 é..., ehhh, chamou-me atenção o 15, porque é um dado mais repetitivo, achei que devia ser este.

491. Entrevistador: Mas também no problema 2 há um dado que se repete com maior frequência, o 6.2.

492. Aluno: Sim, por isso é que eu descartei o 15.3, porque estava muito fora para ser considerado. Por que todos são 6 vírgula qualquer coisa excepto o 15.3?

493. Entrevistador: No problema 1, também se podia pensar da mesma forma, não achas? Por que quase todos os dados estão próximo de 15, com excepção do 10?

494. Aluno: Porque no problema 1 palpitou-me mesmo que o valor 15 devia ser a solução, por isso é que indiquei este valor como resposta.

De sus respuestas concluimos que le ha sido más fácil identificar el valor 15'3 como valor ajeno a los dados en el problema 2, que el valor 10 presentado en el primer problema, porque la diferencia del dato 15'3 con los otros datos le resultó llamativa, contrariamente al dato 10 segundos. A nuestro entender, la dificultad en la percepción de la diferencia del valor 10 entre los demás datos podría derivarse del desconocimiento del contexto manifestado en el problema, lo que revela la necesidad de familiarizar a los alumnos con diversidad de situaciones.

De igual forma, al manifestar, por un lado, que las opciones no eran muy diferentes, y por otro lado, que descartó el 15'3 por ser el mayor valor en el conjunto dado, desconfiamos sobre su convicción real de que la media es la medida requerida para estimar el valor deseado y/o que un valor atípico sesgaría esta estimación, por lo que inferimos que su última decisión podría resultar también de una reflexión ocasional, en función de la naturaleza del tipo de pregunta, motivada por las pistas que ofrece cada alternativa. La falta de convencimiento manifestada, muestra también que la idea que expuso no surge de lo aprendido durante el proceso de enseñanza.

Las respuestas de los alumnos **A122CM** y **A125CM** a este mismo problema fueron muy similares. Los dos alumnos eligieron la opción sumar los 9 números y dividir la suma por 9. Cuando le preguntamos al alumno **A122CM**, por qué elige esta alternativa, su respuesta fue:

(Ver traducción al español en la página 499)

547. Aluno: Eu fiz isso de acordo aquilo que aprendi em estatística, que normalmente quando nos apresentam uma condição em qualquer problema, então devemos procurar saber pelo número de observações, que neste caso são 9, não é, ..., então devemos somar todos os valores que estão dados e dividir pelo número de observações.

Sobre el mismo tema, reproducimos un trozo de entrevista al alumno **A125CM**:

(Ver traducción al español en la página 500)

583. *Entrevistador: ... elegeste a opção da alínea c) "somar os 9 valores e dividir a soma por 9". Por que preferiste esta alternativa?*

584. *Aluno: Sim, nas aulas nós vimos que para achar um resultado, temos que… ehhh…, temos que somar primeiro os números e depois dividir por…, como posso dizer, ehhh, posso dizer assim 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*

585. *Entrevistador: São nove números.*

586. *Aluno: Sim, quero uma linguagem assim…*

587. *Entrevistador: 9 dados?*

588. *Aluno: Sim, 9 dados.*

589. *Entrevistador: Nove observações.*

590. *Aluno: Sim, é isso, 9 observações, e dividimos por 9. Se aqui tivéssemos 7 observações, íamos somar os números e dividir por 7.*

De esto, señalamos que el alumno **A122CM** reconoce que este procedimiento constituye el algoritmo de la media aritmética, contrariamente al **A125CM**, que no usa una denominación adecuada para este proceso, como se muestra en el siguiente fragmento: *"592. Aluno: Isso é o que diz a… como posso dizer, o tipo de fórmula algébrica, que se aplica para achar o resultado" (*"eso es lo que se llama… ¿cómo se dice?, pues, es la fórmula, la fórmula algebraica, que se aplica para hallar el resultado").

Con relación a los valores atípicos, las respuestas de los dos alumnos indican igualmente que presentan dificultades en la apreciación de este tipo de dato.

Veamos las explicaciones ofrecidas por el alumno **A122CM** al respecto:

(Ver traducción al español en la página 499)

552. *Entrevistador: ...Podes dizer-me, por exemplo, Por que não escolheste a alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir a soma por 8"?*

553. *Aluno: [**Pensa e responde**]: Eu não escolhi esta opção porque…, bem, até certo ponto podia coincidir com o resultado da opção c). A grande desvantagem ao descartar o 15.3 é que o número de observações podia também diminuir. De 9 só teríamos 8. Também se podia usar, mas como dizem que querem determinar com a maior precisão possível eu tive que fazer num sentido global.*

La respuesta del alumno **A125CM,** relativa a este tipo de valores no se diferenció de la anterior, como se puede constatar a continuación:

603. *Entrevistador: E se escolhêssemos a alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8"?*

604. *Aluno: Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8? Bem, esta alínea não se considera porque nos dados nos dão 9 observações, se fossem 8, e se tivéssemos 8 números, era outra coisa. Íamos somar os 8 números e depois dividir por 8.*

Estos dos alumnos creen que el procedimiento adecuado para resolver la situación dada, consiste en sumar todos los datos y dividir la suma por el total de observaciones. El primero reconoce que este proceso significa usar la media aritmética, sin embargo el segundo no usa una denominación específica del procedimiento utilizado, considerando únicamente la expresión algebraica.

La noción de valor atípico no la tienen en cuenta, porque según ellos, eligir la opción que sugiere descartar el valor que se distingue de los otros sería una desventaja, pues, se eliminaría uno de los datos, sin que perciban que más que un inconveniente se trata de una ventaja, pues ello proporcionaría un valor más representativo.

- **Resultados del ítem 3 "Número de preguntas"**

A continuación, se presenta algunas entrevistas relativas al ítem 3. De los 8 alumnos entrevistados, 6 fueron cuestionados sobre diferentes aspectos relacionados con este problema. Nuestro propósito fue indagar por qué los alumnos sugieren las opciones "descartar el valor 0, sumar los 7 números y dividir por 7" o "usar el número más repetido". De igual forma, se examina la noción que tienen sobre la expresión "número típico" que aparece en el enunciado, y si la relacionan precisamente con la media aritmética o atribuyen otro significado a la misma. También, se profundiza en las concepciones de moda y mediana, por la estrecha relación que tienen con la media.

Uno de los alumnos entrevistado, **A97CF,** al contestar el cuestionario indicó la opción "Descartar el 0, sumar los 7 números y dividir por 7". Le preguntamos entonces sobre esta elección.

29. *Entrevistador: ... Por que elegeste a opção "descartar o 0, somar os 7 números e dividir por 7"?*
30. *Aluno: Um momento só. As perguntas a professora fez aos alunos?*

Por la respuesta dada, le explicamos lo expresado en el enunciado, y aprovechamos la ocasión para indagar sobre lo que entendía por la expresión "número típico de preguntas".

(Ver traducción al español en la página 475)

33. *Entrevistador: Sabes o que significa "número típico de perguntas"? Qual é a ideia que tens da expressão número típico de perguntas?*
34. *Aluno: Como é que eu posso dizer… ehhh…, um número, assim um número que normalmente tem feito as perguntas, assim, se normalmente tem feito quantas perguntas. Mais ou menos um, quase um número exacto, que tem feito as perguntas num dia. Assim, quantas perguntas têm feito num dia.*

Y continuamos con el dialogo relativo a la pregunta inicial:

35. *Entrevistador: OK. Então tu achas que para se encontrar este número tipo se devia descartar zero, somar os outros 7 números e dividir por 7?*
36. *Aluno: Sim.*
37. *Entrevistador: E quando se soma os números e se divide por 7, o que é que se está determinar?*
38. *Aluno: O número de perguntas que cada aluno faz num dia. Sim, porque uma vez que o João num dia não fez nenhuma pergunta os outros alunos fizeram. Então temos que somar o número e dividir. Por que um aluno ia fazer 22 perguntas num dia na professora. Acho que isso não é possível.*
39. *Entrevistador: Então achas que por isso é que não se devia somar os oito números e dividir por oito?*
40. *Aluno: Não. Uma vez que o João não fez nenhuma pergunta, é zero, não tem por quê considerar.*

De las respuestas, concluimos que el alumno opta por la alternativa "descartar el cero, sumar los 7 números y dividir por 7", porque uno de los participantes en la actividad no hizo ninguna pregunta, suponiendo que el cero no influye en la medida pretendida. Por otro lado, entendemos que para él el significado de la expresión "número típico" está asociado con la idea de normal, quizás sea ésta una forma coloquial de concebir la media aritmética. No reconoce el contexto presentado pues, considera imposible que uno de los participantes haya hecho las 22 preguntas referidas en el enunciado.

Otro de los alumnos a quien entrevistamos sobre del mismo ítem es **A99CF**. Éste**,** eligió la opción "usar el número más repetido, que es el 2" al contestar el cuestionario. De acuerdo con esto, le preguntamos si sabía qué medida se señalaba en la referida alternativa.

(Ver traducción al español en la página 482)

193. *Entrevistador: … Quando se fala de "número mais repetido", de que medida estamos a fazer referencia?*
194. *Aluno: [**Fica calado**]*
195. *Entrevistador: Há vezes que se usa o termo, "mais frequente".*

196. *Aluno: Será que é a média?*
197. *Entrevistador: O que é que achas?*
198. *Aluno: Não sei.*

A continuación, decidimos conocer qué idea tenía sobre la media aritmética, y continuamos con el diálogo en la dirección siguiente:

(Ver traducción al español en la página 482)

199. *Entrevistador: E quando se fala de média, no caso, média aritmética. Qual é a ideia que tens de média aritmética?*
200. *Aluno: Média aritmética?*
201. *Entrevistador: Sim.*
202. *Aluno: [**Não responde**]*
203. *Entrevistador: Podes dizer com as suas palavras a ideia que tens.*
204. *Aluno: Média aritmética? Eu acho que é para achar a média.*
205. *Entrevistador: E isso o que é?*
206. *Aluno: A mediana. Achar a mediana.*
207. *Entrevistador: Então a média e a mediada são a mesma coisa, não?*
208. *Aluno: Não digo que são a mesma coisa, mas estão interligados.*
209. *Entrevistador: Diga-me então na sua opinião, o que é a média e o que a mediana?*
210. *Aluno: [**Risos**]. Média é achar a média de um valor.*
211. *Entrevistador: E mediana?*
212. *Aluno: Mediana? Ehhhhh. Não sei o que dizer.*

Para el alumno la opción "*usar el número más repetido*" se refiere a la media. Del diálogo, observamos que no es capaz de discernir el significado de cada medida de posición central, confundiendo los conceptos de media, mediana y moda.

Por otro lado, el alumno **A106CF** también eligió la opción "descartar el 0, sumar los 7 números y dividir por 7". Pero antes de interrogarle sobre su respuesta, nos centramos en primer lugar en la comprensión del enunciado, preguntándole sobre la expresión "número típico de preguntas".

(Ver traducción al español en la página 492)

415. *Entrevistador: ... Quando se fala de número típico de perguntas, qual é a ideia que te vem a mente?*
416. *Aluno: Não seria o número total de perguntas? Não tenho certeza, é uma hipótese.*

417. Entrevistador: Fica a vontade, fale o que quiseres.

418. Aluno: É uma hipótese. No vou poder responder com… com precisão.

Estas respuestas, nos hicieron pensar que cuando resolvió el problema trató de encontrar el total de preguntas y no la media, creyendo que éste era el valor que representaba el número de preguntas hechas por los 8 alumnos. Pero a pesar de este dato, profundizamos más en su forma de pensar, preguntándole directamente sobre la respuesta que dio y lo que creía de las otras opciones.

(Ver traducción al español en la página 492)

419. Entrevistador: OK. Como resposta, tu escolheste a alínea que diz: descartar o valor 0, somar os outros 7 números e dividir por 7. Por que?

420. Aluno: Porque o zero não conta. O zero não influencia em nada.

421. Entrevistador: OK. Não se podia usar a opção que diz "descartar o 22, somar os outros 7 números e dividir por 7"?

422. Aluno: Não, eu acho que é o zero mesmo.

423. Entrevistador: E a opção que diz "somar os 8 números e dividir por 8"?

424. Aluno: Continuo com a alínea d). Só tinha que se descartar o zero.

El encuestado cree que la expresión "*número típico de preguntas*" se refiere al total de preguntas. Esta confusión, manifiesta una carencia en la interpretación de la media como el valor típico o representativo de un conjunto de valores, por lo que suponemos que ha determinado un valor cuyo significado no es el que la tarea requiere. Asimismo, señala la opción "*descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7"* porque supone que la situación es similar a su uso como elemento neutro de la adición, afirmando de este modo que este valor "*no influye en nada*". No da motivos especiales para justificar por qué no consideró otra alternativa, afirmando solamente que la opción de descartar es la que más le convenció, quizá porque creía que lo que se buscaba era el total de preguntas, ocurriendo que el cero sí es un elemento neutro en esta situación.

En el caso del aluno **A121CF**, también seleccionó la opción relativa al uso del número más repetido en este ítem. Esta respuesta era concordante con la dada en el ítem 1 "Tiempo recorrido en los 100 m", y era diferente de la opción marcada en el ítem 2, ya que allí indicó la opción que sugiere descartar el valor atípico. A pesar de que, cuando se le entrevistó sobre el ítem 1, había afirmado que en su forma de entender, el resultado, debía determinarse considerando siempre el factor repetición, al trabajar con datos, volvimos a interrogarle al respecto.

(Ver traducción al español en la página 496)

497. *Entrevistador: Bem. A resposta que marcaste aqui é similar a que indicaste no problema 1 (usar o valor mais repetido), mas é diferente da que deste no problema 2. Quero saber por que seleccionaste esta opção e não outra?*

498. *Aluno: Porque…, como posso dizer…, são dados, são dados secundários. Ao ser números repetidos, e eu me recordo que no ano passado ao resolver alguns problemas, nós fazíamos isso. O número mais repetido ou os números que mais apareciam eram os que tinham a probabilidade de estar certos. Por isso é que me baseei nisto.*

Esta justificación es similar a la que dio cuando le preguntamos en el análisis del ítem 1. Entonces, queríamos saber qué pensaba al respecto de las otras opciones.

499. *Entrevistador: OK. E se por exemplo optássemos em descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7?*

500. *Aluno: Acho que também podia ser certo, mas eu não escolhi esta resposta. Pode ser uma opção certa, talvez eu não acertei na minha resposta ao indicar a opção "usar o número mais repetido".*

501. *Entrevistador: Achas que se podia excluir o zero?*

502. *Aluno: Eu acho que sim.*

503. *Entrevistador: E se elegemos a opção "somar os 8 números e dividir por 8"?*

504. *Aluno: Acho que é diferente porque… somando os 8 números, neste caso o zero estaria excluído e já ao dividir…*

505. *Entrevistador: Não é isso, me refiro a outra opção. Sem descartar o zero, somar os 8 números e dividir por 8?*

506. *Aluno: Sim. Podemos somar, incluindo o zero, mas ao dividir, o zero já não faz nenhuma diferença, não influenciaria em nada. Mas eu não fui por esta via.*

En resumen, A121CF elige el valor más frecuente, argumentando que, de acuerdo a lo que aprendió, este tipo de valor es el que más se acerca al resultado pretendido. Sin embargo, se contradice en sus planteamientos, pues, afirma no estar completamente segura de si su respuesta es la adecuada para la situación, además de proponer el uso de otras alternativas. Condiciona el uso de la afirmación correcta (sumar los 8 números y dividir la suma por 8) a la exclusión del dato cero en el momento de dividir, suponiendo que este valor no cuenta en el total.

A122CM, es otro de los alumnos entrevistado sobre este ítem. Al contestar el cuestionario, el alumno elige la opción "Descartar el 0, sumar los 7 números y dividir por 7". La primera pregunta que le hicimos fue precisamente para saber por qué elige esta afirmación.

(Ver traducción al español en la página 499)

556. *Entrevistador: ...Elegeste a opção da alínea d) "Descartar o 0, somar os 7 números e dividir a soma por 7". Por que elegeste esta opção e não outra?*

557. *Aluno: Bem, o que me fez pensar nesta opção é o seguinte: o quadro nos apresenta que o João era um número de ...*

558. *Entrevistador: João não fez nenhuma pergunta.*

559. *Aluno: Sim, João não fez nenhuma pergunta. Neste caso, não é considerado alguém que não levantou nenhuma dúvida. Já os restantes apresentaram dúvidas. Então, a professora que..., não, eu descartei o zero, porque o objectivo primordial era achar..., a professora queria saber, ehhh..., o quê é que diz mesmo a pergunta?*

560. *Entrevistador: A professora quer calcular o número típico de perguntas feitas neste dia. Qual é dos seguintes métodos...*

561. *Aluno: Sim é isso, ela queria calcular isso. Nesta ordem de ideia, o João tinha que ser excluído porque não fez nenhuma pergunta, enquanto que os demais fizeram. Por isso descartei a possibilidade de incluir o 0.*

Dado que se muestra despistado respecto a lo que se requiere en el problema, creímos conveniente averiguar qué entendía por la expresión "número típico", usada en el enunciado.

562. *Entrevistador: OK. Vamos ver algo mais neste problema. Que significa para ti a expressão "número típico de perguntas"?. A que se refere?*

563. *Aluno: Número típico de perguntas? O que posso entender é que refere-se só a um tipo de pergunta. [**Põe-se a pensar e continua com a resposta**]. Não, perdão. A vários tipos de perguntas.*

En síntesis, este alumno elige la alternativa "*descartar el cero, sumar los 7 números y dividir por 7*" porque cree que el cero no influye en el cálculo del resultado final. No conoce el significado real de la expresión "*número típico*", la confunde con "*tipos de preguntas*", por lo que su respuesta queda al margen de lo pretendido, pues no comprende que la expresión se refiere a la media aritmética.

Para terminar con los análisis relativos al ítem 3, abordamos ahora las ideas manifestadas por el alumno **125CM**. Igual que el alumno anterior, este también elige la opción que se refiere a la exclusión del valor 0. Su justificación del por qué usa esta opción se encuadra en el mismo tipo de pensamiento de las respuestas ya descritas, como se ilustra en el siguiente fragmento de la entrevista.

605. *Entrevistador: ... Tu elegeste como método recomendável, a alínea d) "Descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7".*

606. *Aluno: Sim, a alínea d). Porque a alínea d) é mesma coisa que nada. Mesmo se nós metêssemos o zero vai dar sempre o resultado que nós queremos.*

Agora, se em vez do zero fosse 1 ou 2, aí sim seria outra coisa. Por isso eu pensei em descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7.

…

617. *Entrevistador: Ou seja, aqui se deve descartar o 0, somar os outros 7 valores e dividir a soma por 7. Por que achas que se deve descartar o 0?*
618. *Aluno: Porque é a mesma coisa que nada. Mesmo que não descartarmos o zero é mesma coisa.*

Por otro lado, cree que no hay diferencia entre la opción elegida y la que dice "*sumar los 8 números y dividir la suma por 8*", tal como se revela en el siguiente fragmento de la entrevista.

619. *Entrevistador: Mas se não se descarta o zero estaríamos a sugerir a alínea b), não achas?*
620. *Aluno: A alínea b)? Somar os 8 números e dividir por 8? Sim, seria a alínea b). Mas aqui se diz descartar o zero e somar os outros 7 números. E aí se fala em somar os 8 números. É mesma coisa.*

Resumiendo, para este alumno, se puede o no excluir el cero en el cálculo del número típico. Piensa que el resultado será el mismo, porque, igual que otros alumnos que marcaron esta alternativa, concibe el 0 como el neutro de la adición en la situación presentada. Nuestro encuestado no es capaz de diferenciar entre "sumar los 8 números y dividir por 8" y "descartar el 0, sumar los 7 números y dividir por 7", mostrando que no comprende que el total de datos ya no es el mismo si excluimos uno de los valores, ya sea el cero u otro valor.

- **Resultados del ítem 4 "Hijos por familia"**

En este ítem se ofrece un conjunto de alternativas, y el alumno debía indicar con cual de ellas está de acuerdo. En el enunciado del problema se señala que se dividió el número total de hijos por 50, para determinar el número medio de hijos en esa ciudad, y luego se proporciona el valor 2'2, como el número medio de hijos por familia.

Del total de alumnos entrevistados, 3 lo fueron sobre este problema. A cada uno se le preguntó una cuestión particular relacionada con la respuesta que dio al contestar el cuestionario. Veamos a continuación, los resultados obtenidos como consecuencia de los diálogos mantenidos con cada uno de los alumnos.

Alumno A99CF

Este alumno indicó la alternativa correcta, que dice "*Hay un total de 110 hijos en la ciudad*". Queríamos saber si había marcado esta opción al azar o si había razonado en función de los datos del problema.

En el fragmento que se muestra a continuación podemos ver cómo ha procedido para llegar a la solución del problema:

(Ver traducción al español en la página 483)

213. *Entrevistador: … Aí diz: Se o número médio de filhos por família é 2.2, com qual das seguintes frase estais de acordo? Tu seleccionaste a alínea c) que diz "Há um total de 110 filhos na cidade". Por que marcaste esta opção?*
214. *Aluno: Eu fiz os cálculos primeiro. Como no problema dizem que dividiram o número total de filhos de toda cidade, que são 50, e …, como posso explicar?*
215. *Entrevistador: Se quiseres podes escrever.*
216. *Aluno: Umhum, 50 é o número total de famílias e 2.2 é o número de filhos.*
217. *Entrevistador: Número médio de filhos.*
218. *Aluno: Sim, número médio de filhos por família. Ehhh, [**Põe-se a pensar**].*
219. *Entrevistador: Tu seleccionaste a alínea c)*
220. *Aluno: Sim, eu não me lembro muito bem, mas sei que fiz alguns cálculos. Acho que multipliquei 50 por 2.2 e me deu 110. Sim foi isso, por isso é que eu escolhi a alínea c).*

Aunque el alumno no demuestra explícitamente el uso de la fórmula de la media, se deduce, de su explicación, que ha reconocido que el dato que falta es la suma total, o sea el número total de hijos en la ciudad, y que su cálculo resultaba de multiplicar la media dada por el total de datos. Implícitamente, la operación realizada consistió en invertir el algoritmo de cálculo, sin embargo, como no planteó la fórmula, nos quedamos aún con la duda sobre su proceder.

Alumno A121CF

Según su respuesta al cuestionario, este alumno ha preferido la opción que indica que "*En la ciudad hay más familias con 3 hijos que con 2*". Aunque la respuesta es incorrecta de acuerdo con lo planteado, pretendíamos saber qué significado atribuía a esta afirmación.

(Ver traducción al español en la página 497)

511. *Entrevistador: Com base nos dados do problema, a resposta com a que concordaste é a que diz que na cidade há mais famílias com 3 filhos que com 2.*

512. *Aluno: Porque 2,2 é uma probabilidade, não é um dado… como é que eu posso explicar, não é um dado real, é uma aproximação. Se chegou até 2.2, para mim é…, como é que eu posso dizer…, acho que é mais uma aproximação, não é um dado real. E eu fui nesta afirmação porque de 2.2 para 3 não falta muita coisa, acho que a maioria tem 3, a minoria é que bate a 2; acho que a maioria tem 3 filhos e a minoria tem 2, porque 2.2 incide mais para 3 ou para 4 do que apenas 2. Se já é 2.2, é porque não é 2 exactamente. Por isso é que escolhi está afirmação.*

De sus respuestas, se deduce que redondea a un valor entero la parte decimal 0'2 referida al número medio indicado, porque no acepta que la media sea un valor decimal, dado el contexto presentado en la situación. Este pensamiento coincide con la interpretación que inicialmente supusimos, al describir el razonamiento que podría estar asociado a esta alternativa.

Alumno A125CM

Con relación a este alumno, su opción preferida al contestar el cuestionario, fue "La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 hijos". Nosotros habíamos supuesto que los alumnos que indicaban esta afirmación confundían la media con la mediana, ya que en la frase aparece la expresión "*mitad*".

De acuerdo con lo expuesto, preguntamos a este alumno qué entendió por esta alternativa, para elegirla.

(Ver traducción al español en la página 503)

621. *Entrevistador: … De acordo com os dados apresentados no problema, optaste pela alternativa da alínea a) que diz "A metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos". Por que indicaste esta opção?*

622. *Aluno: [**Lê de novo o problema e comenta**]: No problema se diz que uma instituição escolar numa pequena cidade quis determinar o número médio de filhos por família na cidade. Bem, dividiram o número total de filhos da cidade por 50, que é o número total de famílias. Isso quer dizer que eles fizeram: 50 que é o número total de famílias…, ah, se o número médio de filhos por família é de 2.2, com qual das seguintes frase estais de acordo? É bem claro que a metade das famílias da cidade é de 2 filhos, porque aí nós fizemos 50 a dividir por… [**murmura: 50 dividido por 2.2?; 50?**] Sim, é verdade. Nós aqui dividimos o número total de famílias, que é 50 e… [**murmura mas não conclui**].*

623. *Entrevistador: Tu indicaste a opção que diz que a metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos.*

624. *Aluno: Sim.*

625. *Entrevistador: O problema diz que eles queriam determinar o número médio de filhos por família na cidade.*

626. *Aluno: Sim, eu fiz a média aritmética, é verdade; determinei a média aritmética. Somei os dados, depois dividi por 50. Me deu um número e dividi por 2.2. Fiz a soma da média aritmética, me deu um número, dividi por 50 e me deu 2.2. Sim, é isso. 2.2. Por isso é que eu escolhi esta alínea.*

El alumno no da una respuesta coherente con la alternativa elegida, y sus ideas muestran que no comprende adecuadamente el algoritmo de la media, si atendemos a la confusión que hace en el uso de los datos ofrecidos por el problema. Esto muestra que eligió la afirmación sin tener un criterio de base. Su respuesta nos hace reflexionar sobre nuestra suposición al respecto de la interpretación que hacemos de aquella alternativa, pues no todos los alumnos que la eligen interpretan la media como la mitad.

- **Resultados del ítem 5 "Hijos"**

Este ítem de respuesta abierta, nos permite observar los diferentes procedimientos y estrategias utilizados por los estudiantes en el cálculo de la media ponderada.

De los 8 alumnos que participaron en el estudio, 7 fueron entrevistados sobre este problema, destacándose dos aspectos principales: uno referido a la concepción que tienen de la expresión "*número medio de hijos*", dado que algunas respuestas obtenidas al administrar el cuestionario, parecían mostrar algunas confusiones en la interpretación de esta expresión. Creíamos que al comprender el significado que atribuyen a esta expresión estaríamos en condiciones de percibir por qué daban ésta o aquella respuesta al problema; Por otro lado, se preguntó sobre del procedimiento utilizado al resolver el problema, para profundizar en su esencia y sobre los procesos realizados.

Veamos a continuación algunos ejemplos sobre las ideas presentadas por nuestros entrevistados, sobre los dos aspectos mencionados.

Por ejemplo el alumno **A97CF**, sumó los valores 1, 2 y 3 y dividió la suma por 3, cuando contestó la prueba escrita. Escribió correctamente el símbolo de la media aritmética $\bar{x}$, y en su respuesta final escribió que el número medio de hijos de las familias entrevistadas es 2. Le preguntamos sobre lo que había entendido por la expresión "número medio de hijos".

(Ver traducción al español en la página 475)

41. *Entrevistador: ... Quando se fala de "número médio de filhos", qual é a ideia que tens de esta expressão?*
42. *Aluno: Quantos filhos as famílias entrevistadas têm.*

43. *Entrevistador: Explica melhor isso.*
44. *Aluno: Assim, um número, o número de filhos que a família tem. Assim por exemplo, três famílias têm 2 filhos, outras têm 3, 4, por aí.*
45. *Entrevistador: Número de filhos?*
46. *Aluno: Sim, é o valor. O número de filhos, como posso dizer, é mesmo o número médio de filhos que as famílias têm.*

De las explicaciones que dio vemos que relaciona la expresión "*número medio de hijos*" con cantidad de hijos de cada familia, a pesar de escribir correctamente el símbolo de la media. Sus ideas revelan que no tiene claro el significado real del concepto de media aritmética, lo que probablemente habrá contribuido a los errores procedimentales que cometió. Lo curioso es que, independientemente de los errores cometidos, el proceso de resolución que utiliza no es coherente con la interpretación que hace del concepto, pues, en definitiva lo que hizo fue calcular la media de los valores de variable, omitiendo la información "*10 familias no tenían hijos*", creyendo que el cero no influye en el cálculo de la media.

En el caso de **A103CF**, al contestar el cuestionario, usa la expresión *n/2* y para *n* suma los valores 1, 2 y 3, obteniendo como resultado 6/2=3. Igual que ocurrió con el alumno anterior, le preguntamos sobre el significado que da a la expresión "*número medio de hijos*".

(Ver traducción al español en la página 479)

110. *Entrevistador: …Quando nos referimos a "número médio de filhos", qual é a ideia que te vem à mente?*
111. *Aluno: Mediana.*
112. *Entrevistador: Estamos a falar de mediana. É isso?*
113. *Aluno: Sim. Não é isso?*
114. *Entrevistador: Qual é a ideia que tens de mediana? O que é que entendes por mediana?*
115. *Aluno: Aqui nos estão a pedir para calcular o número de filhos…*
116. *Entrevistador: Número médio de filhos.*
117. *Aluno: Sim, número médio de filhos das famílias entrevistadas. Então, neste caso peguei cada número de filhos, somei e dividi por dois, porque esta é a forma de acharmos a mediana, n/2, que é o número determinado de certo dado o filhos, então somei e me deu 6; e dividi por 2. E achei que o número médio das famílias entrevistadas é 3.*

El alumno entiende que "*número medio de hijos*" se refiere a la mediana. Por eso divide la suma de los valores 1, 2 y 3 por 2, que considera como el total de hijos de las

familias entrevistadas. Igual que el alumno anterior, concluimos que tiene dificultades en identificar todos los valores que se refieren al dato hijos, considerando simplemente los valores de la variable, sin atender a sus frecuencias.

En el mismo ítem, observamos que el alumno **A99CF** utiliza el mismo procedimiento usado por el alumno referido anteriormente. Este alumno, cuando contestó el cuestionario, procedió de la siguiente forma: $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Así que le preguntamos, en primer lugar, qué hizo para calcular el número medio de hijos.

(Ver traducción al español en la página 483)

221. *Entrevistador: ... Como é que encontraste o valor 3? O que é que fizeste?*
222. *Aluno: Ehhh, n/2, não?*
223. *Entrevistador: O que é que significa n/2?*
224. *Aluno: Ehhh, acho que n é o número de famílias.*
225. *Entrevistador: E são quantas famílias neste caso?*
226. *Aluno: 6; 6 famílias. Entrevistaram 6 famílias. Ehhh [**Murmurando: Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?**]. Acho que o número médio das famílias entrevistadas é 2. São 2.*
227. *Entrevistador: E por que dividiste por 2?*
228. *Aluno: [**Pensa na resposta**]*
229. *Entrevistador: n/2, por que n/2?*
230. *Aluno: [**Pensa e responde**]: Acho que porque 2 é o número médio de filhos das famílias entrevistadas.*
231. *Entrevistador: Mas isso é precisamente o que se quer saber, não? Tu dividiste n por 2. Não é isso?*

Esta última pregunta parece que le ha mostrado que su procedimiento es incorrecto por lo que manifiesta haber pensado también en otra forma para resolver el problema, aunque no parece estar seguro del todo, sí este procedimiento es correcto o no, como se ilustra el siguiente diálogo.

(Ver traducción al español en la página 484)

232. *Aluno. Eu me lembro que queria resolver este problema de outra forma. Tipo: 10 famílias não tinham filhos, 7 famílias tinham 1 filho, ... tipo, 7 famílias tinham 1 filho?*
233. *Entrevistador: Cada uma das 7 famílias tinha 1 filho.*
234. *Aluno. Sim, é isso. Das 5 famílias tinham 2 filhos, não é?*
235. *Entrevistador: Cada uma das 5 famílias tinha 2 filhos.*

236. *Aluno: Ah. Eu pensei em calcular, dividir o número de famílias pelo número de filhos.*

237. *Entrevistador: Por exemplo, como?*

238. *Aluno: Número de famílias, quantas falias são? Ah, são 6 famílias. Acho que devemos somar estes valores…*

239. *Entrevistador: Quais valores?*

240. *Aluno: Número de famílias: 10 famílias não tinham filhos; 7 famílias tinham 1 filho; Então, são 17. Tenho que somar todos os valores, o resultado…*

241. *Entrevistador: Podes escrever. Quanto ia dar?*

242. *Aluno: [**Calculando numa folha a parte**]. Ia dar, ehhh, … seria 26 dividido por 25 (soma total de filhos dividido pela soma total de famílias). Acho que o resultado seria o número médio de famílias. Isso é o que eu queria fazer, mas depois pensei, é melhor fazer de outra forma. Fiquei em dúvida.*

De acuerdo con lo que expresó, *n* se refiere al número de familias. No explica por qué divide por 2, pero nos quedamos con la impresión de que sus ideas se relacionan con el cálculo de la mediana, por vincularse ésta con la mitad. Las preguntas del entrevistador le hicieron darse cuenta que el procedimiento utilizado no es correcto. Además de no ser consistente en sus explicaciones, confunde, en algunos momentos, los datos que constituyen valores de frecuencia y los que son valores de la variable, aunque el último procedimiento que sugiere es una forma correcta para resolver el problema.

La entrevista del alumno **A101CF**, proporcionó datos complementarios a los ofrecidos por el alumno anterior. Su respuesta al cuestionario fue tal cual la presentada por el alumno **A99CF**. La ocasión fue oportuna, para saber por qué había trabajado de aquella forma ya que su compañera no se explicó suficientemente. Así que, le preguntamos por su actuación.

(Ver traducción al español en la página 487)

300. *Entrevistador: No problema 5 "Filhos", dividiste n por 2. Podias explica-me o que significa isso?*

301. *Aluno: [**Lê o problema e analisa como o resolveu**]: O que é que eu fiz? Ahh. Eu dividi o número de filhos por 2, para achar o número médio. Sim, eu dividi o número de filhos por 2, porque geralmente para achar a média, ou a metade, se divide sempre por 2.*

De esta respuesta se derivaron otras preguntas, para indagar sobre su concepción de la media aritmética, ya que hablaba de media y mitad a la vez. A raíz de esto, manifiesta varias ideas que reflejan un conflicto conceptual, como se puede ver en el siguiente fragmento:

(Ver traducción al español en la página 487)

312. *Entrevistador: ...É que tu disseste que dividiste o número de filhos por 2, depois falaste em metade. Então, eu fiquei confundido com esta resposta. Por isso, te estou a pedir para que me expliques com mais detalhe sobre o que entendes por média aritmética de um conjunto de valores. Já ouviste falar de valor típico?*
313. *Aluno: Não.*
314. *Entrevistador: Já ouviste falar de valor mais frequente?*
315. *Aluno: Acho que esta já. Pelo menos a expressão não é estranha. Em termos escolares acho que não, mas assim por outras pessoas sim.*
316. *Entrevistador: O que é que achas que deve ser a média? O valor típico, o valor más frequente ou a metade?*
317. *Aluno: Eu acho que é o mais frequente [**murmura**]. Acho que sim.*

Del primer fragmento se deduce que el alumno considera *n=6* como el número de hijos de las familias entrevistadas. Divide por 2, porque confunde la expresión *número medio* con mitad, y cree que de esta forma se halla la mediana. Cuando se le pregunta sobre su concepción de media, manifiesta no tener una idea clara al respecto, pues, identifica esta medida con la moda, además de creer que significa, también, "*hacer estadística*". Por sus respuestas, observamos que no tiene una idea clara del concepto de media aritmética, además de no reconocer cuáles son los datos que indican el número de hijos.

El alumno **A106CF** asocia directamente el concepto de media aritmética con el algoritmo de cálculo, mostrando su carencia sobre los aspectos conceptuales. En la respuesta que dio al contestar el cuestionario, sumó los valores 1, 2 y 3 y dividió por la suma de los valores 7, 5 y 3, obteniendo como resultado 6/15=0'4. Antes de aclarar el procedimiento que utilizó, explicó lo que entendía por la expresión "*número medio de hijos*". En el fragmento que se presenta a continuación se muestran sus respuestas:

(Ver traducción al español en la página 492)

426. *Entrevistador: ...Quando se fala de número médio de filhos, de que é que se está a referir?*
427. *Aluno: Eu acho que é a soma, como posso explicar, [**Põe-se a pensar e lê o problema novamente**]. Acho que... acho que somaram o número de filhos e dividiram pelo número de famílias, acho que é isso. Foi assim que eu fiz.*
428. *Entrevistador: E é o que puseste na resposta? [**Como resposta pôs: 6/15 = 0,4**].*
429. *Aluno: Sim. Número de filhos dividido pelo número de famílias. Como 10 famílias não tinham filhos somei o 7, 5 e o 3. E os filhos 1, 2 e 3.*

Al usar la expresión "*se ha sumado el número de hijos y se dividió por el número de familias*" muestra que concibe la media aritmética como su algoritmo. Entiende que el cero no influye en el cálculo de la media, razón por la que no considera la información que dice "10 familias no tienen hijos", tanto para determinar el total de hijos como el total de familias. No considera los valores correspondientes a la frecuencia para hallar el total de hijos. Lo que hace es dividir la suma de los valores de la variable por la suma de los valores de la frecuencia. En general, en su actuación muestra que los aspectos conceptuales no son de su dominio.

Queríamos también profundizar en la actuación del alumno **A122CM**, que al contestar el cuestionario, indicó que el número medio de hijos de las familias entrevistadas es 1, sin mostrar ninguna operación. Le preguntamos qué había entendido del enunciado del problema y de las razones de su actuación.

(Ver traducción al español en la página 500)

566. *Entrevistador: …Onde diz, "qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?", o que é que entendes pela expressão "número médio"?*

567. *Aluno: Número médio de filhos é aquele que em condições normais podemos encontrar em qualquer casa. Nesta ordem de ideia, eu disse que o número médio de filhos das famílias entrevistadas é de 1, porque se nós notarmos que o número de casas que tinha 1 filho é maior com relação com o número de casas que não tinham filhos. Podemos constatar que da maior parte de casas que tinham filhos o número que nunca faltava é 1, ou seja havia sempre 1 filho.*

El alumno confirma que no ha realizado ningún cálculo y aclara que llegó a esa respuesta, porque notó que de todas las familias que tenían hijos, el dato "1 hijo" era el mínimo en esas familias. Éste, es un razonamiento que no tiene cabida en la situación, reflejando además otro error en la noción de media aritmética.

Sin embargo, en el momento de la entrevista, el alumno revela haber pensado también en un otro procedimiento, que es el que se muestra en el siguiente fragmento:

(Ver traducción al español en la página 500)

577. *Aluno: …mas também eu podia ir pela outra via. Analisando o número de observações das famílias entrevistadas. Nesta ordem de ideais podia calcular todas as famílias e o número de filhos, e depois podia dividir pelo número de famílias.*

578. *Entrevistador: Isso anularia a primeira ideia que apresentaste ou seria a mesma coisa?*

579. *Aluno: Como não fiz cálculos, só achei a média…bem, agora não sei se ao fazer cálculos poderia dar o mesmo valor.*

580. *Entrevistador: Podes repetir o que ias fazer?*

581. *Aluno: Poderia pegar o número de observações, que neste caso são 25 famílias, e poderia dividir pelo número de filhos que têm as famílias, que neste caso são 4, não 6. Então, 6 dividido por 25, não sei quanto poderia dar, é possível que poderia dar aproximadamente este valor.*

Analizando sus ideas, vemos que el nuevo procedimiento que ofrece, refleja igualmente una estrategia errónea para la resolución del problema.

Resumiendo, de las respuestas dadas por el alumno, percibimos que para él la expresión "*número medio de hijos*" se refiere al menor número (número mínimo) de hijos que al menos se observa en las familias entrevistadas, excluyendo la información "*10 familias no tenían hijos*". Al desconfiar de que su concepción podría ser incorrecta, indica otra forma de resolución, sin tener certeza de si con la misma llegaría o no, al resultado pretendido. Pero en esta ocasión no identifica correctamente los datos relativos a la variable, puesto que halla el número de hijos sin considerar las frecuencias, aunque calcula bien el total de familias. Además, no se muestra convencido del último procedimiento que sugiere usar, ya que en primer lugar propone dividir el total de datos (número de familias) por la suma total (número total de hijos) calculada incorrectamente, y en seguida cambia de idea, proponiendo efectuar la división con estos datos invertidos, sin aclarar con qué resolución se debía quedar.

El último alumno entrevistado sobre este ítem es **A125CM**. La entrevista no proporcionó información importante. Cuando contestó el cuestionario, el alumno indicó el valor 2 como el número medio de hijos de las familias entrevistadas, sin mostrar operaciones. Cuando se le preguntó cómo había llegado a tal resultado no contestó, permaneciendo callado durante largo tiempo, como si estuviese pensando. No hemos insistido en preguntarle y de su comportamiento, lo que concluimos con seguridad es que no sabe cómo resolver este problema.

- **Resultados del ítem "Gráfico de notas, 6.a)"**

En este problema, el alumno debe extraer los datos de la gráfica para comprobar, mediante cálculos, que el valor de la media es realmente el que se indica. Durante el análisis de las respuestas dadas al cuestionario, observamos que algunos alumnos calculan la media de los valores ubicados en el eje X, cuyo resultado coincide con el que se pretende comprobar. Este hecho nos ha motivado a conocer mejor por qué actuaron de esa forma.

De los alumnos seleccionados para la entrevista, sólo uno respondió el problema de la misma forma descrita anteriormente. Fue el alumno **A106CF**, a quien, pedimos aclarar el procedimiento que utilizó.

El alumno, muestra que ha utilizado el algoritmo de la media aritmética, sin embargo no supo interpretar la relación entre un dato de la variable y su correspondiente frecuencia, como se ilustra en el siguiente fragmento:

(Ver traducción al español en la página 492)

430. *Entrevistador: … Então tinha que se comprovar que a nota média do Grupo 2 também era igual a 11. O que foi que fizeste?*
431. *Aluno: Eu utilizei a média aritmética.*
432. *Entrevistador: Quais são os dados que utilizaste?*
433. *Aluno: 8+9+10+11+12+13+14 e a soma dividi por 7. E me deu 11.*
434. *Entrevistador: Mas veja: O problema diz que por exemplo os dois rectângulos que aparecem por encima do 14 indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores. Como é que se pode interpretar isso no gráfico 2?*
435. *Aluno: Exactamente como explicou. No grupo 2, ninguém teve 14, dois tiveram 13, três tiveram 12, ninguém teve 11, 3 tiveram 10, dois tiveram 9 e ninguém teve 8.*
436. *Entrevistador: E então tu realizaste a operação. Somaste os valores 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 e dividiste por 7. O que é que indica o valor 7 neste caso?*
437. *Aluno: As notas. Aqui tem 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.*
438. *Entrevistador: O número total de notas?*
439. *Alunos: Sim.*

A pesar de mostrar que ha entendido el enunciado del problema, ya que explica correctamente el número correspondiente de alumnos que obtuvo cada una de las notas, no actúa en conformidad con esta idea en el momento de seleccionar los datos para calcular la media. Lo que hace es calcular la media de las 7 notas distintas, sin multiplicarlas por las frecuencias correspondientes. Esto nos hace pensar que si se hubiesen incluido más valores en el eje X, el alumno hubiera determinado la media de estos, sin atender si tales notas han sido o no obtenidas por ciertos alumnos.

- **Resultados del ítem "Gráfico de notas, 6.B"**

El motivo por lo que nos interesamos en entrevistar sobre este ítem se deriva del hecho de que al analizar las respuestas de los alumnos al cuestionario, encontramos algunos que marcan la afirmación correcta, sin embargo dan una respuesta incorrecta en un problema de respuesta abierta relacionado (ítem "Gráfico de notas, 6. A. b"). Luego,

nos interesamos del por qué de las inconsistencias en las actuaciones de estos alumnos, si ambos problemas cubrían los mismos propósitos, diferenciándose sólo en el tipo de pregunta.

Así que entrevistamos a un alumno que había procedido de esta forma. Es el caso de **A125CM**. Cuando se le pasó el cuestionario, con respecto al problema "Gráfico de notas 6.A. b)" contestó que *"el grupo 2 es mejor, a pesar de que las medias son homogéneas, porque en el mismo hay más alumnos con notas positivas"*, una respuesta confusa en sí misma, aunque deducimos que aquí ha utilizado la palabra "homogénea" por equivocación, pues quizá quisiese decir "iguales". Esta situación no nos interesó tanto porque su conclusión era explícita, ya que considera como argumento la existencia de más aprobados. Sin embargo, en el problema 6.B eligió la afirmación que dice "*A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el grupo 2 es más homogéneo*". La cuestión era por qué en la última tarea elige una respuesta cuyo argumento es diferente al presentado anteriormente.

A raíz de lo anterior, le interrogamos sobre lo que entendía al respecto de la expresión "más homogéneo". El alumno da un significado que se aparta enormemente del sentido real referido a la situación, como se muestra en el siguiente fragmento:

(Ver traducción al español en la página 503)

638. *Entrevistador: ... Com relaciona a pergunta que diz quais das afirmações é certa, tu elegeste a opção da alínea d) que diz que "Apesar de que as médias são iguais nos dois grupos, o Grupo 2 é mais homogéneo" O que é que entendeste pela expressão "mais homogéneo"?*

639. *Aluno: Nós temos que ver. Primeiro, aqui o grupo 1 começou por 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14. Mas o grupo 2, se vê que superou, por exemplo, enquanto que no grupo 1 temos 10, no grupo 2 temos 11. Se no primeiro Grupo teve 9, já no segundo se teve 10. É o que me levou a… [**não conclui**]. As médias são iguais, sim, são iguais nos dois grupos, mas o grupo 2 é mais homogéneo, porque ..., como posso dizer, é mais elevado que o grupo 1. O grupo 1 começou bem, 8, 9, e por aí, mas depois o grupo 2 começou a subir. Aí é 8, mas aqui é 9, aí é 9 mas aqui é 10, depois 11, 12, 13 e 14.*

De la explicación anterior, se entiende que el alumno establece una correspondencia entre las notas distintas de los dos grupos, comparando, respectivamente, los valores de la escala situados en los dos ejes horizontales, sobre los cuales se construyeron los rectángulos. De los pares que se podían formar, por ejemplo, (8,9), (9,10), (10,11), (11, 12), y (12,13), donde la primera componente se refiere al grupo 1 y la segunda al grupo 2, compara ambas, concluyendo que las segundas son

mayores que las primeras. Con eso, justifica, empleado el término "*superar*", que el grupo 2 es mejor que el grupo 1. El fragmento que se muestra a continuación confirma aún más nuestra percepción sobre el pensamiento del alumno:

(Ver traducción al español en la página 504)

642. *Entrevistador: Superar em que? Como o superou?*
643. *Aluno. Por exemplo, no grupo 1, aí nos indicam 10, mas no grupo 2 aqui aparece 11.*

Sus explicaciones indican que no ha comprendido el enunciado del problema. Si embargo, después de explicarle la disposición de los datos en los dos gráficos, su idea al respecto de la expresión "*más homogéneo*" cambió, interpretándola de otra forma:

648. *Entrevistador: Então qual é a ideia que tens da expressão "mais homogéneo"*
649. *Aluno: Mais homogéneo? Ehhh, mais homogéneo, é algo que, como posso dizer, que está no meio, está mais ou menos, está na média, sim, está na média. Isto é o que é mais homogéneo.*

Al principio, el alumno supone que el grupo 2 es más homogéneo porque de la comparación derivada de la correspondencia que estableció, él observó que todos los valores relativos al grupo 2, son mayores que los del grupo 1, asociando así la expresión "*más homogéneo*" a la idea de "*superar*". Sus respuestas indican que no comprendió el enunciado del problema, debido a una mala lectura de los datos del mismo. Sin embargo, pese haberle explicado el problema no da razones sostenibles que justifiquen el por qué de la elección de la afirmación correcta en este ítem. Las nociones presentadas al respecto de la expresión "más homogéneo" son completamente vagas y reflejan un conocimiento impreciso. Creemos que la falta de criterio racional fue el motivo que originó la inconsistencia de su actuación.

- **Resultados del ítem "Problema Familia, 7. a)"**

Cuando analizamos las respuestas dadas a la prueba escrita, observamos que algunos alumnos que contestaban correctamente el problema, presentaban una secuencia de resolución que no revelaba racionalidad en el proceso utilizado, pues indicaban primeramente la composición de cada familia y después comprobaban si los valores atribuidos satisfacían las condiciones.

Aunque las soluciones proporcionadas están en conformidad con la exigencia del problema, queríamos aclararnos sobre el proceso de resolución, ya que esperábamos

que partiesen del algoritmo de cálculo, invirtiéndolo para encontrar la suma total, y posteriormente distribuir la suma para encontrar un conjunto de 10 familias.

Del total de alumnos entrevistados, 6 proporcionaron sus respuestas en las condiciones referidas anteriormente. A todos ellos se le cuestionó sobre su proceder, pidiéndoles que explicasen sí habían determinado la suma total (el valor 32) antes de dar la distribución, y cómo la encontraron. Paralelamente, se preguntó a 3 de estos alumnos, qué entendían por la frase "*la composición media de la familia en Benguela es de 3'2*".

De las respuestas dadas, notamos que los alumnos no están familiarizados con el proceso de invertir el algoritmo de cálculo de la media, para encontrar la suma total, lo que les ha obligado a recurrir a procedimientos no generalizables, aunque en la situación presentada les hayan sido útiles. Con relación a la idea que tenían sobre la expresión "*composición media*" los alumnos entrevistados, mostraron distintas concepciones.

A continuación, describiremos con más detalles los pensamientos manifestados por nuestros entrevistados, presentando fragmentos de las entrevistas realizadas.

El alumno **A97CF** fue el primero entrevistado sobre este ítem. Sólo le preguntamos sobre la forma de resolución empleada. Sus explicaciones indican que conoce el algoritmo de la media, sin embargo no parte del mismo para encontrar la suma total. Como se revela en el fragmento que mostraremos a continuación, lo que hizo fue atribuir valores arbitrarios, de modo que el cociente de la suma entre el total de datos diese la media:

(Ver traducción al español en la página 476)

47. *Entrevistador: ... Na pergunta 7, alínea a) se pediu para indicar 10 famílias que satisfaziam a média dada. O que fizeste foi atribuir valores. Como é que você encontrou estes valores? O que é que você fez?*
48. *Aluno: Fui escolhendo números de forma arbitraria de maneira que o sumatorio dos filhos desse um valor que a sua divisão pelo número de famílias desse 3.2, que é a composição média de família em Benguela.*
49. *Entrevistador: Exacto. E como é que você encontrou este valor? Você encontrou este valor arbitrariamente ou fez alguma operação para encontrar este valor.*
50. *Aluno: Fui escolhendo números de maneira que o seu somatório desse 32.*
51. *Entrevistador: Mas por que tinha que dar 32? Por que não 34 por exemplo?*

52. *Aluno: Se fosse 34, 34 dividido pelo número de famílias, que são 10, não havia de dar 3.2. O número que eu queria encontrar é 3.2 porque é a composição média da família em Benguela.*
53. *Entrevistador: Tu realizaste alguma operação para encontrar o valor 32?*
54. *Aluno: Para encontrar o valor 32?*
55. *Entrevistador: Sim.*
56. *Aluno: Fui escolhendo números. Qualquer número, assim não de forma repetitiva, de maneira que a sua soma desse 32.*
57. *Entrevistador: OK. Vamos supor que você não conhece estes valores. A partir dos dados do problema como é que você encontra o valor 32?*
58. *Aluno: Não, eu primeiro pus os nomes das famílias e depois fiquei assim a supor, assim por exemplo uma família tem 3, a outra tem 4, a outra tem 5 e fui somando o número de filhos, de maneira que ao dividir por 10 desse 3.2.*

Las entrevistas revelan que no fue el único alumno que procedió de esta forma. Constatamos otros tres alumnos (**A121CF, A106CF y A99CF**) que siguieron la misma vía, como se ilustra en los fragmentos que mostramos a continuación.

Comencemos por **A121CF**, quien incluso intenta convencernos que su actuación es el reflejo de lo enseñado por su profesora de estadística.

(Ver traducción al español en la página 497)

517. *Entrevistador: ...Em primeiro lugar encontraste o valor 32 o começaste por indicar a composição de cada família? Lembre-se que o objectivo era indicar 10 famílias que satisfaziam a média de 3.2.*
518. *Aluno: Eu fui.., como é que posso dizer, fui usando a probabilidade, porque a nossa professora nos ensinou, por exemplo, que se não se conhece um determinado número, ou não conhece os dados, deves começar do maior ao menor valor. Eu sabia que eram 10 famílias. Então, algum número dividido por 10 dava 3.2. Comecei pelos valores mais pequenos. Somava e dividia por 10, me dava um valor pequeno. Fui aumentando os valores. E então fui fazendo cálculos com números maiores. Vi que o resultado dava 3 vírgula alguma coisa e continuei. Quando o resultado fosse grande diminuía…. …. Como eram 10 famílias, tinha que escolher bem os números para que ao somar e dividir a soma por 10 me desse como resultado 3.2*

...

521. *Entrevistador: Foste dando valores e somavas?*
522. *Aluno: Sim, somava para ver se ao dividir por 10 me desse 3.2. Do valor que encontrasse, analisava se devia aumentar o diminuir nos valores.*

Para el alumno, este es el procedimiento ideal. No se preocupa en ver lo limitado que resulta, ni las dificultades que conlleva. El fragmento que se muestra a continuación confirma precisamente este hecho:

(Ver traducción al español en la página 498)

527. *Entrevistador: … Agora pensa comigo: 3.2 é a média, não é?*

528. *Aluno: Sim.*

529. *Entrevistador: 10 é o total de famílias, certo?*

530. *Aluno: Sim.*

531. *Entrevistador: OK. Existe alguma forma mais simples e prática para determinar o valor 32, sem utilizar o processo que usaste?*

532. *Aluno: Existir acho que existe, mas o que eu aprendi e o que está na minha cabeça é este método, que permite encontrar a solução do problema. Se existe outro método não sei, por isso é que usei este método. Acho que deve existir. Já tivemos casos idênticos ao resolver problemas em algumas provas, por isso é que usei este.*

Dada las dificultades que este procedimiento conlleva, creemos que el recurrir a la calculadora jugó un papel fundamental para llegar a lo que se pretendía, puesto que tuvieron que realizar varios intentos, como nos lo confirmó el alumno **A106CF**, conforme se transcribe en las siguientes frases de su entrevista:

(Ver traducción al español en la página 493)

452. *Entrevistador: Suponha que queres determinar a composição de 5 famílias que satisfazem a média de 3.2. O que é que farias? Só 5 famílias em vez de 10?*

453. *Aluno: Ia arranjar 5 números que aqui os números, a soma deles dava um número que dividido por 5 desse esse valor, a média.*

454. *Entrevistador: E como é que ias encontrar este número? O que é que farias para encontrar este tal número, de maneira que ao dividir por 5 desse como resultado 3.2?*

455. *Aluno: Antes de fazer, antes de encontrar o 32, eu fui dividindo números, assim, vários números, dividi pelo número de famílias para encontrar esse número; e eu encontrei o 32.*

…

458. *Entrevistador: E se fossem 5 famílias, também tinhas que encontrar um número que dividido por 5 desse 3.2?*

459. *Aluno: Sim.*

460. *Entrevistador: Agora pergunto: Como é que ias encontrar este número?*

461. *Aluno: Eu fui fazendo aqui na máquina. Com vários números, que ao dividir por 10 havia vezes que dava mais outras vezes dava menos. Fui tentando até que encontrei este número.*

462. *Entrevistador: O valor 32?*

463. *Aluno: Sim.*

Igual que en los anteriores casos, las respuestas de **A99CF**, cuyos fragmentos de entrevista mostraremos a continuación, revelan también que encontró la suma total por la misma vía que sus compañeros, aunque, como el mismo afirma, tuvo que realizar operaciones auxiliares en una hoja a parte. Veamos sus explicaciones recogidas en el siguiente fragmento:

(Ver traducción al español en la página 484)

249. *Entrevistador: ... O que é que fizeste para determinar a composição de cada una das 10 famílias?*
250. *Aluno: Fui dando valores.*
251. *Entrevistador: E por que foste dando valores?*
252. *Aluno: Porque eu tinha que ver quais são os valores que ao somar e dividido por 10 vai dar 3.2. Fui fazendo cálculos, assim, a primeira família se eu puser 3, a segunda se puser 2, e assim…, somado tudo e dividindo por 10 vai dar 3.2.*
253. *Entrevistador: E como é encontraste o valor 32?*
254. *Aluno: Quê?*
255. *Entrevistador: Por que a soma tinha que dar 32 e não 34 por exemplo? No efectuaste nenhuma operação antes de tudo para encontrar o valor 32?*
256. *Aluno. Eu fiz no rascunho. Sabia que 32 dividido por 10 ia dar 3.2.*
257. *Entrevistador: O que foi que fizeste?*
258. *Aluno: Primeiro eu fiz com alguns valores que não estavam a dar certo.*

En cuanto a los otros alumnos, sus respuestas muestran que utilizaron diferentes procedimientos para obtener la suma total, derivadas de sus conocimientos previos. Sabían de antemano que el número que al dividir por 10 daba como resultado 3'2 era el 32. Pese ser una operación simple, no todos razonaron de esta manera, como se vio anteriormente.

A continuación transcribimos algunos fragmentos de las entrevistas realizadas a dos alumnos que procedieron de esta manera, comenzando por **A103CF.**

(Ver traducción al español en la página 479)

126. *Entrevistador: ... como é que encontraste o valor 32? Donde veio 32?*
127. *Aluno: O 32?*
128. *Entrevistador: Sim. Como é que tu sabias que a soma tinha que dar 32 e não 35 por exemplo?*
129. *Aluno: Havia um exercício que nós tínhamos feito no ano passado, isso foi nas aulas de matemática, 32 tinha que dividir por 10 e o resultado foi 3.2. Então,*

naquela, eu tinha dúvida, perguntei a uma colega e ela me explicou que podia dar certo, então fui tentando, deu 3….

130. *Entrevistador: Ou seja, você não utilizou outro procedimento para encontrar o valor 32.*

131. *Aluno: Não.*

A pesar de expresar que su actuación se basó en un ejercicio resuelto en clases de matemática, lo curioso es que tuvo que preguntar a su compañera para saber si 3'2 era el cociente en la división de 32 por 10. Eso no sólo muestra falta de seguridad en lo que hace, sino que también refleja la dificultad de trabajar con la operación de la división.

En la misma línea, el alumno **A101CF** aseguró que su actuación partió del conocimiento que tenía, pero al contrario que el anterior, estaba seguro del resultado de la división. Afirma que sólo trabajó en la dirección de buscar los valores que sumaban 32, pues sabía que este valor dividido por 10 daba la media. Pero con las preguntas del entrevistador se dio cuenta que su procedimiento era impreciso, ya que cuando se le pidió determinar la composición de 5 familias, en lugar de 10, la situación le resultó completamente imposible, como se muestra en el siguiente fragmento:

(Ver traducción al español en la página 488)

324. *Entrevistador: Olha que no caso do problema do questionário, pediu-se indicar 10 famílias que cumpriam a condição do problema, não?*

325. *Aluno: Sim, vejo.*

326. *Entrevistador: Mas agora, em vez de 10 famílias estou a pedir 5.*

327. *Aluno: Umhum.*

328. *Entrevistador: O que é que farias então?*

329. *Aluno: [**Permanece calado por algum tempo e depois responde**]: Tinha que encontrar um número de pessoas que eu pudesse dividir por 5 e me desse 3.2. Ou seja, que em cada família tem que ter X pessoas, que nós ao dividirmos pelo total nos da uma média de 3.2.*

330. *Entrevistador: E como é que íamos encontrar este valor?*

331. *Aluno: Aí é que está! [**Risos**]*

332. *Entrevistador: Mas no problema do questionário conseguiste encontrar este valor como se vê aqui [**assinalando a prova do aluno**].*

333. *Aluno: Sim, aqui encontrei, mas aqui foi fácil. Por que? O que é que eu fiz? Ah…*

334. *Entrevistador: Como é que encontraste o valor 32?*

335. *Aluno: Como? Ehhh. Porque eu sabia que 32 dividido por 10 ia dar o 3.2…*

Como se ha visto, el alumno tiene conciencia de que para encontrar la composición de cada una de las familias es necesario encontrar el total de personas, es decir, la suma total. Pero su dificultad reside precisamente, en hallar este valor, porque no sabe relacionar los datos. Esto muestra que no está familiarizado con el proceso de invertir la fórmula de cálculo de la media, una estrategia que le ayudaría a trabajar cómodamente con cualquier problema análogo.

Para terminar los análisis relativos a este ítem, mostraremos algunos episodios que revelan las nociones de tres estudiantes sobre la expresión "composición media". La misma, forma parte de la afirmación "La composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas" en el enunciado del problema a debate. Evidentemente, la idea expresada está asociada con el número típico o valor esperado de personas que se puede encontrar en una familia cualquier de la localidad.

En el episodio que mostramos a continuación se muestra la interpretación proporcionada por el alumno **A103CF**.

(Ver traducción al español en la página 479)

118. *Entrevistador: … Quando se diz que a composição média da família em Benguela é de 3.2, de que se está a falar?*
119. *Aluno: Composição média? Acho também que é a mediana. É para achar a mediana.*
120. *Entrevistador: Ou seja a expressão se refere a mediana.*
121. *Aluno: Eu acho que sim.*

El alumno presenta un conflicto conceptual, pues para él la media es lo mismo que la mediana. Lo más preocupante es que esta dificultad parece haberse convertido en un obstáculo cognitivo, pues, como se vio en el ítem 5 (problema "Hijos) también allí había equiparado los dos conceptos.

El alumno **A106CF** manifiesta expresamente que no está seguro del significado de la expresión en cuestión, como se indica en el siguiente fragmento:

440. *Entrevistador: … Aí se diz que a composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas. O que é que significa esta frase para ti?*
441. *Aluno: [**Põe-se a pensar e depois responde**]: Eu não tenho certeza, então prefiro não dizer nada.*

Su proceder no nos sorprendió, pues cuando se le preguntó sobre lo que entendía de las expresiones "*número típico de preguntas*" y "*número medio de hijos*" sus

explicaciones fueron muy variadas. En el primer caso relacionó la expresión con "*número total*" mientras que con la segunda expresión, primero afirmó que significaba el total y después de reflexionar dio otra idea que se corresponde con el algoritmo del cálculo de la media. Estas respuestas nos hacen pensar que no está muy convencido del significado asociado a cada frase.

El tercer alumno a quien también se preguntó sobre el significado de la expresión "*composición media de la familia*" es **A101CF**. Tal y como se mostró confuso en el ítem 5, cuando se le preguntó sobre lo que comprendía por media aritmética, identificando este concepto con el valor más frecuente, aquí también parece tener la misma concepción.

(Ver traducción al español en la página 488)

318. *Entrevistador: ...Veja o problema 7.a). Há uma expressão que diz: "A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas". O que é que significa isso para ti, se por exemplo alguém se dirige a ti nesses termos? Qual é a ideia que tiras desta frase?*
319. *Aluno: Quer dizer que em Benguela pode até haver uma família com mais de 3.2 pessoas, com 5 ou 4. Mas, se formos a fazer uma estatística ou achar a média, em quase todas as famílias encontramos este número de pessoas, 3.2; É isso.*

Incluso admite la posibilidad de que una familia tenga 3'2 personas, un valor que no se corresponde con la situación. La frase "*en casi todas las familias encontramos este número de personas*", se entiende que se refiere a la mayor parte de las familias. Luego está concibiendo la media como el valor más frecuente, tal como lo había manifestado anteriormente.

Si resumimos las principales ideas extraídas de los relatos de los estudiantes al respecto de las cuestiones presentadas en este ítem, podemos concluir lo siguiente:

Con relación a la forma utilizada para indicar la composición de las 10 familias que cumplían la media dada, se ha visto que los alumnos siguieron un camino limitado y no recomendable para resolver este tipo de situaciones, pese a que las soluciones dadas satisfacen las exigencias del problema. Atribuir valores de forma arbitraria, sumar estos valores, y dividir la suma por el total para después comprobar si el resultado es la media dada, es un camino que podría convertirse en un laberinto. De igual forma, partir de un conocimiento aislado, por ejemplo, "sabía que 3'2 es el cociente en la división de 32 por 10", es útil siempre y cuando se sea capaz de relacionar los datos en la operación, pues de no ser así, ante otros datos diferentes no estarán en condiciones de

actuar con criterio. Luego, la búsqueda de la suma total, a través de la inversión del algoritmo de cálculo, parece ser el camino más indicado. Sin embargo, esto no es todo ya que el problema exigía, además del conocimiento adecuado del algoritmo, la comprensión de la noción de media aritmética como un reparto justo, pues, es necesario redistribuir la suma encontrada. Por el proceder de estos alumnos, nos pareció que tenían clara esta idea, ya que han sido capaces de dar una distribución acorde al enunciado. De todas formas, combinando estos conocimientos, se puede desarrollar en los alumnos los automatismos necesarios para enfrentarse a problemas de esta naturaleza.

Con relación al significado dado a la expresión "*composición media de la familia*" las ideas presentadas muestran confusiones en la interpretación de la media, identificándola con otras medidas de tendencia central (mediana y moda). Esto muestra que es preciso un trabajo de base para desentrañar las diferencias entre las diferentes medidas centrales para que el uso de cada una se realice de manera consciente, y de conformidad con la situación que se plantee.

- **Resultados del ítem "Supermercado, 8.a)"**

El motivo que nos ha llevado a indagar sobre este problema es su íntima relación con el ítem "Familia, 7.a)". Como hemos mostrado anteriormente, algunos alumnos determinaron la distribución pedida en el problema "Familia", utilizando un procedimiento que describimos como limitado e impropio para resolver situaciones en que se requiere construir o completar una distribución de datos. Estos alumnos, hallaron una distribución para ese problema, sin embargo no supieron cómo proceder para encontrar el conjunto de valores solicitado en el problema 8.a), dejando en blanco la pregunta. Les preguntamos entonces, por qué razón no contestaron.

Los cinco alumnos entrevistados revelaron que no sabían qué hacer o que no habían entendido el problema. Sin embargo, confirmaron que reconocían la relación que este ítem tenía con el ítem 7.a).

Uno de esos estudiantes es **A103CF**, que nos comentó lo siguiente:

(Ver traducción al español en la página 479)

132. *Entrevistador: ... E com relação ao problema 8, não respondeste por que?*
133. *Aluno: Primeiro porque não entendi, e segundo porque não estava a ver como resolver, então, achei melhor deixar em branco, porque se resolvesse ia estar errado.*

134. Entrevistador: OK, mas deverias tentar não?

135. Aluno: Não. Não gosto de arriscar.

El alumno, manifiesta claramente que no sabe qué hacer y por eso ni siquiera intentó resolver el problema. Recordemos que cuando resolvió el problema 7.a) partió del conocimiento previo que tenía, ya que sabía que 3'2 es el cociente de la división de 32 por 10, y que con este dato lo que hizo fue dar valores que sumasen 32. Es decir, no partió del algoritmo de cálculo de la media para determinar la suma total. Este hecho evidencia que no se ha dado cuenta del camino que conduce a la resolución del problema.

De igual forma, el alumno **A99CF** revela haber experimentado dificultades en este problema, pese ver la relación que tiene con el ítem 7.a). Veamos lo que dijo cuando se le preguntó sobre este asunto:

(Ver traducción al español en la página 485)

261. Entrevistador: ... Por que não o resolveste?

262. Aluno: Este problema estava a me complicar um bocado.

263. Entrevistador: Não há nenhuma semelhança com o problema anterior (Problema 7)?

264. Aluno: Com o problema 7?

265. Entrevistador: Sim.

*266. Aluno: Ahhhh [**Pensa e diz**]. Acho que aqui tínhamos que fazer a mesma coisa, não é?*

Cuando dice "*deberíamos hacer la misma cosa*", entendemos que se refiere al proceso de resolución que utilizó en el problema 7.a), que consiste en atribuir valores, y comprobar si la división de la suma obtenida por el total de datos da la media. Al parecer, eso es lo que intentó decir, aunque no se explicó debidamente, como se muestra en el siguiente fragmento.

268. Aluno: Fazer a mesma coisa, achar..., como posso explicar? Achar o preço de cada uma das marcas. Tínhamos que dar um valor de maneira que ao somar desse 1.5, acho que é isso.

Cuando el entrevistador le explica en qué consiste exactamente el problema, y le pregunta qué haría para resolverlo, intenta rehacer su respuesta, pero no se muestra seguro de lo que debía hacer.

(Ver traducción al español en la página 486)

282. Aluno: Eu tenho que dar um preço a cada marca de batatas fritas, não?

283. *Entrevistador: Sim.*

284. *Aluno: Depois eu terei que somar tudo. O valor da soma é o que seria o ponto médio ou tinha que dividir por 8?*

285. *Entrevistador: [**Não diz nada**].*

286. *Aluno: Foi o que fiz ai. [**assinalando o problema 7.a)**]*

287. *Entrevistador: [**Não diz nada**].*

288. *Aluno: Não sei professor.*

El proceso que sugiere demuestra el procedimiento utilizado en el problema 7.a). No sabe que lo razonable sería determinar previamente la suma total. Incluso, utiliza la expresión punto medio para referirse a la media, quizá en coherencia con el razonamiento manifestado en las situaciones anteriores, en las que identificó la media con la mediana.

Otro de los alumnos que no contesta es **A101CF**. Le pedimos que nos explicara qué haría si la situación presentada en el enunciado se relacionase con un problema concreto de su vida. Manifestó que todos sus intentos no estaban en concordancia con sus pretensiones, como se resalta en el diálogo siguiente.

(Ver traducción al español en la página 489)

360. *Entrevistador: Suponhamos que tens uma cantina. E tens 8 marcas diferentes de pacote de batatas fritas. Queres que o preço médio seja de USD 1.50. Qual é o preço que deves por a cada marca?*

361. *Aluno: [**Não diz nada**]*

362. *Entrevistador: O que é que farias? Só tens que dizer-me como procederias?*

363. *Aluno: Olha. Todas as alternativas que utilizei no momento de fazer o teste não deram certo e olha que não foram poucas [**Risos**]. Mas também estava com preguiça, preguiça mental.*

364. *Entrevistador: E agora, podes responder?*

365. *Aluno: Ummmm, Acho que não.*

En el caso del alumno **A106CF**, cuando le preguntamos por qué no usó el mismo procedimiento que utilizó en el problema 7.a), contestó que no sabía hacerlo, porque no supo interpretar lo que se pedía en el problema.

466. *Entrevistador: ... E o que é que sucedeu para não usar o mesmo procedimento na pergunta 8.a)?*

467. *Aluno: Eu não fiz, porque não estava a ver como fazer, não sabia mesmo. Não soube interpretar bem a pergunta. É por isso que não consegui fazer.*

Finalmente, **A121CF** alega que la falta de tiempo fue el principal motivo que le impidió contestar al problema. Sin embargo, cuando el entrevistador le planteó resolver el problema en ese momento no mostró disposición favorable.

(Ver traducción al español en la página 498)

533. *Entrevistador: ...Por que não respondeste o problema 8 "Supermercado" alíneas a) e b)?*
534. *Aluno: Acho que o tempo estava apertado, pelo tempo que gastei ao pensar noutras perguntas.*
535. *Entrevistador: Podes tentar resolver este problemas agora, dando-te o tempo que quiseres?*
536. *Aluno: [**Lê o problema em voz baixa**]*
537. *Entrevistador: Se não te importas, tu ficas na sala do outro lado enquanto eu entrevisto os seus colegas. Pode ser?*
538. *Aluno: Não sei, não sei. É mesmo importante que eu resolva esta pergunta? [**Risos**]*
539. *Entrevistador: Não, não é isso. Como disseste que foi por falta de tempo, quero aproveitar este momento.*
540. *Aluno: É que agora tenho que estudar, porque tenho outras coisas por fazer.*

Pese a haber manifestado que la falta de tiempo fue el factor que le impidió resolver tanto el ítem 8.a) como el 8.b), señala que éstas dos tareas son más complejas que las dadas en 7.a) y 7.b). Revela además, que no está familiarizado con este tipo de problemas, como se indica en el episodio siguiente:

(Ver traducción al español en la página 498)

541. *Entrevistador: ... diga uma coisa: Achas que a pergunta 8 é mais difícil que a 7?*
542. *Aluno: É, é mais difícil.*
543. *Entrevistador: Por que dizes isso?*
544. *Aluno: Porque são coisas que eu não vi. Não tive exemplos iguais. As coisas que vimos são um pouco mais fáceis, mas como nunca fiz estas coisas..., pode ser até que sejam fáceis. Porque se eu fiz a pergunta 7, pode ser que também consiga esta [**referindo-se a pergunta 8**]. Mas de momento fico por aqui.*

En síntesis, de los diálogos de las entrevistas concluimos que los alumnos no contestaron al problema porque no tenían bases sólidas de cómo hacerlo. El procedimiento que utilizaron al resolver el problema 7 ("Familia") no es muy adecuado, razón por la que no pudieron adaptarlo al problema 8. Dicho procedimiento se fundamenta en el método de ensayo-error, pues, atribuyendo valores sin saber qué suma

se pretende obtener es algo como navegar en la oscuridad. Como venimos señalando, la estrategia adecuada para este tipo de problemas consiste en encontrar, ante todo, la suma total, mediante la inversión de la fórmula de cálculo de la media aritmética. Como el total de datos es conocido, sólo hay que redistribuir la suma hallada de acuerdo con el total de datos, ya que de antemano se sabe que el cociente entre la suma total y el total de datos, es la media dada. Aunque parezca un procedimiento simple, los alumnos no siempre se apropian de este razonamiento fácilmente, por lo que es necesario trabajar en el sentido de consolidarlo, proporcionando diferentes tipos de contextos, para desarrollar los automatismos requeridos.

- **Resultados del ítem "Peces capturados, 9"**

Todos los alumnos entrevistados sobre este problema, cuando contestaron el cuestionario que se les administró en el primer estudio de la fase general habían argumento que la media no variaba porque el último alumno no capturó ningún ejemplar. En ningún caso hacían acompañar sus justificaciones con ilustración simbólica. A raíz de eso, queríamos saber cómo los estudiantes expresarían el algoritmo de cálculo de la media, si el último dato referido en el problema fuese un valor diferente del valor nulo, y también en el caso en que fuese precisamente el valor nulo.

En total, fueron entrevistados 4 alumnos al respecto. Mostraremos en esta parte los diálogos que tuvimos con ellos.

Comencemos con el alumno **A97CF**. Cuando contestó el cuestionario, en el estudio referido de la primera fase, argumentó que "*el valor medio de peces capturados no varía, simplemente porque el otro alumno no capturó ningún ejemplar*". Esta respuesta estaba en concordancia con la opción que eligió en el problema 3 "Número de preguntas", sugiriendo descartar el cero y calcular la media del resto de los valores, en un problema donde se pretende determinar el valor representativo de un conjunto de datos. En primer lugar le pedimos que explicara cómo plantearía la expresión de la media, suponiendo que el último alumno capturó un determinado número de peces. Veamos a continuación las respuestas que proporcionó.

(Ver traducción al español en la página 476)

59. *Entrevistador: ... Segundo o que se explica no enunciado, a expressão dada é para os seis alunos, não é assim?*
60. *Aluno: Sim.*

61. *Entrevistador: Suponha que fosse para os 7 alunos. Como é que você ia resolver?*
62. *Aluno: Se o outro aluno tivesse capturado?*
63. *Entrevistador: Sim, supondo que o outro aluno capturou por exemplo 2 peixes. Como é que você ia escrever a expressão?*
64. *Aluno: Deixa-me só ler mais uma vez o problema para compreender melhor.*
65. *Entrevistador: OK.*
66. *Aluno: [**Lê o problema em voz baixa e comenta**]. Se outro aluno capturou…*
67. *Entrevistador: Dos ou cinco peixes por exemplo.*
68. *Aluno: Cinco peixes? O valor havia de variar.*
69. *Entrevistador: Como escreverias a expressão? Podes escreve-la para que tenha uma ideia?*
70. *Aluno. Ficaria: 3 + 4 + 5+ 3 + 1 + 2 mais… os 5 que deste outro aluno. Sumaria o valor deste aluno e ia dividir por 7.*
71. *Entrevistador: OK. Mas em vez de 5, consideremos que o caso do aluno que não pescou nenhum exemplar. Como fica a expressão?*
72. *Aluno: Fica como está aqui [**Assinalando a expressão dada no enunciado**]. Fica a dividir por 6, não se considera.*
73. *Entrevistador: Se divide por 6?*
74. *Aluno: Umhum [**afirmando que sim**]*

Como se ve, el alumno conoce el algoritmo de cálculo de la media, y lo plantea adecuadamente cuando el dato que se añade al conjunto dado es diferente del valor nulo. Sin embargo, cuando se cambia el dato añadido, por el valor cero, ya no razona adecuadamente: no incluye este dato en el total de observaciones, por lo que la expresión planteada para los 7 participantes a la actividad, se presenta igual que la planteada para los 6 participantes. Por esta razón da como respuesta que la media no varía.

Otro de los alumnos entrevistado es **A103CF**, quién contesta previamente que "*la media no varía, porque el alumno no capturó ningún ejemplar*". Hagamos notar que en el problema 3 "Número de preguntas", donde se quería resumir el número típico de preguntas hechas por un grupo de estudiantes, seleccionó la alternativa correcta que consistía en calcular la media de todos los valores, incluyendo el cero.

Igual que el alumno anterior, le preguntamos cómo plantearía la expresión para el cálculo de la media aritmética si se incluye el alumno que no capturó ningún pez.

(Ver traducción al español en la página 480)

136. *Entrevistador: ... A tua resposta é que o valor médio não varia, porque ...*

137. *Aluno: ... porque o aluno não capturou nenhum exemplar ou peixe, por isso mesmo não varia.*

138. *Entrevistador: Mas veja. O enunciado apresenta uma expressão que mostra o cálculo da média de peixes com 6 alunos. Mas tarde apareceu um outro aluno que não capturou nenhum peixe. Neste caso, qual seria a expressão para calcular a média de peixes incluindo este aluno?*

139. *Aluno: Com o aluno que não capturou nada?*

140. *Entrevistador: Sim, considerando o aluno que não pescou nenhum exemplar. Como é que escreverias a expressão?*

141. *Aluno: A mesma coisa que eu fiz aqui: 3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2 dividindo por 6. [**Murmurando, diz: somando ia dar 18, dividindo por 6 é igual a 3**]. Sim, ia dividir por 6 e da 3.*

El alumno indica claramente que al añadirse el valor cero al conjunto de datos la media no varía, justificando que no cuenta el dato relativo al alumno que no pescó ningún ejemplar. Igual que el alumno anterior, no se fija en la diferencia de las cantidades de valores, lo que le ayudaría a distinguir la diferencia entre los cocientes, a pesar de la igualdad de las sumas de los valores. Los datos muestran que la idea que tiene, de que el cero no influye en el cálculo de la media, parece estar enraizada en su mente, cuyo cambio requiere de una enseñanza orientada a mostrar las diferencias en los dos casos.

Describiremos a continuación las informaciones proporcionadas por el alumno **A99CF**. El contenido de sus respuestas no fue contrario al expresado por los otros, como se muestra en el siguiente fragmento:

(Ver traducción al español en la página 486)

289. *Entrevistador: ... Explique agora o que fizeste no problema 9, onde respondeste que o valor médio de peixes capturados não varia ao considerar-se o último aluno, já que este não capturou nenhum peixe.*

290. *Aluno: [**Lê o problema e analisa a resposta que deu ao problema e responde**]: Acho que não. Acho que o valor médio de peixes capturados não varia porque o aluno que participou não capturou nenhum peixe. Acho que isso é o que contava.*

291. *Entrevistador: E se tivesse capturado 2 peixes, por exemplo?*

292. *Aluno: Se tivesse capturado 2 peixes? Ehhh, tínhamos que somar... [**Murmura**]. Aqui cada aluno capturou 3 peixes, não é?*

293. *Entrevistador: Não. De acordo com o enunciado, um aluno capturou 3, o outro 4, e assim sucessivamente.*

294. *Aluno: Ahh, sim, são seis.*

295. *Entrevistador: Sim, são 6. Mais tarde, descobriu-se um outro aluno que também tinha participado na actividade. Agora, queremos saber o que acontece com o valor médio de peixes capturados, se este último tivesse pescado, por exemplo, 3 peixes. Como é que escreverias a expressão?*
296. *Aluno: Eu acho que ia somar todos os valores de peixes capturados, contando com este aluno, e depois ia dividir por 7.*
297. *Entrevistador: OK. Mas como não capturou, neste este caso…*
298. *Aluno: Vou dividir por 6, porque o resultado de este aluno não conta. Ele não capturou nenhum peixe.*

El alumno afirma claramente que cuando se añade el valor cero al conjunto de datos la media no varía, porque este no influye en su cálculo. Para él, tener 7 datos es igual que tener 6, ya que, según dice, el valor cero no cuenta.

Un dato curioso es que cuando contestó el problema 3 (Número de preguntas), procedió igual que el alumno **A103CF**, evitando también la alternativa que proponía descartar el valor nulo y calcular la media con el resto de valores. Esto muestra que posiblemente habrá marcado la alternativa correcta sin fundamento alguno.

Para terminar, presentaremos las respuestas dadas por el estudiante **A101CF** sobre esta cuestión. De sus respuestas, pudimos observar que muestra cierto conflicto en relación al significado de la expresión "valor medio". Cuando contestó el cuestionario, en este ítem respondió lo siguiente: "*el valor medio no varía porque el último alumno no capturó ningún pez; por tanto, la cantidad de peces se mantiene igual, lo mismo que la media*". De esa respuesta se entiende que para él el dato cero no influye en el cálculo de la media, mostrando así que posee un conocimiento aislado sobre este concepto. De hecho esa idea esta en consonancia con la alternativa que marcó en el ítem 3, donde se pedía resumir el número de preguntas hechas por un grupo de alumnos. En aquel momento también sugirió que se debería descartar el cero al hallar el número típico de preguntas.

Sin embargo cuando profundizamos en su actuación, sus respuestas muestran que no conoce el algoritmo de cálculo de la media aritmética. Para este estudiante, calcular la media significa sumar todos los valores y dividir por 2, una concepción que ya había manifestado al resolver el ítem 5 "Hijos".

A continuación, mostramos el diálogo que se mantuvo con él respecto a esta cuestión:

(Ver traducción al español en la página 490)

366. *Entrevistador: ...No caso do problema 9, se explica que a média de peixes capturados por 6 alunos é a que foi calculada mediante a expressão que aparece no enunciado. Mas tarde, se soube que um outro aluno tinha participado na actividade embora não tenha capturado nenhum peixe. Agora queremos saber se varia ou não o valor médio de peixes capturados ao considerar-se este último aluno.*

367. *Aluno: Não.*

368. *Entrevistador: Achas que não?*

369. *Aluno: Não, porque aqui fala-se da quantidade de peixe e não da participação. Então, se o aluno que também participou não capturou nenhum peixe, então não varia.*

370. *Entrevistador: Vamos lá ver. Vou perguntar-te de outra forma. Suponha que 5 amigas pretendem realizar uma festa. Para tal, deram, respectivamente, os seguintes valores em USD: 5, 10, 7, 2, e 5. Como é que podias determinar o valor médio da contribuição de estas 5 amigas?*

371. *Aluno: Soma-se os valores dados e divide-se por 2, ou… ou se tivessem uma quantia exacta para dar, podia dividir por esta quantia, mas neste caso, soma-se e divide-se por 2.*

372. *Entrevistador: Então assim se obteria o valor médio da contribuição?*

373. *Aluno: [**Confirma que sim, movendo a cabeça**]*

Es importante destacar que su confusión respecto a la noción de media aritmética la ha manifestando continuamente y de diferentes maneras. Además de referirse a la idea de "*mitad*", en el ítem 7.a) "Familia", la asoció con el valor más frecuente, al expresar que "*en casi todas las familias encontramos este número de personas*", cuando se le preguntó qué significaba para él la afirmación "la composición media de la familia en Benguela es de 3'2".

En resumen, observamos que los aspectos conceptuales referidos a la comprensión de la media aritmética no son dominados por estos alumnos. Pues creen que el valor nulo no influye en el cálculo de la media, creyendo que están ante una situación donde el cero se ve como el elemento neutro de la adición, y también porque no distinguen la media de otras medidas de tendencia central. No perciben que el total de datos ya no es el mismo cuando se incluye un participante más al conjunto de los participantes en la actividad, estando en presencia del valor nulo, aunque cuando el dato en cuestión es diferente de cero, algunos sí lo perciben e incluso plantean el algoritmo de cálculo de la media sin dificultad.

Lo anterior, pone en evidencia lo señalado por Mevarech (1983), cuando indica que el reconocimiento de la fórmula de cálculo de la media aritmética por sí solo no es

suficiente para que el estudiante desarrolle adecuadamente una tarea, destacando que es necesario que los estudiantes tengan una adecuada estructura conceptual que les ayude a interpretar los problemas dados.

6.3. ANÁLISIS DE LOS ORÍGENES DE ALGUNAS DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA MEDIA ARITMÉTICA

De resultados derivados tanto del primer estudio, administración del cuestionario, como del segundo, las entrevistas, observamos diferentes dificultades, obstáculos y errores cometidos por nuestros alumnos al resolver diferentes problemas sobre la media aritmética. Estas dificultades, obstáculos y errores son de distinta naturaleza y sus orígenes podrían asociarse con diversos factores, tanto relativos al proceso de enseñanza y aprendizaje como a ajenos al mismo.

En este apartado pretendemos abordar de forma general algunas dificultades, obstáculos y errores experimentados por nuestros alumnos y analizar sus orígenes, en cumplimiento de uno de los objetivos formulados en este trabajo. Nuestro análisis se basa en la teoría desarrollada en Socas (1997; 2007) respecto a las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, un nivel de enseñanza que también incorpora la media aritmética como un contenido básico.

La racionalidad del análisis reside en el hecho de que, con el mismo, no sólo se profundiza en las informaciones sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas, cómo los resuelven o utilizan los diferentes procedimientos, sino que mediante el mismo, también es posible dar una explicación del por qué de sus actuaciones, lo que permita intervenir y proporcionar eventuales remedios para ayudar a los estudiantes en la corrección de las actuaciones incorrectas.

Empezaremos nuestro análisis con algunas cuestiones observadas tanto en el ítem 1 “Tiempo recorrido en los 100 metros” como en el ítem 2 “En una clase de ciencias”. Los problemas presentados en estos ítems evalúan, entre otros aspectos, el uso de la media aritmética como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición. Los resultados obtenidos muestran que un número considerable de

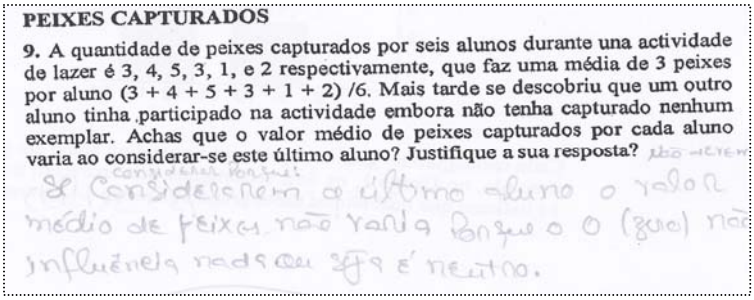
alumnos sugieren utilizar valores o medidas que no tienen la propiedad de mejor estimador, en lugar de utilizar la media aritmética. Algunos dan justificaciones inconsecuentes y otros, incluso no contestan. La indicación de estos valores o medidas, en el lugar de la media aritmética, es un error que creemos tiene su origen en una ausencia de sentido, pues, muestra un conflicto de ámbito conceptual, ya que no se tiene claro el significado de la media como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición. Por otro lado, pensamos, también, que este error podría tener su origen en un obstáculo didáctico, ya que la mayor parte de las tareas utilizadas en las situaciones de enseñanza de la media no vienen acompañadas de un contexto, lo que limita a los alumnos en la percepción del significado y uso de este concepto en diversas situaciones.

Al respecto de los mismos problemas, identificamos varios alumnos que al resolver el ítem "En una clase de ciencias" no creyeron que se deba descartar el valor atípico que se presenta con conjunto de valores dado, antes de calcular la media, y en el otro problema ("Tiempo recorrido en los 100 metros"), ningún alumno se percató de la existencia de este tipo de valor en el conjunto de datos proporcionado. Este error creemos que proviene de un obstáculo didáctico o a un obstáculo cognitivo. Como han reconocido algunos profesores que inquirimos durante la investigación, el estudio de los valores atípicos no se realiza de forma expresa. Esto lleva a que los estudiantes no estén familiarizados con dichos valores, ni con las circunstancias de cuándo se debe o no excluirlos en el cálculo de la media aritmética. Así, cuando se les presenta un conjunto de valores en el que se debe calcular la media según la situación, no consideran eventuales diferencias entre los mismos. Dirigen inmediatamente su atención al cálculo sin ver si hay o no valores extremos que pueden afectar el resultado deseado.

Por otro lado, observamos que en las respuestas dadas por alumnos, ya sea al contestar el cuestionario, como durante las entrevistas, notamos que algunos no tenían claro la noción de media aritmética, atribuyendo a la misma otros significados que no tienen nada que ver con la idea de valor representativo, o valor típico. Este error de concepción creemos que tiene su origen o bien en una ausencia de sentido o bien en un obstáculo didáctico. En el primer caso el error surge porque el alumno no tiene desarrollado el verdadero significado del concepto. Su pensamiento, al respecto, está influenciado de sus experiencias de la vida y de nociones intuitivas inexactas que le llevan a confusión. En el segundo caso, el error se deriva de la enseñanza, ya que los

docentes abordan la media aritmética desde una perspectiva puramente algorítmica, dejando al margen los aspectos conceptuales. En este sentido, pensamos que la vía inductiva de formación del concepto es la más indicada, para que los alumnos se apropien del significado correcto.

Otro error constatado es que algunos alumnos no reconocen que el cero influye

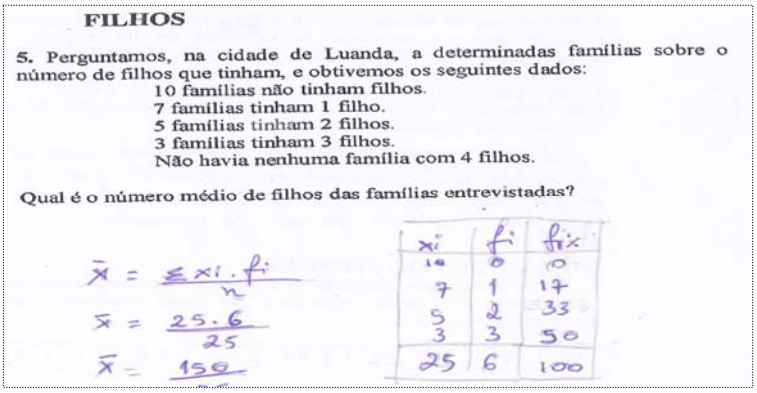

PEIXES CAPTURADOS

9. A quantidade de peixes capturados por seis alunos durante una actividade de lazer é 3, 4, 5, 3, 1, e 2 respectivamente, que faz uma média de 3 peixes por aluno (3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2) /6. Mais tarde se descobriu que um outro aluno tinha participado na actividade embora não tenha capturado nenhum exemplar. Achas que o valor médio de peixes capturados por cada aluno varia ao considerar-se este último aluno? Justifique a sua resposta?

Se considerarmos o último aluno o valor médio de peixes não varia porque o 0 (zero) não influencia nada ou seja é neutro.

en el cálculo de la media. Pensamos que este error tiene su origen en una ausencia de sentido o bien en un obstáculo cognitivo. Al trabajar con los valores nulos en el cálculo de la media, parece que los alumnos retroceden a las propiedades de las estructuras algebraicas, considerando el cero como el elemento neutro de la adición (Mevarech, 1983). De igual forma, no se dan cuenta de que al añadir un elemento más en el conjunto de datos eso hace que el total de datos ya no sea el mismo, y cambia así el valor medio.

De igual forma, observamos diferentes errores relativos al uso inadecuado del algoritmo de cálculo, en la resolución de algunos problemas. Algunos alumnos no


FILHOS

5. Perguntamos, na cidade de Luanda, a determinadas famílias sobre o número de filhos que tinham, e obtivemos os seguintes dados:

10 famílias não tinham filhos.
7 famílias tinham 1 filho.
5 famílias tinham 2 filhos.
3 famílias tinham 3 filhos.
Não havia nenhuma família com 4 filhos.

Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

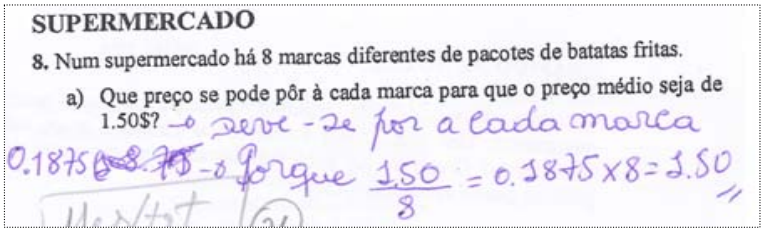
$\bar{x} = \frac{\sum xi \cdot fi}{n}$

$\bar{x} = \frac{25 \cdot 6}{25}$

$\bar{x} = 150$

xi	fi	fix
10	0	10
7	1	17
5	2	33
3	3	50
25	6	100

conocen qué elementos se refieren a la suma total de datos y cuáles se refieren al total de datos; otros, no son capaces de determinar la suma total cuando se conoce la media y


SUPERMERCADO

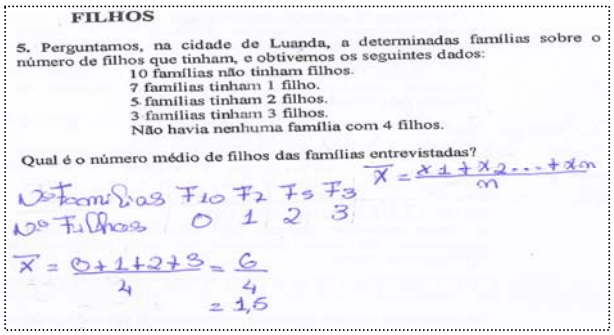
8. Num supermercado há 8 marcas diferentes de pacotes de batatas fritas.

a) Que preço se pode pôr à cada marca para que o preço médio seja de 1.50$? - o preço - 2e por a cada marca

0.1875 - porque $\frac{150}{8} = 0.1875 \times 8 = 1.50$

el total de datos, porque no se dan cuenta de que es necesario invertir el algoritmo. Estos errores suponemos que tienen su origen o bien en una ausencia de sentido o en un obstáculo didáctico. Como sabemos, en el propio algoritmo de cálculo de la media se presenta un símbolo (el sumatorio) poco familiar a los alumnos y en ocasiones es llevado al estudio de la media sin que se haya explicado previamente en qué consiste y cómo tratar con él, lo que hace que para los alumnos no tenga sentido la expresión. Por otro lado, el proceso de inversión no se relaciona con el estudio de ecuaciones de la forma $x/a = b$, algo que probablemente ayudaría a comprender que determinar la suma total en la expresión $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ es un proceso análogo a la resolución de ecuaciones de ese tipo.

Al resolver el problema relativo a la media ponderada (ítem 5) nuestros alumnos manifestaron diferentes tipos de errores: Algunos calculan la media de ciertos valores de la variable, sin considerar los valores de la frecuencia, y otros determinan simplemente



FILHOS

5. Perguntamos, na cidade de Luanda, a determinadas famílias sobre o número de filhos que tinham, e obtivemos os seguintes dados:

10 famílias não tinham filhos.
7 famílias tinham 1 filho.
5 famílias tinham 2 filhos.
3 famílias tinham 3 filhos.
Não havia nenhuma família com 4 filhos.

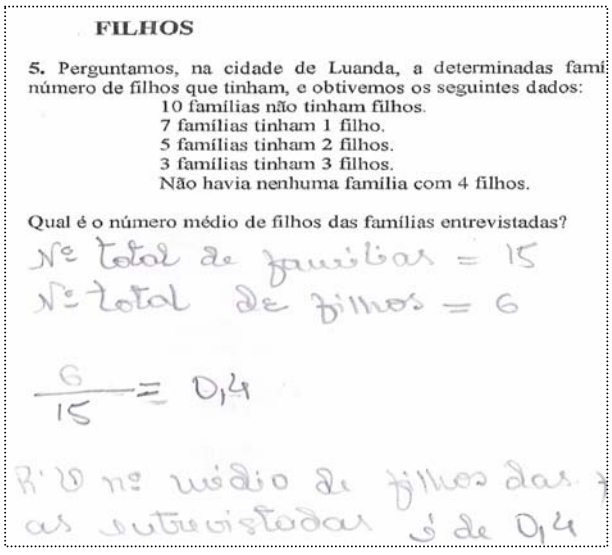
Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n}$

Nº famílias F_{10} F_7 F_5 F_3
Nº Filhos 0 1 2 3

$\bar{x} = \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$

la media de los valores de la frecuencia. Hay también los que dividen la suma de algunos o todos valores de la frecuencia por la suma de los valores de la variable o



FILHOS

5. Perguntamos, na cidade de Luanda, a determinadas famí
número de filhos que tinham, e obtivemos os seguintes dados:

10 famílias não tinham filhos.
7 famílias tinham 1 filho.
5 famílias tinham 2 filhos.
3 famílias tinham 3 filhos.
Não havia nenhuma família com 4 filhos.

Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

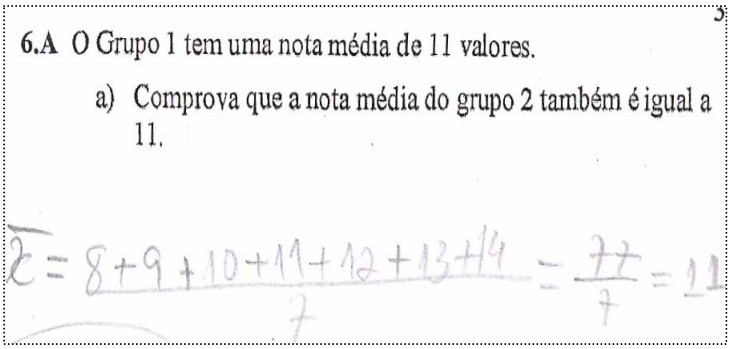
Nº total de famílias = 15
Nº total de filhos = 6

$\frac{6}{15} = 0{,}4$

R: O nº médio de filhos das
as entrevistadas é de 0,4

viceversa. Estos errores podrían tener procedencia diversa. El no diferenciar entre datos de la variable y datos de la frecuencia podría tener su origen en un obstáculo cognitivo, pues el mismo se produce con insistencia, incluso cuando se les hace notar la diferencia entre los dos tipos de datos. Hay que destacar también, que, en general, los alumnos están acostumbrados a trabajar con datos en forma de lista. Cuando éstos se presentan de forma agrupada ya no reconocen que es posible deshacer el proceso, ya que tal presentación es sólo una forma resumida de presentar esa información. En este sentido, pensamos que esta dificultad también podría tener su origen en un obstáculo didáctico, pues es posible que durante la enseñanza no se les haya familiarizado con la relación entre éstas dos formas de presentación de datos.

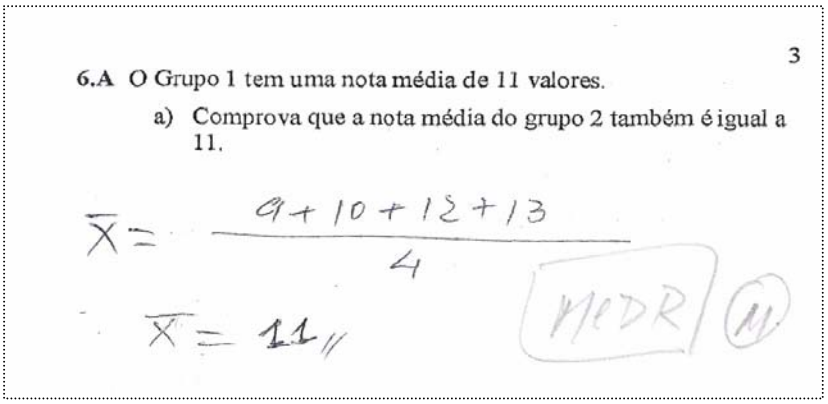
Una de las situaciones señalada a lo largo del estudio es que algunos alumnos presentan dificultades al extraer datos de una gráfica. Para comprobar el valor medio que se indicaba en uno de los apartados del problema, utilizaron los valores situados en


6.A O Grupo 1 tem uma nota média de 11 valores.

a) Comprova que a nota média do grupo 2 também é igual a 11.

$\bar{x} = \frac{8+9+10+11+12+13+14}{7} = \frac{77}{7} = 11$

el eje de escala X, sin apreciar que los mismos tenían una cierta frecuencia, que se expresada según el número de rectángulos que se construían a partir del referido valor. Otros, calcularon la media de los cuatro valores de la escala del eje X sobre los cuales se


3

6.A O Grupo 1 tem uma nota média de 11 valores.

a) Comprova que a nota média do grupo 2 também é igual a 11.

$\bar{x} = \frac{9+10+12+13}{4}$

$\bar{x} = 11$

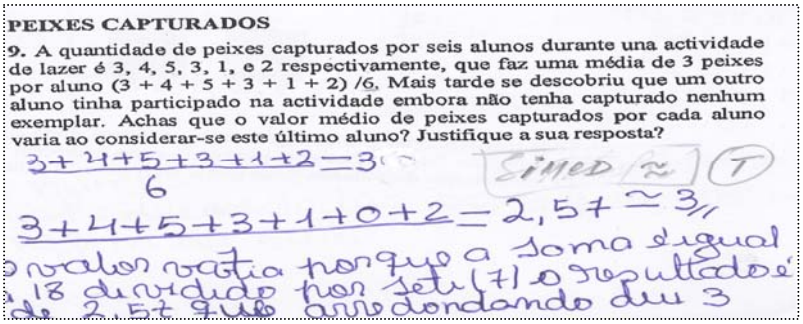
MEDR (11)

habían construido los rectángulos. Relacionar los datos requeridos en el problema con los valores de escala del eje X, sin atender a las correspondientes frecuencias, es un error que parece tener su origen en un obstáculo cognitivo. A pesar de que se explica la

relación entre los valores que aparecen en los gráficos, los alumnos encuentran dificultades en identificar los datos a considerar, algo que también hemos constatado durante el experimento de enseñanza que llevamos a cabo y que describiremos en el siguiente Capítulo.

Las entrevistas nos han proporcionado una información bastante esclarecedora respecto del procedimiento utilizado por algunos estudiantes al construir un conjunto de datos del que se conoce la media y el total de datos. Tal como explican, atribuyen determinados valores para formar el conjunto y con ellos prueban a obtener la media indicada en el problema. Si la media no es igual a la dada, prueban entonces con otros valores y así sucesivamente. Aunque han encontrado una distribución que se corresponde con los requisitos del enunciado, la vía utilizada refleja un error que tiene su origen en una ausencia de sentido. El alumno no razona adecuadamente, por lo que, utiliza un procedimiento inapropiado para la situación, sin percibir que lo ideal sería partir del algoritmo de cálculo de la media, usando la estrategia de inversión para determinar la suma total. No son capaces de relacionar los diferentes elementos que integran el algoritmo de cálculo de la media.

Otro tipo de error verificado en algunos alumnos consiste en redondear la media a un valor entero, pareciendo que no se acepta que este valor pueda ser un valor


PEIXES CAPTURADOS

9. A quantidade de peixes capturados por seis alunos durante una actividade de lazer é 3, 4, 5, 3, 1, e 2 respectivamente, que faz uma média de 3 peixes por aluno (3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2) /6. Mais tarde se descobriu que um outro aluno tinha participado na actividade embora não tenha capturado nenhum exemplar. Achas que o valor médio de peixes capturados por cada aluno varia ao considerar-se este último aluno? Justifique a sua resposta?

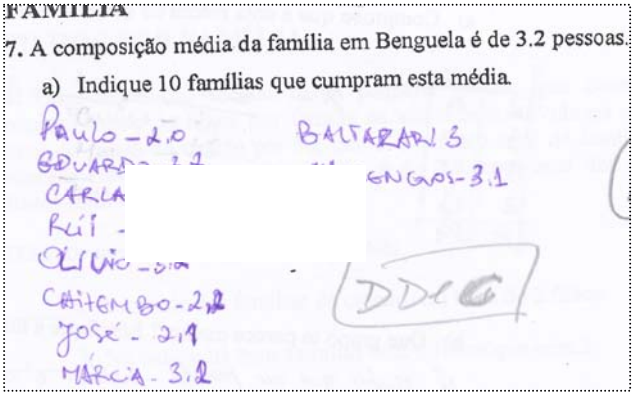
3+4+5+3+1+2 / 6 = 3

3+4+5+3+1+0+2 = 2,57 ≃ 3

decimal. A nuestro juicio, este error puede que tenga su origen en un obstáculo didáctico o en una ausencia de sentido. Con respecto al primer origen, al revisar las libretas de algunos alumnos y ciertos apuntes fotocopiados y distribuidos por algunos profesores para apoyar su enseñanza, observamos que en determinados problemas relacionados con el cálculo de la media aritmética, o que requerían su aplicación, este valor se redondeaba a un valor entero, por lo que probablemente algunos alumnos hayan actuado en coherencia con lo que consta en esos materiales. En cuanto a la caracterización del error en una ausencia de sentido, se justifica por el carácter abstracto que encierra esta medida, que hace que algunos alumnos no acepten que la media pueda

ser un valor decimal, principalmente cuando la variable a estudio es de tipo discreto (Strauss y Bichler, 1988).

Observamos también que algunos alumnos no son capaces de distinguir el tipo de dato a usar dependiendo del contexto presentado en el problema. Por ejemplo, al construir una distribución de valores que tiene un valor medio conocido y cuyos datos se refieren a una variable discreta usan indiferentemente cualquier tipo de dato, incluso


FAMÍLIA

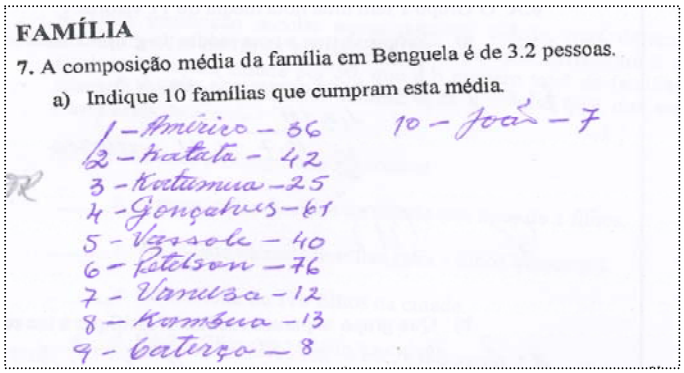
7. A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas.

a) Indique 10 famílias que cumpram esta média.

los decimales. Este error podría derivarse ya sea de un obstáculo cognitivo o bien de una ausencia de sentido, ya que los alumnos parecen mostrar resistente a la concepción del tipo de dato a usar en función del contexto, al mismo tiempo que no son capaces de estructurar el conocimiento adquirido en correspondencia con la situación que se les presenta, poniendo en evidencia las dificultades cognitivas que se manifiestan en el estadio estructural del desarrollo de signos matemáticos.

Otro error consiste en la carencia de significado al interpretar los enunciados de los problemas, principalmente cuando se pide construir o completar un conjunto de datos de media dada. Este hecho, ha llevado a que algunos presenten procedimientos totalmente incoherentes o no contesten. A nuestro entender estos errores de interpretación podría derivarse de una ausencia de representaciones mentales del concepto en los alumnos como consecuencia de no estar familiarizados con situaciones contextualizadas que muestren la aplicación y uso del concepto en la vida cotidiana.

Con relación a los problemas de construcción encontramos también otro error que muestra una visión limitada de algunos alumnos, pues no reconocen la idea de distribución como propiedad de un colectivo. Estos alumnos, al determinar una distribución de valores de la que se conoce la media y el total de datos, indican un conjunto de valores que tiene una suma total superior o inferior a la suma total real. Suponemos que este error se produce por una ausencia de significado, ya que con tal



FAMÍLIA

7. A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas.

a) Indique 10 famílias que cumpram esta média.

1 – Américo – 56
2 – Natacha – 42
3 – Katumua – 25
4 – Gonçalves – 61
5 – Vassole – 40
6 – Fetelson – 76
7 – Vanessa – 12
8 – Kombua – 13
9 – Catarço – 8
10 – João – 7

actuación, muestran que no comprenden la noción de distribución como un todo, y que para construirla se debe entender la media como un reparto equitativo.

6.4. CONCLUSIONES

En este capítulo hemos analizado las informaciones obtenidas mediante entrevistas a ocho alumnos, respecto a diferentes cuestiones derivadas de sus respuestas al cuestionario que se les administró en la primera fase del estudio general y hemos sugerido la procedencia de algunos errores cometidos por los alumnos. Las entrevistas constituyeron la base para la comprobación y la aclaración de algunas respuestas, y permitieron también profundizar en los errores y dificultades de los alumnos en la comprensión de la media aritmética.

El proceso de análisis de las entrevistas se centró en resumir las respuestas de los alumnos e interpretarlas en base a las preguntas de investigación y las cuestiones que se habían planteado. Esto, tiene que ver con los argumentos presentados al contestar un problema, sus concepciones respecto a un determinado concepto, los procesos y procedimientos empleados al resolver un problema, y sus actuaciones al resolver problemas relacionados, entre otros aspectos.

De los resultados encontrados al analizar las respuestas de los alumnos, constatamos que los alumnos presentan dificultades enormes tanto de orden conceptual como procedimental, aunque en algunos casos, conozcan el algoritmo de cálculo de la media. Tales dificultades confirman y amplían los resultados descritos en los trabajos de varios autores citados en este trabajo.

En síntesis, veamos algunas de las conclusiones extraídas de este estudio cualitativo, cuyas interpretaciones se derivan del análisis de las respuestas obtenidas en las entrevistas:

- Se ha observado que aunque algunos alumnos hayan usado correctamente la media para estimar el tiempo o el peso de acuerdo con los problemas planteados, lo hicieron sin conocer los fundamentos teóricos que convierten esta medida en el mejor estimador en presencia de errores de medición. Ningún alumno contestó argumentando, por ejemplo, que la media es el valor representativo de un conjunto de datos, que es el valor en cuyo cálculo todos los datos contribuyen de manera proporcional, o que es el valor que describe de forma global a una muestra. De igual forma, los que sugieren utilizar el valor más frecuente en estos problemas, tampoco dieron ninguna razón especial. Los motivos indicados se refieren al hecho de aparecer más veces, o porque de los datos proporcionados era el que se obtiene sin muchas dificultades, por no requerir cálculos. Otros dejan entrever que además del valor más frecuente se puede usar otra medida, lo que muestra una falta de consistencia en sus afirmaciones.

- Con respecto al reconocimiento de los valores atípicos y su exclusión en el cálculo de la media, las respuestas de los alumnos muestran que no están familiarizados con este tipo de valores y mucho menos con el efecto que tales valores producen en el cálculo de la media. Aunque la situación lo requiere, no les prestan atención, porque no los diferencian de los otros datos.

- Algunos alumnos que eligieron la opción correcta en el problema de elección múltiple, tras indicar una respuesta que no va de encuentro a lo deseado en el problema de respuesta abierta relacionado, confirmaron que indicaron la alternativa correcta en el problema de elección múltiple sin criterio. No sólo no se percataron de la relación que tienen los dos problemas, sino que también admitieron la posibilidad de utilizar otras opciones como respuestas válidas a la situación presentada, mostrando que han sido inconsistentes en sus decisiones. Algunos no saben explicar exactamente el significado de la afirmación correcta que han elegido, o lo relacionan con nociones que no se ajustan al significado correcto.

- Algunos alumnos presentan conflictos conceptuales respecto a la noción de media aritmética. Interpretan este concepto como el "valor más frecuente", "la mitad" o incluso "la suma total". Otros usan ideas coloquiales tales como "normal", "hacer estadística", lo que muestra que no tienen una noción del todo clara sobre el significado de este concepto. La idea de media como algoritmo de cálculo también ha sido resaltada en algunas respuestas.

- Los alumnos creen que no se debe considerar el dato cero en el cálculo de la media aritmética, porque sólo se fijan en la suma total. No se dan cuenta que el total de datos ya no es el mismo, lo que conlleva a la variación del valor medio.

- Se ha observado que los alumnos no distinguen entre datos que son valores de variable y los que son valores de frecuencia en el cálculo de la media aritmética. Calculan simplemente la media de algunos de los valores de de variable, y en algunos casos evitando incluso la información relativa a los valores nulos, pues piensan que el cero no influye en el cálculo de la media. Otros dividen la suma de los valores de la frecuencia por la suma de los valores de la variable porque no son capaces de distinguir a qué dato se refiere cada una de las sumas.

- Las dificultades relativas a la obtención de datos a partir de la gráfica para calcular la media también se hicieron presentes. Por lo general proceden calculando la media de los valores que identifican a las divisiones de la escala en el eje X. No se reconocen los valores de la variable y las frecuencias correspondientes.

- Se ha constatado que a pesar de que los alumnos indican una distribución correcta, cuando se conoce la media y el total de datos, la vía de solución utilizada no siempre es la ideal. Algunos alumnos atribuyen en primer lugar, valores arbitrarios a cada elemento, y utilizan el algoritmo de la media aritmética tratando de comprobar si la suma que se obtiene dividida por el total de datos da como resultado la media indicada en el enunciado. Otros parten del conocimiento que tienen previamente de que el valor de la media es el cociente en la división de dos números, sin saber relacionarlos entre sí. No parten del algoritmo de la media aritmética para efectuar su inversión y

calcular la suma total, a pesar de que algunos revelaron conocer la fórmula para la media.

- Algunos no contestaron ciertos problemas porque no sabían qué hacer o no habían entendido el enunciado del problema. En algunos casos, no sabían qué hacer porque no disponían de vías razonables. Algunos procesos de resolución que habían utilizado en problemas semejantes, como por ejemplo los utilizados en el problema 7.a), eran limitados e inadecuados, y cuya generalización al problema 8, por ejemplo, no era factible.

Respecto a los orígenes de los errores cometidos por los alumnos, nuestro análisis ha sugerido que tienen distinta proveniencia. Pero en particular, parecen resultar de las relaciones que se producen en el *sistema didáctico*: Contexto (lo socio-cultural y las instituciones), referente (conocimientos matemáticos curriculares, alumno, profesor) y significado (relación triádica entre profesor-conocimiento, alumno-conocimiento, profesor-aluno).

La enseñanza de la media aritmética alejada de los aspectos esenciales que deben marcar la elaboración de conceptos es una de las causas de los principales errores, obstáculos y dificultades que se producen en el aprendizaje de este concepto. Luego, sería importante considerar la formación de ideas intuitivas que permitan desarrollar en los alumnos representaciones mentales claras del concepto, atender a la sistematización de las representaciones mentales adquiridas al respecto del concepto y asociarlas con los conocimientos anteriormente adquiridos para una emisión correcta de conclusiones y juicios, o realizar una selección cuidadosa de tareas que ayuden a ver la aplicación del concepto en diferentes situaciones y desarrollar, por lo tanto, la capacidad para la aplicación del saber en la práctica.

Además, hay que tener en cuenta que el propio concepto de media aritmética viene acompañado de aspectos abstractos, cuya comprensión requiere relacionar los aspectos de carácter conceptual y operacional.

De igual forma, aunque la superación de obstáculos sea un proceso difícil, ya que el conocimiento que tiene el alumno le ha sido útil en determinadas ocasiones, creemos que su superación es relevante, puesto que eso implicaría la adquisición de un conocimiento nuevo y mejor, concordando así con lo expuesto por Sierpinska (1990) y Ruano, Socas y Palarea (2003).

Finalmente debemos señalar que es importante que el profesor tome conciencia de los errores que cometen sus alumnos y adopte mecanismos adecuados para remediarlos. En este sentido, es necesario que los alumnos participen de forma activa y consciente en la elaboración del concepto, y en los diferentes componentes que enmarcan su significado. A través de una buena orientación hacia los propósitos formulados se estimula la participación consciente de los alumnos y si a eso le añadimos una enseñanza que tiene en cuenta la discusión de las tareas y de sus propios errores, podría convertirlos en partícipes fundamentales del proceso de construcción del conocimiento y de la superación de las propias dificultades.

Los aspectos mencionados anteriormente fueron los preceptos en que se elaboró nuestra propuesta didáctica sobre la enseñanza de la media aritmética, cuya descripción haremos en el Capítulo siguiente.

CAPÍTULO 7

EL TERCER ESTUDIO DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACIÓN: DESARROLLO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA SOBRE LA MEDIA ARITMÉTICA

7.1. INTRODUCCIÓN

En cumplimiento del objetivo 5 de nuestro trabajo de investigación, que consiste en desarrollar una propuesta de enseñanza sobre la media aritmética, hemos llevado a cabo una experimentación didáctica en el aula, con un grupo de alumnos que nunca habían recibido instrucción sobre estos contenidos. Dicha propuesta, se materializa en la descripción de las sesiones de enseñanza desarrolladas, en donde se proporcionan datos sobre las diferentes tareas que podrían conformar una clase sobre la media aritmética, los objetivos correspondientes a cada tarea, las diferentes actuaciones de los alumnos y sus dificultades en el proceso de resolución de cada tarea, la organización de las sesiones en cuanto al contenido y su ordenación, de entre otros datos. Estos aspectos podrían servir de orientaciones metodológica en la planificación de los contenidos sobre la media aritmética.

El por qué del desarrollo de esta propuesta surge por el hecho de que algunas dificultades del alumnado en la comprensión de la media aritmética podrían asociarse a los problemas de su enseñanza, como hemos expuesto anteriormente. Además, no siempre los libros de texto proveen de tareas que abordan todos los elementos del significado sobre la media aritmética. Al proporcionar esta guía, estamos ayudando a los profesores, talvez a los menos experimentados en la docencia, a familiarizarse con diferentes aspectos que podrían enmarcar la enseñanza de estos contenidos, auxiliándolos de este modo en su trabajo.

No obstante la contribución que la referida propuesta didáctica pueda ofrecer, somos concientes que para obtener una mayor calidad en el trabajo de un profesor, es necesario que cada uno estudie para lograr un mayor dominio de los contenidos, así como el conocimiento de su metodología, de modo a que pueda comprender mejor la

propuesta indicada y enriquecerla con sus ideas, seleccionando las vías y métodos que considere más apropiados para su grupo de alumnos.

7.2. DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA SOBRE LA MEDIA ARITMÉTICA.

El diseño de nuestra propuesta de enseñanza sobre la media aritmética contempla las fases abordadas por Artigue (1992) respecto a esta metodología de investigación. Además, esta era sólo una más de las etapas de investigación en el conjunto de la investigación más amplia que estamos llevando a cabo. En esta parte, nuestro objetivo es desarrollar una propuesta de guía metodológica para la enseñanza del concepto de media aritmética, abordando también algunos conceptos relacionados (mediana y moda).

Previamente, revisamos varios trabajos que nos permitieron adentrarnos en las diferentes dificultades conceptuales y procedimentales de los alumnos en la comprensión del concepto de media aritmética, conforme se describió en el capítulo 1. Igualmente, conforme referimos en el mismo capítulo, una de las razones que nos llevo a realizar el estudio de este tema, es que del estudio exploratorio realizado con dos muestras de alumnos, habíamos constatado que los alumnos de la segunda muestra tenían más dificultades en la comprensión del concepto de media aritmética que los primeros. Pensamos entonces, que una guía didáctica para enseñar estos contenidos podría resultar de cierta importancia. Al efecto, revisamos los programas curriculares, libretas de los alumnos y apuntes fotocopiados, distribuidos por los profesores.

De la revisión a aquellos materiales, hemos observado que los contenidos en estudio son impartidos en la enseñanza secundaria. Sin embargo, identificamos algunas carencias en lo concerniente a los tipos de problemas utilizados en las clases, como ejemplos, problemas de ejercitación y actividades de estudio independiente, si atendemos a los componentes del significado de los objetos matemáticos, según se indica en Batanero y Godino (2001a). Por ejemplo, no se abordan problemas que presentan la media como mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medición y algunas propiedades sobre la media aritmética no son analizadas de forma expresa, fundamentalmente, las referidas en Strauss y Bichler (1988). De igual forma, no identificamos problemas que exigiesen el empleo de argumentos y

justificaciones para convencer de la validez de una solución al resolver un problema o de la veracidad de las propiedades.

Los aspectos anteriores, constituyen nuestro análisis preliminar en el desarrollo de la propuesta de enseñanza.

Respecto del diseño y análisis a priori de las situaciones, nuestra preocupación estuvo encaminada, principalmente en analizar las tareas que deberían utilizarse. En este sentido, configuramos un conjunto de actividades que abarcaban diversos aspectos de la media aritmética: (a) aspectos fenomenológicos, que reflejan el campo de problema de donde surge el concepto; (b) procedimientos, algoritmos, operaciones; (c) elementos representativos, que se traducen en las representaciones ostensivas, que tienen una función semiótica y también instrumental. El caso de los números, términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas; (d) elementos intensivos y conceptuales, es decir, la definición del concepto, sus propiedades y relaciones; (e) los argumentos y la comprobación. Los aspectos anteriores fueron indicados por Batanero y Godino (2001a).

En cuanto a los recursos didácticos en el desarrollo de las sesiones, supusimos que la utilización de fichas de problemas era la vía más adecuada, y para cada sesión se reservaba un tiempo aproximado de una hora. Igualmente, pensamos que era ideal distribuir algunos apuntes fotocopiados en el tratamiento de algunas cuestiones, como complemento. El uso de la pizarra era crucial para el desarrollo de las sesiones.

Los otros elementos previstos para esta fase fueron los métodos de enseñanza a emplear y las formas de organización de enseñanza. Con respecto a los métodos, pensamos utilizar aquellos que se centran en las distintas formas de conversación en clase: los métodos de elaboración conjunta. No obstante, vimos que era necesario combinar diferentes métodos, dependiendo de la situación presentada. Así, en determinadas ocasiones, se podría utilizar tanto el método expositivo, como el método de elaboración conjunta o el método de dirección del trabajo independiente.

Como se indica en Jungk (1985a), el método expositivo constituye un método racional de la transmisión de la materia. Este método debe utilizarse donde no existe en los alumnos condiciones para una elaboración conjunta. Se utiliza también cuando el tiempo necesario para una elaboración conjunta en la conversación de clase, sería muy

grande, o aún en situaciones donde se pretende dar una indicación, una información o las explicaciones con carácter de aclaración.

Con respecto a la elaboración conjunta, en Jungk (1985a) se diferencian tres tipos de conversaciones: conversación socrática, conversación heurística y discusión.

La conversación socrática es en principio, una toma de lección. Constantemente se intercambian preguntas del profesor y respuestas de los alumnos. Esta conversación se utiliza en preguntas de control oral, cuando se pretende averiguar y asegurar el nivel de partida. Con esto se puede tomar el contenido esencial, comprobar el conocimiento de fórmulas de cálculo o ejercitar el cálculo oral. Dado que la conversación socrática está caracterizada por pasos cortos en la actividad mental de los alumnos, por tener éstos pocas posibilidades para pensar independientemente, esta forma de conversación de clase no puede emplearse cuando se elabora un nuevo conocimiento, cuando el alumno piensa en relaciones mayores. En este caso, se trabaja utilizando la conversación heurística. En esta, el profesor se sirve de distintos medios para la dirección de la conversación. El profesor plantea preguntas que contienen problemas, formula problemas, da impulsos para el pensamiento de los alumnos, exige toma de opiniones, se refiere a preguntas de los alumnos, propone contraejemplos, dirige la discusión, plantea dudas sobre las propuestas de los alumnos. No se fija exactamente la dirección del pensamiento por parte del profesor, los alumnos son activos en el desarrollo de los problemas, tienen más espacio para el pensamiento independiente y pueden ser productivos desde el punto de vista mental (Jungk, 1985a). Según este autor, en determinadas situaciones una conversación de clase puede tener el carácter de una discusión. Este será el caso cuando en la búsqueda común de vías de solución, en la discusión de posibilidades de solución participan muchos alumnos en la conversación; cuando se analizan distintas propuestas, cuando se hacen objeciones y cuando, finalmente, se ponen de acuerdo sobre una propuesta.

Con respecto al método de dirección del trabajo independiente, indica que se trata de formas de la dirección del trabajo independiente de los alumnos. El trabajo independiente de los alumnos puede tener como contenido la solución de ejercicios o también el trabajo con el libro de texto. En cada caso, el profesor tiene que dirigir este trabajo correctamente, guiarlo durante un espacio de tiempo mayor y controlarlo. Es importante el planteamiento claro del ejercicio por parte del profesor. Este debe

contener tanto la tarea, como indicaciones para la forma de trabajo o para la representación de la solución.

En cuanto a la forma de organización del proceso de enseñanza, pensamos en la clase como el modo más adecuando para llevar a cabo el experimento. En este sentido, programamos utilizar, de forma combinada, las diferentes posibilidades que existen dentro de ella, siguiendo a Jungk (1985a):

- El trabajo colectivo, es decir, dejar que los alumnos trabajen relativamente independientes después de una cierta orientación, pero permitiendo que se ayuden mutuamente o se controlen los unos a los otros.
- El trabajo en grupo, es decir, que los alumnos entren en relación entre sí, mientras resuelvan una actividad dada, no siendo tan marcada la dirección del profesor.
- El trabajo individual, en el que cada alumno soluciona la tarea por sí solo, para la cual ha recibido una determina orientación. En este sentido, la atención del alumno durante el trabajo está dirigida a la tarea dada que realiza en su lugar de trabajo y no ya al profesor. El profesor disminuye su dirección, su atención ya no está en el contenido sino en los distintos alumnos y a sus progresos en la adquisición del contenido. Este tipo de trabajo puede realizarse también mediante el trabajo del alumno en la pizarra o mediante una exposición del alumno.
- La enseñanza frontal, dando informaciones a todo el colectivo o elaborando la materia con el colectivo. El alumno asimila, piensa conjuntamente, toma notas, mientras el profesor imparte la materia.

Por otro lado, y tal como señala Artigue (1992), el análisis a priori de las situaciones es un aspecto fundamental en el proceso de validación. Concebido como un *análisis del control del significado del conocimiento,* su objetivo es determinar de qué modo las elecciones realizadas permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y los significados que construyen.

Atendiendo a que este análisis se basa en varias hipótesis, cuya validación estará indirectamente en juego durante la cuarta fase, en confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, establecimos que algunas dificultades del alumnado en la comprensión de los objetos estadísticos podrían asociarse al modo de su enseñanza. De

ahí que, nos habíamos preguntado si una enseñanza en la que se exponían problemas que mostrasen ejemplos de situaciones de contexto de la vida real, produciría cambios en el modo de apropiación de conocimientos en nuestros sujetos.

Establecimos entonces, la siguiente hipótesis:

Hipótesis 5: "*Una enseñanza apoyada en problemas contextualizados, y desarrollada bajo una metodología que hace del alumnado partícipe en la construcción del conocimiento, y donde la discusión cobra un papel fundamental, ayuda a paliar las dificultades y errores que cometen en el proceso de aprendizaje de la media aritmética*".

Como indicó Garfield (2003), la naturaleza de los contenidos estadísticos, yace en su contextualización. Sin embargo, la realidad muestra que todavía hay muchas dificultades en ofrecer este tipo de enseñanza. Tormo (1995) dice al respecto, que la utilización de ejemplos de situaciones de contexto de la vida real es fundamental para entender el concepto de media aritmética. Señala que la tarea del profesor no debe consistir únicamente en enseñar el algoritmo. Es fundamental pensar que antes debería plantearse el desarrollo de nociones intuitivas sobre la media.

Por otro lado, creímos que era importante tratar de desarrollar en los alumnos procesos metacognitivos (Schoenfeld, 1992), que se refieren, entre otras cosas, a la monitorización activa, a la autorregulación y a la organización de esos procesos en relación a la cognición de los objetos o datos. Con estos procesos se esperaba que los alumnos seleccionasen y desplegasen adecuadamente los recursos matemáticos (conocimientos de base) y las estrategias de resolución de problemas de que disponían.

En cuanto a las estrategias de resolución de problemas, teníamos conciencia de que se trataba de una cuestión que dependía de la habilidad práctica y del establecimiento de relaciones por parte del propio alumno. Sin embargo pensamos ayudar a los alumnos, proporcionándoles determinadas indicaciones relacionadas con lo descrito por Polya (1965). Así, las estrategias de resolución de problemas debían atender los siguientes elementos: primero, tratar de comprender el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, captar las relaciones que existen entre los diferentes elementos, ver lo que liga a lo buscado con los datos, para encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. En tercer lugar, llevar a cabo el plan. El cuarto paso es volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla, en otras

palabras, hacer un análisis retrospectivo. Sin embargo, estas ideas se sugieren simplemente para que sirvan al alumno como un medio auxiliar en el intento de resolver el problema, ya que estos deben reflexionar e interpretar el problema considerando diferentes aspectos presentes en la situación. O sea, no se utilizan las estrategias como reglas y procedimientos mecánicos, sino que se lleva al alumno a monitorizar, interpretar y analizar la vía de solución, una perspectiva que concuerda con lo planteado por Lesh y Zawojewski (2007, p. 769).

Se previó también el empleo de situaciones que llevasen al alumno a acelerar su trabajo activo durante el proceso de resolución de problemas. Nos referimos al uso de impulsos que el profesor debía dar a la actividad de los alumnos. Los impulsos caracterizan de forma más cercana el asunto a analizar, pero no indican en forma directa a los alumnos el próximo paso en el proceso de resolución (Jungk, 1985b). Estos impulsos se manifiestan en un conjunto de preguntas a ser planteadas por el profesor durante las diferentes fases de resolución de un problema. Polya (1965) relaciona a estas preguntas como parte de la heurística moderna que trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, distinguiéndolas particularmente como operaciones mentales típicamente útiles en este proceso.

Los aspectos señalado anteriormente, constituirían la metodología de trabajo en clase, y se relacionan con la segunda fase de la ingeniería didáctica de Artigue (1992) para el desarrollo de nuestra experimentación.

La fase de experimentación, se resume en la actividad de enseñanza llevada a cabo con un grupo de alumnos que aún no habían recibido, formalmente, instrucción sobre la media aritmética. La actividad se realiza en una escuela de enseñanza privada, con alumnos que cursaban segundo, del nivel medio técnico, conforme la descripción presentada en el apartado sobre la enseñanza de estadística en Angola.

Para la actividad se inscribieron inicialmente 15 alumnos de forma voluntaria. La única condición que se consideró era vivir en las cercanías de la institución en donde se realizó la experiencia y la disposición a participar en las actividades. Se les informó a los alumnos, que se pretendía realizar una experimentación sobre la enseñanza de la media aritmética, proporcionando también algunas ideas sobre otros conceptos, ya que tales contenidos eran usados frecuentemente en la actividad diaria y se había constatado que algunos programas no los abordaban de forma extensiva. Estas ideas convencieron

a nuestros alumnos a que se inscribiesen para la actividad. Sin embargo, no todos los inscritos se presentaron a las sesiones.

7.3. DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES

A continuación, describimos las sesiones realizadas, en las que se proporcionan informaciones de las actividades desarrolladas. Tal como mencionamos anteriormente, a través de esta descripción se presenta la propuesta de enseñanza de los contenidos abordados, que puede servir de guía para aquellos profesores que lo deseen. Las sesiones se desarrollan según los diferentes elementos didácticos de una clase así como las distintas fases de la misma: fase introductoria, de desarrollo de los nuevos contenidos, y fase de control.

Las tareas se estructuran metodológicamente, dándose indicaciones sobre los objetivos de las mismas y describimos algunas actuaciones de los estudiantes y del profesor investigador, así como algunas dificultades presentadas. Las tareas se presentan en formato de fichas de actividades que contienen a un determinado problema. Veamos a continuación la descripción de cada sesión:

7.3.1. SESIÓN 1

Esta sesión se llevó a cabo en el miércoles día 16 de mayo de 2007. El objetivo fundamental era desarrollar el concepto de media aritmética, proporcionando las ideas intuitivas de este concepto a los alumnos.

En la sesión participaron 10 alumnos de los 15 que se habían apuntado inicialmente, y tubo una hora de duración.

La práctica empieza con un abordaje introductorio sintético, sobre la estadística y sus orígenes. Al respecto, se explica de forma expositiva, que:

"*A medida que las sociedades primitivas se organizaron y superaron el ámbito local, se han visto en la necesidad de tener que tomar decisiones que exigían un conocimiento numérico de los recursos disponibles. Esta necesidad dio lugar a la utilización y desarrollo de las primeras técnicas estadísticas basadas exclusivamente en el conteo y en la representación de datos*".

Se comenta además, que "*la historia muestra que las primeras estadísticas fueron realizadas, fundamentalmente con fines económicos, por los gobernantes de las grandes civilizaciones antiguas, para poder conocer el número de bienes que poseía el estado y cómo estaban repartidos entre la población*".

Posteriormente, se explica que "l*a estadística es definida como un conjunto de métodos científicos que facilita el análisis e interpretación de la información obtenida*. Se hace un breve realce de la división de la estadística (descriptiva y inferencial).

Tras esta introducción, se empieza con el proceso de desarrollo del concepto de media aritmética. La situación de partida fue un problema, en el que se pedía interpretar el significado de las afirmaciones presentes en la Actividad 1.

Actividad 1

Dadas las siguientes afirmaciones:

a) Ronaldo marca una media de 2,3 goles por partido.

b) Maria se gasta una media de Kz 200.00 por día en refrescos[3].

¿Explique el significado de cada una de ellas?

La actividad ayuda a percibir el concepto de media aritmética como un valor típico o representativo de un conjunto de datos. Además, promueve la correcta interpretación de la noción de promedio, la necesidad del uso de este concepto en la vida social, así como la identificación de su aspecto abstracto en dependencia del contexto. El problema fue diseñado por nosotros, tomando en consideración lo señalado por Gal (1995), que sugiere el uso de este tipo de actividad en la instrucción, pues puede fomentar la discusión en la clase, ayudando a desarrollar las capacidades de comunicación, tanto verbales como escritas, y concienciar a los estudiantes sobre las posibles (mal) interpretaciones que podrían surgir al usar el término promedio.

Las respuestas dadas por los alumnos en el análisis de la situación fueron las siguientes:

Apartado a)

- "en la mayoría de los partidos Ronaldo marca 2'3 goles".
- "si en media marca 2,3 goles, significa que se ha hecho una aproximación".
- "A veces marca 2 goles otras veces marca 3.

[3] Kz es el indicativo de la moneda en uso en la Republica de Angola, cuya denominación es Kwanza. 1$ equivale aproximadamente a kz 75.00.

- "se ha sumado los goles y se ha dividido por el número de partidos".

Apartado b)

- "Maria se gasta todos dias Kz 200.00".
- "Maria se gasta Kz 200.00 en la mayor parte de los días".

Estas ideas han sido discutidas por el grupo. Las ideas "sumar los goles y dividir por el número de partidos" y "gastarse todos los días Kz 200.00" fueron las ultimas en ser analizadas, ya que la primera indicaba expresamente el algoritmo de cálculo de la media simple y la segunda se relacionaba con la distribución media. Pero en ambos caso, en ningún momento se hablo del algoritmo de cálculo, pues, en aquel momento lo que se pretendía era introducir la noción conceptual.

En el primer caso, se discutió la idea "marcar 2'3 goles en la mayoría de los partidos". ¿Es posible que se marque 2'3 goles en un partido? ¿Tiene sentido hablar de goles en estos términos? Lógicamente no tenia sentido, porque se trataba de un valor decimal, por lo cual decir que se ha marcado 2'3 goles en un partido no era apropiado (en este caso la variable es discreta).

La idea de "aproximación" podía tener el significado de media, dependiendo de la situación, pero el alumno que indicó esta idea no precisa muy bien lo que pretendía decir. El planteamiento de que "a veces marca 2 goles y otras veces 3", se ha discutido preguntando a los alumnos: ¿Y no se podía también decir, que a veces marca 1 gol, 4 goles o incluso ningún gol?

Siguiendo con las discusiones, igualmente se ha explicado que a pesar de que algunas personas relacionan la media aritmética con la mayoría, la idea de que "María se gasta Kz 200.00 en la mayor parte de los días", no se relaciona con la media aritmética. Se explicó que tiene otro significado, que sería abordado posteriormente.

En conclusión, finalmente se realzó, que cuando se habla de valor medio, se está hablando de un valor que refleja el reparto equitativo. Es decir, en el apartado a) el valor 2'3 indica el valor representativo o típico de goles por partido, independientemente del número de goles que el jugador haya o no marcado en cada partido. Se está refiriendo a un valor que debe representar a los demás. De la misma forma, se explicó el significado encontrado en el apartado b).

Sin embargo, era importante diferenciar el tipo de variable presente en cada apartado. Para explicar este aspecto se ha preguntado a los alumnos si en función de la media indicada, los datos podrían ser o no valores decimales. Las primeras respuestas ayudaron a que todo el mundo se diera cuenta de que en la situación a) los datos no podrían ser decimales, ya que estábamos refiriéndonos a "goles marcados", mientras que en el apartado b) el dato tanto podría ser o no decimal, pues se trataba de "dinero gastado".

Basándonos en las respuestas de los alumnos, se introdujo la noción de variable cuantitativa discreta, variable cuantitativa continua y variable cualitativa. Obviamente, los programas curriculares sitúan estos contenidos mucho antes de las medidas centrales. Sin embargo en nuestro caso, teníamos que encontrar la ocasión oportuna para introducir estas ideas, pues, estamos trabajando con una situación particular de enseñanza. Igualmente, estas ideas se podrían aclarar con más detalle a través de ejemplos y definiciones en las clases, sin embargo pensamos hacerlo a través de apuntes fotocopiados, que fueron distribuidos a los alumnos al final de la sesión. Los mismos habían sido elaborados para tal efecto.

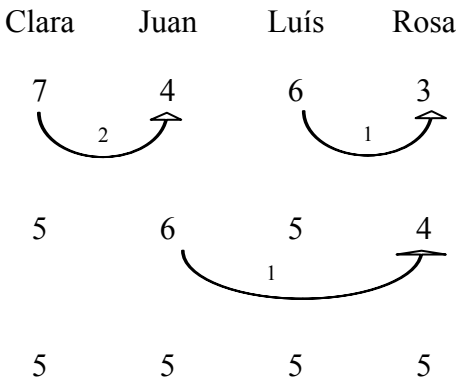
A continuación se presentó la tarea 2. Con la misma actividad se pretendía reforzar las primeras explicaciones sobre el concepto de media, en lo que se refiere a la noción de "reparto equitativo".

Actividad 2

Cuatro estudiantes llevaban refrescos para una excursión. Clara llevó 7 Coca-Cola, Juan 4, Luís 6 y Rosa 3. Los que llevaron más refrescos dieron algunos a los que llevaron menos, de manera que todos quedasen con la misma cantidad. ¿Con cuántos refrescos quedó cada estudiante?

El problema se adaptó de Tormo (1995). Su objetivo es inculcar en los alumnos la idea de representatividad, interpretando la media como centro de gravedad y como cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme.

Para que los alumnos comprendieran detalladamente las nociones mencionadas el método de solución escogido consistió en retirar refrescos de aquellos que tenían más, aumentado a los otros que tenían menos, hasta que todos los alumnos tuviesen la misma cantidad.



Clara que tenia 7 dio 2 refrescos a Juan, Luís dio 1 refresco a Rosa. De esta forma Clara se queda con 5, Juan con 6, Luís con 5 y Rosa con 4. Para que todos tengan la misma cantidad, el proceso de reparto debe proseguir. Juan da un refresco a Rosa y entonces todos se quedan con 5 refrescos.

Se ha indicado, que el valor 5, "misma cantidad de refrescos tras el reparto" constituye el número medio de refrescos por alumno.

Ciertamente, para resolver el problema sería más fácil sumar todos los refrescos y dividir la suma por el número de alumnos, tal como sugirió uno de los estudiantes. Sin embargo, nuestra pretensión era que todos se diesen cuenta de la idea de redistribución para determinar el equilibrio. El procedimiento es similar al proceso de establecer equilibrio en una balanza.

Evidentemente, la solución del problema por este procedimiento, puede ser fácil cuando el valor medio da como resultado un número entero. Sin embargo, el proceso se complica cuando el resultado es una fracción. No obstante, seleccionamos un problema similar para ilustrar tal situación.

Actividad 3.

Cinco amigos fueron a un cine. José tenía 2$, Manuel 3$, Miguel 5$, Paulo 8$ y Fernando 10$. En el momento de comprar las entradas, los que tenían más dinero cedieron una cierta cantidad a los que habían llevado menos dinero, y todos se quedaron con la misma cantidad. ¿Con cuántos dólares se quedó cada estudiante?

Aquí, el grado de dificultad fue algo mayor, en comparación con la actividad anterior. La orientación del profesor fue fundamental para que los alumnos llegasen a la solución 5'6$. Se comentó entonces, sobre la necesidad de usar un procedimiento más adecuado y práctico para encontrar la solución en este caso (sumar todos los valores y dividir la suma por el total). Con esto, estábamos motivando a los alumnos para introducir el algoritmo de cálculo, que fue abordado en la sesión 2.

Para finalizar la sesión se hizo una pregunta de control: ¿Qué significa la media aritmética? Las respuestas de los alumnos fueron en el sentido de reparto equitativo, valor típico o representativo de un conjunto de datos.

La sesión terminó sin que fuese posible proporcionar una actividad de estudio, por insuficiencia de tiempo.

7.3.2. SESIÓN 2

La segunda sesión se realizó un día después de la primera. Fue el viernes día 17 de mayo de 2007. En la actividad participaron 8 alumnos de los 10 que participaron en la sesión primera.

Los objetivos programados para la actividad de este día fueron:

- Que los alumnos fuesen capaces de calcular la media aritmética usando el algoritmo de cálculo.

- Que los alumnos fuesen capaces de identificar algunas propiedades inherentes a este concepto.

Con respecto al algoritmo de cálculo, nuestra planificación preveía introducir, primeramente, el algoritmo de media simple y posteriormente el algoritmo de media ponderada.

La actividad empieza con preguntas sobre la clase anterior. ¿Qué es la media aritmética? ¿Qué valores puede tomar? ¿Puede ser una fracción? ¿Existe algún procedimiento que permite efectuar su cálculo?

De inmediato se esclareció que en aquella sesión nos íbamos a ocupar exactamente de los procedimientos de cálculo de la media aritmética, y también de algunas de sus propiedades. Se presentó a continuación un problema para comenzar con el desarrollo de la nueva materia.

Actividad 4

Se pidió a veinticuatro alumnos de una clase el número de refrescos diarios que suelen beber. Se obtuvo la siguiente lista de datos:

0 1 5 1 0 0 5 4 5 0 4 2 1 3 3 1 0 1 4 5 5 2 4 5

Halla el número promedio de refrescos que bebe diariamente la clase.

Este problema pone en evidencia la necesidad del uso de la media aritmética para resumir un conjunto de datos, con vista a encontrar un valor representativo. La extensión del número de datos, nos obliga a usar un procedimiento que ayude a determinar el valor pretendido. En este caso, se deben sumar todos los datos y dividir la suma por el total de los datos. El problema, ayuda también a interpretar conceptualmente la idea de media aritmética como un valor que indica la redistribución justa.

Mediante diálogo y preguntas se ha cuestionado a los alumnos en cómo se podría encontrar el número promedio de refrescos que bebe diariamente la clase:

¿Qué debemos hacer para encontrar el número promedio de refrescos que bebe diariamente la clase? ¿Cuántos alumnos han informado sobre el número de refrescos que beben?

Los mismos alumnos, bajo la orientación del profesor (investigador), determinaron el valor pretendido, como cociente entre la suma de todos los valores y el número total de datos.

$$\frac{0+1+5+1+0+0+5+4+5+0+4+2+1+3+3+1+0+1+4+5+5+2+4+5}{24} = \frac{61}{24} = 2'54$$

Después del resultado, el investigador fue haciendo algunas consideraciones:

- El valor encontrado se denomina media aritmética y se denota con una letra que tiene una rayita en la parte superior, por ejemplo $\overline{X}$, si usamos la letra X. De esta forma decimos que $\overline{X} = 2'54$
- Si consideramos cada dato como una variable x, tendremos entonces:

$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{24}}{24} = \frac{\sum_{i=1}^{24} X_i}{24}$, sendo $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=5$, $x_4=1$, … y así sucesivamente.

De forma general, tenemos: $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$, sendo N el número total de datos.

En la misma ocasión se distribuyó un material en donde se encontraba la definición de media aritmética simple, y se aprovechó el momento para ejemplificar cómo trabajar con el sumatorio, en respuesta de una duda formulada por un alumno.

Posteriormente se abordaron los aspectos relacionados con algunas propiedades de la media aritmética:

- El valor encontrado para la media se sitúa entre el menor y mayor dato.
- Al calcular la media hemos considerado los valores nulos, porque también son datos del problema, para tener 24 observaciones.
- La media dio como resultado un valor decimal. Esto puede suceder y se llamó la atención sobre el error de pretender redondear el resultado.

Con el problema anterior, se ha aprovechado la oportunidad para introducir la noción de media aritmética ponderada. Viendo los datos en el problema se ha analizado el número de repeticiones de cada dato. Se explicó que estas repeticiones se llaman frecuencia o peso de cada dato. Para que los alumnos lo comprendiesen mejor, se ha construido una tabla. Los propios alumnos determinaron el número de repeticiones, y con la orientación del profesor investigador se calculó la media.

x_i	f_i	$x_i . f_i$
0	5	0
1	5	5
5	6	30
4	4	16
2	2	4
3	2	6
	$\sum f_i = \text{N}=24$	$\sum x_i f_i = 61$

Con los datos en la tabla se llego a la conclusión que siguiendo este camino, la media aritmética se determina por la siguiente expresión.

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{61}{24} = 2'54$$

Se aclaró que la suma de las frecuencias es siempre igual al total de datos N, luego $\sum f_i = \mathrm{N}$ y la expresión $\sum x_i f_i$ indica la suma total de los datos de la variable. No se entró en detalles con respecto a los índices del signo sumatorio. Nuestra opinión al respecto, es que los sumatorios fuesen enseñados previamente, antes de estudiar las medidas de tendencia central.

Posteriormente se pidió a los alumnos, resolver el siguiente problema.

Actividad 5

Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres es de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

Problemas análogos a este, han sido analizados en Pollatsek, Lima y Well (1981) y Mokros y Russell (1997). Se trata de un problema de cálculo de media ponderada, que permite a los alumnos ver la media como un valor representativo. La actividad ayuda a los estudiantes a diferenciar entre los datos que representan a la variable y los que representan frecuencias, en el cálculo de la suma total y del total de datos.

Los alumnos resolvieron el problema de forma individual. En seguida, se discutieron las diferentes vías utilizadas. Sólo dos alumnos habían resuelto el problema correctamente, construyendo una tabla similar a la presentada anteriormente. Esto no nos ha preocupado, porque sabíamos que era casi imposible que todos los alumnos captaran de inmediato el procedimiento de resolución, atendiendo a que todos no pueden tener la misma capacidad de asimilación o de atención. Además, el objetivo era que a través de la resolución fijasen el procedimiento de resolución y los diferentes elementos que constituyen el algoritmo.

Las dificultades encontradas consisten en diferenciar variables y frecuencias, para saber qué sumar y por cuánto se debe dividir. Otra dificultad se derivó del hecho de

que en el problema se utiliza la expresión "peso medio" de los hombres y "peso medio" de las mujeres. Tuvo que aclararse que en cada caso, no se da realmente el peso de cada hombre o mujer. Solamente se conoce un valor que representa el peso para cada género. Y que con aquellos datos se debía trabajar. Conociendo el peso y las frecuencias era más fácil utilizar la expresión para la media aritmética ponderada:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{4 \times 60 + 6 \times 80}{4 + 6}$$

$$\overline{X} = \frac{720}{10} = 72$$

En la misma sesión, se ha presentado un último problema relacionado, que conformó la siguiente actividad:

Actividad 6

Cuatro grupos de estudiantes, formados por 15, 20, 10 y 18 individuos tienen pesos medios de 81, 74, 77 y 70 Kg, respectivamente. ¿Cuál es el peso medio de todos los estudiantes?

Se dijo a los alumnos, que podrían trabajar en parejas, de forma individual, o podían consultarse los unos a los otros al resolver el problema. Pero independientemente de la observación anterior los alumnos prefirieron trabajar de forma individual. Cuando terminaron la resolución, el investigador identificó tres modos de resolución, pidiendo a tres alumnos que mostraran lo que habían hecho en la pizarra. Para ello se dividió la pizarra en tres partes.

Las resoluciones encontradas fueron del tipo:

1) $\overline{X} = \frac{15 + 20 + 10 + 18}{4} = \frac{63}{4} = 15'75$

2) $\overline{X} = \frac{81 + 74 + 77 + 70}{4} = \frac{302}{4} = 75'5$

3)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
81	15	1215
74	20	1480
77	10	770
70	18	1260
	$\sum f_i = 63$	$\sum x_i f_i = 4725$

$$\overline{X} = \frac{4725}{63} = 75$$

El profesor investigador explicó la esencia de los errores cometidos en las soluciones. En 1) se busca la media de los valores de la frecuencia de los datos, mientras que en 2) se determina la media de las 4 variables diferentes que se dan en el problema. En los dos casos, a pesar de haber calculado la media, aquella no tiene nada que ver con lo que se pide. La resolución correcta era la presentada en 3). Se explicó que lo que se hizo fue expresamente lo siguiente:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{81 \times 15 + 74 \times 20 + 77 \times 10 + 70 \times 18}{15 + 20 + 10 + 18} = \frac{4725}{63} = 75$$

Se informó a los alumnos que el problema también podría ser resuelto como si de media aritmética simple se tratase, y se les mostró como sería. Pero dado que tendríamos que sumar 63 datos, dadas las condiciones de las pizarras, sería algo trabajoso y engorroso escribirlo. De esta forma la expresión de la media ponderada es la más conveniente, puesto que reduce el procedimiento de resolución, por la ponderación de los datos.

Se pidió a los alumnos que observasen que la media encontrada se encuadra en el rango de los datos, es decir, entre 70 y 81, pero no tiene porque ser uno de los valores de los datos.

A forma de resumen, se recordaron las propiedades estudiadas hasta aquel momento y, se señaló que era importante tenerlas en cuenta siempre que se calcula la media:

- El valor medio puede ser una fracción.

- La media está comprendida entre los valores extremos.
- La media no tiene porque ser uno de los valores de los datos.
- La media es un valor representativo de los datos.
- Se debe tener en cuenta a los valores nulos cuando se calcula la media.

La sesión terminó dejando una cuestión al aire. ¿Cómo construir un conjunto de datos, si se conoce la media aritmética y el total de datos? Este sería uno de los aspectos a analizar en la siguiente sesión.

7.3.3. SESIÓN 3

Esta sesión se realizó el miércoles 23 de mayo de 2007. Estuvieron presentes ocho alumnos, los mismos que habían participados en la sesión 2 y tuvo la duración aproximada de una hora.

Según nuestra planificación, el objetivo para esta sesión era profundizar en el estudio de la media, después de que se introdujo, en las clases anteriores, la noción intuitiva de este concepto y el respectivo algoritmo de cálculo. Más concretamente, se pretendía que los alumnos fuesen capaces de:

- Reconocer la media aritmética como mejor estimación de una medida desconocida, en presencia de posibles errores de medición;
- Reconocer la influencia de los valores atípicos en el cálculo de la media;
- Construir una distribución de datos, cuando es conocida la media y el total de datos;

Para asegurar el nivel de partida, el profesor investigador presenta una serie de afirmaciones en la pizarra, para que los alumnos indicasen cuáles eran verdaderas y cuáles eran falsas. Aquí, lo que se quería era consolidar y sistematizar algunos aspectos estudiados en las sesiones anteriores. Las afirmaciones fueron las siguientes.

A) La media aritmética es una medida que indica el reparto equitativo de los valores de la distribución o conjunto de datos.

B) La media aritmética es la medida que indica el valor que más se repite (valor más frecuente) en una distribución o conjunto de datos.

C) La media aritmética es el valor típico o representativo de un conjunto de datos.

D) La media aritmética de un conjunto de datos es el valor que divide en dos partes iguales un conjunto de valores que ha sido ordenado de forma creciente (la mitad).

E) La media aritmética de un conjunto de datos es el valor que se obtiene como cociente de la suma de todos los valores y el número total de datos.

La metodología seguida consistió en dejar el análisis por cuenta de los alumnos. Después de algunos minutos de reflexión, se pedía a un alumno que expresara su opinión al respecto de una de las afirmaciones. En general, la actividad no supuso enormes dificultades, ya que algunos aspectos habían sido discutidos en las sesiones anteriores.

Las dos afirmaciones falsas presentadas en la actividad (B y D) sirvieron de base para abordar otras dos medidas de tendencia central: la moda y la mediana, respectivamente. Se hizo referencia a que eran medidas importantes en el análisis del centro de una distribución, igual que la media, a pesar de que sus abordajes, en la experiencia que se estaba llevando a cabo, estarían limitados, por razones de tiempo. No obstante, queríamos proporcionar algunas nociones generales sobre estas medidas. De los estudios de referencia, sabíamos que los alumnos confundían la media aritmética con otras medidas de centralización.

De esta forma, y respecto de la moda, se ha explicado que cabe la posibilidad de que exista más de una, o que no exista, y de las dificultades que resultan en su cálculo cuando los datos vienen agrupados.

En el caso de la mediana, se ha hecho notar que era fundamental organizar los datos en forma creciente o decreciente, a la hora de calcularla, y observar si la distribución era par o impar (datos discretos). Se hizo ver también que la mediana no cambia si se modifica ligeramente la distribución. La mediana es un estadístico resistente, es decir, con pequeñas fluctuaciones de la muestra no cambia su valor. Se pueden cambiar uno o varios datos sin que por ello cambie el valor de la mediana. Basta con no modificar las dos partes del mismo tamaño en que ésta divide a la distribución. Sin embargo esto no pasa con la media, pues, esta se ve influenciada al modificar los datos. Se mostraron ejemplos generales sobre estas medidas con conjuntos de pocos datos. En ambos casos, la explicación se redujo a datos de tipo discreto. No se entró en detalles, pero se comentó que tanto la mediana como la moda serían objetos de estudio

en el mismo curso académico, según el programa de la asignatura y tendrían la oportunidad de profundizar en ellas.

La sesión prosiguió con otra actividad.

Actividad 7:

Diez medidas del diámetro de un objeto de forma cilíndrica (en centímetros) han sido registradas por diez operarios: 38'8, 40'9, 39'2, 39'7, 78'2, 39'5, 40'3, 39'2, 39'8 y 40'6. ¿Cuál sería la mejor estimación de la medida del diámetro del objeto?

La activad se introdujo para que los alumnos vieran la aplicación que tiene la media aritmética como mejor estimación de una medida, en presencia de errores de medición, y la necesidad de examinar atentamente los datos cuando se trabaja con la media, debido a la presencia de observaciones que pueden influir de forma desfavorable en los resultados que se obtienen. La media queda influencia por los valores extremos. Observando el problema, vemos que aparece el valor 78'2, que se diferencia notoriamente de los demás.

El problema llevó, además, a los alumnos a recordar el algoritmo de cálculo de la media, y la propiedad de que el valor medio debe estar comprendido entre los valores extremos. Esta propiedad fue motivo de discusión, en función de uno de los resultados presentado por una alumna, después de un cálculo erróneo, cuyo valor obtenido era superior al mayor dato.

Las dificultades observadas fueron las que esperábamos. Los alumnos no se habían percatado que la media era la solución del problema. Y cuando se les orientó sobre el uso de esta medida, la mayoría no pensó en descartar el valor atípico, excepto un alumno que preguntó si no había cierto engaño al escribir el valor 78'2, ya que parecía un valor extraño.

Durante el proceso de resolución se han explicado las circunstancias en que se debe o no considerar un dato como una observación atípica, destacándose que en el presente caso, el dato 78'2 podría resultar de un error en las mediciones efectuadas.

Actividad 8

Estamos interesados en poner el precio de ocho botellas de agua de tal forma que el precio medio sea de 0'45 euros. Indique el precio de cada botella.

Nuestro objetivo con este problema era ayudar a los alumnos a utilizar correctamente el algoritmo de cálculo de la media aritmética, llevarlos a invertir el algoritmo de cálculo de la media, para determinar la suma total, ya que el enunciado nos da la media y el total de datos.

Para la resolución del problema, ha sido fundamental la explicación del problema. Uno de los alumnos, preguntó si el precio no podría ser 0'45 para todas las botellas. Se contestó que si podría, ya que la variable era de tipo continuo (distribución media), pero se le propuso la situación de encontrarse con botellas de marcas diferentes, donde algunas podrían tener, incluso, más cantidad que otras, lo que obligaría a poner precios diferenciados.

Ante esta situación se produjo un silencio. El profesor investigador orientó a los alumnos, provocando una resolución conjunta. Partiendo del algoritmo de la media, se pidió a los alumnos para analizar los datos que eran conocidos, y se determinó la suma total. Entonces se pidió que cada alumno encontrase una distribución. Se ha hecho ver que existen varias soluciones diferentes para el problema.

La importancia de este tipo de problema es que potencia en el alumno la noción de reparto equitativo, ya que se pide encontrar una distribución que satisfaga las condiciones presentadas sin perder de vista el tipo de dato a utilizar de acuerdo con el tipo de variable.

El problema en cuestión ha sido adaptado de Mokros y Russel (1995), que lo denominan como problema de construcción. También, se encuadra en el rango de problemas que Bakker (2000) clasificó como problemas de estimación de la suma total, que contribuyen al conocimiento de los elementos fenomenológicos de la media. Este autor describe un problema relacionado, que fue resuelto en la antigua India, el cual consistía en estimar el número de hojas y frutas en dos ramas grandes de un árbol.

Para que los alumnos comprendieran mejor los problemas de esta naturaleza se presentó otro problema similar, con un contexto diferente.

Actividad 9

El número medio de goles marcado por un jugador de fútbol en 10 partidos es 1,3.

a) ¿Cuántos goles podría haber marcado en cada partido?

b) Si en el segundo partido marcó 2, en el tercero marcó 1 y en el sexto no marcó, ¿qué cantidades de goles podría haber marcado en cada uno de los otros partidos?

Los alumnos empezaron a reflexionar sobre el problema, pero el tiempo no ha permitido resolver el problema en la sesión, por lo que se dejó como tarea para casa. Se ha explicado detenidamente lo que se pretendía en el problema, a partir de algunas preguntas de orientación, tales como. ¿Qué conocemos como datos en el problema? ¿Qué es lo que se pretende? ¿Donde se debe partir? ¿Creen que el algoritmo de cálculo podría ser el punto de partida? Se pidió entonces a los alumnos que intentasen resolver el problema de forma independiente.

Antes de terminar la sesión, fueron destacados los aspectos fundamentales de la práctica, de forma resumida: la media como mejor estimación de una medida desconocida, la influencia de los valores atípicos en el cálculo de media y cómo determinar una distribución, cuando se conoce la media y el total de datos.

7.3.4. SESIÓN 4

Esta sesión se llevó a cabo el jueves 24 de mayo de 2007. Asistieron a la práctica todos los estudiantes que habían participado en la actividad anterior, más uno, que sólo estuvo presente el primer día.

Para esta sesión los objetivos planificados fueron:

- Estudiar la construcción de distribuciones de datos con medias conocidas (continuación de la sesión anterior)

- Profundizar en las propiedades de la media aritmética.

La sesión comienza con el análisis de la tarea que se había iniciado en la sesión anterior. Se trata precisamente de la actividad 9, que dice:

"El número medio de goles marcado por un jugador de fútbol en 10 partidos es 1,3.

a) ¿Cuántos goles podría haber marcado en cada partido?

b) ¿Si en el segundo partido marcó 2, en el tercero marcó 1 y en el sexto no marcó, ¿qué cantidades de goles podría haber marcado en cada uno de los otros partidos?"

Tres alumnos, de los ocho que presenciaron la clase manifestaron haber encontrado dificultades al resolver el problema, porque no lo entendían. Se pidió a uno de los alumnos que había resuelto el problema que lo hiciera en la pizarra.

Para resolver el problema el alumno determina en primer lugar la suma total, partiendo del algoritmo de cálculo de la media simple: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N}$; como la media es 1'3 y el total de goles marcados es 10, sustituyendo e invirtiendo el algoritmo encuentra la suma total: $\sum x_i$ =13. A partir de este valor, presenta una distribución.

El profesor preguntara si alguien había encontrado otra distribución diferente de la presentada por el alumno que estaba en la pizarra. Los demás alumno, que habían resuelto el problema, indicaron sus construcciones. Fue entonces cuado se vio que una alumna había utilizado valores decimales en su construcción. Esta ocasión constituyó motivo de debate sobre el tipo de dato a utilizar, ya que se trataba de una variable cuantitativa discreta. Se volvió sobre las ideas relativas a los tipos de variables estudiadas y se pidió a los alumnos que diesen ejemplos, sobre variables discretas y continuas, y también sobre variables cualitativas.

El apartado b) del problema fue resuelto con la ayuda del profesor. Había que completar la distribución. Los alumnos revelaron que no habían comprendido si para este apartado la media y el total debían ser los valores utilizados en el apartado a). Se esclaró este hecho pues el apartado b) también es parte del mismo problema.

Se ha destacado que, en cada caso, después de encontrar la distribución de datos, es importante comprobar si la misma cumple con las condiciones del enunciado. Se ha preguntado a los alumnos ¿Cómo debemos comprobar que nuestra distribución satisface las condiciones del problema? ¿Qué se debe hacer? ¿Y si la distribución es demasiado grande y con datos repetidos, qué es conveniente hacer para calcular la media? Efectivamente, en primer caso había que calcular la media, y si hay datos repetidos, tratándose de una distribución grande, es conveniente ponderar los datos para calcular la media.

Posteriormente, se pasó a otra actividad, que ayudaba a comprender algunas propiedades estudiadas.

Actividad 10

Los alumnos de una clase deciden tener una fiesta en la playa. Cada uno lleva paquetes de papas fritas como aperitivo durante la fiesta. David es el que más paquetes de papas lleva (3). Cuando llegó el momento de la fiesta, los alumnos decidieron repartir todos los paquetes de papas fritas de forma que todos tuvieran la misma cantidad. Cuando se repartieron cada chico recibió 4 paquetes. ¿Crees que esto es posible? ¿Por qué crees que esto pudo (o no pudo) haber pasado?

Se pidió a los alumnos leer el problema con atención. Se trata de un problema de reparto equitativo, adaptado de Strauss y Bichler (1988). Estos autores, indican que en cuanto a sus características, el problema muestra el aspecto estadístico de la media. Con él pretendíamos potenciar en los alumnos el conocimiento de la propiedad de que la media aritmética está comprendida entre los valores extremos, es decir, no se puede dar un valor de la media que se encuentre fuera del rango entre el máximo y el mínimo de los datos.

No observamos dificultades de realce. Después que se entregó la ficha, los alumnos aceptaron que no era posible, sin poderlo justificar con detalles, de forma inmediata. Pero tras algunos minutos de reflexión, las justificaciones de los alumnos mostraron haber asimilado correctamente esta propiedad, pues las justificaciones que presentaban venían en la dirección de que no era posible, puesto que el número mayor de paquetes de papas que trajo un alumno es 3, luego era imposible, que al repartir de forma equitativa, cada alumno se quedase con 4.

Se pasó a la actividad siguiente, que ayudaba a los alumnos, a diferenciar la media de la moda, y también mostrarles que la media no tiene porqué ser uno de los datos de la distribución.

Actividad 11

El sueldo medio de los empleados de una empresa es de 820€. Esta información, ¿permite asegurar que la mayoría de los empleados gana 820€? ¿Y que al menos uno gana ese salario?

Este es un problema de reparto equitativo donde se pone de manifiesto que la media puede tomar valores que no tienen necesariamente que haberse dado como dato.

El problema atiende en este caso el aspecto abstracto de esta medida, teniendo en cuenta la caracterización de Strauss y Bichler (1988).

Igual que en el problema anterior, el análisis de la primera parte del problema no suscitó dudas en los alumnos. Sin embargo, la segunda trajo algunas dificultades, en lo que se refiere a la interpretación de la expresión: "al menos uno". Después del debate, y utilizando el conjunto de datos que encontraron en el problema 9, donde los valores no podían ser decimales, mientras la media lo era, los alumnos concluyeron en la propiedad: la media no tiene porqué ser uno de los valores del conjunto de datos presentados.

A continuación, se entregó otra ficha a cada alumno, con la siguiente actividad:

Actividad 12

Durante el primer trimestre, Manuel obtuvo dos calificaciones en Matemáticas: 12 y 15; en el segundo, sacó un 9. ¿Cuál de los siguientes procedimientos es adecuado para calcular el promedio de las tres notas?

Procedimiento 1: Sumar 12 y 15; dividir la suma por 2; sumarle 9 al cociente; dividir esta suma por 2

Procedimiento 2: Sumar 12, 15 y 9, y dividir la suma por 3

¿En qué casos ambos procedimientos dan el mismo resultado?

Aquí, el objetivo es comprender que la media aritmética no es asociativa, una dificultad apuntada por Mevarech (1983), en un estudio con alumnos universitarios. La media aritmética no responde a la propiedad asociativa; no se puede realizar la media de dos en dos valores. En este caso, el procedimiento correcto es el segundo. Excepcionalmente, ambos procedimientos dan el mismo resultado cuando los valores que integran los datos son iguales.

Cuando preguntamos a los alumnos, cuál de los dos procedimientos era correcto, los alumnos contestaban recelosamente. Parecían indicar que no tenían mucha confianza en sus respuestas. Este hecho nos ha llevado a que les explicásemos con más detenimiento, sobre la noción de no asociatividad de la media, partiendo de casos particulares.

Para contestar a la pregunta, ¿En que casos ambos procedimientos dan el mismo resultado?, les hemos proporcionado tres datos iguales, y les pedimos que calculasen la media utilizando las dos vías.

Se concluyó entonces que ambos procedimientos dan el mismo resultado cuando los valores que componen los datos son iguales.

Tras eso, pedimos a los alumnos que se fijaron en lo siguiente: Supongamos que tenemos las notas dadas en el problema, 12, 15 y 9, cuya media encontrada fue 12 valores. Si sustraemos la media a cada valor encontramos, respectivamente 12 -12 = 0; 15 -12 = 3; y 9-12 = -3. Los valores encontrados, 0, 3 y -3 se llaman *desviaciones de los datos con respecto a la media*. ¿Qué pasa si sumamos estos valores? ¿Cuál debe ser el resultado? Los alumnos compraban el resultado: 0 + 3 + (-3) = 0. Entonces preguntamos: ¿Será esto siempre así?

Con esto, introducimos formalmente la propiedad de que *la suma de la desviación de los datos con respecto a la media es igual a cero*.

Para terminar la sesión se ha hecho el resumen de los contenidos abordados, a través de preguntas a los alumnos:

- Si conocemos la media y el total de datos, ¿que debemos hacer para determinar un conjunto de datos que satisfaga las permisas dadas?
- ¿Es posible que la media no esté comprendida entre el mayor y el menor dato?
- ¿La media tiene que ser necesariamente uno de los valores de los datos?
- ¿Puede ser una fracción?
- ¿Se debe tener en cuenta el cero en el cálculo de la media?
- ¿Qué son las desviaciones de los datos con respecto a la media? ¿Si los sumamos que valor encontramos?

Al terminar la clase, se dejan dos problemas como tarea para casa. El primero fue el siguiente:

Actividad 13

Hemos escogido 50 bolsas de pasta alimenticia en un supermercado. Todas ellas llevan impreso «Peso neto: 250 g» en la etiqueta. Después de pesarlas con precisión, hemos obtenido los siguientes resultados, expresado en gramos:

243 269 226 249 255 240 266 230 236 250 252 261 242 240 270 240 251 228 259 262 260 231 261 268 252 259 250 249 243 256 230 250 252 259 236 249 243 256 230 250 249 243 256 230 250 252 274 268 270 233

¿Cuál sería el peso estimado para una bolsa de pasta alimenticia de esta marca?

Con esta tarea, se pretendía consolidar la idea de media como mejor estimador de una cantidad desconocida y constituye un caso típico de estimación del valor real de una cierta magnitud, en presencia de errores de medida. En este caso, es la segunda actividad que se proporciona, para desarrollar esta noción. Se trata de una adaptación, de un problema mencionado en Cobo y Batanero (2004b), en un análisis sobre el significado de la media en los libros de texto de secundaria en España.

El procedimiento de resolución de esta actividad, proporciona un paralelismo con los métodos utilizados por algunos científicos en el pasado, según se explica en Bakker (2000), por ejemplo, para determinar la posición de un planeta, medir el diámetro de la luna, el peso de monedas de oro o plata, etc. Por eso, pensamos que era importante seguir trabando en aquella dirección, dado que, situaciones similares, podrían surgir en la actividad diaria.

El segundo problema fue el siguiente:

Actividad 14

Ana llevó a la clase 5 caramelos; Flor llevó 3; Laura 1. ¿Cómo se pueden repartir de manera que las tres chicas reciban la misma cantidad?

Si además se sabe que una amiga de ellas, Carla, estuvo presente pero no llevó ningún caramelo, ¿con cuántos caramelos se habrá quedado cada chica?

Aquí, pretendíamos que los alumnos consolidasen algunas ideas que habían sido discutidas en las sesiones previas: la noción de que la suma de las desviaciones de los

datos con respecto a la media es cero, la media como reparto justo, y que se debe tener en cuenta al cero en el cálculo de la media.

El reparto se tiene que hacer de tal forma que la suma de las desviaciones de los datos con respecto al valor medio sea cero. La búsqueda de la solución requiere que el alumno realice un equilibrio de los valores con respecto al valor medio, es decir, una redistribución equitativa. Además, se pone en evidencia la propiedad de que la media aritmética se ve influenciada si se añade un dato diferente de la media.

El problema se enmarca en las actividades de Strauss y Bichler (1988), respecto a la comprensión de los aspectos conceptuales, centrándose, particularmente, en el aspecto abstracto (hay que tener en cuenta el cero en el cálculo de la media) y en el aspecto estadístico (la media se ve influenciada si se añade un valor distinto de este valor; la suma de las desviaciones de los datos respecto a la media es cero).

7.3.5. SESIÓN 5

Esta sesión se realiza el miércoles 30 de mayo de 2007. En este día, dos de los alumnos, que aparecían con frecuencia, no se presentaron, lo que hizo que se trabajase sólo con 6 alumnos.

Para este día, nuestro plan preveía trabajar con interpretaciones de datos derivados de los gráficos, más concretamente.

- leer los datos en los gráficos
- extraer datos de los gráficos y presentarlos en forma de tablas.
- analizar las formas de los gráficos (simétricas y asimétricas) y estudiar las medidas de centralización.

La sesión empieza con la revisión de las cuestiones que se habían quedado pendientes de la sesión anterior. El procedimiento utilizado consistió en mandar alumnos a la pizarra, y discutir la solución presentada, observando eventuales fallos y proponiendo diferentes vías de solución.

Con respecto a la actividad de estimación del peso de paquete de pasta alimenticia, (**Actividad 13**) quedó claro que el peso debía determinarse utilizando el algoritmo de media aritmética. En este proceso, casi todos los alumnos utilizaron el algoritmo de media simple, mientras uno de ellos usó la media ponderada. Curiosamente, casi todos alumnos que habían utilizado el algoritmo de media simple

habían cometido errores de cálculo. No obstante, durante el análisis general del problema no nos centramos en los errores de cálculo.

La primera parte del segundo problema (**Actividad 14**) no supuso problema alguno. Casi todos los alumnos se habían percatado que para encontrar "la misma cantidad a recibir" había que determinar la media aritmética. Nuestra explicación consistió en ilustrar, mediante cálculos, que la suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media era cero, señalando que, como la media es 3, se cumple que (5-3) + (3-3) + (1-3) = 0, que es lo mismo decir que la cantidad que se ha cedido es igual a la cantidad que se ha recibido.

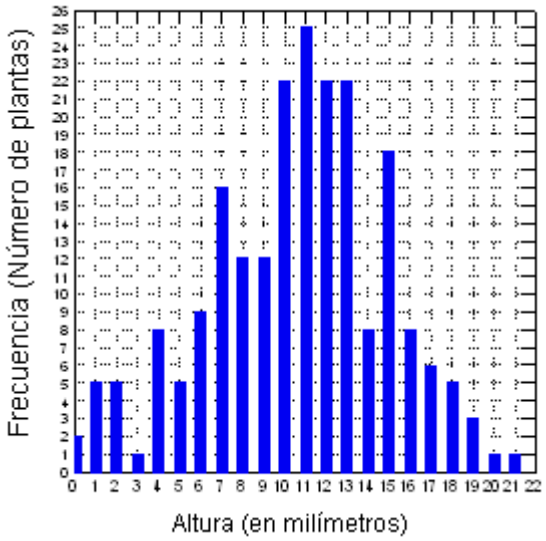
Ya en el segundo apartado, hubo alumnos que no comprendieron la idea de que había que tener en cuenta a la alumna que no trajo caramelos, para hacerse el reparto. Al explicar este apartado, exhortamos a que los alumnos se fijaran en el cambio observado en el total de datos, al considerar la amiga que no trajo caramelos. Se pidió a un alumno que hiciera la comprobación de los resultados, en cada caso, para que se convenciesen más fácilmente de la propiedad en cuestión.

Tras la revisión de la tarea, se pasó al primer problema sobre interpretación gráfica. Hicimos un breve comentario sobre la importancia que tenía este tipo de análisis, ya que muchas informaciones que aparecen en los periódicos, revistas, libros de texto, etc., se presentaban en forma gráfica. También se comentó sobre los diferentes tipos de gráficos que podrían encontrar en su vida cotidiana (gráfico de barras, gráfico de sectores, gráfico de líneas, etc.). Les indicamos, que en aquel curso iban también a estudiar los gráficos con más detalle.

Se pasó entonces a la primera actividad sobre gráficos.

Actividad 15

La gráfica representa el crecimiento de unas plantas después de siete días.



1. ¿Qué representa la barra ubicada en los 7 milímetros?

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta y por qué?

a) La altura promedio de las plantas es de aproximadamente 10 milímetros.

b) La altura promedio de las plantas es de aproximadamente 15 milímetros.

3. ¿Qué número es más fácil de hallar en la grafica: la media, la mediana o la moda?

El problema fue extraído de uno de los libros de texto de la colección "*matemáticas en contexto*", introduciéndole algunas modificaciones.

Con el punto 1, nuestro propósito era ayudar a los alumnos a extraer datos de una gráfica. Previamente a la resolución del mismo, llevamos a los alumnos a la construcción de la tabla de datos, en la que se podía ver los valores de la variable y las respectivas frecuencias. La tabla fue elaborada por los alumnos con la ayuda del profesor:

x_i(altura, en milímetros)	f_i(número de plantas)
0	2
1	5
2	5
3	1
4	8
5	5
6	9
7	16
8	12
9	12
10	22
11	25
…	…

De esta forma, fue fácil, para los alumnos, concluir que la barra situada en los 7 milímetros indicaba que 16 plantas crecieron 7mm en el periodo en análisis.

También se indicó que era posible presentar los datos en forma de lista, de la siguiente forma. 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2;… La desventaja era que tendríamos una lista muy larga de datos, atendiendo a la cantidad de valores.

Para contestar a la pregunta del punto 2, expliqué a los alumnos las nociones de "forma simétrica", de un grafico, "asimetría a la izquierda" y "asimetría a la derecha". De forma expositiva, se indicó que para los gráficos de forma simétrica la media se encuentra en el centro de la distribución, y que en este caso, coincide con la mediana. Y que en las distribuciones con forma asimétrica, la media se desplazaba para el lado de la cola larga. Tras estas indicaciones se creo un debate para ver cuál era la afirmación correcta en el punto 2 y por qué. El debate derivó a que los alumnos viesen que la respuesta correcta era la que decía que la altura media de las plantas era de aproximadamente 10 mm y no 15mm, pues, la gráfica tiene una forma

aproximadamente simétrica, y 10 mm es el valor que se encuentra aproximadamente en el centro de la distribución.

Como estamos hablando de valor promedio aproximado y no exacto, se pidió a los alumnos comprobar el valor exacto mediante cálculos.

A la pregunta del punto 3, ¿Cuál es el número más fácil de determinar en el gráfico?, se dirigió el debate en el sentido de que viesen que la media y la mediana no eran valores exactos, de acuerdo con el método utilizado. Pero sin embargo, era posible ver la barra con mayor altura, es decir la altura con mayor frecuencia. Luego, se concluyó que la moda era el valor más fácil de determinar en la gráfica.

Estas interpretaciones han resultado difíciles para los alumnos. Creemos que sin las orientaciones del profesor los alumnos difícilmente llegarían a contestar esta actividad.

A continuación, se presentó otra actividad relacionada, cuya finalidad era proporcionar nociones sobre cómo comparar distribuciones dadas gráficamente, además de consolidar los aspectos anteriores.

Actividad 16

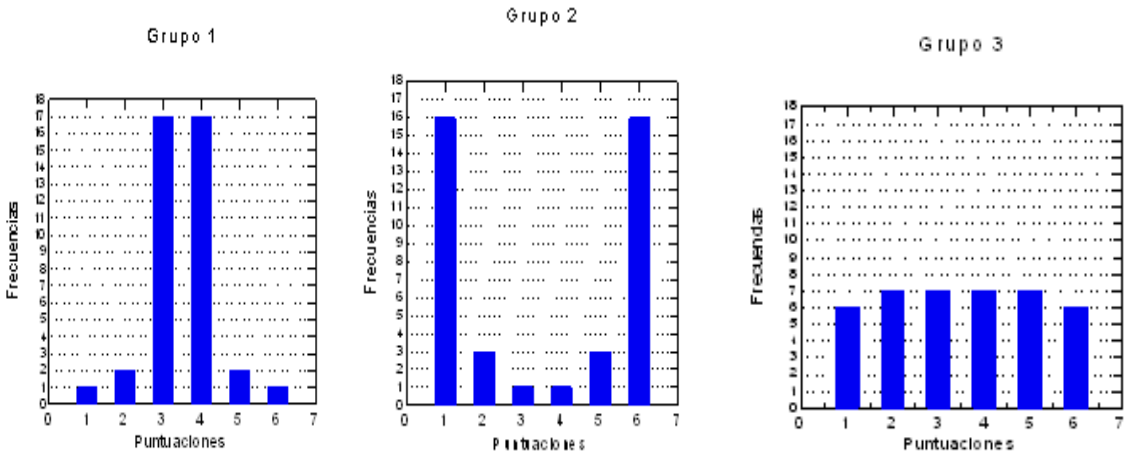
Los gráficos que se presentan a continuación muestran las puntuaciones obtenidas por tres grupos de estudiantes.

a) En cada caso construya una tabla de valores, que indique el número de alumnos que ha obtenido una puntuación dada.

b) La puntuación media del grupo 3 es 3'5. Compruebe que los otros dos grupos también tienen la misma puntuación media.

c) Indique la mediana y la moda en cada caso.

d) ¿Hay homogeneidad en los tres grupos? Fundamente su afirmación.



El problema fue adaptado de Batanero y Godino (2001b). De entre otros aspectos, ayuda fundamentalmente, a comprender que comparar distribuciones atendiendo sólo a una medida central puede resultar engañoso. Es importante, además, considerar la dispersión o variabilidad de los datos, que nos proporcionan una medida sobre el mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central.

En particular, se puede destacar la forma simétrica de las distribuciones que hace que la media sea igual a la mediana en cada gráfica, algo que no ocurre en las distribuciones asimétricas. De igual forma ayuda a comprender la noción de distribuciones multimodales.

La resolución de este problema requería de la comprensión del problema anterior. Por esta razón, fueron utilizadas preguntas de tipo heurísticas, con el fin de

encontrar las vías de solución, como por ejemplo: ¿Qué debemos hacer para construir las tablas que se piden? ¿Podríamos utilizar el procedimiento anterior? Existen dos conjuntos de valores, en cada caso: las puntuaciones y el número de alumnos que obtienen las puntuaciones. ¿Cuáles de ellos son variables y cuáles son frecuencias?

Entonces, se construyeron las tablas. Observamos que algunos alumnos se habían equivocado en la identificación de los correspondientes valores. Cambiaban los valores de las variables por los valores de las frecuencias. Se llamó la atención a los alumnos sobre esta situación.

Para la comprobación del valor medio, algunos lo hicieron completando las tablas ya construidas, es decir, añadiéndole una columna con los productos entre los valores de las variables y los valores de las frecuencias. Determinaron la suma total y el total de participantes (que era igual en todos los grupos), y vieron que la media era la misma en los tres grupos.

El análisis de los apartados c) y d) se dejo para la sesión siguiente, porque el tiempo ya se había agotado. Se pidió a los alumnos que intentasen resolver los mismos apartados en casa, para una discusión posterior.

7.3.6. SESIÓN 6

Esta sesión se desarrolla un día después de la práctica anterior, es decir, el jueves 31 de mayo de 2007. Ese día, se presentaron 8 alumnos, incluyendo los que habían faltado a la sesión 5ª.

Los objetivos de la sesión para aquel día, eran concluir con las actividades de la sesión previa y repasar de forma sumaria los aspectos estudiados anteriormente, ya que era la última práctica a desarrollar, según el programa establecido de acuerdo con la disponibilidad de los alumnos.

El profesor investigador, empieza con una revisión general sobre lo que se había estudiado en la clase anterior. Eso iba a permitir que los alumnos que no habían presenciado la clase pasada se familiarizasen con los contenidos abordados. Se repasó la resolución de la actividad 15 y los dos primeros apartados de la actividad 16, incidiendo fundamentalmente en la lectura de datos en los gráficos, extraer los mismos para presentarlos en forma de tabla, analizar las formas de los gráficos (simétricas y asimétricas) y estudiar las medidas de centralización en distribuciones con forma simétrica.

Sólo después de esto, se analizaron las tareas que habían quedado para resolver en casa, es decir los dos siguientes apartados de la actividad 16:

c) *Indique la mediana y la moda en cada caso.*

d) ¿Hay homogeneidad en los tres grupos? Fundamente su afirmación.

No hubo dificultades en indicar la moda en cada caso. Parece que el repaso reforzó las nociones introducidas al respecto. Los propios alumnos, sin la ayuda del profesor, contestaron que en cada grupo había más de una moda.

Sin embargo, lo mismo no ocurrió con la mediana. Los alumnos presentaron dificultades, lo que muestra que no se ha asimilado la relación entre la mediana y la media en gráficos que presentaban formas simétricas. De cara a la situación, se les hizo el conjunto de preguntas siguientes: ¿Qué se puede decir con respecto a las formas que tienen los tres gráficos? ¿Son simétricas o asimétricas? ¿Siendo simétricas, que relación se puede establecer entre la media y la mediana? Las respuestas a las preguntas anteriores ayudaron a determinar el valor de la mediana, que en este caso, coincidía con la media, que ya se había calculado.

En el apartado d) en donde se preguntaba *¿Hay homogeneidad en los tres grupos? Fundamente su afirmación,* la dificultad se relacionaba con la comprensión del significado del termino "*homogeneidad*". Llevamos a los propios alumnos a que reflexionasen sobre la expresión, puesto que se trataba de un término de uso corriente, y utilizado ocasionalmente en algunas asignaturas. La reflexión no produjo lo que esperábamos. Lo único que se dijo fue que la expresión se derivaba de la palabra "*homogéneo*". Pero en cuanto a significados las dificultades persistían. Nuestro análisis, sugirió que quizá deberíamos pedirles que consultaran previamente el diccionario. No teniendo otra alternativa tuvimos que proporcionarles un conjunto de palabras que podrían asociarse con el término homogéneo, en el sentido de la pregunta: compacto, equilibrado, integrado, concentrado, unido. Luego les explicamos que la idea es saber en qué grupo hay menor dispersión de los datos, es decir, mayor agrupamiento de datos en torno a la media.

No obstante las explicaciones anteriores, fue difícil, para los alumnos, identificar que el grupo más homogéneo era el 1 y que el menos homogéneo era el grupo 2. Basamos nuestra explicación en la cantidad de datos que se encontraban alrededor de la

media en el grupo 1, comparándolos con los demás grupos. En este caso bastaba fijarse en las barras de los gráficos.

Extendemos nuestra explicación al respecto, indicándoles que comparar conjuntos de datos considerando sólo la medida de tendencia central, podría resultar engañoso. De modo que es importante, además, considerar la dispersión o variabilidad de los datos en el conjunto, lo que nos proporciona una visión más amplia sobre el mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central. Les indicamos que la variabilidad podría ser determinada analíticamente, utilizando determinadas fórmulas, aunque en aquel momento nos limitaríamos sólo a un análisis gráfico.

A continuación, se hizo un repaso general sobre los principales contenidos que se habían estudiado:

- El concepto de media aritmética.
- El algoritmo de cálculo de media simple.
- El algoritmo de media ponderada.
- La media como estimación de un valor desconocido en presencia de errores de medidas.
- La noción de valor atípico y su influencia en el cálculo de la media.
- Algunas características de la media:
    - Aspectos estadísticos
        - la media está comprendida entre los valores extremos;
        - El valor medio queda influenciado por los valores extremos;
        - la suma de las desviaciones de los datos respecto a la media es cero;
    - Aspectos abstracto
        - la media puede ser una fracción;
        - es necesario tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media;

- la media no tiene porque ser uno de los valores de los datos.

- Aspecto representativo
  - la media es un valor representativo de los datos;

Aquí termina la última sesión y con ello el experimento de enseñanza. Algunas actividades quedaron fuera, dado que tuvimos que limitar nuestro trabajo a la disponibilidad de los alumnos.

7.4. OTRAS TAREAS QUE INTEGRABAN EL PROGRAMA DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Como explicamos anteriormente, experimento de enseñanza se programó en función de la disponibilidad de los alumnos. Este grupo de alumnos cursaba estudios bajo los nuevos planes curriculares, introducidos en el ámbito de la reforma de la enseñanza en el país y era el único curso que estaba disponible en aquella ocasión, para la actividad que pretendíamos desarrollar. En los días siguientes deberían realizar exámenes programados según el calendario establecido. Por esta razón, no se podía extender la actividad por más tiempo, para no interferir en los compromisos escolares.

Como consecuencia, algunas tareas quedaron fuera. Las mismas se habían diseñado para seguir profundizando en la enseñanza de las medidas de tendencia central. Sin embargo, igual que en los casos anteriores, el profesor puede elegirlas para el trabajo personal en casa, para la ejercitación en clase o incluso como ejemplo en clase.

A continuación presentamos las referidas actividades y su correspondiente descripción.

Actividad: El carácter predictivo de la media.

La altura media de los alumnos de un centro escolar es 1'40. Si se extrae una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1'38, 1'42, 1'60, 1'40, ¿cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?

Se trata de un problema mencionado en Bataneo y Godino (2001b). La actividad permite a los alumnos comprender una de las muchas utilidades de la media aritmética.

Se pretende identificar el valor más probable de obtener al tomar un elemento al azar de una distribución. En situaciones como esta, se toma la media aritmética con carácter predictivo, es decir la mejor estimación de la altura del quinto estudiante será 1'40, que es la altura media de los alumnos del centro escolar (la media poblacional). Un problema similar ha sido utilizado por Pollatsek, Lima y Well (1981) que han observado que algunos estudiantes pensaban de forma errónea que el dato desconocido debería encontrarse calculando el valor que podía hacer que las cinco alturas diesen media 1'40, la media poblacional, es decir, un valor *X*, tal que (1'38 + 1'42 + 1'60 + 1'40 + *X*)/5 = 1'40. La actividad pone en evidencia el aspecto abstracto de este concepto.

Actividad: Interpretación de gráficas.

En las gráficas están representados los datos sobre el crecimiento de plantas en siete días.

1. Empareja las afirmaciones siguientes con una gráfica:

a) Casi todos los datos están centrados en torno a los 10mm.

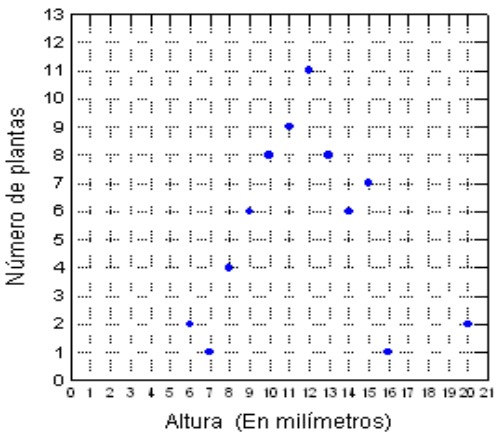
b) Los datos están agrupados en torno a los 12mm, excepto dos plantas que miden 20mm.

c) Los datos están diseminados entre los 4mm y los 18mm, con casi igual número de plantas de cada altura.

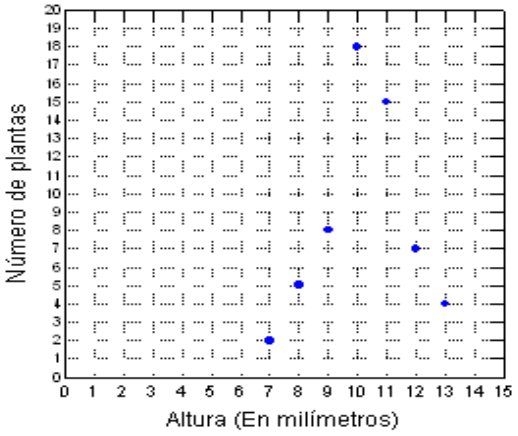
2. ¿Cuál es la altura media aproximada de las plantas en cada caso?

a) Compruebe mediante cálculo si la media que has indicado anteriormente corresponde con el resultado exacto.

GRÁFICA A



GRÁFICA B



Se trata de una adaptación de un problema presentado en la colección "matemáticas en contexto". Este problema permite al alumno profundizar en el análisis de los gráficos, aparte de leer los datos. Por ejemplo, tener presente que todos los datos están situados en torno a los 12 mm, excepto dos plantas (gráfica 1) o que casi todos los datos están centrados en torno a los 10mm (gráfica 2), ayuda a profundizar en las interpretaciones de los gráficos y a comprender la noción de observaciones atípicas, aspectos muy importante a la hora de tomar decisiones al construir resúmenes de informaciones.

En cuanto al punto 2 del mismo problema, en su apartado a), para calcular la media se deben extraer los datos de la gráfica y ello exige que se sepan leer conveniente los datos en la gráfica.

Actividad: Comparación de datos.

La siguiente tabla muestra cuántos segundos tardan diez atletas en recorrer una pista, antes y después de un período de entrenamiento:

Antes	*183*	*187*	*172*	*179*	*169*	*170*	*161*	*165*	*184*	*179*
Después	*172*	*180*	*172*	*174*	*168*	*173*	*166*	*166*	*190*	*169*

¿Es efectivo el entrenamiento?

Se trata de un problema en que estamos interesados en obtener un valor representativo de un conjunto de datos cuya distribución es aproximadamente simétrica. Esto nos permitiría realizar la comparación de los dos conjuntos de datos.

Actividad: En el cálculo de la mediana no intervienen todos los datos.

Medimos la estatura de tres personas, de las cuales la primera mide 160 cm y la segunda 165 cm.

a) Si la mediana es 165 cm, ¿cuánto mide la tercera persona?

b) Si la media aritmética es 165 cm, ¿cuánto mide la tercera persona?

El problema se comenta en Batanero y Godino (2001b). Permite identificar algunas limitaciones que presenta la mediana (igual que la moda) como medidas de tendencia central, ya que al calcularla no usamos todos los valores observados de la variable. En este caso, nadie podría dar un valor exacto como respuesta para la mediana.

Cualquier valor mayor que 165 podría ser solución. Sin embargo, eso no pasa con la media aritmética, donde en este caso, la respuesta tiene que ser exactamente 170 cm.

Actividad: La mediana es un estadístico resistente.

Los siguientes datos representan las edades de los alumnos de una clase.

15, 16, 12, 11, 11, 11, 13, 15, 11, 13, 15, 15, 16, 14, 11, 14, 14, 11, 14, 12, 12

a) *¿Calcule la media, la moda y la mediana?*

b) *Si en los datos anteriores remplazamos tres valores 11 por tres 12¿Cuál de las medidas de posición central calculadas previamente, permanece constante?*

El problema permite al alumnado observar que la mediana es un estadístico resistente, es decir, ante pequeñas fluctuaciones de la muestra no cambia de valor. Se pueden cambiar uno o varios datos sin que por ello cambie el valor de la mediana, basta con no modificar las dos partes del mismo tamaño en que ésta divide a la distribución. En el caso, la mediana, que es el valor 13, permanece inalterable con los cambios realizados. Sin embargo esto no pasa con la media, pues, esta se ve influenciada al modificar los datos. Aquí, también la moda sufrió alteración aunque eso no siempre sucede. Por ejemplo, si hubiésemos remplazado dos 15 por dos 16.

Para finalizar, queremos destacar que existen un sin número de tareas de relevancia extraordinaria para la enseñanza de la media aritmética y conceptos relacionados. Las que hemos presentado aquí son solamente una muestra más en el conjunto de todas las tareas, para dar cumplimiento a nuestro objetivo.

7.5. ANÁLISIS DEL EFECTO DE LA ENSEÑANZA SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LOS CONTENIDOS IMPARTIDOS

En este apartado analizaremos hasta que punto la práctica de enseñanza desarrollada habría o no producido efecto en el desarrollo de capacidades lógico-deductivas, en el aprendizaje de la media aritmética y en los conceptos relacionados.

El análisis, reflejaría la cuarta fase de la metodología de ingeniería didáctica de Artigue (1992), denominada fase de análisis a posteriori y evaluación. Pero en nuestro caso, el análisis se basará en los datos obtenidos al administrar un cuestionario de

evaluación de conocimientos sobre la media aritmética y en entrevistas semiestructuradas realizadas con algunos alumnos que contestaron al cuestionario.

La confrontación general, podría basarse en el análisis de los resultados obtenidos con estos alumnos tras la conclusión del experimento de enseñanza y sus concepciones previas, observadas en las clases cuando se enfrentaban a una tarea determinada.

El cuestionario de evaluación fue administrado cinco días después de haber terminado el experimento de enseñanza, a 8 alumnos que asistieron regularmente a las sesiones, que fueron codificados con las etiquetas A1M, A2M, A3M, A4F, A5F, A6M, A7F y A8F. El cuestionario fue el mismo que se utilizó con los alumnos que participaron en el primer estudio de la fase general de investigación. Nuestros alumnos no tuvieron contacto con el instrumento de evaluación, a pesar de haberse realizado también un estudio en aquella escuela, con un grupo de estudiantes en la primera fase.

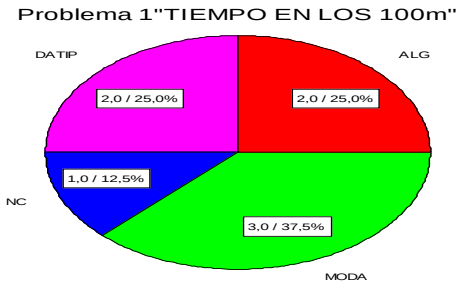
7.5.1. RESULTADOS

Vamos a referirnos a los datos encontrados respecto a la comprensión de los diferentes elementos de significado sobre la media aritmética. Analizaremos las frecuencias y porcentajes en las respuestas de los alumnos al cuestionario, así como algunos elementos encontrados durante las entrevistas, que podrían elucidar algunos datos. A continuación presentamos los resultados.

Problema 1 "Tiempo en los 100m": En este problema los elementos de significados de la media se relacionan con su uso como el mejor estimador de una medida desconocida en presencia de errores de medición y la influencia de los valores atípicos. También se evalúa la confusión de la media con otras medidas, como la moda o la mediana.

Los contenidos relacionados con el uso de la media como la mejor estimación de una media desconocida en presencia de errores de medición, y la influencia de los valores, fueron abordados en las sesiones 3 y 4, aunque con mayor incidencia en la 3, cuando se trató la actividad 7. Los aspectos relaciones con la conceptualización de la media se vieron a lo largo de casi todas las sesiones.

Los datos encontrados en este problema se muestran en la siguiente grafica:



Observamos que 4 alumnos (50%) reconocen que la media es el mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medición (categorías ALG y DATIP). De estos, 2 sugieren usar el valor resultante de sumar todos los valores y dividir la suma por el total (ALG) y otros 2 excluyen primeramente el valor 10 que consideran como atípico, para después buscar la media con el resto de valores (DATIP). Vemos también que 3 (37'7%) alumnos usan la moda en lugar de la media (categoría MODA) y un alumno no contesta (NC).

Vemos que resultó difícil, para la mayoría de los alumnos, llegar a la conclusión de que la media es el mejor estimador para determinar el tiempo recorrido por el estudiante en los 100 metros y que a la vez era necesario excluir uno de los valores que resultaba extraño en el conjunto de datos para estimar el referido valor. Sin embargo, los dos alumnos que resolvieron correctamente el problema (categoría DATIP) mostraron que comprendían adecuadamente la influencia que tienen los valores atípicos en ese cálculo, tal como se muestra en los siguientes fragmentos de las entrevistas:

Extracto de entrevista con el alumno A3M (ver traducción al español en la página 545)

312. *Entrevistador: Na pergunta 1 "Tempo percorrido nos 100 m", quando se perguntou pelo tempo que o professor devia considerar como estimação do tempo real percorrido pelo estudante e por que se devia utilizar este tempo tu puseste 14.98, não é?*

313. *Aluno: Sim.*

314. *Entrevistador: O que é que significa este valor?*

315. *Aluno: É a media. Eu fiz o somatório de todos os valores, menos o 10, porque comparado com os outros valores, estava abaixo dos outros valores. Se todos começaram a registar o tempo ao mesmo tempo, como é que um regista 10 segundos enquanto que os outros, os seus tempos estão assim muito próximos de 15 segundos. Para mim é um valor atípico. O professor nos tinha explicado que um valor atípico é um valor que está muito acima da média o muito abaixo. Então…*

316. *Entrevistador: Acima ou abaixo da media? Ou que se afasta consideravelmente dos outros dados?*

317. Aluno: Sim, alias dos outros dados. Como quase todos têm entre 14 e 15, este valor 10 está muito abaixo. Acho que deve ser um erro.

Extracto de entrevista con el alumno A1M: (ver traducción al español en la página 528)

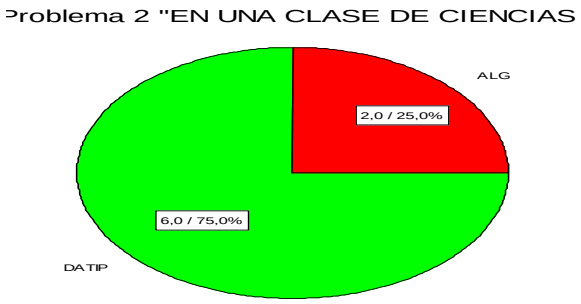
73. Entrevistador: ... o que é que fizeste para determinar o tempo que o professor devia considerar como estimação do tempo real percorrido pelo estudante?

74. Aluno: Primeiro vi se existiam números atípicos. Analisei as observações e notei que o número 10 parecia não estar muito enquadrado com os outros tempos. Os outros tempos estavam entre 14.90 e 15. E o 10 pareceu-me que era um número atípico, então desclassifiquei. Então coloquei os outros números numa tabela, porque era o método mais fácil, escrevi os tempos e as frequências deles. A seguir, multipliquei as frequências pelas observações e como eu sabia que eram 10 alunos, dividi por 9 e encontrei um resultado aproximado a 14.99. Acho que foi isso.

Estos dos alumnos muestran haber adquirido una visión consecuente sobre el uso de la media aritmética. Han sido flexibles en reconocer la existencia de un dato que no cuadraba en el conjunto de datos, dados en función del contexto presentado. Sus razonamientos en esta tarea los asociamos con el nivel de comprensión relacional.

Problema 2: En una clase de ciencias: Este problema era similar al anterior. La diferencia se halla en el hecho de que este es un problema de respuesta de elección múltiple, mientras que el anterior es un problema de respuesta abierta. Los aspectos evaluados son los mismos.

Los resultados se indican en el siguiente gráfico:



De acuerdo con los datos, todos los alumnos parecen conocer que la media es el mejor estimador para determinar el valor más preciso, según el enunciado del problema. No obstante, dos de estos alumnos no se dieron cuenta de la existencia del valor atípico en la secuencia de datos.

Cuatro alumnos (A2M, A4F, A6M y A8F) que no habían identificado la observación atípica en el problema anterior, aquí sí han podido reconocerlo. De las respuestas de dos alumnos entrevistados constatamos diferentes motivos relacionados con sus actuaciones. Según A4F, aquí se ha acordado de un problema similar resuelto en clases, como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista:

(Ver traducción al español en la página 539)

219. *Entrevistador: ...Das várias opções dadas, tu escolheste a alínea d) "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". Por que não seleccionaste a opção "usar o número mais repetido, que é o 6.2", tal como procedeste na primeira pergunta?*
220. *Aluno: Porque nós fizemos um problema na turma, e recordo que havia um número que não tinha nada a haver com os outros e o professor disse que parecia um valor estranho. Acho que era sobre metros, o valor era 60 e tal e os outros estavam próximo de 6 ou 7, não sei… e o professor descartou. Eu aqui fiz o mesmo.*
221. *Entrevistador: Então por isso pensaste…*
222. *Aluno: Pensei em descartar este valor.*
223. *Entrevistador: E por que não fizeste o mesmo no problema anterior? Se os valores estão dados em segundos, não achas que o 10 está um pouco fora dos outros valores?*
224. *Aluno: [**Não diz nada**].*
225. *Entrevistador: Era possível proceder desta forma?*
226. *Aluno: [**Continua calada**].*
227. *Entrevistador: ... Disseste que escolheste esta opção porque te lembraste de um problema que se resolveu nas aulas, em que se procedia desta forma.*
228. *Aluno: Ehhh, mas eu aqui não escolhi a moda porque me lembrei daquele problema. Foi a minha luz professor [**Risos**].*

Sin embargo A8F dice no haber visto el dato atípico en el problema anterior porque estaba despistada, pese a ser conciente del efecto que produce este tipo de valores en el cálculo de la media.

(Ver traducción al español en la página 543)

292. *Entrevistador: ... Das várias opções apresentadas, tu seleccionaste a alínea d) que diz "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". Por que pensaste em excluir este valor?*
293. *Aluno: Porque me parece um valor que está muito distante dos outros valores. É um valor atípico. Da forma como nós aprendemos com o professor, neste caso deve excluir-se este valor e achamos a média dos outros valores.*

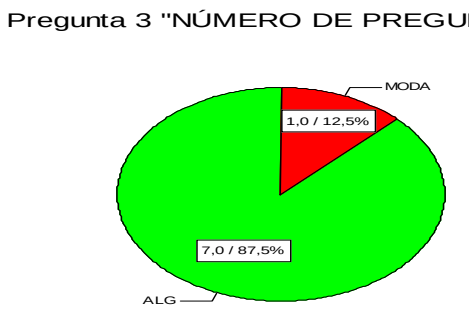
294. *Entrevistador: Foi mais fácil ver este detalhe aqui no problema 2 em relação ao problema 1'*
295. *Aluno: Não é isso. Acho que foi distracção minha na pergunta 1, estva muito apressada e queria terminar o teste o mais cedo possível.*

En resumen, inferimos que A4F no se había acordado del procedimiento a usar en el primer problema debido a la naturaleza del mismo, es decir, es un problema de respuesta abierta en donde no se dan opciones, que se pueden convertir en pistas y que en ocasiones ayudan a evocar una información con la cuál nos relacionamos en un momento anterior. Sin embargo en el problema 2 fue más fácil recordar debido a que, en las mismas opciones, se describían las diferentes posibilidades de resolución del problema, lo que le ha conectado con las nociones transmitidas en las sesiones anteriores. En cuanto a las explicaciones de A8F, creemos que puede ser cierto que realmente se haya despistado en el primer problema, porque sus respuestas muestran haber aprendido qué son los valores atípicos y cómo afectan al valor a estimar. No efectuó el análisis de las observaciones cuando resolvió el problema 1 y, en consecuencia, sumó todos los datos y dividió por el total.

De todos modos, los resultados indican que la dificultad con los valores atípicos aún se resiste en algunos alumnos, pese a que ven la media como el mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medición.

***Problema 3 "Número de preguntas"*:** Con este problema se pretende examinar los conocimientos de los alumnos sobre el carácter representativo de la media; reconocer en qué contexto se debe o no considerar un valor como atípico; apreciar el efecto del cero en el cálculo de la media y ver si confunden la media con la moda. Evidentemente, para resumir los datos, deben sumar todos los valores y dividir la suma por el total de observaciones.

Los aspectos evaluados fueron todos abordados a lo largo de las sesiones. Los datos relativos a este problema se muestran en la gráfica que se indica a continuación:



Los datos muestran que los alumnos se han apropiado adecuadamente de los conocimientos evaluados en ese problema. Sólo un alumno no ha podido contestar correctamente el problema, confundiendo la media con la moda (Categoría MODA). Los otros siete (87'5%) han interpretado correctamente el problema, eligiendo la opción "sumar los 8 números y dividir la suma por 8" (ALG), que está de acuerdo con el contexto presentado.

A través de entrevistas profundizamos más en las respuestas de los alumnos. El objetivo era saber si habían contestado con o sin criterio. Veamos cómo nos han contestado algunos de ellos, en relación a esta tarea.

Entrevistas al alumno A1M: (ver traducción al español en la página 529)

83. *Entrevistador: ... A professora quer resumir esses dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. A questão era saber qual dos métodos se devia recomendar. Tu propuseste a opção da alínea b) "somar os 8 números e dividir por 8", não é isso?*
84. *Aluno: Sim, tendo em conta que é o número de perguntas que a professora quer saber, acho que não se deve descartar o valor 22. Se a Ana fez este número de perguntas, acho que é porque necessitava. Então, numa aula, eu não posso descartar o 22. Por isso achei melhor a alínea de somar os 8 números e dividir a soma pelo número de alunos.*
85. *Entrevistador: OK. E por que não seleccionaste a alínea que diz "Descartar o valor 0, somar os outros 7 números e dividir por 7"?*
86. *Aluno: Sim, porque o zero também é uma observação. O João também fez parte da aula. Sendo assim, não vamos dividir por 7 senão por 8. Acho que assim não dá, porque a professora quer saber de todos os alunos. Por isso não descartei o 0.*

Entrevista al alumno A8F: (ver traducción al español en la página 544)

298. *Entrevistador: ... ... para resumir os dados, ela calcula o número típico de perguntas feitas neste. Dos vários métodos por recomendar, tu indicaste a alínea b) "somar os 8 números e dividir a soma por 8". Por que este método e não outro?*

299. *Aluno: Foi para poder achar a média. Eu não podia descartar, por exemplo, o 22, porque realmente a Ana fez 22 perguntas. Não é como nos caso de medir… não podia descartar o 22 e então optei por esta alínea. Também não podia usar o número mais repetido...*

300. *Entrevistador: Número mais repetido, o que é que seria neste caso?*

301. *Aluno: [**Fica a pensar**].*

302. *Entrevistador: Também se conhece como número comum o mais frequente. Que medida seria? É a media, a mediana ou a moda?*

303. *Aluno: É a moda.*

304. *Entrevistador: Por que não pensaste em descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7?*

305. *Aluno: Não podia descartar o 0 pelo número de alunos. Éhhh, porque devemos ter em conta que houve um aluno que não fez nenhuma pergunta.*

Como ilustran las respuestas, estos alumnos tenían claro el contexto expresado en el problema, diferenciándolo de las situaciones en que se hacen mediciones. Reconocen que la media es la medida a usar y explican con criterios el por qué no se debe usar otras opciones.

Sin embargo no todos los que eligieron la opción correcta dieron explicaciones razonables sobre sus decisiones con relación a la opción marcada, considerando incluso la posibilidad de usar otras opciones. Tal es el caso de A4F, por ejemplo, quién no supo fundamentar por qué no eligió la opción que sugería descartar el valor atípico, como se muestra en el siguiente extracto:

(Ver traducción al español en la página 540)

229. *Entrevistador: … Das diferentes opções apresentadas tu seleccionaste a que diz "somar os 8 números e dividir a soma por 8".*

230. *Aluno: Sim, foi esta.*

231. *Entrevistador: Por que não pensaste em excluir o valor 22, tal como procedeste no caso anterior?*

232. *Aluno: Ehhh, [**risos**], no sé professor.*

233. *Entrevistador: Podíamos descartar o aluno que fez 22 perguntas?*

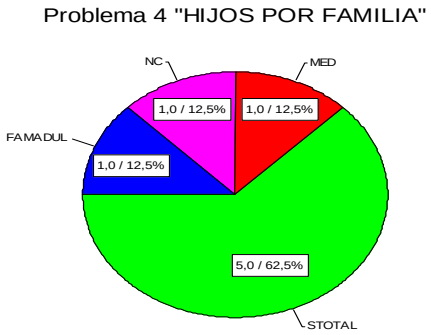
234. *Aluno: Sim, podíamos. Este aluno fez 22 perguntas durante uma aula, professor?*

***Problema 4 "Hijos por familia"*:** En este problema se pretende evaluar el uso adecuado del algoritmo de la media; la confusión de los conceptos de media, mediana y moda, además de los aspectos relacionados con la posición de estas medidas en distribuciones asimétricas.

Se pide al alumno elegir la opción con la que concordaba, en función de los datos del enunciado. El problema dice que se quiere determinar el número medio de hijos por familia. Como datos se da el número total de hijos y la media. De esto se infiere que la afirmación correcta es la correspondiente al apartado en que se indica la suma total, que resulta del producto de la media por el total de datos.

El problema requiere del uso adecuado del algoritmo de cálculo de la media. Este es uno de los aspectos que se pretende evaluar, aparte de los que se relacionan con la comprensión de los conceptos de mediana y moda.

En la gráfica siguiente se presentan los resultados obtenidos.



De los ocho alumnos evaluados, cinco han indicado la opción correcta, que se refiere a la suma total.. Estos fueron, exactamente, los alumnos A1M, A3M, A4F, A5F y A8F, cuyas respuestas las hemos categorizamos por STOTAL. Del resto, observamos uno que confunde la media con la mediana (MED), otro que también confunde las expresiones familia y adulto (FAMADUL) y por último, uno que no contesta (NC).

De las entrevistas, confirmamos que de los alumnos que eligieron la opción correcta, algunos (A1M, A3M, A8F) lo han hecho con criterio.

Por ejemplo A3M expresa haber multiplicado la media por el total de hijos:

(Ver traducción al español en la página 525)

23. *Entrevistador: ...Podes dizer-me por que escolheste a opção c) (Há um total de 110 filhos na cidade)?*
24. *Aluno: [**Lê o problema silenciosamente e responde**:] Multipliquei o resultado que foi..., bem, havia 50 famílias, não é?*
25. *Entrevistador: Exacto.*
26. *Aluno: E viram que havia 2.2 filhos por família como média. Então multipliquei este valor por 50, para obter o número de filhos que existe na*

cidade. Porque dividindo o número de filhos da cidade pelas 50 famílias dá 2.2. Isso indica que há 110 filhos na cidade.

En el caso de A1M, señala incluso que las demás opciones no se corresponden con los datos del enunciado.

(Ver traducción al español en la página 530)

87. *Entrevistador: ...Aqui também se dão várias opções e tu escolheste a c) que "Há um total de 110 filhos na cidade" O que é que te fez pensar nesta opção?*
88. *Aluno: Fui por esta alínea porque o cálculo da média pelo número de famílias ia dar isso, ia dar 110 filhos. Também fui por esta alínea porque as outras respostas não convinham, porque a média não significa que a metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos, porque está entre os extremos, é representativo, mas não significa obrigatoriamente que se encontra entre 2. Acho que as outras opções que estavam aí são suposições. Então me convinha mais... fiz um cálculo, me deu com mais precisão e então foi a alínea que eu escolhi. Uma alínea com mais precisão.*

El alumno A8F también razonó adecuadamente. Afirma explícitamente que partió del algoritmo de cálculo de la media y lo que determinó fue la suma. Reconoce a qué se refería cada uno de los datos expresados en el problema.

(Ver traducción al español en la página 545)

306. *Entrevistador: ... indicaste a opção que diz "Há um total de 110 filhos na cidade". Podes dizer-me por que chegaste a esta conclusão?*
307. *Aluno: Eu usei a fórmula: a soma é igual ao número de observações vezes a média e me deu este valor 110 filhos.*
308. *Entrevistador: Quais são os dados que eram conhecidos?*
309. *Aluno: Se conhecia a média e o número de observações.*

Sin embargo la actuación de A4F no fue convincente. Su razonamiento muestra haber utilizado los datos sin saber dónde se debía partir ni a dónde se quería llegar. Al parecer encontró el resultado por casualidad, según podemos concluir de sus respuestas.

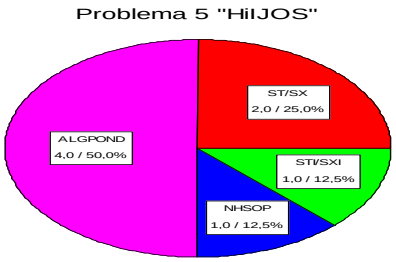
(Ver traducción al español en la página 541)

245. *Entrevistador: ...indicaste a opção "Há um total de 110 filhos na cidade". Por que chegaste à esta conclusão?*
246. *Aluno: Eu fiz: 110 a dividir por 50 e deu-me este valor. Então achei que... e é uma cidade, não é só uma casa. Numa cidade habita muita gente. Eu captei assim professor.*
247. *Entrevistador: Só por isso?*

248. Aluno: Sim professor, eu fui… não digo que fui inteligente. Eu logo que vi o 110, peguei no 50 também para ver se o resultado… e deu-me isso. E então fui pondo a minha "cachola" a funcionar.

***Problema 5 "Hijos"*:** Este problema pretende examinar los diferentes elementos relacionados con el cálculo de la media ponderada. En la sesión 2 del experimento de enseñanza, cuando trabajamos con las actividades 5 y 6, habíamos constatado algunas dificultadas en los alumnos respecto de la diferenciación entre valores de variable y valores de frecuencia. Nuestra intención era saber si los alumnos habían superado esta dificultad después de la práctica realizada.

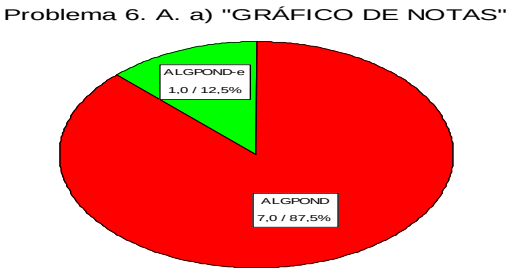
Los resultados obtenidos se indican en la siguiente gráfica.



Observamos que la mitad de los alumnos (A1M, A3M, A5F, y A8F) usa de forma correcta el algoritmo para la media ponderada (ALGPOND). Los demás no parecen haber asimilado las explicaciones dadas en las sesiones, a pesar de que se insistió mucho en la diferenciación entre datos relativos a variables y datos relativos a frecuencias. Notamos dos alumnos (A2M y A4F) que no distinguen correctamente los valores de la frecuencia de los valores de la variable. En el caso de A4F, explicó durante las entrevistas que cambiando los valores de la variable por los valores de la frecuencia no alteraba el proceso de resolución, ya que la suma total era la misma. Es verdad que la suma total es la misma. Lo que no ve es que, debido al cambio realizado, el resultado sufre alteraciones puesto que en vez de dividirse por la suma de las frecuencias se divide por la suma de los valores de la variable (categoría (ST/SX). Otro alumno (A7A) también utiliza el mismo procedimiento, pero además considera los datos irrelevantes que se dan en el problema (STI/SXI). El tercer alumno que tuvo dificultades con este problema (A6M) da un valor que no se corresponde con lo pedido, sin mostrar ninguna operación (NHSOPER).

***Problema 6. A. a) "Grafico de Notas"*:** Con este problema se pretende comprobar si los alumnos son capaces de extraer datos de una gráfica, y observar sus estrategias al calcular la media según los datos dado por la gráfica. Estos aspectos habían sido abordados en las sesiones 5 y 6, e incluso se trabajó con un número mayor de datos con relación a los presentados en el problema.

En la gráfica siguiente se presentan los resultados obtenidos:

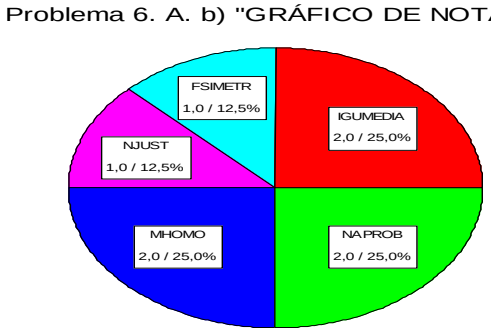


Se observa que la mayoría ha extraído los datos de la gráfica sin dificultades y comprueba la media utilizando el algoritmo de media ponderada (ALGPOND). Sólo un alumno (A7F) cometió errores de cálculo, a pesar de plantear correctamente la expresión de la media (ALGPOND-e).

Observamos que esta actividad fue una de las más fáciles para los alumnos, y que no hubo dificultades ni de lectura de datos, ni de uso del algoritmo de cálculo de la media.

Problema 6. A. b) "Gráfica de Notas": En este problema, el objetivo es analizar los argumentos que sustentan las respuestas de los alumnos, observando hasta que punto son consistentes. En las sesiones impartidas, se había dado ideas a los alumnos sobre cómo comparar grupos de medias iguales, destacando que en tales circunstancias es necesario atender a la concentración de datos en torno a la media.

Veamos los datos encontrados, según se indica en el siguiente gráfico:



Los resultados muestran que sólo dos alumnos (A1M y A5F) presentan argumentos coherentes con lo que se pide, tomando como criterio de comparación la mayor homogeneidad de datos en el grupo 2 (MHOMO). De los demás, encontramos dos alumnos que basan sus criterios en la existencia de más alumnos aprobados (NAPROB), otros dos alumnos que creen que no hay diferencias entre los grupos porque la media es la misma en los dos grupos (IGUMEDIA), un alumno que indica que el grupo que tiene forma simétrica es mejor (FSIMETR) y otro alumno que aporta ninguna justificación.

Los argumentos que consideramos correcto, fueron expresados en los términos siguientes:

- "*O grupo que me parece melhor é o grupo 2, onde há maior homogeneidade nas notas dos alunos*". Traduciendo literalmente al castellano, tendríamos: "El grupo que me parece mejor es el grupo 2, donde hay mayor homogeneidad en las notas de los alumnos".
- "*O grupo que me parece melhor é o grupo 2 por ter mais homogeneidade (uma forma simétrica)*". Eso lo traducimos al castellano de la siguiente forma: "El grupo que me parece mejor es el grupo 2 por tener mayor homogeneidad (una forma simétrica)".

El primer argumento fue presentado por el alumno A1M y el segundo por A5F. Los mismos, claramente se basaron en la mayor concentración de los datos en torno a la media, conforme se había explicado en las sesiones. Mediante las entrevistas comprobamos que A1M tenía este conocimiento consolidado, tal como se ilustra en el siguiente fragmento de la entrevista:

(Ver traducción al español en la página 530)

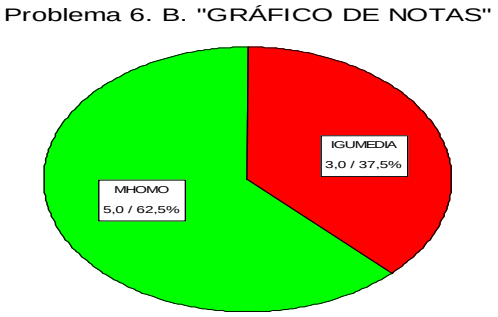
90. *Aluno: Sim, quando digo que há maior homogeneidade quero dizer que as notas estão mais unidas, quer dizer, há mais notas… ou seja, as notas dos alunos estão mais concentradas, quer dizer, os alunos tiveram todos quase as mesmas notas. Então, este grupo é melhor porque no mesmo há mais homogeneidade. Já o grupo 1, apesar de terem as melhores notas, também há muitos alunos… ou seja não há concentração de notas, ou seja, o grupo não está homogéneo, as notas não estão muito… ehhh*
91. *Entrevistador: Muito dispersas?*
92. *Aluno: Isso. No grupo 1 estão muito dispersas.*

No hemos podido profundizar en la respuesta del otro alumno. Sin embargo con relación a los demás alumnos percibimos a través de los resultados que este conocimiento no les ha quedado claro.

Un hecho llamativo es que el argumento dado por el alumno A4F, explicando que el grupo 2 es mejor que el otro por tener forma simétrica, constituyó una novedad en el conjunto general de categorías que habíamos establecido. En todos los estudios realizados no habíamos encontrado una única justificación que se relacionara con este criterio. La referida respuesta nos pareció incompleta para considerarla como de tipo relacional, ya que aunque la simetría indique que la media y la mediana se encuentran en el centro de la distribución, eso no revela por sí mismo que haya mayor agrupación de datos alrededor de la media.

***Problema 6. B. "Gráfico de notas"*:** Este problema está relacionado con el apartado anterior. Sus objetivos están relacionados con los planteados en el ítem 6. A. b). Sin embargo aquí queríamos también contrastar las respuestas de los alumnos, ver si estaban convencidos de los criterios dados en el ítem anterior. En este problema se pide marcar la opción que consideran correcta de entre las varias que se dan.

Los resultados encontrados se muestran en el siguiente gráfico:



Los alumnos sólo consideraron dos opciones. Cinco de los ocho alumnos indicaron la opción correcta que dice "*a pesar de que las medias sean iguales, el grupo 2 es más homogéneo*" (MHOMO), mientras que los otros tres alumnos sugirieron que no hay diferencias entre los dos grupos porque la media es la misma (IGUMEDIA). Las opciones correctas fueron indicadas por los alumnos A1M, A5F, A6M, A7F y A8F. Los dos alumnos que habían contestado correctamente en el ítem anterior (A1M y A5F) y los dos que se basaron en la igualdad de medias (A2M y A3M) aquí mantuvieron las

mismas respuestas. Sin embargo los que habían optado por los otros criterios, prefirieron aquí la opción que indica mayor homogeneidad en el grupo 2.

Uno de los alumnos entrevistado confesó no entender cómo comparar dos muestras de media igual, aunque haya elegido la opción correcta en este apartado, conforme se revela en el extracto de entrevista que presentamos a continuación:

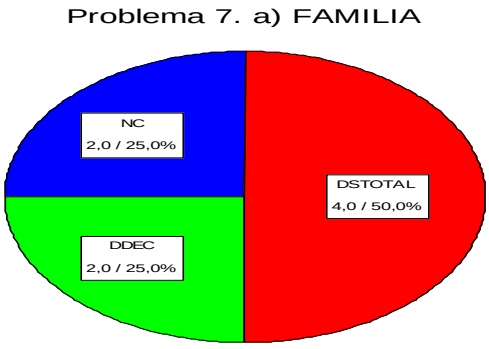
Extracto de entrevista a A8F: (ver traducción al español en la página 545)

310. *Entrevistador: ...Depois de comprovares que a nota média do grupo 2 também é igual a 11, na alínea seguinte, para responder qual é o grupo que te parecia melhor e por quê, respondeste que " O grupo que me parece melhor é o grupo 2, porque a maioria teve notas positivas e só 2 alunos tiveram negativas"*
311. *Aluno: Sim.*
312. *Entrevistador: OK. Mas na pergunta seguinte, das várias opções apresentadas, tu seleccionaste a que diz "Apesar de que as média são iguais nos dois grupos, o grupo 2 é mais homogéneo". Achas que as duas respostas estão relacionadas?*
313. *Aluno: Acho que não. Por acaso também fiquei em dúvida, porque naquele dia, quando falamos de gráficos, eu não entendi bem o que era homogeneidade. Acho que respondi aleatoriamente, não sabia se era a resposta certa ou não. Estava em dúvida.*
314. *Entrevistador: OK. Isso significa então que a tua real justificação é a que diz que o grupo 2 é melhor porque nele há mais alunos com notas positivas?*
315. *Aluno: Sim.*
316. *Entrevistador: OK. Mas quando assinalaste a opção que diz "o grupo 2 é mais homogéneo", o que foi que entendeste pela expressão "mais homogéneo"?*
317. *Aluno: Mais homogéneo? Não sei, não sei explicar. Como eu disse, também não entendi bem essa coisa de homogeneidade.*
318. *Entrevistador: Mas tu seleccionaste esta resposta!*
319. *Aluno: Eu nem sei por quê. Acho que não devia escolher esta resposta **[Risos]**.*

El alumno dice explícitamente que no entendió el significado de la expresión "más homogéneo". Confirma que eligió esta opción al azar y que no sabia si era o no la respuesta correcta. Esta constatación nos hace pensar que otros alumnos que no habían indicado la respuesta en el ítem anterior probablemente también eligieron la respuesta correcta en este problema sin conocer a fondo el significado relacionado con la referida opción.

***Problema 7. a) Familia*:** En este primer apartado del problema "Familia", se pide encontrar la composición de 10 familias, conocida la media. Las tareas de este tipo se abordaron en las sesiones 3 y 4, concretamente en las actividades 8 y 9. En esta ocasión habíamos observado un alumno que daba una distribución con datos no enteros, donde la variable es de tipo discreto. Esa actuación fue debatida en la sesión, pidiéndose incluso a los alumnos que indicasen ejemplos que reflejasen diferentes tipos de variables (cuantitativas discretas, cuantitativas continuas y cualitativas).

Veamos los resultados encontrados en este apartado del problema:



Según los datos, la mitad de los alumnos (A1M, A3M, A5F y A8F) indicó la distribución requerida, invirtiendo el algoritmo de cálculo de la media para determinar el total y atribuyendo valores acorde a las exigencias del problema (DSTOTAL). Se puede ver aún que dos alumnos (A2M y A7F) no contestan (NC) y otros dos (A4F y A6M) plantean distribuciones con valores decimales (DDEC).

Con respecto a estos últimos, verificamos que los mismos no habían invertido el algoritmo de cálculo para encontrar la suma total, pese a que la suma de los datos de las distribuciones que dieron era igual a la media.

A pesar de haberles exhortado en las sesiones sobre los diferentes aspectos a considerar en tales circunstancias, vemos cómo algunos alumnos no vencieron sus dificultades en este tipo de problema.

Al profundizar en las respuestas dadas por los alumnos, A4F manifestó no haber analizado debidamente la naturaleza del tipo de dato usado antes de contestar el problema, y que sólo se dio cuenta de su error al acabar el mismo, como podemos apreciar en el siguientes extracto de su entrevista.

(Ver traducción al español en la página 542)

263. *Entrevistador: ...Na composição que apresentaste puseste: 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.5, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1.*

264. *Aluno. [**Risos**]. Eu acho que isso está errado.*

265. *Entrevistador: Por que dizes isso?*

266. *Aluno. O professor disse nas aulas que nenhum filho é metade. 0.5, 0.1 filhos? Não existe. Não pode ser professor.*

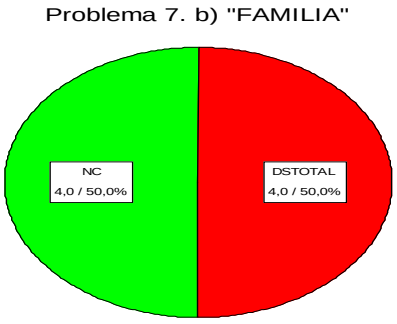
267. *Entrevistador. E por que respondeste assim?*

268. *Aluno. Eu estava desesperada professor [**Risos**]. Eu pus, porque pensei num exercício de atribuir valores. Mas depois pensei que estava errado. Nenhuma família vai ter 0.5 ou 0.6 filhos. Não, nada.*

De los dos alumnos que no contestaron, A7F nos comentó que no había comprendido el problema. Tiene conciencia de que el contenido presente en el problema se abordó en las sesiones, pero que durante la prueba no supo qué hacer. Esto muestra que éste y otros que se presentaron en las mismas condiciones, no asimilaron con propiedad todos los elementos debatidos durante las sesiones.

***Problema 7. b) Familia*:** En este apartado se pide completar una distribución de datos, cuya media era la misma a dada en el apartado 7.a). Se conoce, además, la composición de dos familias.

Los resultados para este apartado se muestran a continuación:



Observamos que los cuatro alumnos que habían contestado correctamente el apartado anterior (A1M, A3M, A5F y A8F) fueron los únicos que contestaron el problema y lo hicieron de forma acertada utilizando la misma vía (DSTOTAL). La otra mitad dejó el problema en blanco (NC).

En cuanto a las razones para no contestar, el alumno A4F dijo:

(Ver traducción al español en la página 542)

269. *Entrevistador: ...E por que não respondeste a alínea b) deste problema…*

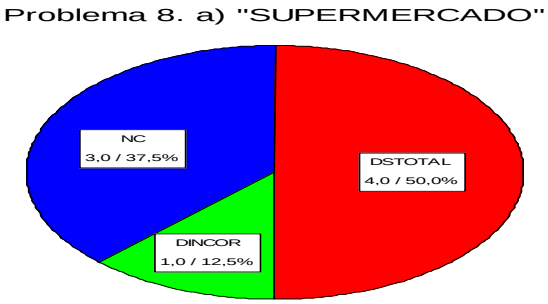
*270. Aluno: Não consegui. Não fui capaz [**Risos**]. Não sabia o que fazer.*

Pensamos que todos los que dejaron en blanco la pregunta no comprendieron las ideas transmitidas en las sesiones sobre cómo actuar frente a situaciones en las que se da la media y se pide construir o completar un conjunto de datos.

***Problema 8. "Supermercado"*:** Los objetivos de este problema son similares a los descritos en el problema 7. La diferencia, reside en el contexto, puesto que aquí, la variable es de tipo cuantitativa continua. En el primer apartado el alumno debe encontrar una distribución, partiendo de dos premisas: total de datos y media. Ya en el segundo apartado, el alumno debe completar la distribución, considerado tres datos conocidos y las mismas informaciones del apartado a).

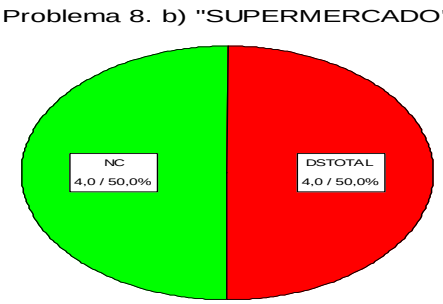
Los conocimientos relacionados con este problema también habían sido tratados en las sesiones 3 y 4.

Los resultados encontrados en el primer apartado son los indicados en la gráfica siguiente:



Los datos indican que cuatro alumnos resolvieron correctamente el problema (DSTOTAL), tres alumnos no contestaron (NC) y un alumno que presentó una distribución que no cumple los requisitos del enunciado (DINCOR). Los alumnos que encontraron la distribución correcta, determinando previamente la suma total, fueron los mismos que habían resuelto también correctamente los dos apartados del problema 7, o sea, los alumnos A1M, A3M, A5F y A8F.

Esto parece no ser una casualidad, pues, estos mismos alumnos son los únicos en presentar la distribución deseada en el segundo apartado de este problema.



Los referidos cuatro alumnos, utilizaron la misma estrategia en los cuatro apartados. Partieron del algoritmo de cálculo de la media, invirtieron el algoritmo y determinaron la suma total. Con la suma total encontrada, indicaron un conjunto de valores que satisfacía las exigencias del enunciado.

El uso de este razonamiento requiere conocer adecuadamente el algoritmo de cálculo de la media, la idea de media como reparto equitativo, además de comprender la noción de distribución como propiedad de un colectivo (Cobo y Batanero, 2004a).

Los cuatro alumnos en cuestión, mostraron haber asimilado realmente los contenidos asociados a estos problemas. De las respuestas de algunos entrevistados, constatamos que estaban seguros y eran conscientes de lo que hacían. Las explicaciones respecto a los procesos de resolución presentados, tienen una coherencia innegable, cuyos razonamientos se caracterizan en el nivel de comprensión relacional. Esta conclusión se ilustra por las respuestas presentadas por A1M, cuando le entrevistamos sobre su actuación.

(Ver traducción al español en la página 531)

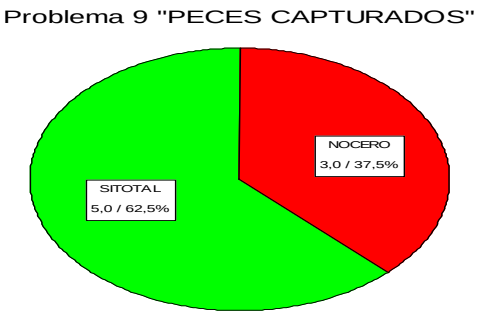
105. *Entrevistador: OK. Analisemos agora o que fizeste no problema 8 "Num supermercado". O procedimento que utilizaste aqui tem haver com o que utilizaste na pergunta anterior?*
106. *Aluno: Sim. Multipliquei a media por 8 marcas, para obter uma base e com esta base fazer a distribuição. Neste caso foi 12, depois de fazer a distribuição, a soma dá 12 e dividindo por 8 dá a media 1.50.*
107. *Entrevistador: E aqui se pode usar valores decimais?*
108. *Aluno: Sim, porque esta média, esta variável, é uma variável contínua, não é uma variável discreta. Então é preço, nós podemos dar valores decimais.*
109. *Entrevistador: No caso da alínea b) onde já davam três preços recomendados, como é que raciocinaste para determinar o preço das restantes marcas?*
110. *Aluno: Primeiro eu determinei o resultado da soma dos preços recomendados. Como já sabia que a base era 12, descontei deste valor o valor da soma dos*

preços recomendados. Depois distribui o valor que restou para as restantes marcas que não tinham preços.

***Problema 9 "Peces capturados"*:** Recordemos que aquí el objetivo es evaluar si el alumno tiene presente la noción de que hay que tener en cuenta el cero en el cálculo de la media. Para argumentar el problema es imprescindible el dominio de la propiedad de que la media aritmética se ve afectada si se añade un dato diferente de la media.

Durante la enseñanza realizada con los alumnos se analizó un problema similar, más concretamente, la actividad 14. Dicha actividad se dejó como trabajo para casa en la sesión 4 y su análisis se realizó en la sesión 5. En aquel momento, al resolverlo, algunos alumnos manifestaron dificultades de interpretación. No se dieron cuenta del efecto del cero. Incluso, tuvimos que ilustrar con ejemplos para que se convenciesen de la propiedad, destacando la diferencia en los totales de datos, al considerar el cero y al no hacerlo.

Veamos los resultados observados cuando se pasó el cuestionario.



Los datos de la gráfica indican que cinco alumnos resolvieron correctamente el problema, justificando que el número medio de peces capturado variaba al considerar al alumno que no pescó ningún ejemplar, pues, aunque la suma total permaneciese constante, el total de datos, el valor por el cuál se debe dividir, pasa de 6 a 7 (categoría SITOTAL). Este tipo de respuesta reflejaba que han podido integrar los diferentes elementos del significado de la media que se discutieron en las sesiones. Las respuestas correctas fueron presentadas por los alumnos codificados con A1M, A2M, A3M, A5F y A8F.

Los tres alumnos restantes contestaron que la media no variaba, porque el último alumno no pescó ningún ejemplar (NOCERO), un razonamiento que se corresponde con el nivel de comprensión multiestructural.

De las entrevistas realizadas con el propósito de conocer hasta qué punto los alumnos eran conscientes de sus argumentos, confirmamos a través de sus palabras, que la enseñanza relativa al dominio de esta tarea había proporcionado en algunos alumnos, un sistema abstracto de conocimientos, que les ha permitido integrar distintos aspectos. Por ejemplo, A3M señala que la media varía porque al considerar al alumno que no capturó ningún pez, ya serían 7 alumnos y no 6.

(Ver traducción al español en la página 527)

64. *Entrevistador: … Podes explicar-me o que fizeste? Recorda que se pretendia saber se o valor médio de peixes capturados por cada aluno variava, ao considera-se o último aluno que não capturou nenhum peixe.*
65. *Aluno: Sim, neste caso como havia mais um aluno nós tínhamos que lhe considerar.*
66. *Entrevistador: Mas ele não capturou nenhum peixe?*
67. *Aluno: Sim, não capturou mas nós queremos saber o número médio de peixes capturados, incluindo também este aluno: Por isso já são 7. É mais um aluno.*
68. *Entrevistador: Então o que é que muda agora?*
69. *Aluno: Agora devemos dividir por 7 e não por 6.*

Las respuestas de A8F fueron semejantes a las del alumno anterior. También defiende sus argumentos considerando el total de participantes, al considerar al alumno que no capturó ningún ejemplar.

(Ver traducción al español en la página 547)

336. *Entrevistador: Olha o que tu respondeste: "Ao considerar-se o último aluno, o valor médio varia. A média será 2.5 em vês de 3, porque somamos o número de peixes e dividimos por 7". Quantas observações haviam antes?*
337. *Aluno: 6.*
338. *Entrevistador: E agora?*
339. *Aluno: 7.*
340. *Entrevistador: Mas o último aluno não pescou nenhum exemplar?*
341. *Aluno: Sim, não pescou nenhum peixe, mas são… éhhh, são 7 pessoas e queremos achar a média dos 7. Embora não pescou nada, temos que ter em conta, porque ele também esteve lá.*

Contrariamente a las ideas expuestas anteriormente, los argumentos de los alumnos A7F y A4F, dos de los tres alumnos que no pudieron percibir la influencia del cero en el cálculo de la media, muestran que estos no entienden las nociones discutidas al respecto durante la enseñanza realizada. Por ejemplo, A7F defiende con firmeza su

justificación, afirmando que si el alumno no pescó ningún ejemplar entonces no debe contar en el total.

(Ver traducción al español en la página 538)

196. *Entrevistador: … respondeste que "o valor médio não varia ao considerar-se este último aluno que não pescou nenhum exemplar, porque ele não pecou nada e isso não ia afectar em nada". É isso?*
197. *Aluno: Ahá [**dizendo sim**]*
198. *Entrevistador: O que é que te fez pensar que a média não varia?*
199. *Aluno: Então se ele não deu nada, é zero, não é?*
200. *Entrevistador: É por isso?*
201. *Aluno: Sim. Olha, aqui estão os valores de cada um. Mas este último não tem nada.*

En el caso de A4F, que no había completado su justificación cuando contestó el cuestionario, afirmó que no consideró al alumno que no pescó ningún ejemplar porque para él cero es un elemento neutro. Y él mismo cuando intentamos hacerle ver la diferencia en el total de observaciones al considerar éste último alumno, pareció haberse dado cuenta del cambio, pues prefirió no decir nada.

(Ver traducción al español en la página 542)

271. *Entrevistador: … Se comenta que mais tarde se descobriu que um outro aluno tinha participado na actividade, embora não pescou nenhum exemplar. A questão é saber se o número médio de peixes capturados por aluno varia ou não, ao considerar-se este último aluno e por quê? Tu respondeste: "Não varia, porque o número zero é um número".*
272. *Aluno: Sim, aí já não consegui falar por quê. Zero é um número… ele é neutro. Nunca vai diminuir nem aumentar. Acho que não varia, mesmo que utilizasse o zero. Ia dar a mesma média. Se não utilizasse acho que…*
273. *Entrevistador: Mas veja. Antes eram 6 alunos. Ao se ter em conta este último aluno o total de alunos já não é o mesmo, não achas?*
274. *Aluno: Sim, seriam 7.*
275. *Entrevistador: Pois bem, seriam 7. E isso não te faz pensar que o resultado altera?*
276. *Aluno: [**Não diz nada, só murmura**].*

De las respuestas de estos dos alumnos, inferimos que sus ideas tienen que ver con los conocimientos adquiridos en situaciones anteriores, en dónde el cero asumía el papel de elemento neutro de la adicción. Este conocimiento está tan enraizado, que la enseñanza desarrollada no ha podido contrarrestar su efecto en el caso de la media. No

han podido distinguir la situación, ya que el referido conocimiento se manifiesta como un obstáculo cognitivo.

En general, los resultados sobre el desarrollo del experimento de enseñanza revelan que los contenidos sobre la media aritmética son difíciles para los alumnos, sobre todo mismo cuando se trabaja con situaciones no rutinarias.

En la tabla que se indica a continuación se muestra el número de ítems correctos e incorrectos contestados por cada alumno, cuyas codificaciones se presentan con los números 1, para los correctos y 0 para los incorrectos. En total fueron 13 ítems evaluados.

	ÍT1	ÍT2	ÍT3	ÍT4	ÍT5	ÍT6. A.a)	ÍT6. A.b)	ÍT 6. B.	ÍT7. a)	ÍT7. b)	ÍT8. a)	ÍT8. b)	ÍT 9	**TOT**.
A1M	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
A2M	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	4
A3M	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	11
A4F	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	5
A5F	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
A6M	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	3
A7F	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
A8F	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	11
Total	2	6	7	5	4	7	3	5	4	4	4	4	5	
Índ. Dific.	0,25	0,75	0,87	0,62	0,5	0,87	0,37	0,62	0,5	0,5	0,5	0,5	0,62	

De los datos de la tabla vemos que sólo un alumno (A1M) ha contestado correctamente los 13 ítems propuestos. Se destacan también tres alumnos (A3M, A5F y A8F) que contestan 11 ítems correctamente.

Por otro lado, los resultados indican que los ítems 1 y 6.A. b) se muestran como los que han sido más difíciles para los alumnos, de acuerdo con los índice de dificultad encontrados (0’25 y 0’375, respectivamente). El primero es un problema de respuesta abierta, que se refiere a la estimación de un valor desconocido en presencia de errores de medición, donde para calcular la media es importante analizar la existencia de observaciones anómalas. El segundo también es un problema de respuesta abierta, en el que los alumnos deben presentar argumentos con criterio, al comparar dos muestras dadas gráficamente.

Según nuestro parecer, y teniendo en cuenta lo expuesto por diferentes autores (Herscovics, 1989; Sierpinska, 1990; Socas, 1997, 2007; entre otros), las dificultades de los alumnos podrían tener diferentes orígenes. Los alumnos vienen con experiencias individuales diferentes, que, en algunos casos, se manifiestan como un obstáculo para la asimilación de las nuevas nociones, a pesar de que se proporciona una enseñanza activa,

basada en el diálogo y la discusión. Hay que considerar, también, las diferencias de sus conocimientos previos, de sus capacidades y habilidades para el aprendizaje, de sus actitudes y creencias, entre otras. Creemos que tales diferencias habrán influenciado significativamente en el aprendizaje de los alumnos, y es, probablemente, lo que justifica que alumnos que recibieron una enseñanza en igualdad de circunstancias presenten niveles diferentes de apropiación de conocimientos.

En resumen, el análisis global sobre qué efecto produjo la enseñanza desarrollada en el aprendizaje de los contenidos programados, nos revela dos escenarios diferentes. Por un lado están los alumnos que muestran haber desarrollado un nivel de abstracción bastante aceptable, dado que en la mayoría de las situaciones han podido enlazar los distintos aspectos requeridos en las tareas, presentando capacidades de análisis, interpretación, y argumentación acorde a las competencias exigibles. Y por otro lado, situamos aquellos alumnos que no parecen haber progresado en los significados que se pretendían, de manera que comprendiesen los principios esenciales requeridos en las tareas desarrolladas.

Lo anterior, ilustra el grado de dificultad que presentan estos contenidos, a pesar de su aparente carácter elemental.

7.6. CONCLUSIONES SOBRE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Nuestra propuesta de enseñanza constituye una guía didáctica de instrucción, reflejando un conjunto de tareas contextualizadas que relacionan los diferentes componentes de significado de la media aritmética. Su diseño se sostiene en la teoría de Artigue (1992) sobre el uso de ingeniería didáctica como metodología de investigación, contemplando las cuatro fases que esta autora señala: análisis preliminar; diseño y análisis a priori de las situaciones; experimentación; y análisis a posteriori y evaluación.

La fase de análisis preliminar comienza con la revisión de varios trabajos publicados sobre la comprensión del concepto de media aritmética por los alumnos de los diferentes niveles de enseñanza. Los resultados de nuestra fase exploratoria también constituyen una referencia para esta fase. El análisis contempló además una revisión de varios materiales escolares: planes curriculares, libreta del alumnado, apuntes fotocopiados. En resumen, el análisis confirma que los contenidos a estudio se imparten

en la enseñanza secundaria, sin embargo, identifica ciertas carencias, ya que varios componentes de significado de la media aritmética no son abordados.

En la fase de diseño y análisis a priori de las situaciones, nos centramos en conformar un conjunto de actividades que integran diversos aspectos de la media. En cuanto a los métodos, se recurrió a aquellos que favorecieran en el alumnado la participación activa y consciente en la elaboración del contenido. Aunque se orientó al alumnado en el uso de ciertas estrategias de resolución de problema (Polya, 1965), al mismo tiempo se les avisó de que las estrategias no son reglas y procedimientos mecánicos, sino que ante un problema es necesario monitorizar, interpretar y analizar la vía adecuada de solución.

La fase de experimentación consistió en el desarrollo de la práctica de enseñaza llevada a cabo con un grupo de alumnos que no habían recibido enseñanza sobre el tema a estudio. La condición que se consideró para participar en el experimento era vivir cerca de la institución y la disposición favorable a participar en la actividad. En total, se realizaron seis sesiones, con una duración aproximada de una hora cada una.

A través de la descripción de las sesiones se presenta la propuesta de enseñanza de los contenidos tratados. En cada caso, se proporciona un conjunto de situaciones que se traducen en indicaciones de carácter metodológico, acerca de cómo se podrían introducir los diferentes aspectos (concepto, fórmula de cálculo, propiedades), saber dónde los alumnos podrían presentar más dificultades, y cuál sería la naturaleza de tales dificultades.

Se ha utilizado diferentes tipos de actividades, destacándose entre otras, las siguientes: aquellas que ayudan a percibir el concepto de media como un valor típico o representativo de un conjunto de valores; las que permiten interpretar la media aritmética como centro de gravedad o punto de equilibrio de una balanza; las que muestran el uso de la media como el mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medida; las que muestran la necesidad de ponderar los datos y que ayudan al alumnado a diferenciar los datos de la variable de los datos de la frecuencia; las que requieren la construcción de una distribución o parte de ella, manifestando la necesidad de invertir el algoritmo de cálculo para la media y la noción de reparto equitativo; las que ayudan a diferenciar la media de la moda y de la mediana; actividades que permiten explorar algunas propiedades de la media; actividades para determinar las posiciones relativas de las medidas de centralización en una gráfica, y

otras que ayudan a comprender que no siempre se debe comparar distribuciones de datos atendiendo solamente a la media aritmética.

Pensamos que un planteamiento de la enseñanza-aprendizaje desde esta perspectiva y relacionado, en el sentido descrito, para el uso de diferentes tipos de problemas, puede favorecer una mejor comprensión del contenido estadístico en general. Desarrolla habilidades cognitivas con significado, tanto de carácter operacional como conceptual, estimula aspectos del conocimiento metacognitivo de estas habilidades, haciendo al alumnado más consciente de su propio proceso de aprendizaje y mejorando sus actuaciones en otros contextos.

En cuanto al tratamiento metodológico para introducir el concepto de media aritmética, no se parte directamente del estudio del algoritmo de cálculo, sino de la formación de nociones intuitivas sobre este concepto, tratando con ideas, tales como reparto equitativo, punto de equilibrio en una balanza, valor típico, y valor representativo. La fórmula de cálculo se introduce como un instrumento que facilita el cálculo del valor correspondiente. La principal dificultad en este tratamiento consistió en la interpretación del signo sumatorio.

El concepto de media ponderada se introduce mediante un análisis inductivo, que demuestra el por qué de la necesidad de ponderar y luego se generaliza el procedimiento.

Las propiedades de la media se estudian a partir de situaciones concretas, es decir, deduciéndolas a partir del análisis de los resultados de problema resueltos. Cabe destacar que no fueron estudiadas todas las propiedades, sino básicamente las que fueron abordadas en el estudio de Strauss y Bichler (1988), por su importancia en la comprensión del concepto.

Aunque no se han podido tratar todas las actividades que configuran el programa establecido para nuestro experimento de enseñanza, dado que no se pudo alargar tal fase, por la indisponibilidad de tiempo por parte de los participantes, pensamos que nuestro proyecto de enseñanza-aprendizaje ha ayudando a formar nociones interpretativas sistematizadas, un sistema abstracto de conocimientos que permite integrar diferentes aspectos del dominio de una tarea, y comprender el significado requerido. Las competencias adquiridas por algunos de estos alumnos han sido ejemplificadas en la resolución de las tareas del cuestionario, que se mostraron como muy difíciles en estudios anteriores, mediante los argumentos empleados en las entrevistas, tal y como se describe en el apartado relativo al efecto de la enseñanza sobre

la comprensión de los contenidos impartidos. Como se ha visto, un grupo de alumnos parece haber comprendido los principios fundamentales enseñados, indicando, incluso, que pueden generar alternativas viables cuando se enfrenten a situaciones en donde un concepto determinado se muestre incompatible. Sin embargo, hay también los que no parecen haber desarrollado las nociones deseables, conforme los objetivos establecidos. Esta diferencia podría sustentarse en varios factores: las experiencias individuales que aportan; sus conocimientos previos; las capacidades o habilidades de cada uno, así como las actitudes y creencias hacia los contenidos impartidos.

De todos modos, pensamos que nuestra propuesta didáctica favorece el clima de relaciones en el aula, por las diferentes formas de organización y métodos de enseñanza utilizados, lo que hace más positivas la relación profesor-alumno, las relaciones entre los propios alumnos, creando una buena atmósfera de aprendizaje, y motivando al alumnado a ocuparse activamente en el desarrollo de las tareas.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES, APORTACIONES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA.

8.1. INTRODUCCIÓN

Concluida la descripción y análisis de los diferentes estudios que conforman esta memoria, expondremos en este capítulo un resumen global de la investigación, señalando las principales aportaciones derivadas de la misma y haremos una breve exposición sobre las implicaciones para la enseñanza y de nuestra perspectiva futura de investigación.

Como queda reflejado a lo largo del presente trabajo, nuestra investigación es de carácter educativo y profundiza en el conocimiento sobre la comprensión del concepto de media aritmética. Pensamos que puede ampliar la visión de los educadores para determinar el tipo de enseñanza y las condiciones de aprendizaje que deben proporcionar al alumnado, para así contribuir a una mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje y de las condiciones en las cuales este se debe realizar.

En términos generales nuestro propósito es profundizar y ampliar el estudio de las estrategias, dificultades y errores del alumnado en la comprensión de la media aritmética, combinando los enfoques cuantitativos y cualitativos, para comprender mejor el fenómeno a estudio, dada la complejidad que presenta, a pesar de su aparente carácter elementar.

Consideramos en nuestro trabajo dos fases principales de investigación: la primera es la fase exploratoria, y la segunda es la fase general del estudio que proporciona los resultados esenciales asociados con los objetivos específicos formulados en esta memoria.

A continuación, exponemos las conclusiones principales de nuestro estudio, expresadas de acuerdo con los objetivos formulados para cada etapa de la investigación.

8.2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS DE LA FASE EXPLORATORIA.

Para fase exploratoria establecimos como objetivos desarrollar un cuestionario de evaluación del conocimiento sobre la media aritmética y obtener algunos resultados en un estudio comparativo respecto a la comprensión de algunos aspectos de la media aritmética en dos grupos de estudiantes de culturas diferentes: alumnos de Luanda (Angola) y alumnos de Tenerife (España).

En el estudio participaron un total de 240 alumnos de enseñanza secundaria, 94 alumnos de bachillerato en Tenerife, y 146 alumnos de Luanda de un nivel de enseñanza equiparable. Se utilizó como instrumento de recogida de datos el cuestionario que se elaboró con esta primera fase.

Para el análisis de las respuestas de los alumnos se atribuyó a cada respuesta un código relacionado con la idea expresada por el alumno, en el caso de las preguntas de respuesta abierta, o según el distractor presente en cada alternativa de respuesta, en el caso de las preguntas de respuesta de elección múltiple. Los resultados, que fueron expuestos según las frecuencias absolutas y porcentajes de cada tipo de respuesta, fueron discutidos no sólo en términos de respuestas correctas e incorrectas, sino que se valoró también la cualidad del razonamiento del alumnado, y se realizaron comparaciones con investigaciones previas.

Los datos obtenidos han proporcionado diversas informaciones, pero en especial han permitido ver que los alumnos de Luanda presentan más dificultades en la concepción de la media aritmética y en el proceso de resolución de problemas relacionados con este concepto.

La fase exploratoria fue fundamental puesto que nos ha permitido identificar algunos aspectos del concepto que no eran interpretados debidamente por el alumnado, como por ejemplo, el uso de la media como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición, la exclusión de los valores atípicos en el cálculo de la media en función de la situación, que la media puede ser un valor decimal, que el cero deba tenerse en cuenta en su cálculo, la diferenciación de los valores de la frecuencia y los valores de la variable en el cálculo de la media ponderada y, atender a las frecuencias en su cálculo, así como otros aspectos relacionados con el uso adecuado del algoritmo para el cálculo de la media.

Observamos, también que el cuestionario desarrollado, en aquel momento, presentaba algunas limitaciones, y con él no era posible obtener informaciones muy precisas sobre lo que el alumnado conocía al respecto de algunos elementos. Por ejemplo, observamos que algunos realizaban elecciones correctas en los problemas de respuesta múltiple, en los que se evaluaba al uso de la media como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición; la exclusión de los valores atípicos en el cálculo de la media según el contexto presentado, y el conocimiento de la influencia de los valores nulos en el cálculo de la media. Eso nos llamó la atención, ya que estos aspectos habían sido considerados como de difícil interpretación, incluso en estudiantes universitarios, (Batanero Godino y Navas, 1997; Estrada, 2002). Al constatar que algunos de nuestros alumnos habían indicado las respuestas correctas correspondientes, nos cuestionamos si serían capaces de realizar lo mismo en presencia de un ítem de respuesta abierta.

Esta limitación del cuestionario no se abordó en el estudio de la fase exploratoria. Así que pensamos que para un estudio más elaborado era necesario ampliar la metodología de investigación, por lo que el uso de entrevistas se configuró como uno de los procesos razonables a utilizar para así profundizar en el análisis de las estrategias, dificultades, y errores del alumnado, así como poder analizar sus orígenes.

En resumen, la fase exploratoria fue el principal indicador de las líneas maestras a tener en cuenta en el desarrollo de la fase general. Éstas se manifestaron en las insuficiencias encontradas, tanto a nivel de las limitaciones del cuestionario, como en el conocimiento de los campos de dificultad del alumnado de Luanda, y cuyo estudio era esencial para una caracterización de la comprensión, de forma más completa y profunda. Las conclusiones generales que presentamos a continuación se relacionan con los objetivos del los estudios llevados a cabo en la segunda etapa de nuestra investigación.

8.3. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACION

Recordemos que para delimitar la fase general de nuestra investigación, formulamos en el capítulo 1 los cinco objetivos principales, las cuestiones e hipótesis de

investigación, cuyos datos relacionados se concretaron en los diferentes estudios desarrollados y presentados en los capítulos 5, 6 y 7 de esta memoria.

Los objetivos formulados para la fase general de investigación son:

Objetivo 1: Profundizar en el análisis de los aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual sobre la media aritmética que posee el alumnado.

Para este objetivo formulamos la *hipótesis 1:* "el alumnado presenta diferentes tipos de razonamientos sobre la media aritmética, correctos o incorrectos. Sus respuestas a diferentes problemas se encuadran en distintos niveles de desarrollo cognitivo, por lo que es fundamental su caracterización para ayudarles a superar sus dificultades. Creemos, además, que los maestros en formación se encuentran en un nivel cognitivo superior al del alumnado de secundaria en las tareas relativas a este concepto".

Objetivo 2: Profundizar en el análisis de las estrategias que utiliza el alunado en la resolución de problemas que involucran el concepto de media aritmética.

Para este objetivo formulamos la *hipótesis 2:* "las principales estrategias utilizadas se relacionan con el uso directo de la fórmula para el cálculo de la media aritmética, y que el alumnado de secundaria encontraría más dificultad en darse cuenta de la necesidad de invertir el algoritmo de la fórmula de cálculo de la media en las situaciones en que se requiere este procedimiento".

Objetivo 3: Profundizar en el análisis del origen de las dificultades y errores que comete el alumnado respecto de la media aritmética.

Hemos formulado este objetivo bajo la *hipótesis 3:* "los errores y dificultades que presenta el alumnado tienen orígenes diversos, pero podrían estar, esencialmente, asociados a la complejidad del propio concepto, a los procesos de desarrollo cognitivo del alumnado, a los procesos de enseñanza del mismo o incluso a sus actitudes afectivas y emocionales hacia la estadística".

Objetivo 4: Diseñar una prueba de evaluación de conocimiento, sobre la media aritmética, que contemple diferentes elementos relacionados con la comprensión de este concepto.

El objetivo se formula bajo la *hipótesis 4:* "si consideramos los diferentes componentes del significado del concepto de media aritmética, podemos desarrollar un

instrumento de medida que permite hacer una estimación de los conocimientos y capacidades que posee el alumnado sobre este concepto. También conjeturamos que la mayor parte del alumnado que elige las respuestas correctas en los problemas de respuesta de elección múltiple no lo hace con criterio fundado".

Objetivo 5: Desarrollar una propuesta de enseñanza de la media aritmética, que facilite el aprendizaje de este concepto.

Para este objetivo planteamos la *hipótesis 5:* "una enseñanza apoyada en problemas contextualizados, y desarrollada bajo una metodología que hace del alumnado partícipe en la construcción del conocimiento, y donde la discusión cobra un papel fundamental, ayuda a paliar las dificultades y errores que cometen en el proceso de aprendizaje de la media aritmética".

Las conclusiones generales alcanzadas en relación a los objetivos descritos anteriormente se presentan a continuación.

En relación al primer objetivo "*Profundizar en el análisis de los aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual sobre la media aritmética que posee el alumnado*", concluimos que:

- Las respuestas presentadas por el alumnado y los diferentes procesos expresados por ellos, al resolver problemas sobre la media aritmética, muestran que gran parte de nuestro alumnado no posee una concepción adecuada del concepto. La media aritmética se confunde con otras medidas, y los significados atribuidos no se relacionan adecuadamente con el concepto en situaciones dadas.
- La mayor parte de las respuestas presentadas por nuestro alumnado se hayan asociadas con el nivel de comprensión multiestructural, puesto que en general se aprecia un conocimiento aislado de definiciones, fórmulas, algoritmos y procedimientos. Son pocos los casos en que se integra adecuadamente los diferentes aspectos relacionados con el concepto de media aritmética.
- No se aprecian diferencias significativas entre el alumnado de secundaria y los universitarios con respecto a los niveles de razonamiento expuestos.

Los resultados encontrados muestran que, en general, el alumnado no tiene una concepción adecuada del concepto de media aritmética. Atribuye a la media el

significado de valor más frecuente, la mitad, el valor mínimo, el valor máximo, el algoritmo de cálculo, e incluso algunos relacionaron esta medida con el término estadística. Algunos de estos razonamientos confirman los resultados obtenidos por otros autores (Strauss y Bichler, 1988; Mokros y Russell, 1995; Batanero, Godino y Navas, 1997; Watson y Moritz, 2000; Cobo y Batanero, 2004a).

Cabe destacar que las manifestaciones referidas antes resultan del hecho de que el alumnado posee ideas no estructuradas adecuadamente, adquiridas ya sea en el proceso de enseñanza o en su actividad cotidiana fuera del aula. En nuestro trabajo, los tipos de respuestas señalados anteriormente los caracterizamos en el nivel multiestructural.

Respecto de las propiedades del concepto de media aritmética:

- Encontramos que no se reconoce el efecto de los valores atípicos en el cálculo de la media, ni las condiciones en que se debe o no descartar un valor extraño en el cálculo de la media aritmética. El alumnado que muestra este comportamiento procede al cálculo de la media utilizando todos los datos que se les proporciona, sin hacer diferencias entre los mismos, independientemente de la situación dada. Las respuestas que mostraban estos comportamientos las asociamos con el nivel de transición entre el nivel multiestructural y relacional, considerándolas parcialmente correctas.
- Hay los que entienden que el cero no influye en el cálculo de la media. Al añadirse el dato cero a un conjunto de valores que tenía una cierta media, o incluso al calcular la media de un conjunto de valores del que el cero es parte del mismo, no atienden al cambio que este valor produce en el total de datos, lo que hace variar la media a calcular, a pesar de que realmente la suma total no queda afectada. Las respuestas que se corresponden con esta actuación se han caracterizado en el nivel multiestructural.
- Encontramos también que algunos no aceptan que la media sea un valor decimal, redondeando el resultado obtenido a un valor entero. Este tipo de respuestas las asociamos con el nivel de transición entre el nivel multiestructural y el relacional, siempre y cuando se proceda adecuadamente en el proceso de resolución.
- Hay quienes dan un valor para la media sin considerar que este valor debe estar comprendido entre los datos extremos. Algunos además no presentan las

operaciones realizadas. Sus respuestas se han asociado con el nivel multiestructural.

Igualmente destacamos algunos aspectos cognitivos de carácter operacional. Se ha observado que algunos no usan adecuadamente el algoritmo de cálculo de la media, y los procedimientos utilizados para calcular la media no son los adecuados. Por ejemplo:

- Los hay que escriben incorrectamente el algoritmo de la media aritmética, expresando inadecuadamente los elementos que integran la fórmula. Otros no saben donde situar cada uno de estos elementos (si es en el numerador o en el denominador) y cambian sus posiciones en la fórmula. Hay también los que presentan dificultades al utilizar la notación del símbolo del sumatorio. Estos tipos de respuestas se han asociado con el nivel multiestructural.
- Observamos, en particular, algunas situaciones referidas al uso del algoritmo de la media ponderada. Verificamos diferentes tipos de comportamientos: hay quienes calculan la media de algunos o de todos los valores de la variable y otros incluso usan los valores de la frecuencia. Hay también los que dividen la suma de los valores de la variable por la suma de valores de la frecuencia, o viceversa, poniendo de manifiesto algunos de los resultados presentados por Pollatsek, Lima y Well (1981) y Gattuso y Mary (1998). En general, este tipo de respuestas también se han asociado con el nivel de comprensión multiestructural.

En cuanto a las capacidades de argumentación, observamos que en general los criterios utilizados no tienen una base fundada. Por ejemplo, al argumentar, por qué se debía utilizar un valor dado como la mejor estimación; por qué una muestra que tiene una media igual que otra podría ser mejor; o por qué la media varía o no al añadirse un valor al conjunto original de datos, dieron diferentes tipos de respuestas, y la mayor parte de ellas presentan incoherencias. La mayor parte de las justificaciones dadas se asociaron con el nivel multiestructural, sin embargo, también hubo aquellas que se asociaron con los niveles más bajo de comprensión, es decir, los niveles preestructural y uniestructural. En el primer caso, si sus ideas expresan fundamentos de carácter subjetivo, y muestran que el estudiante está despistado o atraído por aspectos irrelevantes, y en el segundo caso, si el estudiante se centra simplemente en un aspecto

del dato, usándolo para justificar su respuesta, o considera un atributo concreto derivado de sus propias experiencias, aunque no sea adecuado para justificar la situación.

No se encontraron diferencias significativas entre los estudiantes de secundaria y los universitarios, en cuanto a los niveles de interpretación observados. Obviamente, esperábamos un mayor desempeño por parte de los estudiantes universitarios, si atendemos a que ellos son de un nivel de escolaridad superior y se supone que poseen una mayor madurez y tienen además más experiencia. En este punto no coincidimos con los resultados de Watson y Moritz (1999, 2000) que han constatado en sus trabajos que el nivel de comprensión aumenta con el grado cursado.

En relación al objetivo 2 "*Profundizar en el análisis de las estrategias que utiliza el alumnado en la resolución de problemas que involucran el concepto de media aritmética*", concluimos:

- Las estrategias correctas utilizadas por nuestro alumnado al resolver un problema de media aritmética, no difieren de las que son utilizadas tradicionalmente en la resolución de estos tipos de problemas, y las mismas, se traducen en el uso directo del algoritmo de cálculo de media simple o ponderada, o en la inversión del algoritmo de cálculo de la media aritmética.
- El alumnado presenta diversas estrategias incorrectas tanto para resolver problemas de media ponderada como para construir o completar una distribución de la que se conoce la media y el total de datos.

Los datos relacionados con las estrategias de resolución de problemas se exponen en los capítulos 5 y 6. Por ejemplo, con relación a la media ponderada destacamos los casos en que algunos alumnos, erróneamente, dividen la suma de los valores de la frecuencia por la suma de los valores de la variable o viceversa, mientras que otros determinan la media de *n* valores de la variable o de *n* valores de la frecuencia.

En relación con los "problemas de construcción", las entrevistas nos han facilitado un dato importante: Hay quienes dan una distribución correcta determinándola mediante el método de ensayo-error, es decir, atribuyen valores para conformar el conjunto de n elementos y comprueban si la media de estos es la referida en el enunciado. Si la media no coincide con el valor indicado en el enunciado, prueban con otros valores y así sucesivamente. Aunque les haya servido puntualmente, ésta es una estrategia improcedente, para este tipo de tareas, por las limitaciones que presenta.

En relación con el objetivo 3 "*Profundizar en el análisis de los orígenes de las dificultades y errores que comete el alumnado respecto de la media aritmética*", concluimos que:

- Las diferentes prácticas y concepciones de nuestro alumnado respecto de la media aritmética no se producen por casualidad, sino que tienen diferentes orígenes. Algunas se concretan en obstáculos y se manifiestan en forma de error.
- Hemos constatado que un mismo error podía tener diferentes procedencias. En resumen, la procedencia de los errores cometidos por nuestro alumnado es la siguiente:

  a) errores que tienen su origen en un obstáculo, distinguiendo entre ellos, los obstáculos didácticos, y los obstáculos cognitivos.

Los primeros son los derivados de las elecciones didácticas en el propio proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, algunos profesores preguntados sobre cómo abordan la media aritmética, reconocieron que el estudio de los valores atípicos no se realiza de forma expresa. Pensamos que esto hace que los estudiantes no se familiaricen con dichos valores, ni con las circunstancias de cuándo se debe o no excluir en el cálculo de la media aritmética. Así, al presentarles un conjunto de valores, en el que se debe usar la media, según la situación, no consideran eventuales diferencias entre los mismos. Centran su atención en el cálculo sin ver si hay o no valores extremos que pueden afectar al resultado deseado. En definitiva, la media aritmética se estudia desde una perspectiva puramente algorítmica, dejando al margen los aspectos conceptuales, y sin considerar que la vía inductiva de formación del concepto se presenta como la más apropiada, para que el alumnado desarrolle el significado correcto.

En cuanto a los errores que tienen su origen en un obstáculo cognitivo, consideramos que son producto de la experiencia previa del alumnado y del procesamiento interno de tales experiencias, y que interfieren en el proceso de desarrollo y formación de nuevos esquemas conceptuales. Tal es por ejemplo, el caso de no reconocer que el cero influye en el cálculo de la media, ya que, al trabajar con los valores nulos, parece que se considera al cero como el elemento neutro de la adición.

  b) errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. Éstos, están asociados a la naturaleza abstracta del concepto de media aritmética. Por ejemplo, confundir la media con otras medidas de tendencia central; no

comprender que el cero influye en su cálculo; no aceptar que la media pueda ser un valor decimal; no darse cuenta de que al añadir un elemento más en el conjunto de datos, esto hace que el total de datos ya no sea el mismo, y que se cambia el valor medio; pensar que se debe calcular la media de todos los valores presentados, independientemente del contexto referido en la situación, por lo que no se distinguen los valores extraños.

c) errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales: faltas de concentración, exceso de confianza, distracciones, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc. Sin embargo, no hemos explorado con profundidad estos errores ya que nuestro estudio no contempló un análisis de las actitudes.

El análisis general sobre los orígenes de los errores se describe en el capítulo 6 de esta memoria donde ilustramos casos particulares de errores cometidos por nuestro alumnado.

Respecto al objetivo 4 "*Diseñar una prueba de evaluación de conocimiento, sobre la media aritmética, que contemple diferentes elementos relacionados con la comprensión de este concepto*, concluimos que:

- El instrumento de medida desarrollado considera diferentes componentes del significado del concepto de media aritmética. Con él, no sólo, es posible conocer los errores, dificultades, obstáculos y estrategias que utiliza el alumnado al resolver problemas relacionados con este concepto, sino que también permite explorar los diferentes comportamientos del mismo en ciertas preguntas relacionadas pero diferentes en cuanto al tipo de pregunta.

El cuestionario utilizado en la fase general resultó de la ampliación del cuestionario desarrollado en la fase exploratoria, al que se le añadió otros problemas y las modificaciones que creímos pertinentes. Para nuestro propósito se ha mostrado útil y fiable, permitiendo, incluso, realizar análisis más generales, como son los casos de las comparaciones entre estudiantes de dos niveles de enseñanza diferentes y la comparación por especialidades entre el alumnado universitario. Pese a todo, pensamos seguir mejorándolo, esencialmente en lo que respecta a la gama de elecciones en los problemas de respuesta de elección múltiple, ya que la forma primitiva de las preguntas no contempla algunos tipos particulares de respuesta.

Respecto a las actuaciones de los estudiantes frente a dos tipos de problemas que tienen cierta relación, concluimos que:

- La mayor parte del alumnado que selecciona la respuesta correcta en los problemas de respuesta de elección múltiple, su actuación en los problemas de respuesta abierta, relacionados, muestra enorme dificultad en la ejecución.

Por ejemplo, el cruce de resultados en el ítem de respuesta abierta "Gráfico de notas, 6.A .b)" con el ítem de respuesta de elección múltiple "Gráfico de notas, 6. B", tanto con el alumnado de secundaria, como con el universitario, ha mostrado que de los que señalan la opción de tipo relacional en el problema de elección múltiple, más de la mitad proporcionan criterios no válidos al argumentar el ítem de respuesta abierta relacionado. Hay quienes dan argumentos de tipo multiestructural, basándose, por ejemplo, en el número de alumnos aprobados, en el factor mayor nota, o en la no existencia de notas inferiores a 9, cuando la respuesta requerida pasa por señalar la variabilidad, como criterio para diferenciar los dos conjuntos de datos presentados. Del mismo análisis se observa que algunos no contestan y otros dan argumentos confusos, cuya caracterización se asoció con el nivel de comprensión uniestructural.

Algo similar se vio también en otros problemas relacionados. En particular, el cruce de resultados en el ítem de respuesta abierta "Tiempo recorrido en los 100 m" con el ítem de respuesta de elección múltiple "En una clase de ciencias", tanto en el alumnado de secundaria, como con el universitario, arrojó que del total de alumnos que seleccionan la respuesta caracterizada en el nivel relacional, en el problema de elección múltiple, que consiste en descartar el valor atípico y calcular la media con los restantes valores, ninguno presenta una respuesta de este tipo al contestar el ítem de respuesta abierta, verificándose que en este último tipo de problema algunos estiman el dato desconocido, calculando la media de todos los datos, sin percibir que hay un valor que sesga la distribución; otros presentan justificaciones asociadas con el nivel multiestructural, sugiriendo utilizar la moda, la mediana, el dato mayor o menor, e incluso algunos no contestan.

Importa señalar, que también hay alumnos que contestan adecuadamente un problema de respuesta abierta y que no marcan la alternativa correcta en el problema de respuesta de elección múltiple.

- Muchos son inconsistentes en sus actuaciones. Para una situación similar indican respuestas diferentes según si el tipo de pregunta es de respuesta abierta o de elección múltiple.

- La evaluación de la comprensión del alumnado no debe basarse solamente en las respuestas obtenidas mediante las preguntas de elección múltiple, pues nuestro estudio ha mostrado que se puede llegar a conclusiones erróneas. Según la investigación realizada, la verdadera información, para juzgar lo que el alumno ha aprendido sobre un determinado tema, se obtiene mejor a partir del análisis de las preguntas de respuesta abierta.

Estas conclusiones se derivan de los análisis realizadas sobre las actuaciones de nuestro alumnado, de acuerdo con los datos presentados en el capítulo 5 de esta memoria. El análisis allí presentado, es una profundización de algunos hallazgos derivados de la fase exploratoria, y parte de ellos se han presentado en dos trabajos (García Cruz y Garrett, 2006a; 2006b).

Finalmente en relación con el objetivo 5*,* "*Desarrollar una propuesta de enseñanza de la media aritmética, que facilite el aprendizaje de este concepto*", concluimos que:

- Desarrollar una enseñanza y aprendizaje basado en problemas contextualizados, y en la que se acentúa la participación activa y consciente del alumnado, puede ayudar a minimizar las dificultades, obstáculos y errores que cometen en el aprendizaje de la media aritmética.
- El análisis de los resultados obtenidos con la administración del cuestionario y realización de entrevistas, tras la conclusión del experimento de enseñanza, revela que los contenidos sobre la media aritmética son difíciles, incluso cuando se trabaja con metodologías supuestamente adecuadas.

Las ideas generales sobre el desarrollo de la propuesta de enseñanza se concretan en el capítulo 7. La referida propuesta constituye una guía didáctica de instrucción, que refleja un conjunto de tareas contextualizadas que asocia los diferentes componentes de significado de la media aritmética. En la descripción de la misma, se observan un conjunto de situaciones que se traducen en indicaciones de carácter metodológico acerca de cómo se pueden introducir los diferentes aspectos (conceptos y propiedades), así como anticipar dónde los alumnos pueden presentar más dificultades, y cuál es la naturaleza de las mismas.

El planteamiento propuesto puede, en general, favorecer una mejor comprensión de los contenidos estadísticos, y en particular promueve el desarrollo de habilidades

cognitivas, tanto de carácter operacional como conceptual, haciendo más conscientes al alumnado de sus actuaciones en el proceso de aprendizaje.

En resumen, el análisis global sobre el efecto que produjo la enseñanza desarrollada en el aprendizaje de los contenidos programados, reveló dos tipologías entre el alumnado participante:

- Por un lado están los que muestran haber desarrollado un nivel de abstracción aceptable, dado que en la mayoría de las situaciones han podido enlazar los distintos aspectos presentes en las tareas, mostrando capacidad de análisis, interpretación, y argumentación acorde a las competencias exigidas.
- Y por otro lado, están aquellos, que no parecen haber progresado en el desarrollo de los significados que se pretendían, de modo que comprendiesen los principios esenciales requeridos en las tareas propuestas. Este grupo es una muestra del grado de dificultad que presenta la media aritmética, a pesar de su aparente carácter elemental.

Esta tipología, derivada del efecto que produjo la enseñanza de la media aritmética en el aprendizaje de los alumnos, concuerda con uno de los resultados encontrado por Carvalho (2001). Dicha constatación pone de manifiesto lo expresado por Hiebert y Lefevre (1986), cuando dicen que la construcción de relaciones entre unidades de conocimientos matemáticos podría no ser aprendida e interiorizada por el alumnado, aunque se utilicen métodos supuestamente adecuados en el proceso de enseñanza.

8.4. CONCLUSIONES SOBRE LAS HIPÓTESIS DE LA FASE GENERAL DE INVESTIGACION

En función de los objetivos formulados para fase general establecimos varias hipótesis relacionadas con cada uno de tales objetivos. A continuación exponemos las principales conclusiones derivadas de nuestra investigación:

En relación con la hipótesis 1, "*el alumnado presenta diferentes tipos de razonamientos sobre la media aritmética, correctos o incorrectos. Sus respuestas a diferentes problemas se encuadran en distintos niveles de desarrollo cognitivo, por lo que es fundamental su caracterización para ayudarles a superar sus dificultades.*

Creemos, además, que los maestros en formación se encuentran en un nivel cognitivo superior al del alumnado de secundaria en las tareas relativas a este concepto", concluimos que:

- El alumnado muestra distintos tipos de razonamiento sobre la media aritmética y sus respuestas se pueden asociar a cinco niveles de comprensión: preestructural, uniestructural, multiestructural, transición entre el nivel multiestructural y el relacional, y relacional. Los resultados revelan que, en general, el alumnado tiene dificultades de carácter operacional y conceptual, según sus respuestas caracterizadas en los diferentes niveles de comprensión señalados: preestructural, uniestructural, multiestructural y transición entre los niveles multiestructural y relacional. Se observa un cierto predominio de respuestas clasificadas en el nivel multiestructural en casi todas las tareas.
- En cuanto a los niveles de interpretación observados y contrariamente a lo que habíamos supuesto, los resultados del estudio no muestran diferencias significativas entre los estudiantes de secundaria y los universitarios,.

Con relación a la hipótesis 2, "*las principales estrategias utilizadas se relacionan con el uso directo de la fórmula para el cálculo de la media aritmética, y que el alumnado de secundaria encontraría más dificultad en darse cuenta de la necesidad de invertir el algoritmo de la fórmula de cálculo de la media en las situaciones en que se requiere este procedimiento*", concluimos lo siguiente:

- El principal recurso del alumnado para resolver problemas que evocan la media aritmética es el uso directo del algoritmo de cálculo. Sin embargo, el uso de la estrategia de inversión de la fórmula de cálculo, en situaciones donde es necesaria, constituyó una dificultad general tanto para el alumnado de secundaria como para el universitario.

Con respecto a la hipótesis 3, "*los errores y dificultades que presenta el alumnado tienen orígenes diversos, pero podrían estar, esencialmente, asociados a la complejidad del propio concepto, a los procesos de desarrollo cognitivo del alumnado, a los procesos de enseñanza del mismo o incluso a sus actitudes afectivas y emocionales hacia la estadística*", el estudio ha confirmado que:

- Los errores pueden clasificarse en dos grupos: errores que tienen su origen en un obstáculo (didáctico o cognitivo) y errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tienen dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.

Con relación a la primera parte de la hipótesis 4 "*si consideramos los diferentes componentes del significado del concepto de media aritmética, podemos desarrollar un instrumento de medida que permite hacer una estimación de los conocimientos y capacidades que posee el alumnado sobre este concepto*", concluimos que:

- El cuestionario que se desarrolló es un instrumento útil y fiable para detectar diferentes comportamientos del alumnado al resolver problemas referentes a la media aritmética. Al considerar diversos aspectos, del concepto ayuda a examinar los puntos críticos en la comprensión del mismo, y es útil para derivar medidas tendentes a atenuar las dificultades presentadas por el alumnado.

Con respecto a la segunda parte de la hipótesis 4 "*También conjeturamos que la mayor parte del alumnado que elige las respuestas correctas en los problemas de respuesta de elección múltiple no lo hace con criterio fundado*", el cruce entre los datos obtenidos en las preguntas de respuesta de elección múltiple y los obtenidos en las preguntas de respuesta abiertas, relacionadas, permitió ver que:

- En general el alumnado que elige la respuesta correcta en un problema de elección múltiple, al responder en problemas de respuesta abierta relacionado, muestra muchas dificultades, presentando argumentos fuera del contexto o incoherentes y en algunos casos no contestan. Esto nos hace pensar que su elección, en problemas de respuesta múltiple, se hacen sin criterio fundado. También hay algunos que, a pesar de contestar correctamente una pregunta de respuesta abierta, indican una alternativa no procedente en un problema de elección múltiple relacionado.

Finalmente, con relación a la hipótesis 5, "*una enseñanza apoyada en problemas contextualizados, y desarrollada bajo una metodología que hace del alumnado partícipe en la construcción del conocimiento, y donde la discusión cobra un papel*

fundamental, ayuda a paliar las dificultades y errores que cometen en el proceso de aprendizaje de la media aritmética", concluimos que:

- Trabajar con problemas que muestran ejemplos de la vida cotidiana y el llevar al alumnado a participar de forma activa y consciente en el desarrollo del conocimiento, atenúa las dificultades y errores en el aprendizaje de la media aritmética, sin embargo, esto por sí sólo no garantiza que el éxito esté asegurado.

8.5. APORTACIONES DEL ESTUDIO

Como se ha descrito en el capítulo primero de esta memoria, a pesar de contar actualmente con varias investigaciones sobre la conceptualización de la media aritmética, todavía encontramos diversos aspectos relacionados con este concepto que no han sido explorados en profundidad. Son diversos, los aspectos que quedan por analizar y profundizar, por lo que pensamos que algunos elementos de nuestra investigación son útiles tanto para analizar y contribuir al conocimiento de los investigadores, como para mejorar la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Ante todo, hay que destacar que la investigación se lleva a cabo en con alumnos de una región del continente africano (Angola), de la que poco se conoce sobre las concepciones, errores y dificultades del alumnado en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. La práctica muestra que las informaciones que se tienen al respecto de la media aritmética, proceden fundamentalmente de investigaciones con alumnos provenientes de países desarrollados, o en vía de desarrollo, cuyas realidades sociales, económicas y culturales son bastante diferentes, en comparación con las de los países africanos. Luego, consideramos que los resultados presentados en nuestro trabajo constituyen una aportación en términos de experiencia intercultural.

Nuestro trabajo ha desarrollado un cuestionario de evaluación de la comprensión de los alumnos sobre la media aritmética. El instrumento presentado, aunque necesita aún de ciertos perfeccionamientos, resulta bajo nuestro punto de vista bastante útil para examinar varios componentes del significado de la media, porque combina principalmente preguntas de respuesta abierta con preguntas de elección múltiple.

Una aportación derivada de la estructura del instrumento medida, es que ha permitido analizar las actuaciones de los estudiantes en preguntas de respuesta abierta que tienen relación con ciertas preguntas de respuesta de elección múltiple. El análisis resultante es un dato de referencia en lo que concierne, a la mejor forma de juzgar lo que los alumnos conocen sobre un contenido determinado.

Otra aportación a considerar es la caracterización jerárquica de las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión. Aunque existen estudios previos en esta línea (Watson y Moritz; 1999, 2000; Watson, 2007) realizados con alumnos de secundaria, nosotros hemos extendido este análisis al alumnado universitario, hemos ampliado los aspectos evaluados, y proporcionamos además una comparación entre diferentes niveles de enseñanza, respecto a tales niveles de comprensión.

Asimismo el sistema de categorización utilizado para codificar las respuestas particulares de los alumnos al contestar un problema dado, en especial las respuestas abiertas, es un dato importante en el desarrollo de otros trabajos. Con tal sistema, no sólo será más fácil clasificar las respuestas del alumnado en otros estudios, sino que permite completar alternativas de respuestas en ciertas preguntas de elección múltiple.

También se hace un análisis sobre los orígenes de las principales dificultades, errores y obstáculos del alumnado sobre la media aritmética. En la literatura consultada no encontramos un análisis específico al respecto, por lo que con nuestro estudio contribuimos con una caracterización que puede servir de punto de partida en el estudio de otros temas estadísticos.

En nuestra propuesta didáctica ofrecemos indicaciones, que pensamos pueden ser importantes, fundamentalmente para el profesorado, sobre todo a los que tienen poca experiencia en la enseñanza, a la hora de introducir el concepto de media aritmética, ya que dispondrán de antemano, de un conocimiento útil sobre las dificultades esperadas al abordar este concepto.

En resumen, nuestro trabajo aporta datos que pueden servir de referencia en otras investigaciones, además de permitir una mejor comprensión del proceso de enseñanza y aprendizaje de la media aritmética, así como de las condiciones en las que se debe realizar la enseñanza para intentar mejorar el aprendizaje, comprensión y uso.

8.6. IMPLICACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Las implicaciones de nuestra investigación para el proceso de enseñanza y aprendizaje son diversas. Algunas de ellas ya han sido descritas cuando expusimos las principales aportaciones, en el apartado anterior.

Los resultados obtenidos en nuestro estudio confirman plenamente las dificultades, obstáculos y errores que vienen siendo mencionados en diversos trabajos sobre la media aritmética.

De igual forma, el conocimiento de las dificultades, obstáculos y errores presentes en el alumnado permite que el profesorado tenga presente los puntos críticos en la comprensión de este concepto, al diseñar convenientemente sus actividades para el aula. También, hace que el profesor seleccione adecuadamente las tareas a proporcionar al alumnado, tanto respecto a la cantidad como a su variedad. Asimismo, el profesor puede reflexionar sobre la conveniencia o no de ciertas metodologías, acudiendo a recursos adecuados y atendiendo a las particularidades individuales, con el propósito de que todos los estudiantes disfruten de una formación adecuada.

También se atenderá al desarrollo de competencias y capacidades si se trabaja en el sentido de proveer conocimientos conceptuales en detrimento de conocimientos procedimentales y sobre todo algorítmicos. El currículo debe establecer claramente los objetivos específicos relacionados con cada tipo de conocimientos, ayudando al profesorado menos experimentado a proporcionar las bases para una cultura estadística importante para el alumnado y la sociedad.

A pesar de todo, hay que considerar que determinados aspectos no han sido abordados como hubiera sido deseable. Por ello, describimos en el próximo apartado algunas limitaciones de nuestro trabajo y las perspectivas de investigación futura.

8.7. LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

El cuestionario de evaluación de conocimiento desarrollado en nuestra investigación está formado tanto por preguntas de respuesta abierta como por respuesta de elección múltiple. Sin embargo las preguntas de elección múltiple no contemplan un conjunto completo de posibles respuestas, como ya señalamos en su momento. Un futuro objetivo a considerar es, precisamente, tratar de incluir diversos tipos de

respuestas para completar la gama de alternativas posibles. También pensamos mejorar el cuestionario, instrumento de evaluación del conocimiento del alumnado, añadiéndole ítems que evalúan otros aspectos del concepto de media aritmética, construir ítems paralelos que reflejen otros tipos de preguntas, y tratar de ampliarlo a otros promedios.

Creemos también que si se hubiese analizado las actitudes y creencias de los alumnos respecto de los contenidos estadísticos, dispondríamos de más elementos sobre el origen de las dificultades, errores y obstáculos del alumnado con respecto a la media aritmética. Como sabemos, grande parte de la problemática didáctica detectada en la enseñanza y aprendizaje de la estadística puede estar también asociada con ciertas actitudes y creencias. Nos planteamos en el futuro analizar la implicación de estas actitudes y creencias en el desarrollo del conocimiento por el alumnado.

Por otro lado, nuestra propuesta didáctica se ha desarrollado con un grupo exiguo de alumnos, ya que el criterio de selección fue muy restrictivo, pues residir en la cercanía de la escuela además de estar interesados en participar en el aprendizaje de un contenido era fundamental para poder participar en él. Aquí nos preguntamos si el experimento desarrollado proporcionaría otros resultados con un grupo de alumnos más numeroso y considerando otros criterios de selección. Esta es otra cuestión prevista para futuros estudios.

Asimismo, pensamos que los resultados serían más representativos si el estudio contemplase sujetos de otras instituciones e inclusivo de otras provincias, aparte de Luanda. Eso nos proporcionaría muestras más diversificadas y con mayor número de estudiantes, lo que permitía posiblemente obtener datos más realistas. Esta limitación es la que nos impidió establecer diferencias entre alumnos universitarios en cuanto a los resultados por especialidades, dado que la composición de la muestra con estos alumnos era muy reducida. Luego, este es otro de los aspectos a tener en cuenta en próximas investigaciones.

También, creemos que es muy conveniente realizar entrevistas con el alumnado universitario para profundizar en sus concepciones. Como hemos expuesto en su lugar, este estudio no se realizó por la indisponibilidad de los estudiantes a participar, dada la coincidencia con otras actividades que concurrían en el calendario académico durante la fase de recogida de datos de nuestra investigación.

Finalmente tenemos pensado continuar profundizando en el conocimiento de la comprensión de la media aritmética así como ampliar el estudio a otros promedios.

REFERENCIAS

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition*. Harvard University Press. Cambridge, MA. [Citado en Hiebert y Lefevre (1986)].

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. En Douady, R. y Mercier, A. (Eds), *Research in Didactics of Mathematics,* 41-65. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Bakker, A. (2000). Historical and didactical phenomenology of the average values. En P. R. de Grave (Ed.), *Proceedings of the Third European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education,* Vol. 1, 91-106. Louvain-la-Neuve, Belgium.

Bakker, A. (2003). The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statistics Education,* Volume 11, Number 1, www.amstat.org/publications/jse/v11n1/bakker.html.

Bakker, A., y Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 149-168.

Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED. [Citado en Díaz (2007)].

Barr, G. V. (1980). Some student ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*, 2 (2), 38-41.

Batanero, C. (2000). Significado y Comprensión de las Medidas de Posición Central. *UNO*, 25, 41-58.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Revista de la sociedad argentina de estadística*, v. 6, 1 y 2. Disponible on-line, en http://vaca.agro.uncor.edu/~revistasae/

Batanero, C. y Godino, J. D. (2001a). Developing New Theoretical Tools in Statistics Education Research. *Proceedings of the 5rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2001b). *Análisis de datos y su Didáctica*. Grupo de investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C., Cobo, B. y Díaz, C. (2003). Fiabilidad y Generalidad. Aplicaciones en la Evaluación Educativa. *Números,* 54, 3-21.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de Maestros de Primaria en Formación sobre los Promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 310-324.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press. New York.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement,* 57-76. Erlbaum. Hillsdale, NJ.

Borasi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics,* 7 (3), 2-8.

Byers, V. y Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-27. [Citado en Schroeder (1987)].

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education,* v. 3, 144-151. Universidad de Pernambuco.

Carvalho, C. (2001). *Interacções entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade. Lisboa*: Universidade de Lisboa [Tese de doutoramento].

Cobo, B. y Batanero, C. (2004a). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma*, 45, 79-86.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004b). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 22 (1), 5-18.

Cornu, B. (1991). Limits. En: D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* 153-166. Kluwer. Dordrecht

Curcio, F.R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (8), 382-393.

Curcio, F.R. (1989). *Developing graph comprehension*. NCTM. Reston, VA.

Dane, F. C. (1990*). Research methods*. Thompson. Pacific Grow. CA. [Citado en Díaz (2007)].

Davis, R. B. y Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5, 281-303. [Citado en Mell (2003)].

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Dubinski, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mthematical Thinking. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 95-123. Kluwer. Dordrecht.

Estepa, A. y Sánches, F.T. (1996). Association judgments in the comparison of two simples. *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education,* v. 2, 337-344. Universidad de Valencia.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Fox, D.J. (1981). *El proceso de Investigación en Educación*. Ediciones Universidad de Navarra, S.A. Pamplona.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel. Dordrecht.

Gal, I. (1995). Statistical Tools and Statistical Literacy: The Case of the Average. *Teaching Statistics*, 17 (3), 97-99.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meaning, Components, Responsibility. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-25.

García Alonso, I. y Garrett, A. J. (2005). Cuestionario Piloto sobre la media Aritmética: Algunos resultados con alumnos de bachillerato. Trabajo presentado en las XXIV Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemática.

García Cruz, J. A. y García Alonso, I. (2004a). Algo Sobre la Media. Trabajo presentado en las XXII Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemática.

García Cruz, J. A. y García Alonso, I. (2004b). La media Aritmética. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VI, 135-158*. Universidad de La Laguna.

García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2007b). Algunos resultados en el análisis de la comprensión de la influencia de los valores nulos en el cálculo de la media. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*. Universidad de la La Laguna. (Por aparecer).

Garrett, A.J. y García Cruz J.A. (2007a). Algunos resultados sobre promedios con estudiantes en Luanda y Tenerife. *Actas de las XII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* 683-690. Universidad de Castilla-La Mancha. Albacete.

Garrett, A.J. y García Cruz, J.A. (2005). Un cuestionario y estrategias sobre los promedios. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, 197-217.

García Cruz, J.A. y Garrett, A.J. (2006a). Students' Actions in Open and Multiple-Choice Questions Regarding Understanding of Averages. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 161-168. Charles Univertity. Prague. Czech Republic.

García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2008a). Caracterización de la comprensión de algunos aspectos de la media aritmética: Un estudio con alumnos de secundaria y universitarios. *Enseñanza de la Matemática*, 3ra Etapa, Vol. 17, Nº 1 (Por aparecer).

García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2008b). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, Vol. 12, No. 1, 49–66**.**

García Cruz, J.A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

García Cruz, J.A. y Garrett, A.J. (2006b). On Average and Open-Ended Questions. *Proceeding of the 7th International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistical Education. Salvador, Bahía, Brazil.

Garfield, J.B. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistical Education Research Journal* 2 (1), 22-38.

Garrett, A. J. (2005). *Construcción de un cuestionario sobre los promedios. Resultados con alumnos de Luanda y Tenerife*. Memoria Fase de Investigación, curso de doctorado 2003-2005. Universidad de La Laguna.

Gattuso, L. y Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school students. *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics,* 685-691. Singapur. Disponible en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning and understanding. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds), *Proceedings of the 20th PME Conference,* v.2, 417-424. Universidad de Valencia.

González-Martín, A. S. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

Gutiérrez A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En A. Gutiérrez, (ed.) *Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática*, 149-194. Editorial Síntesis. Madrid.

Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad*. Editorial Gedisa. Barcelona. (Traducción de la obra: /The emergence of probability/, Cambridge University Press. 1975).

Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encounters in the Learning of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Ed.), *Research Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. N.C.T.M.

Hiebert, J. (Ed.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Erlbaum. Hillsdale, NJ.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning of mathematics,* 65-97. Macmillan. New York.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics,* 1-27. Erlbaum. Hillsdale, NJ.

Jolliffe, F. (1998). What is research in statistics education? *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching of Statistics,* Singapore: IASE. Disponible en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., y Mogill, A. T. (1997). A Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability. *Educational Studies in Mathematics,* 32, 487-519.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., y Mogill, A. T. (1999). Students' Probabilistic Thinking in Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (5), 487-519.

Jungk, W. (1985a). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 1*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

Jungk, W. (1985b). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2*. Primera parte. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

Leon, M. R. y Zawojewski, J. S. (1991). Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary results. En D. Vere- Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics,* 302-306. Voorburg, Holanda.

León, O. G. y Montero, I. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación*. McGraw-Hill. Madrid. [Citado en Díaz (2007)].

Lesh, R. y Zawojewski (2007). Problem Solving and Modeling. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* 673-804. NCTM. Greenwich, CT.

Ley 13/2001. *Diário da República*. Órgão Oficial da República de Angola. I Série, Nº 65, 31/12/2001.

Li, K. Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14 (1), 2-8.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. 5ª edición, Pearson Educación, S. A. Madrid.

MED (2003). *Currículo do 2º Ciclo do Ensino secundário. Reforma Curricular*. Ministério de Educação. Angola.

Meel, D.E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, v. 6, (3), 221-271.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in mathematic*, 14, 415-429.

Millman y Greene (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R.L. Linn (Ed), *Educational Measurement,* 335-366. MacMillan. London. [Citado en Díaz (2007)].

Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (1), 20-39.

Moore, D.S. (1995). *Estadística aplicada básica*. Antoni Bosch, editor, S.A. Barcelona, España.

Muñiz, J. (1994). *Teoría Clásica de los Testes*. Pirámide. Madrid.

N.C.T.M. (2003). *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Thales. National Council of Teachers of Mathematics.

Ottaviani, M. G. (2002). 1982-2002: From the past to the future. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. Ciudad del Cabo: IASE. Disponible en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Palarea, M.M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Pollatsek, A. Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* (Traducción *de: How to Solve It)*. Editorial Trillas. México.

Rosales, J.C. (2002). *Estadística con SPSS (versión 11) para Windows*. RA-MA Editorial. España.

Ruano, R., Socas, M.M. y Palarea, M.M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática*. *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* 311-322.

Sampieri, R.H., Collado, C. F. y Lucio (1998). *Metodología de la Investigación* McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V. México.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning,* 334-370. Macmillan. New York.

Schoenfeld, M. (2001). Purposes and methods of research in mathematics Education. En D. Holton (Ed.) *The Teaching and Learning of mathematics at University Level: An ICMI Study,* 221-236. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Schroeder, T. L. (1987). Students' understanding of mathematics: A review and synthesis of some recent research. En J. Bergeron, N. Hercovics, y C. Kieren (Eds.), *Psychology of Mathematics Education* XI, Vol.3, 332-338. Montreal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and Directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 465-494. Macmillan. New York.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 957-1008. NCTM. Greenwich, CT.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10 (3), 24-41.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* 77, 20-26.

Skemp, R.R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action. A foundation for theory and practice in education.* John Wiley &Sons. Chichester (etc.).

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En *L. Rico y otros (ed.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* 125-154, Horsori, Barcelona.

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En Camacho, M. y otros: *Investigación en Educación Matemática XI*. SEIEM 2007, 19-52.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.

Tall, D. (1978). The dynamics of understanding mathematics. *Mathematics Teaching*, 84, 50-52. [Citado en Schroeder (1987)].

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* pp. 3-21. Kluwer. Dordrecht.

Tormo, C. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética. *UNO*, 5, 29-36.

Vere-Jones, D. (1995). The coming age of statistical education. *International Statistical Review*, 63 (1) 3-23.

Vineer, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* pp. 65-81. Kluwer. Dordrecht.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 145-168.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The Longitudinal Development of Understanding of Average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1/2), 11-50.

Watson, J.M. (2007). The role of cognitive conflict in developing students' understanding of average. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 21-47.

Anexo 1: Cuestionario administrado en la fase exploratoria con los alumnos de Tenerife.

PESOS

1. Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento en una clase de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6'2	6'0	6'0	15'3	6'1	6'3	6'2	6'15	6'2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías?

(*marcar una sola de las siguientes respuestas)*

_____a. Usar el número más común, que es 6'2.

_____b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.

_____c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.

_____d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.

EN UNA CLASE

2. Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación.

	Nombre de los alumnos							
	Juan	Lucía	Alberto	Ana	Pedro	María	Luis	Clara
N° de preguntas	0	5	2	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomendarías?

(*marcar una sola de las siguientes respuestas)*

_____a. Usar el número más común, que es el 2.

_____b. Sumar los 8 números y dividir por 8.

_____c. Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

_____d. Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

1

HIJOS POR FAMILIA

3. El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Si el promedio de niños por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo?

(*marcar una sola de las siguientes respuestas)*

_____a. La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños.

_____b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.

_____c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.

_____d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.

_____e. El número más común de niños en una familia es 2.

HIJOS

4. Hemos preguntado en Tenerife a 25 familias sobre el número de hijos y nos han respondido:

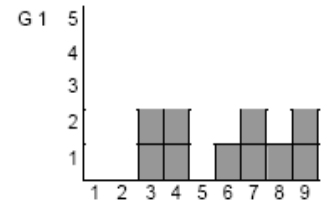
10 familias no tenían hijos
7 familias tenían 1 hijo
5 familias tenían 2 hijos
3 familias tenían 3 hijos
No hubo ninguna familia con 4 hijos

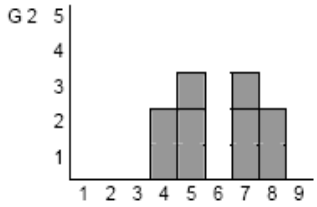
¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

2

GRÁFICA DE NOTAS

5. Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso están dadas en los gráficos que se presentan a continuación:





Cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1, los dos rectángulos que aparecen sobre el número 9 indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron un 9.

5.A El Grupo 1 tiene una nota media de 6.

a) Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 6.

b) ¿Qué grupo te parece mejor? Justifícalo.

5.B ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

____ a) El Grupo 1 es mejor que el Grupo 2 porque en el primero están los alumnos que obtuvieron más nota.

____ b) El Grupo 2 es mejor porque no hay alumnos con notas inferiores a 4.

____ c) No hay diferencia entre los dos grupos, porque la media es la misma en ambos.

____ d) A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo.

3

FAMILIA

6. El tamaño medio de la familia en Canarias es de 3'2 personas.

a) Da 10 familias que cumplan este promedio.

b) Si los García son 5 en la casa y los Hernández son 2, ¿cómo podrían ser las otras 8 familias?

SUPERMERCADO

7. En un supermercado hay 8 marcas diferentes de papas fritas.

a) ¿Qué precio se puede poner a cada marca para que el precio medio sea de 1'50€?

b) Si hay tres marcas de papas fritas que traen un precio recomendado de 0'75€, 1€ y 2€, ¿qué precio se puede poner al resto de las marcas para que el precio medio sea 1'50€?

4

Anexo 2: Cuestionario administrado en la fase exploratoria, con los alumnos de Luanda.

PESOS

1. Nove estudantes pesaram um objecto pequeno com um mesmo instrumento, numa aula de ciência. Os pesos registados por cada estudante (em gramas) mostram- se a seguir:

6.2	6.0	6.0	15.3	6.1	6.3	6.2	6.15	6.2

Os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto. Qual dos seguintes métodos lhes recomendaria?

(*Marcar uma só das seguintes respostas)*

_____a. Usar o número mais comum, que é o 6.2.

_____b. Usar 6.15, já que é o valor com mais cifras decimais.

_____c. Somar os 9 números e dividir a soma por 9.

_____d. Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8.

NUMA AULA

2. Uma professora decide estudar quantas perguntas fazem os seus alunos. O registo do número de perguntas feitas pelos seus 8 alunos, durante uma aula, mostram-se na seguinte tabela:

	Nome do aluno							
	João	Lúcia	Alberto	Ana	Pedro	Maria	Luís	Clara
N.º de perguntas	0	5	2	22	3	2	1	2

A professora quer resumir estes dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. Qual dos seguintes métodos lhe recomendarias?

(*Marcar uma só das seguintes respostas)*

_____a. Usar o número mais comum, que é o 2.

_____b. Somar os 8 números e dividir por 8.

_____c. Descartar o 22, somar os outros 7 números e dividir por 7.

_____d. Descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7.

1

FILHOS POR FAMÍLIA

3. Uma instituição escolar numa pequena cidade, quis determinar o número médio de filhos por família na sua cidade. Dividiram o número total de filhos da cidade por 50, que é o número total de famílias. Se o número médio de filhos por família é de 2.2, com qual das seguintes frases estás de acordo?

(*Marcar uma só das seguintes respostas)*

_____a. A metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos.

_____b. Na cidade há mais famílias com 3 filhos que com 2.

_____c. Há um total de 110 filhos na cidade.

_____d. Há 2.2 filhos por adulto na cidade.

_____e. O número mais comum de filhos numa família é 2.

FILHOS

4. Perguntamos, na cidade de Luanda, a determinadas famílias sobre o número de filhos que tinham, e obtivemos os seguintes dados:

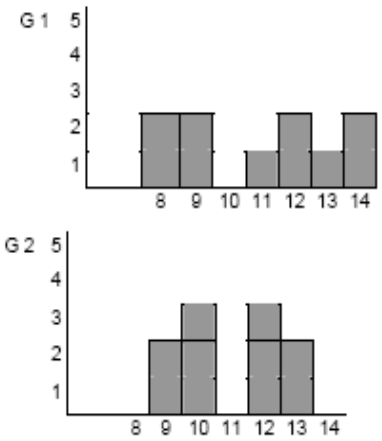
10 famílias não tinham filhos.
7 famílias tinham 1 filho.
5 famílias tinham 2 filhos.
3 famílias tinham 3 filhos.
Não havia nenhuma família com 4 filhos.

Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

2

GRÁFICO DE NOTAS

5. Vinte alunos de um Instituto participaram num concurso de matemática. Dez dos alunos formavam o Grupo 1 e os outros dez formavam o Grupo 2. As notas obtidas no concurso estão dadas nos gráficos que se apresentam a seguir:



Cada rectângulo no gráfico representa a nota dum aluno em particular. Por exemplo, no Grupo 1, os dois rectângulos que aparecem sobre o número 14 indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores.

5. A O Grupo 2 tem uma nota média de 11 valores.

a) Comprova que a nota média do grupo 1 também é igual a 11.

b) Que grupo te parece melhor? Justifique a tua resposta.

5. B Qual das seguintes afirmações é certa?

(*Marcar uma só das seguintes respostas)*

____ a) O Grupo 1 é melhor que o Grupo 2, porque no primeiro estão os alunos que obtiveram notas mais altas.

____ b) O Grupo 2 é melhor, porque no mesmo há mais alunos com notas positivas.

____ c) Não há diferenças entre os dois grupos, porque a média é a mesma em ambos os grupos.

____ d) Apesar das médias serem iguais nos dois grupos, o Grupo 2 é mais homogéneo.

3

FAMÍLIA

6. A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas.

a) Dá 10 famílias que cumpram esta média.

b) Se os Pedalés são 5 em casa e os Rodrigues são 2, como podiam ser as outras 8 famílias?

SUPERMERCADO

7. Num supermercado há 8 marcas diferentes de pacotes de batatas fritas.

a) Que preço se pode pôr à cada marca para que o preço médio seja de USD 1.50

b) Se houver três marcas de batatas fritas que trazem preços recomendados de USD 0.75, USD 1.00 e USD 2.00, que preços se podem fixar às restantes marcas para que o preço médio seja de USD 1.50 ?

4

Anexo 3: Cuestionario utilizado en los estudios de la fase general de investigación.

1

TEMPO RECORRIDO EM 100m

1. O professor de educação física pediu a 10 alunos para registar o tempo recorrido por um estudante na distância de 100 metros, de forma independente e simultaneamente. Os tempos registados (em segundos) foram os seguintes:
15,05; 14,95; 15,05; 15; 10; 15; 14,90; 15; 14,95; 15;
Que tempo deve considerar o professor como estimação do tempo real recorrido pelo estudante e porque?

NUMA AULA DE CIENCIAS

2. Nove estudantes pesaram um objecto pequeno com um mesmo instrumento. Os pesos registados por cada estudante (em gramas) mostram-se a seguir:

6.2	6.0	6.0	15.3	6.1	6.3	6.2	6.15	6.2

Os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto. Qual dos seguintes métodos lhes recomendaria?

(*Marcar uma só das seguintes respostas)*

_____a. Usar o número mais repetido, que é o 6.2.

_____b. Usar 6.15, já que é o valor com mais cifras decimais.

_____c. Somar os 9 números e dividir a soma por 9.

_____d. Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8.

NÚMERO DE PERGUNTAS

3. Uma professora decide estudar quantas perguntas fazem os seus alunos. O registo do número de perguntas feitas pelos seus 8 alunos, durante uma aula, mostram-se na seguinte tabela:

	Nome do aluno							
	João	Lucia	Alberto	Ana	Pedro	Maria	Luis	Clara
N.º de perguntas	0	5	2	22	3	2	1	2

A professora quer resumir estes dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. Qual dos seguintes métodos a recomendarias?

(*Marcar uma só das seguintes respostas)*

_____a. Usar o número mais repetido, que é o 2.

_____b. Somar os 8 números e dividir por 8.

_____c. Descartar o 22, somar os outros 7 números e dividir por 7.

_____d. Descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7.

2

FILHOS POR FAMÍLIA

4. Uma instituição escolar numa pequena cidade, quis determinar o número médio de filhos por familia na sua cidade. Dividiram o número total de filhos da cidade por 50, que é o número total de familias. Se o número médio de filhos por familia é de 2.2, com qual das seguintes frases estás de acordo?

(*Marcar uma só das seguintes respostas)*

_____a. A metade das famílias da cidade tem mais de 2 filhos.

_____b. Na cidade há mais famílias com 3 filhos que com 2.

_____c. Há um total de 110 filhos na cidade.

_____d. Há 2.2 filhos por adulto na cidade.

_____e. O número mais comum de filhos numa família é 2.

FILHOS

5. Perguntamos, na cidade de Luanda, a determinadas famílias sobre o número de filhos que tinham, e obtivemos os seguintes dados:

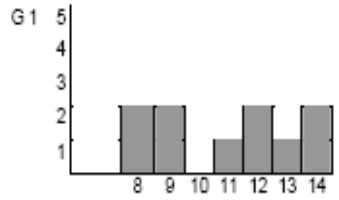
10 famílias não tinham filhos.
7 famílias tinham 1 filho.
5 famílias tinham 2 filhos.
3 famílias tinham 3 filhos.
Não havia nenhuma família com 4 filhos.

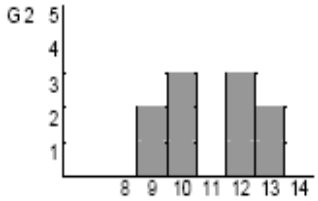
Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

3

GRÁFICO DE NOTAS

6. Vinte alunos de um Instituto participaram num concurso de matemática. Dez dos alunos formavam o Grupo 1 e os outros dez formavam o Grupo 2. As notas obtidas no concurso estão dadas nos gráficos que se apresentam a seguir:





Cada rectângulo no gráfico representa a nota dum aluno em particular. Por exemplo, no Grupo 1, os dois rectângulos que aparecem sobre o número 14 indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores.

6.A O Grupo 1 tem uma nota média de 11 valores.

a) Comprova que a nota média do grupo 2 também é igual a 11.

b) Que grupo te parece melhor? Justifique a tua resposta.

6.B Qual das seguintes afirmações é certa?

(Marcar uma só das seguintes respostas)

____ a) O Grupo 1 é melhor que o Grupo 2, porque no primeiro estão os alunos que obtiveram notas mais altas.

____ b) O Grupo 2 é melhor, porque no mesmo há mais alunos com notas positivas.

____ c) Não há diferenças entre os dois grupos, porque a média é a mesma em ambos os grupos.

____ d) Apesar das médias serem iguais nos dois grupos, o Grupo 2 é mais homogéneo.

____e) Nenhuma das afirmações anterior.

4

FAMÍLIA

7. A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas.

a) Indique 10 famílias que cumpram esta média.

b) Se os Pedalés são 5 em casa e os Rodrigues são 2, como podiam estar compostas as outras 8 famílias?

SUPERMERCADO

8. Num supermercado há 8 marcas diferentes de pacotes de batatas fritas.

a) Que preço se pode pôr à cada marca para que o preço médio seja de 1.50$?

b) Se houver três marcas de batatas fritas que trazem preços recomendados de 0.75$, 1$ e 2$, que preços se podem fixar às restantes marcas para que o preço médio seja de 1.50$?

PEIXES CAPTURADOS

9. A quantidade de peixes capturados por seis alunos durante uma actividade de lazer é 3, 4, 5, 3, 1, e 2 respectivamente, que faz uma média de 3 peixes por aluno [(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2) /6]. Mais tarde se descobriu que um outro aluno tinha participado na actividade embora não tenha capturado nenhum exemplar. Achas que o valor médio de peixes capturados por cada aluno varia ao considerar-se este último aluno? Justifique a sua resposta?

Anexo 4: Traducción al español del cuestionario utilizado en los estudios de la fase general de investigación.

1

TIEMPO RECORRIDO EN LOS 100m

1. A petición del profesor de educación física, 10 alumnos registraron de forma independiente y simultáneamente, el tiempo recorrido por un estudiante en la distancia de los 100 m. Los tiempos registrados (en segundos) fueron los siguientes:
15'05; 14'95; 15'05; 15; 10; 15; 14'90; 15; 14'95; 15;
¿Qué tiempo debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y por qué?

EN UNA CLASE DE CIENCIA

2. Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6'2	6'0	6'0	15'3	6'1	6'3	6'2	6'15	6'2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías?

(marcar una sola de las siguientes respuestas)

_____a. Usar el número más repetido, que es 6'2.

_____b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.

_____c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.

_____d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.

NÚMERO DE PREGUNTAS

3. Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación.

	Nombre de los alumnos							
	Juan	Lucía	Alberto	Ana	Pedro	María	Luis	Clara
Nº de preguntas	0	5	2	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomendarías?

(marcar una sola de las siguientes respuestas)

_____a. Usar el número más repetido, que es el 2.

_____b. Sumar los 8 números y dividir por 8.

_____c. Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

_____d. Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

2

HIJOS POR FAMILIA

4. El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Si el promedio de niños por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo?

(marcar una sola de las siguientes respuestas)

____a. La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños.

_____b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.

_____c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.

_____d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.

_____e. El número más común de niños en una familia es 2.

HIJOS

5. Hemos preguntado en Luanda a determinadas familias sobre el número de hijos que tenían y obtuvimos los siguientes datos:

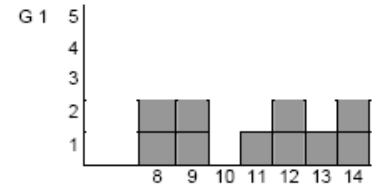
10 familias no tenían hijos
7 familias tenían 1 hijo
5 familias tenían 2 hijos
3 familias tenían 3 hijos
No hubo ninguna familia con 4 o más hijos.

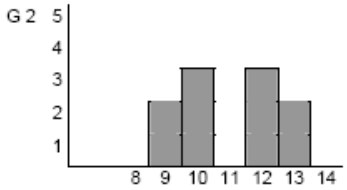
¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

3

GRÁFICA DE NOTAS

6. Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso están dadas en los gráficos que se presentan a continuación:





Cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1, los dos rectángulos que aparecen sobre el número 14 indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron un 14.

6.A El Grupo 1 tiene una nota media de 11.

a) Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 11.

b) ¿Qué grupo te parece mejor? Justifícalo.

6.B ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

____ a) El Grupo 1 es mejor que el Grupo 2 porque en el primero están los alumnos que obtuvieron más nota.

____ b) El Grupo 2 es mejor porque en el mismo hay más aprobados.

____ c) No hay diferencia entre los dos grupos, porque la media es la misma en ambos.

____ d) A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo.

____e) Ninguna de las afirmaciones anterior.

4

FAMILIA

7. La composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas.

a) Indique 10 familias que cumplan este promedio.

b) Si los Pedalés son 5 en la casa y los Rodrigues son 2, ¿cómo podría ser la composición de cada una de las otras 8 familias?

SUPERMERCADO

8. En un supermercado hay 8 marcas diferentes de papas fritas.

a) ¿Qué precio se puede poner a cada marca para que el precio medio sea de 1'50$?

b) Si hay tres marcas de papas fritas que traen un precio recomendado de 0'75$, 1$ y 2$, ¿qué precio se puede poner al resto de las marcas para que el precio medio sea 1'50$?

PECES CAPTURADOS

9. El número de peces capturados por seis alumnos en una actividad de ocio, es 3, 4, 5, 3, 1, y 2 respectivamente, que hace un promedio de 3 peces por alumno [(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2)/6]. Más tarde se descubrió que en la actividad había participado otro alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Crees que cambiará el valor medio de peces por alumno, al considerarse este último alumno? ¿ *Justifica tu respuesta*?

Anexo 5: Transcripción de las entrevistas realizadas a los alumnos que participaron en el segundo estudio de la fase general de investigación, según el idioma original (portugués).

Entrevista ao aluno A97CF

1. Entrevistador: Vejo que não respondeste a pergunta número 1. O que é que achaste dela. Era muito difícil ou tiveste outros motivos?
2. Aluno: A princípio estava complicada.
3. Entrevistador: Não se entendia.
4. Aluno: Sim, não se entendia. Então preferi ir fazendo as outras.
5. Entrevistador: Mas veja o que se pede aí por exemplo.
6. Aluno: [**Lee el problema en voz baja**]
7. Entrevistador: Agora de forma mais fria, qual é o tempo que você acha que deve considera o professor como estimação do tempo real percorrido pelo aluno.
8. Aluno: Um momento só. Foram 10 alunos?
9. Entrevistador: Sim, 10 alunos.
10. Aluno: [**Volta a ler o problema e pergunta**]: E estes 10 alunos cada um deu o seu tempo?
11. Entrevistador: O problema diz que os dez alunos registaram o tempo dum aluno que estava a correr. O registo foi feito ao mesmo tempo e de forma independente.
12. Aluno: [**Permanece em silencio algum tempo e diz**]: Por mim deve considerar-se o 15.
13. Entrevistador: Por que?
14. Aluno: Porque é o número que está mais repetido. Só por isso. Porque é o número que está mais repetido.
15. Entrevistador: Ou seja, como é o valor que mais está repetido para ti então é a melhor estimação do tempo, não é assim?
16. Aluno: Sim, no meu ver é por isso.
17. Entrevistador: OK. Vamos agora ver a segunda pergunta, que diz "Numa aula de ciência …, [**o entrevistador lê o enunciado do problema**]. Você escolheu a opção a), que diz "usar o número mais repetido.
18. Aluno: Sim, usar o número mais repetido.
19. Entrevistador: Achas que o número mais repetido é o ideal para estimar o peso desejado?
20. Aluno: Acho que sim.
21. Entrevistador: Por que não escolheste por exemplo a opção d)
22. Aluno: A que diz descartar o 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8?

23. Entrevistador: Sim.
24. Aluno: [**Depois de permanecer em silencio durante um longo tempo responde**]: Acho que…acho que somar os oito números e depois dividir, ia dar muita volta. Se desse para fazer assim, ehhh, tirar o 15 que é o número que tem maior valor, depois dividir por 8, assim ainda seria mais o menos. Agora somar os oito e depois dividir por … acho que ia dar muita volta.
25. Entrevistador: É muito trabalho?
26. Aluno: Umhum.
27. Entrevistador: Ok. Vamos ver agora o problema 3 "Número de perguntas". Neste problema elegeste a opção d) que diz "descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7"
28. Aluno: [**Lê o problema**]
29. Entrevistador: Olha, o problema diz que se pretende resumir os dados, para calcular o número típico de perguntas feitas neste dia. Por que elegeste a opção "descartar o 0, somar os 7 números e dividir por 7"?
30. Aluno: Um momento só. As perguntas a professora fez aos alunos?
31. Entrevistador: Não. É assim: A professora quer saber o número típico de perguntas que fazem os seus alunos. Num determinado dia, ela recolheu o número de perguntas feitas pelos seus alunos, que são os dados que aparecem na tabela.
32. Aluno: [**Permanece em silencio**]
33. Entrevistador: Sabes o que significa "número típico de perguntas"? Qual é a ideia que tens da expressão número típico de perguntas?
34. Aluno: Como é que eu posso dizer… ehhh…, um número, assim um número que normalmente tem feito as perguntas, assim, se normalmente tem feito quantas perguntas. Mais ou menos um, quase um número exacto, que tem feito as perguntas num dia. Assim, quantas perguntas têm feito num dia.
35. Entrevistador: OK. Então tu achas que para se encontrar este número tipo se devia descartar zero, somar os outros 7 números e dividir por 7?
36. Aluno: Sim.
37. Entrevistador: E quando se soma os números e se divide por 7, o que é que se está determinar?
38. Aluno: O número de perguntas que cada aluno faz num dia. Sim, porque uma vez que o João num dia não fez nenhuma pergunta os outros alunos fizeram. Então temos que somar o número e dividir. Por que um aluno ia fazer 22 perguntas num dia na professora. Acho que isso não é possível.
39. Entrevistador: Então achas que por isso é que não se devia somar os oito números e dividir por oito?
40. Aluno: Não. Uma vez que o João não fez nenhuma pergunta, é zero, não tem por quê considerar.
41. Entrevistador: OK. Então vamos a quinta pergunta. Aqui diz: perguntamos na cidade de Luanda …. [**o entrevistar lê a pergunta completa**]. Quando se fala de "número médio de filhos", qual é a ideia que tens de esta expressão?

42. Aluno: Quantos filhos as famílias entrevistadas têm.
43. Entrevistador: Explica melhor isso.
44. Aluno: Assim, um número, o de filhos que a família tem. Assim por exemplo, três famílias têm 2 filhos, outras têm 3, 4, por aí.
45. Entrevistador: Número de filhos?
46. Aluno: Sim, é o valor. O número de filhos, como posso dizer, é mesmo o número médio de filhos que as famílias têm.
47. Entrevistador: Está bem. Passemos a outra pergunta. Na pergunta 7, alínea a) se pediu para indicar 10 famílias que satisfaziam a média dada. O que fizeste foi atribuir valores. Como é que você encontrou estes valores? O que é que você fez?
48. Aluno: Fui escolhendo números de forma arbitraria de maneira que o sumatorio dos filhos desse um valor que a sua divisão pelo número de famílias desse 3.2, que é a composição média de família em Benguela.
49. Entrevistador: Exacto. E como é que você encontrou este valor? Você encontrou este valor arbitrariamente ou fez alguma operação para encontrar este valor.
50. Aluno: Fui escolhendo números de maneira que o seu somatório desse 32.
51. Entrevistador: Mas por que tinha que dar 32? Por que não 34 por exemplo?
52. Aluno: Se fosse 34, 34 dividido pelo número de famílias, que são 10, não havia de dar 3.2. O número que eu queria encontrar é 3.2 porque é a composição média da família em Benguela.
53. Entrevistador: Tu realizaste alguma operação para encontrar o valor 32?
54. Aluno: Para encontrar o valor 32?
55. Entrevistador: Sim.
56. Aluno: Fui escolhendo números. Qualquer número, assim não de forma repetitiva, de maneira que a sua soma desse 32.
57. Entrevistador: OK. Vamos supor que você não conhece estes valores. A partir dos dados do problema como é que você encontra o valor 32?
58. Aluno: Não, eu primeiro pus os nomes das famílias e depois fiquei assim a supor, assim por exemplo uma família tem 3, a outra tem 4, a outra tem 5 e fui somando o número de filhos, de maneira que ao dividir por 10 desse 3.2.
59. Entrevistador: OK. Vejamos agora o último problema "problema 9". Na tua resposta, dizes que o valor médio de peixes capturados não varia, simplesmente porque o outro aluno não capturou nenhum exemplar. Segundo o que se explica no enunciado, a expressão dada é para os seis alunos, não é assim?
60. Aluno: Sim.
61. Entrevistador: Suponha que fosse para os 7 alunos. Como é que você ia resolver?
62. Aluno: Se o outro aluno tivesse capturado?
63. Entrevistador: Sim, supondo que o outro aluno capturou por exemplo 2 peixes. Como é que você ia escrever a expressão?
64. Aluno: Deixa-me só ler mais uma vez o problema para compreender melhor.

65. Entrevistador: OK.
66. Aluno: [**Lê o problema em voz baixa e comenta**]. Se outro aluno capturou…
67. Entrevistador: Dos ou cinco peixes por exemplo.
68. Aluno: Cinco peixes? O valor havia de variar.
69. Entrevistador: Como escreverias a expressão? Podes escreve-la para que tenha uma ideia?
70. Aluno. Ficaria: 3 + 4 + 5+ 3 + 1 + 2 mais… os 5 que deste outro aluno. Sumaria o valor deste aluno e ia dividir por 7.
71. Entrevistador: OK. Mas em vez de 5, consideremos que o caso do aluno que não pescou nenhum exemplar. Como fica a expressão?
72. Aluno: Fica como está aqui [**Assinalando a expressão dada no enunciado**]. Fica a dividir por 6, não se considera.
73. Entrevistador: Se divide por 6?
74. Aluno: Umhum [**afirmando que sim**]
75. Entrevistador: OK. Me interessa saber também sobre o que respondeste na pergunta 5 "Filhos". Não te preocupes porque já é a ultima questão. Na resolução que apresentaste, somaste os valores 1, 2 e 3 e dividiste a soma por 3.
76. Aluno: Sim, foi o que fiz.
77. Entrevistador: Este valor 3, pelo que dividiste, a que dados se refere?
78. Aluno: Este valor 3?
79. Entrevistador: Sim, o 3 do divisor.
80. Aluno: Uma, duas, três famílias…
81. Entrevistador: OK. Somaste os valores das três famílias.
82. Aluno: Porque 10 famílias não tinham filhos, então não se considera nada. Aqui diz que não houve família com 4 filhos, também não se considera nada. Então ficaram apenas 7 famílias que tinham um filho, 5 famílias que tinham dois filhos e 3 famílias que tinham 3. Somei os valores dos filhos, que são 1, 2 e 3 e dividi por 3, por ser três famílias…
83. Entrevistador: OK.
84. Aluno: … E me deu 2.
85. Entrevistador: OK. Muito obrigado por ter colaborado comigo. É possível que te volte a chamar para falarmos ainda sobre outros aspectos da prova.

2) Entrevista ao aluno A103CF

86. Entrevistador: No problema número 1, onde se pergunta o tempo que o professor deve considerar para estimar o tempo real percorrido pelo estudante, tu respondeste que o professor deve considerar o valor 14.49 segundos, que é a média. Por que pensaste neste valor?

87. Aluno: Ehhhh, até já não me lembro.

88. Entrevistador: Não te lembras, não?

89. Aluno: [**Lê o problema e diz:**] Achei melhor esta forma porque, assim, podia ver…, bem, deram os tempos registados, que são este e assim para achar o tempo que o professor devia considerar achei melhor somar todos os tempos que nos deram e dividir por…, um, dois, três, quatro…

90. Entrevistador: São dez tempos.

91. Aluno: Sim, são dez. E dividi por 10.

92. Entrevistador: E por que usaste este procedimento?

93. Aluno: Por que? … Porque é o que eu achei melhor.

94. Entrevistador: OK. Mas veja por exemplo como estão os dados. Observando com atenção, não notas nada de especial entre os mesmos?

95. Aluno: Alguns estão repetidos.

96. Entrevistador: Uns estão repetidos. Certo. O que é que se pode ver mais? Analise bem os dados. No encontras alguma diferença que chame muita atenção? Olhe que os dados estão em segundos.

97. Aluno: [**Põe-se a pensar**]

98. Entrevistador: Por exemplo o valor 10. No achas que está muito distanciado dos demais?

99. Aluno: Sim está.

100. Entrevistador: Então, se todos os valores estão uns próximos dos outros, sendo somente o 10 que dista consideravelmente dos outros, isso não te chama atenção?

101. Aluno: [**Depois de um silencio prolongado responde**]: Eu acho que não.

102. Entrevistador: OK. Passemos ao problema 2. Olha que no primeiro problema somaste todos os valores e dividiste a soma por 10. Mas neste problema, que é mais ou menos similar ao anterior, escolheste a opção d) que diz: "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". Por que achas que aqui se devia excluir este valor?

103. Aluno: [**Lê o problema novamente e responde**]: Acho que cometi um erro. Deveria somar os 9 números.

104. Entrevistador: Deverias somar os 9 números e dividir a soma por 9. Te referes a opção c)?

105. Aluno: É. Só que esta prova, ou o teste que fizemos não é estatística, por isso, também não podíamos por coisas de estatística. Não nos disseram que era para revisar. Então a maior parte das perguntas que eu fiz, ehhh, fiz, tive que escolher uma delas.

106. Entrevistador: OK. Não importa. Mas veja também como estão os dados, comparados com os que se apresentam no problema 1. Não notas que há um valor que parece ser estranho?

107. Aluno: Sim, o 15.3.

108. Entrevistador: Os demais são mais ou menos iguais. Então, entre a opção "somar os nove números e dividir a soma por 9" e a que diz "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8", na sua opinião, qual deve ser a solução?

109. Aluno: Assim acho que deveria ser a opção d). Tendo em conta que aqui o valor 15.3 não tem nada a ver com os outros dados, acho deveria ser excluído.

110. Entrevistador: OK. Vamos analisar agora o que fizeste na pergunta 5 "Filhos". [**O entrevistador lê o problema**]. Quando nos referimos a "número médio de filhos", qual é a ideia que te vem à mente?

111. Aluno: Mediana.

112. Entrevistador: Estamos a falar de mediana. É isso?

113. Aluno: Sim. Não é isso?

114. Entrevistador: Qual é a ideia que tens de mediana? O que é que entendes por mediana?

115. Aluno: Aqui nos estão a pedir para calcular o número de filhos…

116. Entrevistador: Número médio de filhos.

117. Aluno: Sim, número médio de filhos das famílias entrevistadas. Então, neste caso peguei cada número de filhos, somei e dividi por dois, porque esta é a forma de acharmos a mediana, n/2, que é o número determinado de certo dado o filhos, então somei e me deu 6; e dividi por 2. E achei que o número médio das famílias entrevistadas é 3.

118. Entrevistador: OK. Vejamos agora o problema 7 "Família". Quando se diz que a composição média da família em Benguela é de 3.2, de que se está a falar?

119. Aluno: Composição média? Acho também que é a mediana. É para achar a mediana.

120. Entrevistador: Ou seja a expressão se refere a mediana.

121. Aluno: Eu acho que sim.

122. Entrevistador: OK. Olha, o que você fez foi atribuir valores a cada família. Como é que encontraste estes valores?

123. Aluno: Neste exercício, era para indicar 10 famílias que satisfizessem a média que era 3.2. Então, em cada família comecei a dar um certo número de filhos, fui tentando até que o número desse 32. E assim podia dividir por 10 para dar 3.2.

124. Entrevistador: E por que tinha que dar 32? Como é que encontraste o valor 32?

125. Aluno: Somando. A primeira família dei o valor de 3, …

126. Entrevistador: Não, antes disso, como é que encontraste o valor 32? Donde veio 32?

127. Aluno: O 32?

128. Entrevistador: Sim. Como é que tu sabias que a soma tinha que dar 32 e não 35 por exemplo?

129. Aluno: Havia um exercício que nós tínhamos feito no ano passado, isso foi nas aulas de matemática, 32 tinha que dividir por 10 e o resultado foi 3.2. Então,

naquela, eu tinha dúvida, perguntei a uma colega e ela me explicou que podia dar certo, então fui tentando, deu 3….

130. Entrevistador: Ou seja, você não utilizou outro procedimento para encontrar o valor 32.

131. Aluno: Não.

132. Entrevistador: OK. E com relação ao problema 8, não respondeste por que?

133. Aluno: Primeiro porque não entendi, e segundo porque não estava a ver como resolver, então, achei melhor deixar em branco, porque se resolvesse ia estar errado.

134. Entrevistador: OK, mas deverias tentar não?

135. Aluno: Não. Não gosto de arriscar.

136. Entrevistador: OK. Analisemos então o problema 9 "Peixes capturados". A tua resposta é que o valor médio não varia, porque …

137. Aluno: … porque o aluno não capturou nenhum exemplar ou peixe, por isso mesmo não varia.

138. Entrevistador: Mas veja. O enunciado apresenta uma expressão que mostra o cálculo da média de peixes com 6 alunos. Mas tarde apareceu um outro aluno que não capturou nenhum peixe. Neste caso, qual seria a expressão para calcular a média de peixes incluindo este aluno?

139. Aluno: Com o aluno que não capturou nada?

140. Entrevistador: Sim, considerando o aluno que não pescou nenhum exemplar. Como é que escreverias a expressão?

141. Aluno: A mesma coisa que eu fiz aqui: 3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2 dividindo por 6. [**Murmurando, diz: somando ia dar 18, dividindo por 6 é igual a 3**]. Sim, ia dividir por 6 e da 3.

142. Entrevistador: OK. Muito obrigado por ter colaborado comigo.

3) Entrevista ao aluno A99CF

143. Entrevistador: No problema 1, que diz, "O professor de educação física… [**lê-se o problema completo**], o que fizeste foi somar todos os valores…

144. Aluno: Sim, somar todos os valores e dividir por 10.

145. Entrevistador: Por que achas que esta deve ser a estimação do tempo real percorrido pelo aluno?

146. Aluno: Porque temos que somar os números e dividir pelo número de observações.

147. Entrevistador: Mas você antes de realizar esta operação, não notou nenhuma diferença entre os dados que foram registados pelos alunos?

148. Aluno: Diferença?

149. Entrevistador: Sim, diferenças entre os dados.

150. Aluno: Uns percorreram em mais tempo outros em menos, não? [***O aluno parecia não entender que os valores se referiam aos registos do tempo percorrido por um mesmo estudante. Mas ainda assim o entrevistador não fez caso a situação***]

151. Entrevistador: Sim, esta é uma das diferenças. Mas não notas algo que chame mais atenção?

152. Aluno: [**Permanece calado por alguns segundos e depois responde**]: Não.

153. Entrevistador: Não? Olha! Os tempos estão dados em segundos, não? Vamos ver se te ajudo a entender melhor o problema. Olha para os valores registados pelos alunos: 15.05, 14.95, 15.05, 15, 10, 15, 14.90, … [**o aluno continua**].

154. Aluno: 15, 14.95 e 15.

155. Entrevistador: OK. Não achas que a maioria dos tempos registados estão muito próximo de 15 segundos, excepto um deles?

156. Aluno: O 10?

157. Entrevistador: Sim, o 10. Não achas que este valor parece ser um dado estranho no conjunto dos demais valores?

158. Aluno: Acho que foi o aluno que correu em menos tempo.

159. Entrevistador: Não. Eles registaram o tempo dum aluno que estava a correr a distancia de 100 metros. Ou seja, um aluno estava a correr e os outros estavam a registar o tempo deste, cada um com o seu cronómetro.

160. Aluno: Ahh [**parecendo dizer que agora entendeu**]

161. Entrevistador: Não tiras nenhuma conclusão com relação a isso?

162. Aluno: [**Permanece em silencio durante alguns segundos e depois diz**]: Mas há uma coisa que eu não entendo.

163. Entrevistador: O que é que não entendes?

164. Aluno: Se todos começaram a registar o tempo ao mesmo tempo, como é que uns registaram 15.05, uns 14.95, 15, tempos tão diferentes? Acho que tinha que ser o mesmo tempo, não?

165. Entrevistador: Isso sempre sucede assim?

166. Aluno: Não porque na pergunta diz que todos registaram ao mesmo tempo.

167. Entrevistador: Sim. Podia dar-se o caso de que um aluno activou antes o cronómetro, ou activou com atraso. Isso pode acontecer, não?

168. Aluno: Ahhh, sim pode ser. É possível.

169. Entrevistador: E então, não notas nenhuma diferença nos dados?

170. Aluno: Acho que não tem.

171. Entrevistador: OK. Passemos então a pergunta 2. Neste problema, os alunos pretendem determinar com a maior precisão possível o peso real dum objecto. Ao responderes, sugeriste que para tal eles deveriam "usar o número mais repetido, que é o 2". Por que não indicaste também o valor mais repetido como solução, na pergunta anterior?

172. Aluno: Por que? Eu nem sequer pensei nisso.

173. Entrevistador: Não pensaste nisso?

174. Aluno: Eu só sabia que fiz a primeira, quando acabei a primeira fiz a segunda, e já. Não pensei em ver a diferença entre as duas.

175. Entrevistador: OK. Mas tu achas que por exemplo neste problema se podia utilizar a opção c) "somar os 9 números e dividir a soma por 9"?

176. Aluno: A alínea c)?

177. Entrevistador: Sim, ou por exemplo a opção d) "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8"?

178. Aluno: [**Lê as dois opções do problema**]

179. Entrevistador: Olha que no problema 1, tu somaste todos os valores…

180. Aluno: Sim e dividi por 10.

181. Entrevistador: Mas não foi o procedimento que sugeriste utilizar no problema 2.

182. Aluno: Umhum [**confirmando**]

183. Entrevistador: Então? Achas que se podia utilizar alguma outra opção?

184. Aluno: [**Depois de um silencio prolongado, responde**]: Acho que também dava para utilizar a alínea c) (somar os 9 números e dividir a soma por 9). Mas a alínea d) (descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8) acho que não. Por que temos que descartar o valor 15.3, se também faz parte dos dados?

185. Entrevistador: Porque faz parte dos dados, não?

186. Aluno: Não, aqui não tem! Não, tem sim. [**Se confunde, rectifica e depois continua com a resposta**]. Sim, também faz parte dos dados. Por que vamos descartar o valor 15.3, dividir por 8, se são 9 valores?

187. Entrevistador: Então por este motivo não se deve considerar a alínea d), não?

188. Aluno: Por mim, não.

189. Entrevistador: Mas se você observar os dados com mais cuidado, não sei se podias pensar de outra forma. Veja por exemplo, que quase todos os dados estão próximos de 6 ou 6.1, só um é que está muito fora dos demais. Não achas que este valor parece ser um valor raro neste grupo?

190. Aluno: É.

191. Entrevistador: Então, depois disso, achas que se podia utilizar a alínea d) ou não?

192. Aluno: A alínea d)? Depois desta analise? Pensando desta forma, acho que sim [**Risos**]. Mas acho que não, acho que não. Acho que devemos… faz parte dos pesos que todos os alunos calcularam.

193. Entrevistador: OK. Passemos ao problema 3 "Número de perguntas". A opção a) diz "Usar o número mais repetido". Quando se fala de "número mais repetido", de que medida estamos a fazer referencia?

194. Aluno: [**Fica calado**]

195. Entrevistador: Há vezes que se usa o termo, "mais frequente".

196. Aluno: Será que é a média?

197. Entrevistador: O que é que achas?

198. Aluno: Não sei.

199. Entrevistador: E quando se fala de média, no caso, média aritmética. Qual é a ideia que tens de média aritmética?

200. Aluno: Média aritmética?

201. Entrevistador: Sim.

202. Aluno: [**Não responde**]

203. Entrevistador: Podes dizer com as suas palavras a ideia que tens.

204. Aluno: Média aritmética? Eu acho que é para achar a média.

205. Entrevistador: E isso o que é?

206. Aluno: A mediana. Achar a mediana.

207. Entrevistador: Então a média e a mediada são a mesma coisa, não?

208. Aluno: Não digo que são a mesma coisa, mas estão interligados.

209. Entrevistador: Diga-me então na sua opinião, o que é a média e o que a mediana?

210. Aluno: [**Risos**]. Média é achar a média de um valor.

211. Entrevistador: E mediana?

212. Aluno: Mediana? Ehhhhh. Não sei o que dizer.

213. Entrevistador: OK. Não há problema. Continuemos com outro problema. Veja agora o problema 4 [**lê-se o problema**]. Aí diz: Se o número médio de filhos por família é 2.2, com qual das seguintes frase estais de acordo? Tu seleccionaste a alínea c) que diz "Há um total de 110 filhos na cidade". Por que marcaste esta opção?

214. Aluno: Eu fiz os cálculos primeiro. Como no problema dizem que dividiram o número total de filhos de toda cidade, que são 50, e …, como posso explicar?

215. Entrevistador: Se quiseres podes escrever.

216. Aluno: Umhum, 50 é o número total de famílias e 2.2 é o número de filhos.

217. Entrevistador: Número médio de filhos.

218. Aluno: Sim, número médio de filhos por família. Ehhh, [**Põe-se a pensar**].

219. Entrevistador: Tu seleccionaste a alínea c)

220. Aluno: Sim, eu não me lembro muito bem, mas sei que fiz alguns cálculos. Acho que multipliquei 50 por 2.2 e me deu 110. Sim foi isso, por isso é que eu escolhi a alínea c).

221. Entrevistador: OK. No caso da pergunta 5, se quer saber o número médio de filhos das famílias entrevistadas, a partir dos dados do enunciado. Como é que encontraste o valor 3? O que é que fizeste?

222. Aluno: Ehhh, n/2, não?

223. Entrevistador: O que é que significa n/2?

224. Aluno: Ehhh, acho que n é o número de famílias.

225. Entrevistador: E são quantas famílias neste caso?

226. Aluno: 6; 6 famílias. Entrevistaram 6 famílias. Ehhh [**Murmurando: Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?**]. Acho que o número médio das famílias entrevistadas é 2. São 2.

227. Entrevistador: E por que dividiste por 2?

228. Aluno: [**Pensa na resposta**]

229. Entrevistador: n/2, por que n/2?

230. Aluno: [**Pensa e responde**]: Acho que porque 2 é o número médio de filhos das famílias entrevistadas.

231. Entrevistador: Mas isso é precisamente o que se quer saber, não? Tu dividiste n por 2. Não é isso?

232. Aluno. Eu me lembro que queria resolver este problema de outra forma. Tipo: 10 famílias não tinham filhos, 7 famílias tinham 1 filho, … tipo, 7 famílias tinham 1 filho?

233. Entrevistador: Cada uma das 7 famílias tinha 1 filho.

234. Aluno. Sim, é isso. Das 5 famílias tinham 2 filhos, não é?

235. Entrevistador: Cada uma das 5 famílias tinha 2 filhos.

236. Aluno: Ah. Eu pensei em calcular, dividir o número de famílias pelo número de filhos.

237. Entrevistador: Por exemplo, como?

238. Aluno: Números de famílias, quantas famílias são? Ah, são 6 famílias. Acho que devemos somar estes valores…

239. Entrevistador: Quais valores?

240. Aluno: Número de famílias: 10 famílias não tinham filhos; 7 famílias tinham 1 filho; Então, são 17. Tenho que somar todos os valores, o resultado…

241. Entrevistador: Podes escrever. Quanto ia dar?

242. Aluno: [**Calculando numa folha a parte**]. Ia dar, ehhh, … seria 26 dividido por 25 (soma total de filhos dividido pela soma total de famílias). Acho que o resultado seria o número médio de famílias. Isso é o que eu queria fazer, mas depois pensei, é melhor fazer de outra forma. Fiquei em dúvida.

243. Entrevistador: E por que tinha que ser assim?

244. Aluno: Para achar o número médio de filhos, eu tinha que dividir o número de famílias pelo número total de filhos.

245. Entrevistador: Não é o contrário? Há quantos filhos?

246. Aluno: 26, não é isso?

247. Entrevistador: Mas por que achas que são 26?

248. Aluno: [**Põe-se a pensar**]: São 26, porque 10 famílias não tinham filhos, aqui são 7 filhos, aqui são 2, dois filhos por família, aqui são 10, aqui são 9. Em total são 26.

249. Entrevistador: Está bom. Vamos ver então o problema 7.a). O que é que fizeste para determinar a composição de cada una das 10 famílias?

250. Aluno: Fui dando valores.

251. Entrevistador: E por que foste dando valores?

252. Aluno: Porque eu tinha que ver quais são os valores que ao somar e dividido por 10 vai dar 3.2. Fui fazendo cálculos, assim, a primeira família se eu puser 3, a segunda se puser 2, e assim…, somado tudo e dividindo por 10 vai dar 3.2.

253. Entrevistador: E como é encontraste o valor 32?

254. Aluno: Quê?

255. Entrevistador: Por que a soma tinha que dar 32 e não 34 por exemplo? No efectuaste nenhuma operação antes de tudo para encontrar o valor 32?

256. Aluno. Eu fiz no rascunho. Sabia que 32 dividido por 10 ia dar 3.2.

257. Entrevistador: O que foi que fizeste?

258. Aluno: Primeiro eu fiz com alguns valores que não estavam a dar certo.

259. Entrevistador: Como é que encontraste este valor?

260. Aluno: Só tinha que ser o 32, porque com outros valores, dividindo por 10 no ia dar 3.2.

261. Entrevistador: OK. Está bom. Então vamos ver agora o problema 8.a) "Supermercado". Por que não o resolveste?

262. Aluno: Este problema estava a me complicar um bocado.

263. Entrevistador: Não há nenhuma semelhança com o problema anterior (Problema 7)?

264. Aluno: Com o problema 7?

265. Entrevistador: Sim.

266. Aluno: Ahhhh [**Pensa e diz**]. Acho que aqui tínhamos que fazer a mesma coisa, não é?

267. Entrevistador: Sim.

268. Aluno: Fazer a mesma coisa, achar…, como posso explicar? Achar o preço de cada uma das marcas. Tínhamos que dar um valor de maneira que ao somar desse 1.5, acho que é isso.

269. Entrevistador: Olha, no problema anterior a soma tinha que dar 32. Achas que aqui a soma daria 1.50? Achas que deveria ser este valor?

270. Aluno: [**Pensa e responde**]: Nós tínhamos que dar um preço a cada pacote de batatas fritas.

271. Entrevistador: Sim.

272. Aluno: Para nós descobrirmos se o preço médio vai dar igual a 1.50.

273. Entrevistador: Sim. Então que farias neste caso?

274. Aluno: [**Murmurando, diz: Temos que dar um preço a cada marca para que o preço seja de 1.50**].

275. Entrevistador: O quê é que farias antes de tudo?

276. Aluno: [**Murmura e diz**]: Não estou segura.

277. Entrevistador: Comparando com o que fizeste no problema 7.a). Ao dar aqueles valores, sabias que a soma tinha que dar 32, não é?

278. Aluno: Sim.

279. Entrevistador: E então neste caso o que é que se faz em primeiro lugar?

280. Aluno; [**Pensa e pergunta**]: Tens uma máquina de calcular?

281. Entrevistador: Sim, mas podes dizer simplesmente o que farias, sem fazer cálculos.

282. Aluno: Eu tenho que dar um preço a cada marca de batatas fritas, não?

283. Entrevistador: Sim.

284. Aluno: Depois eu terei que somar tudo. O valor da soma é o que seria o ponto médio ou tinha que dividir por 8?

285. Entrevistador: [**Não diz nada**].

286. Aluno: Foi o que fiz ai. [**assinalando o problema 7.a)**]

287. Entrevistador: [**Não diz nada**].

288. Aluno: Não sei professor.

289. Entrevistador: OK. Está bom. Explique agora o que fizeste no problema 9, onde respondeste que o valor médio de peixes capturados não varia ao considerar-se o último aluno, já que este não capturou nenhum peixe.

290. Aluno: [**Lê o problema e analisa a resposta que deu ao problema e responde**]: Acho que não. Acho que o valor médio de peixes capturados não varia porque o aluno que participou não capturou nenhum peixe. Acho que isso é o que contava.

291. Entrevistador: E se tivesse capturado 2 peixes, por exemplo?

292. Aluno: Se tivesse capturado 2 peixes? Ehhh, tínhamos que somar… [**Murmura**]. Aqui cada aluno capturou 3 peixes, não é?

293. Entrevistador: Não. De acordo com o enunciado, um aluno capturou 3, o outro 4, e assim sucessivamente.

294. Aluno: Ahh, sim, são seis.

295. Entrevistador: Sim, são 6. Mais tarde, descobriu-se um outro aluno que também tinha participado na actividade. Agora, queremos saber o que acontece com o valor médio de peixes capturados, se este último tivesse pescado, por exemplo, 3 peixes. Como é que escreverias a expressão?

296. Aluno: Eu acho que ia somar todos os valores de peixes capturados, contando com este aluno, e depois ia dividir por 7.

297. Entrevistador: OK. Mas como não capturou, neste este caso…

298. Aluno: Vou dividir por 6, porque o resultado de este aluno não conta. Ele não capturou nenhum peixe.

299. Entrevistador: OK. Muito obrigado por ter colaborado comigo.

4) Entrevista ao aluno A101CF

300. Entrevistador: No problema 5 "Filhos", dividiste n por 2. Podias explica-me o que significa isso?

301. Aluno: [**Lê o problema e analisa como o resolveu**]: O que é que eu fiz? Ahh. Eu dividi o número de filhos por 2, para achar o número médio. Sim, eu dividi o número de filhos por 2, porque geralmente para achar a média, ou a metade, se divide sempre por 2.

302. Entrevistador: Para achar a média? Qual é a noção que tens de média?

303. Aluno. Média?

304. Entrevistador: Sim. Tu disseste média e depois disseste metade. Foi isso não?

305. Aluno: Eu disse? [**Risos**]. Sim, aqui está, qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

306. Entrevistador: Sim, número médio de filhos. De que é que se está a falar neste caso. O que é significa esta expressão?

307. Aluno: Como posso explicar? Uma média, assim, mais ou menos como fiz. Por exemplo para dez mulheres duas ou três são estéreis, é mais ou menos uma média, uma estatística. Então eu acho que é o que se quer aqui. Para este X número de famílias, quantos filhos, … qual é o número médio de filhos de cada família. É como se fosse a estatística de uma cidade; Como aqui diz, na cidade de Luanda, para uma cidade que tem X famílias, a família X com certas pessoas, tem X filhos, para achar a média de quantos filhos têm por família, ou algo assim.

308. Entrevistador: Mas quando se fala de média ou valor médio, qual é a primeira ideia que te vem a mente?

309. Aluno: [**Mantém-se calado**].

310. Entrevistador: Por exemplo, a média de um conjunto de dados.

311. Aluno: [**Pensa e depois diz**]: Como explico? [**Risos**]. Sabes? É que há vezes que uma pessoa tem uma ideia e não consegue expressar, então fica complicado.

312. Entrevistador: OK. É que tu disseste que dividiste o número de filhos por 2, depois falaste em metade. Então, eu fiquei confundido com esta resposta. Por isso, te estou a pedir para que me expliques com mais detalhe sobre o que entendes por média aritmética de um conjunto de valores. Já ouviste falar de valor típico?

313. Aluno: Não.

314. Entrevistador: Já ouviste falar de valor mais frequente?

315. Aluno: Acho que esta já. Pelo menos a expressão não é estranha. Em termos escolares acho que não, mas assim por outras pessoas sim.

316. Entrevistador: O que é que achas que deve ser a média? O valor típico, o valor más frequente ou a metade?

317. Aluno: Eu acho que é o mais frequente [**murmura**]. Acho que sim.

318. Entrevistador: OK. Continuemos então com outro problema. Veja o problema 7.a). Há uma expressão que diz: "A composição média da família em Benguela é de 3.2

pessoas". O que é que significa isso para ti, se por exemplo alguém se dirige a ti nesses termos? Qual é a ideia que tiras desta frase?

319. Aluno: Quer dizer que em Benguela pode até haver uma família com mais de 3.2 pessoas, com 5 ou 4. Mas, se formos a fazer uma estatística ou achar a média, em quase todas as famílias encontramos este número de pessoas, 3.2; É isso.

320. Entrevistador: OK. Agora, se te disserem que a composição média de família em Benguela é de 3.2 pessoas, e te pedem para indicar a composição de 5 famílias que cumprem esta média. O que é que farias neste caso?

321. Aluno: Se a composição …

322. Entrevistador: Por exemplo, que a composição média de 5 famílias em Benguela é de 3.2 pessoas. O que é que farias para determinar a quantidade de pessoas que podiam formar cada uma de estas 5 famílias?

323. Aluno: [**Murmura e tenta realizar operações**].

324. Entrevistador: Olha que no caso do problema do questionário, pediu-se indicar 10 famílias que cumpriam a condição do problema, não?

325. Aluno: Sim, vejo.

326. Entrevistador: Mas agora, em vez de 10 famílias estou a pedir 5.

327. Aluno: Umhum.

328. Entrevistador: O que é que farias então?

329. Aluno: [**Permanece calado por algum tempo e depois responde**]: Tinha que encontrar um número de pessoas que eu pudesse dividir por 5 e me desse 3.2. Ou seja, que em cada família tem que ter X pessoas, que nós ao dividirmos pelo total nos da uma média de 3.2.

330. Entrevistador: E como é que íamos encontrar este valor?

331. Aluno: Aí é que está! [**Risos**]

332. Entrevistador: Mas no problema do questionário conseguiste encontrar este valor como se vê aqui [**assinalando a prova do aluno**].

333. Aluno: Sim, aqui encontrei, mas aqui foi fácil. Por que? O que é que eu fiz? Ah…

334. Entrevistador: Como é que encontraste o valor 32?

335. Aluno: Como? Ehhh. Porque eu sabia que 32 dividido por 10 ia dar o 3.2… ou seja, …, podia ser qualquer outro valor, acho que dos demais colegas ouve alguém que encontro outro valor, mas eu preferi usar este.

336. Entrevistador: Quer dizer que podia usar-se qualquer valor, como por exemplo o 35 ou 34, é isso?

337. Aluno: Sim. Se desse esta média de 3.2; Porque aqui disseram que se devia encontrar 10 famílias que cumpriam esta média.

338. Entrevistador: OK.

339. Aluno: Desde que cumprisse esta média, acho que estaria bem.

340. Entrevistador: E neste caso, tratando-se de 5 famílias, temos que encontrar este valor, não? Como é que tu ias calcula-lo?

341. Aluno: Deixa-me pensar.

342. Entrevistador: OK.

343. Aluno: Ahh. Aí se dividiu por 10, aqui temos que dividir por 5. [**Murmurando diz: Tenho que encontrar também este valores, ehhhh**].

344. Entrevistador: OK. Não imposta. Passemos a outra pergunta. Na pergunta 7.a) tu encontraste a composição de cada família. Mas não respondeste a alínea b) do mesmo problema. Por que?

345. Aluno: É sim, eu não respondi, acho que eu não entendi bem esta pergunta.

346. Entrevistador: [**Lê o enunciando**]

347. Aluno: Mas o que eu não entendi aqui é que aqui eles dizem que são 5…

348. Entrevistador: Sim, se dão alguns dados: Na família Pedale são 5 e os Rodrigues são 2. Então, se quer saber como é que estaria composta cada uma das outras 8 famílias, para que se cumprisse a média de 3.2.

349. Aluno: Mas eu queria saber se este total tem haver com este. Se tinha que ser 10. Porque 8 e 2 são 10. E este 5 aqui, o que é que estaria aqui a fazer?

350. Entrevistador: Olha, o objectivo é determinar a composição de cada uma das 8 famílias. Porque já se conhece a composição de 2 famílias: Os Pedalés e os Rodrigues; 8 e 2 são 10. Vês?

351. Aluno: Ahhh

352. Entrevistador: [**Repete a explicação**]

353. Aluno: Então é praticamente a mesma coisa. A média também é esa?

354. Entrevistador: Sim

355. Aluno: Ahhh

356. Entrevistador: Então, o que é que farias?

357. Aluno: Eles (referindo-se a família Pedalés) já são 5, aqui já são 2. Então, como eu já tenho 5 e já tenho 2, já são 7, era só por os outros valores. Eu podia usar os mesmos, se fosse para achar esta média eu podia usar os mesmos que eu usei aqui ia dar o 3.2.

358. Entrevistador: Correcto. Agora aqui no caso do problema 8.a). Também não respondeste: Qual é o preço que se podia atribuir a cada marca para que o preço médio fosse de 1.50?

359. Aluno: [**Fica em silencio**].

360. Entrevistador: Suponhamos que tens uma cantina. E tens 8 marcas diferentes de pacote de batatas fritas. Queres que o preço médio seja de USD 1.50. Qual é o preço que deves por a cada marca?

361. Aluno: [**Não diz nada**]

362. Entrevistador: O que é que farias? Só tens que dizer-me como procederias?

363. Aluno: Olha. Todas as alternativas que utilizei no momento de fazer o teste não deram certo e olha que não foram poucas [**Risos**]. Mas também estava com preguiça, preguiça mental.

364. Entrevistador: E agora, podes responder?

365. Aluno: Ummmm, Acho que não.

366. Entrevistador: OK. No caso do problema 9, se explica que a média de peixes capturados por 6 alunos é a que foi calculada mediante a expressão que aparece no enunciado. Mas tarde, se soube que um outro aluno tinha participado na actividade embora não tenha capturado nenhum peixe. Agora queremos saber se varia ou não o valor médio de peixes capturados ao considerar-se este último aluno.

367. Aluno: Não.

368. Entrevistador: Achas que não?

369. Aluno: Não, porque aqui fala-se da quantidade de peixe e não da participação. Então, se o aluno que também participou não capturou nenhum peixe, então não varia.

370. Entrevistador: Vamos lá ver. Vou perguntar-te de outra forma. Suponha que 5 amigas pretendem realizar uma festa. Para tal, deram, respectivamente, os seguintes valores em USD: 5, 10, 7, 2, e 5. Como é que podias determinar o valor médio da contribuição de estas 5 amigas?

371. Aluno: Soma-se os valores dados e divide-se por 2, ou… ou se tivessem uma quantia exacta para dar, podia dividir por esta quantia, mas neste caso, soma-se e divide-se por 2.

372. Entrevistador: Então assim se obteria o valor médio da contribuição?

373. Aluno: [**Confirma que sim, movendo a cabeça**]

374. Entrevistador: OK. Muito obrigado por colaborar comigo.

5) Entrevista ao aluno A106CF

375. Entrevistador: No problema 1, onde se pergunta o tempo que o professor de educação física devia considerar como estimação do tempo real recorrido pelo estudante e Por que, tu respondeste que o professor deve considerar 15 segundos, não é?

376. Aluno: Sim.

377. Entrevistador: Por que consideraste este tempo?

378. Aluno: Porque foi o tempo que 4 alunos registaram.

379. Entrevistador: OK. E isso que significa?

380. Aluno: Eu escolhi o 15 porque foi o número que o maior número de alunos escolheu. Tipo registou; Eu achei que fosse esse o melhor número que o professor pediu.

381. Entrevistador: E se por exemplo o professor somasse todos os valores registados e dividisse por 10, podia ser também?

382. Aluno: Esses todos que estão aqui?

383. Entrevistador: Sim.

384. Aluno: Acho que também podia ser.

385. Entrevistador: E se excluíssemos um dos valores e se somasse os outros 9, dividindo a soma por 9. Por exemplo excluir o 10, somar os outros 9 números e dividir a soma por 9, achas que também se podia fazer?

386. Aluno: Eu acho que tinha que ser mesmo somar os 10 valores e dividir por 10. Acho que por 9…

387. Entrevistador: Não podia ser, não?

388. Aluno: Acho que não.

389. Entrevistador: Isso significa que a resposta que deste ao questionário não está certa?

390. Aluno: Não, eu não disse que a minha resposta não está certa. Eu considerei o 15 porque era o número que estava mais repetido. Para estimar, considerei que é o número que o professor devia considerar.

391. Entrevistador: OK. Mas vamos ver uma coisa. Dos valores que estão dados, não notas diferenças e semelhanças que te chamam atenção?

392. Aluno: Tem alguns valores com vírgulas e outros que não. Uns são, … são dízimas e outros não.

393. Entrevistador: Veja por exemplo como estão os valores: Quase todos estão muito próximo de 15, mas há um que dista dos outros valores.

394. Aluno: Sim, o 14.95 está próximo do 15.

395. Entrevistador: Mas o 15.05 também está próximo do 15, não é?

396. Aluno: Sim.

397. Entrevistador: Mas há um que está muito distante, não é?

398. Aluno: Sim, o 10.

399. Entrevistador: É o único que está nestas condições?

400. Aluno: Sim.

401. Entrevistador: Não achas que parece um valor estranho neste grupo.

402. Aluno: Não acho.

403. Entrevistador: OK. Analisemos agora o problema 2 "Numa aula de ciência". Neste problema escolheste a alínea a) "usar o número mais repetido, que é o 6.2" como o melhor método que recomendas aos alunos para determinar com maior precisão possível o valor real do peso.

404. Aluno: Sim.

405. Entrevistador: Tu achas que se podia escolher por exemplo a alínea c) que diz "somar os 9 números e dividir a soma por 9"?

406. Aluno: Acho que sim.

407. Entrevistador: Por que?

408. Aluno: Acho que podia. Eles querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto. Acho que poderia.

409. Entrevistador: Então neste caso seriam duas soluções?

410. Aluno: Mas como só dava para escolher uma…

411. Entrevistador: E no caso da alínea d) que diz "excluir o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8" Achas que também podia considera-se como solução do problema?

412. Aluno: Acho que também podia considerar-se, porque 15.3 é um número que fugiu muito dos demais. Aqui temos o 6.2, 6.0, e aqui temos o 15.3… que fugiu muito dos outros.

413. Entrevistador: Dizes isso porque eu fiz este comentário com relação ao problema anterior?

414. Aluno: Também [**Risos**]

415. Entrevistador: OK. Vamos agora ver o problema 3, onde diz que a professora quer resumir os dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. Quando se fala de número típico de perguntas, qual é a ideia que te vem a mente?

416. Aluno: Não seria o número total de perguntas? Não tenho certeza, é uma hipótese.

417. Entrevistador: Fica a vontade, fale o que quiseres.

418. Aluno: É uma hipótese. No vou poder responder com… com precisão.

419. Entrevistador: OK. Como resposta, tu escolheste a alínea que diz: descartar o valor 0, somar os outros 7 números e dividir por 7. Por que?

420. Aluno: Porque o zero não conta. O zero não influencia em nada.

421. Entrevistador: OK. Não se podia usar a opção que diz "descartar o 22, somar os outros 7 números e dividir por 7"?

422. Aluno: Não, eu acho que é o zero mesmo.

423. Entrevistador: E a opção que diz "somar os 8 números e dividir por 8"?

424. Aluno: Continuo com a alínea d). Só tinha que se descartar o zero.

425. Entrevistador: OK

426. Entrevistador: No caso do problema 5, onde se pergunta: Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas? Quando se fala de número médio de filhos, de que é que se está a referir?

427. Aluno: Eu acho que é a soma, como posso explicar, [**Põe-se a pensar e lê o problema novamente**]. Acho que… acho que somaram o número de filhos e dividiram pelo número de famílias, acho que é isso. Foi assim que eu fiz.

428. Entrevistador: E é o que puseste na resposta? [**Como resposta pôs: 6/15 = 0,4**].

429. Aluno: Sim. Número de filhos dividido pelo número de famílias. Como 10 famílias não tinham filhos somei o 7, 5 e o 3. E os filhos 1, 2 e 3.

430. Entrevistador: OK. Analisemos agora o problema 6. a) "Gráfico de notas". Aí diz: Cada rectângulo no gráfico representa a nota de um aluno em particular. Por exemplo, no gráfico 1, os dois rectângulos que estão encima do valor 14, indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores. O Grupo 1 tem nota média de 11

valores. Então tinha que se comprovar que a nota média do Grupo 2 também era igual a 11. O que foi que fizeste?

431. Aluno: Eu utilizei a média aritmética.

432. Entrevistador: Quais são os dados que utilizaste?

433. Aluno: 8+9+10+11+12+13+14 e a soma dividi por 7. E me deu 11.

434. Entrevistador: Mas veja: O problema diz que por exemplo os dois rectângulos que aparecem por encima do 14 indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores. Como é que se pode interpretar isso no gráfico 2?

435. Aluno: Exactamente como explicou. No grupo 2, ninguém teve 14, dois tiveram 13, três tiveram 12, ninguém teve 11, 3 tiveram 10, dois tiveram 9 e ninguém teve 8.

436. Entrevistador: E então tu realizaste a operação. Somaste os valores 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 e dividiste por 7. O que é que indica o valor 7 neste caso?

437. Aluno: As notas. Aqui tem 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

438. Entrevistador: O número total de notas?

439. Alunos: Sim.

440. Entrevistador: OK. Vamos ver agora o problema 7.a). Aí se diz que a composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas. O que é que significa esta frase para ti?

441. Aluno: [**Põe-se a pensar e depois responde**]: Eu não tenho certeza, então prefiro não dizer nada.

442. Entrevistador: Se alguém te disser, por exemplo, fulana, em média arranja o cabelo 3.5 vezes por mês.

443. Aluno: 3.5?

444. Entrevistador: Sim, 3.5 vezes por mês. Qual é a conclusão que tiras desta afirmação?

445. Aluno: Eu entenderia melhor se fosse um número exacto. Por exemplo, 2 vezes por mês. Mas assim, 3.5, fica complicado.

446. Entrevistador: OK. Podes dizer-me como é que encontraste o valor 32 ao resolver o problema 7.a)?

447. Aluno: Eu perguntei ao professor se onde diz "indique 10 famílias que cumprem esta média" tínhamos que indicar famílias, assim, um número de famílias, que ao somar e dividir pelo número de famílias desse este valor… a média. Arranjei assim números e a soma deu 32.

448. Entrevistador: Mas este valor podia ser 34 ou 36?

449. Aluno: Se podia 36? Não sei sé este valor ia dar, não tenho máquina calculadora aqui. Mas se não desse 3.2 estaria errado.

450. Entrevistador: Mas como é que encontraste o 32?

451. Aluno: O 32? Somei estes números.

452. Entrevistador: Suponha que queres determinar a composição de 5 famílias que satisfazem a média de 3.2. O que é que farias? Só 5 famílias em vez de 10?

453. Aluno: Ia arranjar 5 números que aqui os números, a soma deles dava um número que dividido por 5 desse esse valor, a média.

454. Entrevistador: E como é que ias encontrar este número? O que é que farias para encontrar este tal número, de maneira que ao dividir por 5 desse como resultado 3.2?

455. Aluno: Antes de fazer, antes de encontrar o 32, eu fui dividindo números, assim, vários números, dividi pelo número de famílias para encontrar esse número; e eu encontrei o 32.

456. Entrevistador: Então primeiro encontraste o valor 32?

457. Aluno: Sim.

458. Entrevistador: E se fossem 5 famílias, também tinhas que encontrar um número que dividido por 5 desse 3.2?

459. Aluno: Sim.

460. Entrevistador: Agora pergunto: Como é que ias encontrar este número?

461. Aluno: Eu fui fazendo aqui na máquina. Com vários números, que ao dividir por 10 havia vezes que dava mais outras vezes dava menos. Fui tentando até que encontrei este número.

462. Entrevistador: O valor 32?

463. Aluno: Sim.

464. Entrevistador: OK. Foste provando com distintos valores, dividindo-os por 10, de modo que o resultado fosse 3.2?

465. Aluno: Sim, foi o que fiz.

466. Entrevistador: OK. E o que é que sucedeu para não usar o mesmo procedimento na pergunta 8.a)?

467. Aluno: Eu não fiz, porque não estava a ver como fazer, não sabia mesmo. Não soube interpretar bem a pergunta. É por isso que não consegui fazer.

468. Entrevistador: OK. Muito obrigado, mais uma vez, muito obrigado.

6) Entrevista ao aluno A121CF

469. Entrevistador: No problema "Tempo percorrido nos 100 metros", respondeste que para estimar o tempo real pelo estudante, o professor deve considerar o tempo de 15 segundos, porque é o tempo que mais se repete. Por que achas que o valor que mais se repete é o que se deve considerar na estimação?

470. Aluno: Porque se formos a ver, por exemplo, um teste, para saber se os alunos cabularam, ou para saber se são inteligentes…. eu vou pelo maior número de casos que se repetem,… observando o número de coincidências.

471. Entrevistador: Ou seja, as coincidências te indicam o resultado?

472. Aluno: Sim, através das coincidências eu suponho que o resultado pode ser o desejado. Se a maioria lhes deu este resultado, acho que é o que se deve considerar.

473. Entrevistador: OK. Vejamos agora a pergunta 2 "Num aula de ciência". Nesta pergunta se explica que os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto, depois das medições que realizaram com um mesmo instrumento. Das opções apresentadas, escolheste a alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". Por que pensaste nesta opção?

474. Aluno: Ehhhh, sinceramente no teste acho que eu dividi… acho que somei os outros 8 números, dividi por esses…, como posso dizer, somei os números todos, descartando o 15.3, e dividi por eles outra vez, mas como me deu um número elevado, achei que devia utilizar este método.

475. Entrevistador: Não te entendi. Me podes explicar de novo?

476. Aluno: Eu só somei os 8 números, descartei o 15.3.

477. Entrevistador: Ao total são 9 números.

478. Aluno: Sim, são 9, eu tirei…., como dizer, isolei o 15.3, somei os outros 8 e dividi por 8, e me deu um número elevado.

479. Entrevistador: Um número elevado? O que é que queres dizer com número elevado?

480. Aluno: Como é que posso explicar? [**Murmura: 6.2, …**].

481. Entrevistador: OK. E se escolhesses a opção da alínea c) "somar os 9 números e dividir a soma por 9" não daria um número elevado?

482. Aluno: Também daria, mas… ummmm [**Não conclui a ideia**].

483. Entrevistador: Está bem. Tu escolheste a opção da alínea d). Gostaria de saber por que escolheste esta opção e não a da alínea c) por exemplo?

484. Aluno: Não sei, porque isso é tipo tudo a mesma coisa, e eu estava muito em dúvida. Mas eu fui mais pela opção da alínea d), achei que podia ser esta., que podia ser esta.

485. Entrevistador: Então foi só por isso? Não te baseaste em nada para escolhê-la?

486. Aluno: [**Risos**]. É que também não me lembro bem, pelo tempo. Também descartei este valor, o 15.3, por ser o maior número no seio dos outros. A maioria deu 6.1, 6.2, 6 vírgula qualquer coisa. Como eu disse antes, as maiores coincidências dos números. Vi que os outros números eram aproximados, porque podiam ser reais. Então, pensei nesta onde se ignora o 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8.

487. Entrevistador: OK. Voltemos ao problema anterior. Se aqui pensaste em ignorar o 15.3, por que não procedeste da mesma forma no problema 1, se também há um valor que se apresenta mais ou menos as mesmas características?

488. Aluno: É, por acaso há. Sim, o 14. Temos o 14.90 e o 14.95.

489. Entrevistador: Qual é o valor que está mais ou menos distante dos outros, se consideramos o que explicaste no problema 2?

490. Aluno: Neste caso é o 10, não é? O 10. Mas como o 15 é…, ehhh, chamou-me atenção o 15, porque é um dado mais repetitivo, achei que devia ser este.

491. Entrevistador: Mas também no problema 2 há um dado que se repete com maior frequência, o 6.2.

492. Aluno: Sim, por isso é que eu descartei o 15.3, porque estava muito fora para ser considerado. Por que todos são 6 vírgula qualquer coisa excepto o 15.3?

493. Entrevistador: No problema 1, também se podia pensar da mesma forma, não achas? Por que quase todos os dados estão próximo de 15, com excepção do 10?

494. Aluno: Porque no problema 1 palpitou-me mesmo que o valor 15 devia ser a solução, por isso é que indiquei este valor como resposta.

495. Entrevistador: OK. Continuemos então com outros problemas. Vejamos o problema 3 "Número de perguntas".

496. Aluno: [**Lê o problema e comenta rindo-se**]: Agora vejo que nesta pergunta respondi quase a mesma coisa e já não me recordava.

497. Entrevistador: Bem. A resposta que marcaste aqui é similar a que indicaste no problema 1 (usar o valor mais repetido), mas é diferente da que deste no problema 2. Quero saber por que seleccionaste esta opção e não outra?

498. Aluno: Porque…, como posso dizer…, são dados, são dados secundários. Ao ser números repetidos, e eu me recordo que no ano passado ao resolver alguns problemas, nós fazíamos isso. O número mais repetido ou os números que mais apareciam eram os que tinham a probabilidade de estar certos. Por isso é que me baseei nisto.

499. Entrevistador: OK. E se por exemplo optássemos em descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7?

500. Aluno: Acho que também podia ser certo, mas eu não escolhi esta resposta. Pode ser uma opção certa, talvez eu não acertei na minha resposta ao indicar a opção "usar o número mais repetido".

501. Entrevistador: Achas que se podia excluir o zero?

502. Aluno: Eu acho que sim.

503. Entrevistador: E se elegemos a opção "somar os 8 números e dividir por 8"?

504. Aluno: Acho que é diferente porque… somando os 8 números, neste caso o zero estaria excluído e já ao dividir…

505. Entrevistador: Não é isso, me refiro a outra opção. Sem descartar o zero, somar os 8 números e dividir por 8?

506. Aluno: Sim. Podemos somar, incluindo o zero, mas ao dividir, o zero já não faz nenhuma diferença, não influenciaria em nada. Mas eu não fui por esta via.

507. Entrevistador: E se usássemos a opção que diz "Descartar o 22, somar os outros 7 números e dividir por 7"? Veja que por exemplo na pergunta 2 elegeste uma resposta que se parece a esta. Por que aqui não tiveste em conta esta opção?

508. Aluno: Porque… eu acho que os problemas 2 e 3 têm diferenças. A pergunta 2 está relacionada com pesos. Já na pergunta 3 "número de perguntas" é possível que a Ana tenha feito mesmo as 22 perguntas, porque isso pode acontecer. Os outros fizeram menos perguntas. É possível que ela tenha mais capacidade ou mais influências. Mas já na pergunta peso, não sei, acho que foi mais além dos demais

resultados. Acho que esta opção… podia até ser, mas eu não sei porque não fui com esta de descartar o 22.

509. Entrevistador: OK. Continuemos. Na pergunta 4, "Filhos por família", [**lê-se o problema completo**]. Considerando que o número médio de filhos por família é 2.2. Tu escolheste a opção que diz "Na cidade há mais famílias com 3 filhos que com 2". Me podes explicar o que entendeste nesta opção para que a elege-la?

510. Aluno: [**Lê o problema novamente**]

511. Entrevistador: Com base nos dados do problema, a resposta com a que concordaste é a que diz que na cidade há mais famílias com 3 filhos que com 2.

512. Aluno: Porque 2,2 é uma probabilidade, não é um dado… como é que eu posso explicar, não é um dado real, é uma aproximação. Se chegou até 2.2, para mim é…, como é que eu posso dizer…, acho que é mais uma aproximação, não é um dado real. E eu fui nesta afirmação porque de 2.2 para 3 não falta muita coisa, acho que a maioria tem 3, a minoria é que bate a 2; acho que a maioria tem 3 filhos e a minoria tem 2, porque 2.2 incide mais para 3 ou para 4 do que apenas 2. Se já é 2.2, é porque não é 2 exactamente. Por isso é que escolhi está afirmação.

513. Entrevistador: OK. Vamos ver agora as alíneas a) e b) do problema 7. Tu respondeste estas perguntas. Mas tal como estão as respostas, da a ideia de que em primeiro lugar determinaste a composição de cada família e depois comprovaste, para ver se a média era a que se indicava no problema. Explica-me como é que encontraste o valor 32?

514. Aluno: [**Analisa a resposta que deu**].

515. Entrevistador: Como é que encontraste o valor 32?

516. Aluno: [**Não responde, põe-se a pensar**].

517. Entrevistador: Deixa-me ver se te pergunto de outra forma. Em primeiro lugar encontraste o valor 32 o começaste por indicar a composição de cada família? Lembre-se que o objectivo era indicar 10 famílias que satisfaziam a média de 3.2.

518. Aluno: Eu fui.., como é que posso dizer, fui usando a probabilidade, porque a nossa professora nos ensinou, por exemplo, que se não se conhece um determinado número, ou não conhece os dados, deves começar do maior ao menor valor. Eu sabia que eram 10 famílias. Então, algum número dividido por 10 dava 3.2. Comecei pelos valores mais pequenos. Somava e dividia por 10, me dava um valor pequeno. Fui aumentando os valores. E então fui fazendo cálculos com números maiores. Vi que o resultado dava 3 vírgula alguma coisa e continuei. Quando o resultado fosse grande diminuía…. …. Como eram 10 famílias, tinha que escolher bem os números para que ao somar e dividir a soma por 10 me desse como resultado 3.2

519. Entrevistador: Ou seja, antes não tinhas calculado o 32?

520. Aluno: Não, não tinha.

521. Entrevistador: Foste dando valores e somavas?

522. Aluno: Sim, somava para ver se ao dividir por 10 me desse 3.2. Do valor que encontrasse, analisava se devia aumentar o diminuir nos valores.

523. Entrevistador: Já te imaginaste se por exemplo tivesses que determinar a composição de muitas famílias?

524. Aluno: [**Risos**]

525. Entrevistador: O que é que farias?

526. Aluno: Eu acho que se podia encontrar. Lembro-me que no ano passado resolvemos problemas utilizando este processo.

527. Entrevistador: É verdade? OK. Agora pensa comigo: 3.2 é a média, não é?

528. Aluno: Sim.

529. Entrevistador: 10 é o total de famílias, certo?

530. Aluno: Sim.

531. Entrevistador: OK. Existe alguma forma mais simples e prática para determinar o valor 32, sem utilizar o processo que usaste?

532. Aluno: Existir acho que existe, mas o que eu aprendi e o que está na minha cabeça é este método, que permite encontrar a solução do problema. Se existe outro método não sei, por isso é que usei este método. Acho que deve existir. Já tivemos casos idênticos ao resolver problemas em algumas provas, por isso é que usei este.

533. Entrevistador: OK. Por que não respondeste o problema 8 "Supermercado" alíneas a) e b)?

534. Aluno: Acho que o tempo estava apertado, pelo tempo que gastei ao pensar noutras perguntas.

535. Entrevistador: Podes tentar resolver este problemas agora, dando-te o tempo que quiseres?

536. Aluno: [**Lê o problema em voz baixa**]

537. Entrevistador: Se não te importas, tu ficas na sala do outro lado enquanto eu entrevisto os seus colegas. Pode ser?

538. Aluno: Não sei, não sei. É mesmo importante que eu resolva esta pergunta? [**Risos**]

539. Entrevistador: Não, não é isso. Como disseste que foi por falta de tempo, quero aproveitar este momento.

540. Aluno: É que agora tenho que estudar, porque tenho outras coisas por fazer.

541. Entrevistador: OK. Mas diga uma coisa: Achas que a pergunta 8 é mais difícil que a 7?

542. Aluno: É, é mais difícil.

543. Entrevistador: Por que dizes isso?

544. Aluno: Porque são coisas que eu não vi. Não tive exemplos iguais. As coisas que vimos são um pouco mais fáceis, mas como nunca fiz estas coisas…, pode ser até que sejam fáceis. Porque se eu fiz a pergunta 7, pode ser que também consiga esta [**referindo-se a pergunta 8**]. Mas de momento fico por aqui.

545. Entrevistador: OK. Muito obrigado pela disponibilidade.

7) Entrevista ao aluno A122CM

546. Entrevistador: Ao responderes o problema 2 "Numa aula de ciências", que diz que os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real dum objecto que mediram com o mesmo instrumento, tu elegeste a alínea c) "somar os 9 números e dividir a soma por 9". Por que achas que se deve usar esta opção?

547. Aluno: Eu fiz isso de acordo aquilo que aprendi em estatística, que normalmente quando nos apresentam uma condição em qualquer problema, então devemos procurar saber pelo número de observações, que neste caso são 9, não é, …, então devemos somar todos os valores que estão dados e dividir pelo número de observações.

548. Entrevistador: E o que é que encontramos neste caso?

549. Aluno: A média aritmética.

550. Entrevistador: A média aritmética.

551. Aluno: Sim, a média aritmética. Aqui diz que os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto. A forma ideal seria esta.

552. Entrevistador: OK. Podes dizer-me, por exemplo, Por que não escolheste a alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir a soma por 8"?

553. Aluno: [**Pensa e responde**]: Eu não escolhi esta opção porque…, bem, até certo ponto podia coincidir com o resultado da opção c). A grande desvantagem ao descartar o 15.3 é que o número de observações podia também diminuir. De 9 só teríamos 8. Também se podia usar, mas como dizem que querem determinar com a maior precisão possível eu tive que fazer num sentido global.

554. Entrevistador: Ou seja, como o problema diz que querem determinar o peso do objecto com a maior precisão possível, tinha que se considerar todos os dados, é isso não?

555. Aluno: Sim, foi por isso.

556. Entrevistador: OK. Vamos ver agora o problema 3 "Número de perguntas". [**O entrevistador lê o problema**]. Elegeste a opção da alínea d) "Descartar o 0, somar os 7 números e dividir a soma por 7". Por que elegeste esta opção e não outra?

557. Aluno: Bem, o que me fez pensar nesta opção é o seguinte: o quadro nos apresenta que o João era um número de …

558. Entrevistador: João não fez nenhuma pergunta.

559. Aluno: Sim, João não fez nenhuma pergunta. Neste caso, não é considerado alguém que não levantou nenhuma dúvida. Já os restantes apresentaram dúvidas. Então, a professora que…, não, eu descartei o zero, porque o objectivo primordial era achar…, a professora queria saber, ehhh…, o quê é que diz mesmo a pergunta?

560. Entrevistador: A professora quer calcular o número típico de perguntas feitas neste dia. Qual é dos seguintes métodos…

561. Aluno: Sim é isso, ela queria calcular isso. Nesta ordem de ideia, o João tinha que ser excluído porque não fez nenhuma pergunta, enquanto que os demais fizeram. Por isso descartei a possibilidade de incluir o 0.

562. Entrevistador: OK. Vamos ver algo mais neste problema. Que significa para ti a expressão "número típico de perguntas"?. A que se refere?

563. Aluno: Número típico de perguntas? O que posso entender é que refere-se só a um tipo de pergunta. [**Põe-se a pensar e continua com a resposta**]. Não, perdão. A vários tipos de perguntas.

564. Entrevistador: Ou seja, quando se fala de número típico de perguntas, a ideia é que se está a referir a vários tipos de perguntas, é isso?

565. Aluno: Sim

566. Entrevistador: OK. Também me interessa saber sobre o que respondeste na pergunta 5 "Filhos". [**O entrevistador lê o problema e pergunta**]. Onde diz, "qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?", o que é que entendes pela expressão "número médio"?

567. Aluno: Número médio de filhos é aquele que em condições normais podemos encontrar em qualquer casa. Nesta ordem de ideia, eu disse que o número médio de filhos das famílias entrevistadas é de 1, porque se nós notarmos que o número de casas que tinha 1 filho é maior com relação com o número de casas que não tinham filhos. Podemos constatar que da maior parte de casas que tinham filhos o número que nunca faltava é 1, ou seja havia sempre 1 filho.

568. Entrevistador: Ou seja, como o problema diz que "10 famílias não tinham filhos, 7 famílias tinham 1 filho, 5 famílias tinham 2 filhos, 3 famílias tinham 3 filhos, e que não havia nenhuma família com 4 filhos", para ti o número médio de filhos é aquele valor que…

569. Aluno: Aquele número que em condições normais encontramos na maior parte das casas que têm filhos.

570. Entrevistador: Das famílias entrevistadas.

571. Aluno: Sim, das famílias entrevistadas.

572. Entrevistador: E qual é esse número?

573. Aluno: É o 1. Porque se não encontramos aqui, aí encontramos 7, 15…, quer dizer, nesta ordem de ideia 10 famílias não tinham filho, e não tinha nenhuma família que não tinha filhos. Se nós notarmos aqui, há um número mais sobrelevado de famílias que tinham filhos e um número insignificante de famílias que não tinham filho.

574. Entrevistador: Por isso a resposta ao problema deve ser…

575. Aluno: … que o número médio de filhos das famílias entrevistadas é de 1 filho por cada família.

576. Entrevistador: Então não efectuaste nenhuma operação para encontrar este valor 1. Ou seja, encontraste este valor mediante esta análise, não é assim?

577. Aluno: Sim, mas também eu podia ir pela outra via. Analisando o número de observações das famílias entrevistadas. Nesta ordem de ideais podia calcular todas as famílias e o número de filhos, e depois podia dividir pelo número de famílias.

578. Entrevistador: Isso anularia a primeira ideia que apresentaste ou seria a mesma coisa?

579. Aluno: Como não fiz cálculos, só achei a média…, bem, agora não sei se ao fazer cálculos poderia dar o mesmo valor.

580. Entrevistador: Podes repetir o que ias fazer?

581. Aluno: Poderia pegar o número de observações, que neste caso são 25 famílias, e poderia dividir pelo número de filhos que têm as famílias, que neste caso são 4, não 6. Então, 6 dividido por 25, não sei quanto poderia dar, é possível que poderia dar aproximadamente este valor.

582. Entrevistador: OK. É tudo o que queria perguntar-te. Muito obrigado.

8) Entrevista ao aluno A125CM

583. Entrevistador: No problema 2 "Numa aula de ciências", elegeste a opção da alínea c) "somar os 9 valores e dividir a soma por 9". Por que preferiste esta alternativa?

584. Aluno: Sim, nas aulas nós vimos que para achar um resultado, temos que… ehhh…, temos que somar primeiro os números e depois dividir por…, como posso dizer, ehhh, posso dizer assim 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

585. Entrevistador: São nove números.

586. Aluno: Sim, quero uma linguagem assim…

587. Entrevistador: 9 dados?

588. Aluno: Sim, 9 dados.

589. Entrevistador: Nove observações.

590. Aluno: Sim, é isso, 9 observações, e dividimos por 9. Se aqui tivéssemos 7 observações, íamos somar os números e dividir por 7.

591. Entrevistador: OK.

592. Aluno: Isso é o que diz a… como posso dizer, o tipo de fórmula algébrica, que se aplica para achar o resultado.

593. Entrevistador: Isso quer dizer que em qualquer problema onde aparecem números, este é o método que se deve seguir?

594. Aluno: Sim, é o método que se deve seguir.

595. Entrevistador: Não depende do tipo do problema e da situação que se apresente?

596. Aluno: Não, não depende do problema.

597. Entrevistador: Olha que neste problema se explica que os estudantes querem determinar com maior precisão possível o peso real do objecto que foi medido com o mesmo instrumento. Neste caso, para determinar o peso real deste objecto escolheste a alínea c).

598. Aluno: Sim, somar os 9 números e dividir a soma por 9.

599. Entrevistador: E se tivesses seleccionado a alínea a) "usar o número mais repetido, que é o 6.2, que medida estaríamos usando?

600. Aluno: Se utilizássemos a alínea a)?

601. Entrevistador: Sim.

602. Aluno: É o mesmo caso. Mas só que geralmente, nós temos que seguir a fórmula algébrica, conforme eu disse. Nós não podemos inventar qualquer dado para poder achar … [Não termina a ideia].

603. Entrevistador: E se escolhêssemos a alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8"?

604. Aluno: Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8? Bem, esta alínea não se considera porque nos dados nos dão 9 observações, se fossem 8, e se tivéssemos 8 números, era outra coisa. Íamos somar os 8 números e depois dividir por 8.

605. Entrevistador: OK. Vejamos agora o problema 3. [**O entrevistador lê o problema e comenta**]. A professora quer resumir os dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. Tu elegeste como método recomendável, a alínea d) "Descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7".

606. Aluno: Sim, a alínea d). Porque a alínea d) é mesma coisa que nada. Mesmo se nós metêssemos o zero vai dar sempre o resultado que nós queremos. Agora, se em vez do zero fosse 1 ou 2, aí sim seria outra coisa. Por isso eu pensei em descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7.

607. Entrevistador: Mas veja. Quantos dados se indicam no problema? Quantas observações?

608. Aluno: São 8. Mas aqui falam em descartar o zero e somar os 7 números [**enfatiza assinalando na prova**], só os 7 números e dividir por 7.

609. Entrevistador: O zero não faz parte dos dados?

610. Aluno: Não, não faz parte. Por isso é que aqui diz descartar.

611. Entrevistador: Isso não entra em contradição com o que disseste no problema anterior, quando afirmaste que se deve considerar todas as observações dadas, já que aqui são 8?

612. Aluno: Sim, aqui são 8.

613. Entrevistador: Então por que não usaste este método?

614. Aluno: É que aqui a pergunta diz que devemos descartar o zero…

615. Entrevistador: Não. A pergunta não diz isso. Esta é uma das opções dadas. Foi a opção que seleccionaste. O que sucede é que no problema 2, disseste que sempre se deve somar todas as observações e dividir pelo número de observações. Eu quero saber por que não indicaste a opção relacionada com o pensamento que manifestaste no problema 2, ou seja a alternativa b)

616. Aluno: Olha, aqui dizem que a professora quer resumir os dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. No outro problema dizem que os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto. E se pergunta qual é o método que lhes recomendaria. Por isso, a resposta é somar os 9 números e dividir a soma por 9. Já aqui neste caso, a professora quer saber quantas perguntas foram feitas neste dia. Nós não podemos utilizar o método que utilizamos neste problema.

617. Entrevistador: Ou seja, aqui se deve descartar o 0, somar os outros 7 valores e dividir a soma por 7. Por que achas que se deve descartar o 0?

618. Aluno: Porque é a mesma coisa que nada. Mesmo que não descartarmos o zero é mesma coisa.

619. Entrevistador: Mas se não se descarta o zero estaríamos a sugerir a alínea b), não achas?

620. Aluno: A alínea b)? Somar os 8 números e dividir por 8? Sim, seria a alínea b). Mas aqui se diz descartar o zero e somar os outros 7 números. E aí se fala em somar os 8 números. É mesma coisa.

621. Entrevistador: OK. Analisemos agora o que fizeste no problema 4 "Filhos por família" [**o entrevistador lê o problema e comenta**]: De acordo com os dados apresentados no problema, optaste pela alternativa da alínea a) que diz "A metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos". Por que indicaste esta opção?

622. Aluno: [**Lê de novo o problema e comenta**]: No problema se diz que uma instituição escolar numa pequena cidade quis determinar o número médio de filhos por família na cidade. Bem, dividiram o número total de filhos da cidade por 50, que é o número total de famílias. Isso quer dizer que eles fizeram: 50 que é o número total de famílias…, ah, se o número médio de filhos por família é de 2.2, com qual das seguintes frase estais de acordo? É bem claro que a metade das famílias da cidade é de 2 filhos, porque aí nós fizemos 50 a dividir por… [**murmura: 50 dividido por 2.2?; 50?**] Sim, é verdade. Nós aqui dividimos o número total de famílias, que é 50 e… [**murmura mas não conclui**].

623. Entrevistador: Tu indicaste a opção que diz que a metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos.

624. Aluno: Sim.

625. Entrevistador: O problema diz que eles queriam determinar o número médio de filhos por família na cidade.

626. Aluno: Sim, eu fiz a média aritmética, é verdade; determinei a média aritmética. Somei os dados, depois dividi por 50. Me deu um número e dividi por 2.2. Fiz a soma da média aritmética, me deu um número, dividi por 50 e me deu 2.2. Sim, é isso. 2.2. Por isso é que eu escolhi esta alínea.

627. Entrevistador: Podes demonstrar agora numa folha o que disseste?

628. Aluno: [**Permanece calado**]

629. Entrevistar: OK. Se não podes fazer não é nenhum problema.

630. Entrevistador: Passemos então ao problema 5 "Filhos" [**o entrevistador lê o problema e diz**]: Tu concluíste que o número médio de filhos das famílias entrevistadas é 2, mas não mostraste como chegaste ao valor. Explique-me o que fizeste?

631. Aluno: Por que eu cheguei a esta conclusão? [**lê o problema**]

632. Entrevistador: Realizaste alguma operação para chegar a esta resposta?

633. Aluno: Sim, realizei operações.

634. Entrevistador: O que é que fizeste?

635. Aluno: [**Põe-se a pensar e mediante mímica fala em voz baixa**]

636. Entrevistador: O que é que me dizes?

637. Aluno. Não me lembro.

638. Entrevistador: OK. Passemos então ao problema 6 "Gráfico de notas, 6.B" [**o entrevistador lê o problema e diz**]: Com relaciona a pergunta que diz quais das afirmações é certa, tu elegeste a opção da alínea d) que diz que "Apesar de que as médias são iguais nos dois grupos, o Grupo 2 é mais homogéneo" O que é que entendeste pela expressão "mais homogéneo"?

639. Aluno: Nós temos que ver. Primeiro, aqui o grupo 1 começou por 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14. Mas o grupo 2, se vê que superou, por exemplo, enquanto que no grupo 1 temos 10, no grupo 2 temos 11. Se no primeiro Grupo teve 9, já no segundo se teve 10. É o que me levou a… [**não conclui**]. As médias são iguais, sim, são iguais nos dois grupos, mas o grupo 2 é mais homogéneo, porque …, como posso dizer, é mais elevado que o grupo 1. O grupo 1 começou bem, 8, 9, e por aí, mas depois o grupo 2 começou a subir. Aí é 8, mas aqui é 9, aí é 9 mas aqui é 10, depois 11, 12, 13 e 14.

640. Entrevistador: A ideia que tens de "mais homogéneo" é que as notas são mais altas? É isso que me queres dizer?

641. Aluno. Não é isso. Não é que as notas são mais altas. As médias são iguais mas no grupo 2 houve mais alterações, como posso dizer, ehhh, superou o grupo 1, está mais… [**não conclui**].

642. Entrevistador: Superar em que? Como o superou?

643. Aluno. Por exemplo, no grupo 1, aí nos indicam 10, mas no grupo 2 aqui aparece 11.

644. Entrevistador: Veja. No problema se diz: Por exemplo, no grupo 1, os dois rectângulos que aparecem por encima do número 14 indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores. Isso significa que onde não há rectângulos não houve alunos com aquelas notas, sim? Por exemplo, por encima do valor 11, no grupo 2, significa que nenhum aluno teve nota 1, entendes?

645. Aluno: [**Fica calado e admira**]: Ahhh. Então também aqui no 8 significa que nenhum aluno teve 8.

646. Entrevistador: Exactamente. Tu não leste este detalhe ao responder o problema?

647. Aluno. Eu li o problema, mas… [**justifica-se com base nas explicações que deu anteriormente**]

648. Entrevistador: Então qual é a ideia que tens da expressão "mais homogéneo"

649. Aluno: Mais homogéneo? Ehhh, mais homogéneo, é algo que, como posso dizer, que está no meio, está mais ou menos, está na média, sim, está na média. Isto é o que é mais homogéneo.

650. Entrevistador: OK. Muito obrigado. É tudo o que queria que me esclarecesses.

Anexo 6: Traducción al español de la transcripción de entrevistas realizadas en el segundo estudio de la fase general de investigación.

Entrevista al alumno A97CF

1. Entrevistador: No contestaste la pregunta número 1. ¿Podrías decirme por qué no lo hiciste?
2. Alumno: Al principio estaba complicada.
3. Entrevistador: ¿No se entendía?
4. Alumno: Sí, no se entendía. Así que fui resolviendo las otras.
5. Entrevistador: ¿Pero fíjate en lo que se pedía en el problema?
6. Alumno: [**lee el problema en voz baja**]
7. Entrevistador: Ahora, de forma más fría, ¿qué tiempo crees que debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y por qué?
8. Alumno: Vamos a ver. Fueron diez alumnos, ¿no?
9. Entrevistador: Sí, fueron diez alumnos.
10. Alumno: [**Vuelve a leer el problema y pregunta**]. ¿Cada uno de los diez alumnos dio su tiempo?
11. Entrevistador: ¡Mira! El problema dice que los diez alumnos registraron el tiempo de un alumno al mismo tiempo y de forma independiente.
12. Alumno: [**Permanece en silencio algunos segundos y contesta**]: Por mi debe considerarse el 15.
13. Entrevistador: ¿Por qué?
14. Alumno: Porque es el número que más está repetido, sólo por eso. Por ser el número que más está repetido.
15. Entrevistador: ¿Entonces crees que por ser el valor que más se repite debe ser la mejor estimación del tiempo deseado?
16. Alumno: En mi forma de verlo, sí.
17. Entrevistador: OK. Vamos a ver ahora la segunda cuestión que dice en una clase de ciencias… [**El entrevistador lee todo el enunciado del problema**]. En este problema has elegido el apartado a) que dice "usar el número más repetido, que es el 6'2".
18. Alumno: Sí, elegí el apartado a).
19. Entrevistador: ¿Crees que para estimar el peso en esta situación, el valor más repetido es el más indicado?
20. Alumno: Yo creo que sí.
21. Entrevistador: ¿Por qué no escogiste, por ejemplo, la opción d)?
22. Alumno: ¿La que pone descartar el 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8?
23. Entrevistador: Sí.

24. Alumno: [**Después de permanecer en silencio durante algunos segundos contesta**] Yo creo que…, yo creo que sumar los otros ocho números y después dividir, era dar muchas vueltas. Creo que, si fuese posible… por ejemplo, así, coger el 15 que es el número que tiene mayor valor, después dividir por 8, talvez así sería más fácil. Ahora, sumar los 8 números y volver a dividir por 8, creo que…
25. Entrevistador: ¿Es mucho trabajoso?
26. Alumno: Creo que sí.
27. Entrevistador: Veamos ahora el problema 3 "Número de preguntas". En este problema elegiste la opción d) que dice "descartar el 0, sumar los otros 7 números e dividir por 7".
28. Alumno: [lee el problema].
29. Entrevistador: ¡Mira! El problema dice que se pretende resumir los datos, para calcular el número típico de preguntas hechas en este día. ¿Por qué has elegido la opción d) "Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7"?
30. Alumno: ¡Sólo un momento! Las preguntas las hizo la profesora a los alumnos, ¿no?
31. Entrevistador: Mira, allí dice que la profesora pretende determinar el número típico de preguntas que hacen sus alumnos. En un día dado ella recogió el número de preguntas hechas por sus alumnos, que son los datos que aparecen en la tabla.
32. Alumno. [**Sigue callado**]
33. Entrevistador: ¿Cuando se habla de número típico, sabes a lo que se está refiriendo? ¿Qué idea te viene a la cabeza?
34. Alumno: ¿Qué es lo que puedo decir? Ehhhh… número típico de pregunta, es un número…, el número de preguntas que hacen normalmente; así, si normalmente hacen cuántas preguntas, un número exacto de cuantas preguntas hacen en un día.
35. Entrevistador: OK. ¿Entonces, crees que para encontrar este número tipo de preguntas, se debería descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7?
36. Alumno: Sí
37. Entrevistador: ¿Y cuando se suman los 7 numero y se divide por 7, qué es lo que se está buscando en este caso?
38. Alumno: El número de preguntas que cada alumno hace en un día, porque ya que Juan no hizo ninguna pregunta, las hicieron los demás. Entonces, sumamos estos números y dividimos. Ahora, también creo que no es posible que un alumno haga 22 preguntas en un día.
39. Entrevistador: ¿Entonces fue por eso que no elegiste la opción de sumar los ochos números y dividir por 8?
40. Alumno: No. Es que como Juan no hizo ninguna pregunta, no hay por qué considerarlo.
41. Entrevistador: OK. Pasemos a la pregunta 5 "Hijos". Allí se habla de número medio de hijos. ¿Qué es lo que entiendes por la expresión "número medio de hijos"?
42. Alumno: Significa cuántos hijos tienen las familias entrevistadas.
43. Entrevistador: ¿Me puedes explicar mejor eso?

44. Alumno: Número medio de hijos, es..., es el número de hijos que las familias tienen, así por ejemplo, 3 familias tienen 2 hijos, otras tienen 3, 4…
45. Entrevistador: ¿Número de hijos?
46. Alumno: Sí, es el valor; el número de hijos, ¿cómo puedo explicarlo?, un número, es lo mismo que el número medio que tienen las familias.
47. Entrevistador: Bueno; Pasemos entonces a la otra cuestión. En la pregunta 7, apartado a) se pidió que indicases 10 familias que cumplían la media dada. Tú indicaste estas 10 familias. ¿Cómo encontraste estos valores? ¿Qué hiciste?
48. Alumno: Fui escogiendo números, de forma arbitraria, de manera que la suma de personas, al dividir por el número de familias, diese 3'2, que es la composición media de la familia en Benguela.
49. Entrevistador: Exacto. ¿Pero has realizado alguna operación, antes de todo, para encontrar esta suma o la has encontrado arbitrariamente?
50. Alumno: No, fui eligiendo números de manera que la suma diese 32.
51. Entrevistador: ¿Pero por qué tenía que ser 32? ¿Por ejemplo, por qué no 34?
52. Alumno: No puede ser 34 porque dividiendo por el número de familias que son 10 no iba a dar 3'2 como resultado. El número que quería encontrar era el 3'2, porque es la composición media de la familia en Benguela.
53. Entrevistador: Entonces para encontrar el valor 32 efectuaste alguna operación, ¿no?
54. Alumno: ¿Para encontrar el 32?
55. Entrevistador: Sí.
56. Alumno: Fui escogiendo números, números, cualquier número, sin repetir, de manera que su suma diese 32.
57. Entrevistador: OK. Supón que todavía no tienes estos valores que constituyen la composición de cada familia. Dada la media y el número total de familias, qué harías para encontrar el valor 32?
58. Alumno: Yo antes que todo, puse los nombres de las familias. Después fui suponiendo, por ejemplo, que una familia tiene 3 personas, otra tiene 3, otra tiene 4, 5 y fui sumando el número de hijos, de manera que al dividir por 10 diese 3'2.
59. Entrevistador: OK. Continuemos. Veamos el último problema "Problema 9". En tu respuesta, dices que el valor de peces capturados no varía, simplemente porque el alumno no capturó ningún pez. De acuerdo con la información del enunciado, la fórmula indicada se refiere a la media de peces capturados por seis alumnos, ¿no es así?
60. Alumno: Sí.
61. Entrevistador: Ahora, supón que tenemos siete alumnos. ¿Cómo ibas a escribir la expresión?
62. Alumno: ¿Si el otro alumno hubiese capturado?
63. Entrevistador: Sí, suponiendo que el otro alumno capturó dos peces, por ejemplo.
64. Alumno: Déjame leer el problema una vez más.
65. Entrevistador: OK.

66. Alumno: [**Lee el problema en voz baja**]. Si el otro alumno capturó…
67. Entrevistador: Dos o cinco peces por ejemplo.
68. Alumno: ¿Cinco peces? El valor tendría que variar.
69. Entrevistador: ¿Cómo escribirías la expresión? ¿Puedes mostrármela para tener una idea?
70. Alumno: Quedaría 3 + 4 + 5 + 3 + 1+ 2 más… más los 5 de este otro alumno. También sumaría ese valor y dividiría la suma por 7.
71. Entrevistador: OK. Pero en vez de eso, consideremos el caso en que el alumno no pescó ningún ejemplar. ¿Cómo queda la expresión?
72. Alumno: Queda igual como está aquí [**señalando al enunciado del problema**]. La división queda por 6.
73. Entrevistador: ¿La división queda por seis?
74. Alumno: Ajá [**afirmando que sí**]
75. Entrevistador: OK. Ahora me interesa saber también lo que has contestado en el problema 5 "Hijos". No te preocupes porque ya es la última cuestión. En la resolución que presentaste, sumaste los valores 1, 2 y 3 y dividiste por 3.
76. Alumno: Sí, fue lo que hice.
77. Entrevistador: ¿Podrías decirme de dónde vino el 3 por el que dividiste? ¿A qué se refiere este valor?
78. Alumno: ¿El 3?
79. Entrevistador: Sí, el 3 del divisor.
80. Alumno: una, dos, tres familias…
81. Entrevistador: tres familias…
82. Alumno: …porque allí dice que 10 familias no tenían hijos, entonces no se considera; aquí dice que no hubo ninguna familia con 4 hijos, tampoco se considera. Así que quedaron sólo 7 familias que tenían un hijo, 5 familias que tenían dos y tres familias que tenían 3 hijos. He sumado el valor de los hijos, que son 1, 2 y 3 y dividí por 3, por ser tres familias…
83. Entrevistador: OK.
84. Alumno: … y me dio 2.
85. Entrevistador: OK.

Entrevista al alumno A103CF

86. Entrevistador: En el problema número 1, donde se pregunta qué tiempo debe considerar el profesor para estimar el tiempo real recorrido por el estudiante, tú contestaste que el profesor debe considerar el valor 14,49 segundos. ¿Por qué has pensado en este valor?
87. Alumno: Ehhh, ya no me acuerdo.

88. Entrevistador: ¿Ya no te acuerdas?

89. Alumno: **[Lee el problema, observa la respuesta que dio y dice:]** Creí mejor este procedimiento porque así podía ver…, bueno, dieron los tiempos registrados, que son estos, y así para hallar el tiempo que el profesor debía considerar creí mejor sumar todos los tiempos y dividir por el número…, uno, dos, tres cuatro…***[Contando el número de datos].***

90. Entrevistador: Son diez tiempos.

91. Alumno: Sí, son diez tiempos. Y dividí por 10.

92. Entrevistador: ¿Y por qué usaste este procedimiento?

93. Alumno: Porque… porque es el que yo creí mejor.

94. Entrevistador: OK. Pero mira como están los datos. Observando con atención, ¿no notas nada de especial en los mismos?

95. Alumno: Algunos están repetidos.

96. Entrevistador: Cierto, algunos están repetidos. ¿Qué se puede notar más? Analice bien los datos. ¿No notas otra diferencia que te llama atención? Los datos están en segundos.

97. Alumno: [**Se pone a analizar**]

98. Entrevistador: Mira, ¿no ves que el 10, por ejemplo, está muy alejado de los demás?

99. Alumno: Sí, lo está.

100. Entrevistador: Si observas todos los tiempos no notas que es el único valor que está un tanto distante de los demás? ¿O crees que eso no es una diferencia?

101. Alumno: [**tras un silencio prologando, contesta**]: Yo creo que no.

102. Entrevistador: OK. Pasemos al problema 2. Fíjate que en el primer problema sumaste todos los valores y dividiste por 10. Pero en el problema 2, que es más o menos similar al primero, elegiste la opción d) que dice, "descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8". ¿Por qué crees que aquí se debía excluir este valor?

103. Alumno: [**lee el problema en voz baja y contesta**]. Creo que cometí un error. Debería sumar los 9 números.

104. Entrevistador: Deberías sumar los 9 números y dividir por 9. ¿Te refieres a la opción c) del problema?

105. Alumno: Eso es. Sólo que esta prueba, o el test que nos han hecho no es estadística, por eso, tampoco no íbamos a poner cosas de estadística. Además, no nos dijeron que se debían revisar los apuntes. La mayor parte de las preguntas las contesté porque que tenía que escoger una de las opciones.

106. Entrevistador: OK. Pero si también ves cómo están dispuestos los datos, tal como en el problema 1, ¿no parece existir un dato que se destaca más que los otros? ¿No te parece?

107. Alumno: Sí, el 15'3

108. Entrevistador: Los demás son más o menos iguales. Entonces, entre la opción "sumar los nueve números y dividir por 9" y la que dice "descartar el 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8", en su opinión, ¿cuál debería ser la solución?

109. Alumno: Creo que debería ser la opción d) teniendo en cuenta que el 15'3 no tiene nada que ver con los otros datos.

110. Entrevistador: OK. Vamos analizar ahora lo que hiciste en la pregunta 5 "Hijos". [**El entrevistador lee el problema**]. Cuando nos referimos a "número medio de hijos", ¿cuál es la idea que te viene?

111. Alumno: Mediana.

112. Entrevistador: Tú idea es que el número medio es lo mismo que mediana, ¿eso es?

113. Alumno: Sí, ¿no es eso?

114. Entrevistador: ¿Cuál es la idea que tienes de mediana?, ¿Qué es la mediana para ti?

115. Alumno: Aquí nos están pidiendo calcular el número de hijos…

116. Entrevistador: Número medio de hijos.

117. Alumno: Sí, número medio de hijos de las familias entrevistadas. Entonces en este caso cogí cada número de hijos, sumé y dividí por dos, porque esta es la forma de calcular la mediana, n/2, que es el número determinado de cierto dado o hijos, entonces sumé y me dio 6; y dividido por 2. Así que, luego hallé el número medio de las familias entrevistadas que es 3.

118. Entrevistador: OK. Veamos ahora el problema 7 "Familia". Cuando se habla de composición media de la familia ¿de qué se está hablando?

119. Alumno: ¿Composición media? Creo que se trata de la mediana.

120. Entrevistador: O sea, la expresión se refiere a la mediana.

121. Alumno: Yo creo que sí.

122. Entrevistador: OK. Pero de todas formas, lo que hiciste fue atribuir valores a cada familia. ¿Cómo fue que encontraste estos valores?

123. Alumno: En este problema se debía encontrar 10 familias que cumplían esta media de 3'2. Entonces, a cada familia atribuí un cierto número de hijos, fui intentando hasta que el número diera 32 y así podía dividir por 10 para dar 3'2.

124. Entrevistador: ¿Y por qué debería dar 32? ¿Cómo has encontrado 32?

125. Alumno: Mediante la suma. A la 1ª familia he dado el valor 3…

126. Entrevistador: Pero antes de eso, ¿cómo encontraste el valor 32? ¿De dónde vino el 32?

127. Alumno: ¿El 32?

128. Entrevistador: Sí, ¿cómo sabías que la suma tenía que dar 32 y no 35, por ejemplo?

129. Alumno: Había un ejercicio que habíamos resuelto, eso fue en las clases de matemáticas y al dividir 32 por 10 el resultado fue 3'2. Así que, cuando resolví el problema tenía dudas. Pregunté a una colega y ella me explicó que podía ser el resultado. Luego fui intentando, intentando…

130. Entrevistador: Es decir, ¿no utilizaste ningún procedimiento para encontrar el valor 32?

131. Alumno: No.

132. Entrevistador: OK. Y con relación al problema 8, no contestaste. ¿Por qué?

133. Alumno: Primeramente, porque no entendí el problema; en segundo lugar porque no veía cómo resolverlo. Entonces creí mejor no contestar. Y además, aunque lo hiciera la respuesta no sería correcta.

134. Entrevistador: ¿No deberías, al menos, intentarlo?

135. Alumno: No, no me gusta arriesgar.

136. Entrevistador: OK. Analicemos ahora el problema 9 "Peces capturados". Tú respuesta es que el número medio de peces no varía, y justificas que es porque…

137. Alumno: …porque el alumno no capturó ningún ejemplar o pez, por eso no varía.

138. Entrevistador: Ajá. Pero en el enunciado se plantea una fórmula que indica el cálculo de la media de peces con 6 alumnos. Más tarde apareció otro alumno que no capturó ningún pez. En este caso, ¿cómo estaría formulada la expresión para calcular la media incluyendo este alumno?

139. Alumno: ¿Con el alumno que no capturó?

140. Entrevistador: Sí, con el alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Cómo se plantearía la expresión?

141. Alumno: Sería: 3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2 dividiendo por 6. [**Murmurando, dice: sumando iba a dar 18, dividiendo por 6 son 3**]. Sí, iba a dividir por 6 y da 3.

142. Entrevistador: OK. Muchas gracias. Gracias por haber colaborado conmigo.

Entrevista al alumno A99CF

143. Entrevistador: En el problema 1, que dice… ***[El entrevistador lee el problema]***... lo que hiciste fue sumar todos los valores…

144. Alumno: Sí, sumar todos los valores y dividir por 10.

145. Entrevistador: ¿Por qué esta debe ser la estimación del tiempo real deseado?

146. Alumno: Porque debemos sumar todos los datos y dividir por el número de observaciones.

147. Entrevistador: OK. ¿Pero antes de efectuar esta operación, no observaste ninguna diferencia en los datos que fueron registrados por estos los alumnos?

148. Alumno: ¿Diferencia?

149. Entrevistador: Sí, diferencias en los datos.

150. Alumno: Unos recorrieron en más tiempo y otros en menos, ¿no? [***El alumno parecía no comprender que los datos se referían a los registros del tiempo recorrido por un mismo estudiante. Aún así, el entrevistador no hizo caso a eso***]

151. Entrevistador: Sí, ésta es una de las diferencias. ¿Pero no notas algo más llamativo entre los datos?

152. Alumno: [**permanece callado por algunos segundos y después contesta**] No.

153. Entrevistador: ¿No? ¡Mira! Los tiempos están dados en segundos, ¿no? Vamos a ver si te ayudo a entender mejor el problema. Veamos los datos: 15'05; 14'95; 15'05; 10; 15; 14'90… [Y el alumno continúa].

154. Alumno: 15; 14’95; y 15.

155. Entrevistador: OK. ¿No crees que la mayor parte de los datos está muy cerca del 15, con excepción de uno de ellos?

156. Alumno: ¿El 10?

157. Entrevistador: Sí, el 10. ¿No crees que este valor parece ser un dato extraño en el conjunto de los demás valores?

158. Alumno: Me parece que fue el alumno que recorrió menos tiempo.

159. Entrevistador: No. Ellos registraron los tiempos de un alumno que estaba corriendo. Es decir, un alumno corrió la distancia de los 100m y los 10 estaban registrando los tiempos, cada uno con su cronometro.

160. Alumno: Ah [**Pareciendo decir que ahora entendió**].

161. Entrevistador: ¿No sacas ninguna conclusión con respecto a eso?

162. Alumno: [**permanece en silencio durante algunos segundos e después dice**:] Pero hay algo que yo no entiendo.

163. Entrevistador: ¿Qué es lo que no entiendes?

164. Alumno: Si todos registraron los tiempos a la vez, ¿cómo es posible que unos tengan 15’05, otros 14’95, 15, tiempos tan diferentes? Creo que debía ser el mismo tiempo. ¿No?

165. Entrevistador: ¿Crees que siempre debe pasar eso?

166. Alumno: Es que en la pregunta se dice que los tiempos fueron registrados de forma simultanea.

167. Entrevistador: Sí. Podría darse el caso de que un determinado alumno activase el cronometro muy temprano o un poco tarde, ¿no crees que eso puede pasar?

168. Alumno: Ahhhh, sí, puede ser, es posible.

169. Entrevistador: Y entonces, ¿no hay nada que te llama atención en los datos?

170. Alumno: Yo creo que no hay diferencias.

171. Entrevistador: OK. Pasemos al problema 2. En este problema, los alumnos pretenden determinar con la mayor precisión posible el peso real de un objeto. En tú respuesta sugeriste que para ello debían “usar el número más repetido, que es el 6’2. ¿Por qué no indicaste también, como solución, el valor más repetido, en el problema anterior?

172. Alumno: ¡por qué! Yo ni siquiera pensé en eso.

173. Entrevistador: ¿No pensaste en eso?

174. Alumno: Yo sólo sabía que después de contestar la primera pregunta tenía que contestar la segunda y ya está. No pensé en determinar la relación entre las dos preguntas.

175. Entrevistador: OK. ¿Pero tú crees que podría utilizarse el apartado c) “sumar los 9 números y dividir la suma por 9”?

176. Alumno: ¿El apartado c)?

177. Entrevistador: Sí. O por ejemplo la opción d) "descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8".

178. Alumno: [**lee las dos opciones**]

179. Entrevistador: Mira. En el problema 1 tú sumaste todos los valores…

180. Alumno: Sí, y dividí por 10.

181. Entrevistador: Pero no fue el procedimiento que sugeriste utilizar en el problema 2.

182. Alumno: Ajá [**confirmando**].

183. Entrevistador: ¿Crees que se podría hacer eso?

184. Alumno: [**Tras un silencio prolongado, contesta**] Creo que también podría utilizarse la opción c) (sumar los 9 números y dividir la suma por 9). Pero el apartado d) (descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8) creo que no. ¿Por qué había de descartarse el 15'3, si también hace parte de los datos?

185. Entrevistador: ¿Por ser un valor de los datos?

186. Alumno: ¡No, aquí no tiene! No, sí tiene. [**Se confunde, rectifica y después contesta**] Sí, también es parte de los datos. ¿Por qué íbamos a descartar el 15'3 y dividir por 8, si son 9 alumnos?

187. Entrevistador: Entonces por este motivo no se debe considerar la opción d), ¿no?

188. Alumno: Por mi, no.

189. Entrevistador: Pero analicemos con más cuidado todos los datos a ver si podrías pensar de otra forma. Observa por ejemplo, que todos los valores están cerca de 6 o 6'1, hay uno que está muy alejado de los demás. ¿No notas que este valor, parece ser un valor raro en este grupo?

190. Alumno: Sí, parece.

191. Entrevistador: Después de este análisis, ¿crees que se podría utilizar la opción d) o no?

192. Alumno: ¿El apartado d)? ¿Después de este análisis? Pensando de esta forma, creo que sí [**Risas]**. No, no creo, creo que no, es parte de los pesos y debemos calcularlo.

193. Entrevistador: OK. Pasemos al problema 3 "Número de preguntas". En la opción a) se dice "Usar el número más repetido". Cuando se habla del "número más repetido" ¿a qué medida estamos haciendo referencia?

194. Alumno: [**Se queda callado**]

195. Entrevistador: A veces se usa el término, "más frecuente".

196. Alumno: ¿No será la media?

197. Entrevistador: ¿Qué crees?

198. Alumno: No sé.

199. Entrevistador: Y cuando se habla de media, en el caso, la media aritmética, ¿cuál es la idea que te viene?

200. Alumno: ¿Media aritmética?

201. Entrevistador: Sí

202. Alumno: [**Permanece callada**]

203. Entrevistador: Puedes decir con tus palabras, lo que te viene a la mente.

204. Alumno: ¿Media aritmética? Yo creo que es para hallar la media.

205. Entrevistador: ¿y eso qué es?

206. Alumno: La mediana. Hallar la mediana.

207. Entrevistador: ¿Entonces la media y la mediana son la misma cosa?

208. Alumno: No diría que son la misma cosa, pero están interrelacionados.

209. Entrevistador: ¿Dígame entonces, en su opinión, lo que es la media y lo que es la mediana?

210. Alumno: [**Risas**] Media es hallar la media de un valor.

211. Entrevistador: ¿Y mediana?

212. Alumno: ¿Mediana? Ehhh. No sé que decir.

213. Entrevistador: OK. No pasa nada. Vamos a continuar. Fijémonos ahora en el problema 4. [**Leyendo la pregunta**]. Allí dice: Si el número medio de hijos por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo? Elegiste la opción c) que dice "hay un total de 110 hijos en la ciudad. ¿Por qué elegiste esta opción?

214. Alumno: Primeramente hice los cálculos. Como en el problema se dice que dividieron el número total de hijos de toda la ciudad por 50, y… ¿cómo puedo explicar?

215. Entrevistador: Si quieres escribir puedes hacerlo.

216. Alumno: Ajá, 50 es el número total de familias, y 2'2 es el número de hijos.

217. Entrevistador: Número medio de hijos.

218. Alumno: Número medio de hijos por familia. Ehhh [**se pone a pensar**].

219. Entrevistador: En tu respuesta elegiste la opción c).

220. Alumno: Sí, es que yo no me acuerdo exactamente, pero sé que efectué algunos cálculos. El 50 creo que lo multipliqué por 2'2 y me dio 110. Sí, por eso seleccioné la opción c).

221. Entrevistador: OK. Con respecto al problema 5, se pretende saber cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas, partiendo de los datos del enunciado. ¿Qué fue lo que hiciste para encontrar el resultado?

222. Alumno: Ehhh, n/2, ¿no?

223. Entrevistador: ¿Qué significa el n/2?

224. Alumno: Ehhh, creo que n es el número de familias.

225. Entrevistador: ¿cuántas familias hay?

226. Alumno: 6, 6 familias. Entrevistaron a 6 familias. Ehhh [**susurrando: ¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?]** Creo que el número medio de las familias entrevistadas es 2, son 2.

227. Entrevistador: ¿Y por que divides por 2?

228. Alumno: [**piensa en la respuesta**].

229. Entrevistador: ¿Por qué divides por 2?

230. Alumno: [**piensa y contesta**]. Creo que porque 2 es el número medio de hijos de las familias entrevistadas.

231. Entrevistador: Pero eso es precisamente lo que se quiere saber, ¿no? Tú dividiste n por 2. ¿No es eso?

232. Alumno: Yo me acuerdo que quería resolver este problema de otra forma. Así, por ejemplo: aquí tenemos, 10 familias no tenían hijos, 7 familias tenían 1 hijos… ¿las 7 familias tenían 1 hijo?

233. Entrevistador: Cada una de las 7 familias tenía 1 hijo.

234. Alumno: Sí, es eso. Las 5 familias tenían 2 hijos, ¿no?

235. Entrevistador: Cada una de las 5 familias tenían 2 hijos.

236. Alumno: Ah. Yo pensé en calcular, dividir el número de familias por el número de hijos.

237. Entrevistador: ¿Cómo lo ibas hacer?

238. Alumno: Número de familias, ¿cuántas familias son? Ah, son 6 familias. Creo que debemos sumar estos valores…

239. Entrevistador: ¿Cuáles?

240. Alumno: Número de familias: 10 familias no tenían hijos; 7 familias tenían 1 hijo; Así que son 17, tengo que sumar todos los valores, el resultado…

241. Entrevistador: Puedes escribir. ¿Cuánto iba a dar?

242. Alumno: [**calculando**]. Iba a dar… ehhh…, ah, iba a hacer 26 dividido por 25 (suma total de hijos dividido por la suma de las familias). El resultado creo que seria el número medio de familias. Eso es lo que quería hacer, después pensé, que sería mejor hacerlo de otra forma. Me quede confusa.

243. Entrevistador: ¿Y por qué tenía que ser así?

244. Alumno: Para hallar el número medio de familias, yo tenía que dividir el número de familias por el número total de hijos.

245. Entrevistador: ¿No será al revés? ¿Cuántos hijos hay?

246. Alumno: 26, ¿no es eso?

247. Entrevistador: ¿Pero porqué crees que son 26?

248. Alumno: [**Se pone a pensar**] Son 26, porque 10 familias no tenían hijos, aquí ponen 7 hijos, después ponen 2, dos hijos por familia, allí ponen 10, allí 9. En total son 26.

249. Entrevistador: OK. Vamos al otro problema. Problema 7.a). ¿Qué hiciste para determinar la composición de cada una de las 10 familias?

250. Alumno: Fui dando valores

251. Entrevistador: ¿Y por qué fuiste dando estos valores?

252. Alumno: Porque yo tenía que ver cuáles eran los valores, que al sumar y dividiendo por 10 diese 3'2. Fui haciendo los cálculos, así, la 1ª familia 3, la segunda 2 y así sucesivamente, sumando todo y dividiendo por 10 va a dar 3'2.

253. Entrevistador: ¿Y cómo encontraste el valor 32?

254. Alumno: ¿Qué?

255. Entrevistador: ¿Por qué la suma tenía que dar 32 y no 34 por ejemplo? ¿No efectuaste ninguna operación antes de todo para encontrar el 32?

256. Alumno: Lo hice en el borrador. Sabía que 32 dividido por 10 daba como resultado 3'2.

257. Entrevistador: ¿Qué hiciste?

258. Alumno: Primeramente, lo hice con algunos valores, con los cuales el resultado no daba el valor 32.

259. Entrevistador: ¿Pero cómo fue que encontraste el valor 32?

260. Alumno: Sólo tenía que ser el valor 32, de modo que al dividir por 10 encontrase el 3'2.

261. Entrevistador: OK. Está bien. Veamos el problema 8. a) "Supermercado". ¿Por qué no lo resolviste?

262. Alumno: Este problema me resultó un poco complicado.

263. Entrevistador: ¿No encontraste en él semejanzas con el problema anterior (Problema 7)?

264. Alumno: ¿Con el problema 7?

265. Entrevistador: Sí.

266. Alumno: Ehhh [**Piensa y dice**:] Creo que aquí deberíamos hacer la misma cosa, ¿no?

267. Entrevistador: ¿Sí?

268. Alumno: Hacer lo mismo, hallar… ¿cómo lo puedo decir?, hallar el precio de cada una de las marcas. Teníamos que atribuir un valor de manera que al sumar diese 1'5, creo que es eso.

269. Entrevistador: ¡Mira! En el problema anterior la suma tenía que dar 32. ¿Crees que aquí la suma tenía que dar 1'50? ¿Crees que debería dar este valor?

270. Alumno: [**Piensa**]. Nosotros tenemos que dar un precio a cada paquete de papas fritas.

271. Entrevistador: Sí.

272. Alumno: Para descubrir si el precio medio va a dar 1'50.

273. Entrevistador: Sí. ¿Entonces que harías?

274. Alumno: [**murmurando: hay que dar un precio a cada marca para que el precio sea de 1'50**].

275. Entrevistador: ¿Qué es lo que tú harías primeramente?

276. Alumno: [**murmurando y dice**] No estoy seguro.

277. Entrevistador: Comparando con lo hiciste en el problema 7. a). Al atribuir aquellos valores, sabías que la suma había de dar 32, ¿no?

278. Alumno: Sí.

279. Entrevistador: ¿Y entonces en este caso, que es lo que se hace, primeramente?

280. Alumno: [**Piensa y pregunta**] ¿Tienes alguna maquina de calcular?

281. Entrevistador: Sí, pero puedes decirme solamente lo que harías, sin hacer los cálculos.

282. Alumno: Yo tengo que atribuir un precio a cada marca de papas fritas, ¿no?

283. Entrevistador: Sí

284. Alumno: Después tendría que sumar todos los valores. ¿El valor de la suma es el que sería el punto medio o tendría que dividir por 8?

285. Entrevistador: [**No dice nada**]

286. Alumno: Fue lo que yo hice aquí [**señalando el problema 7 a)].**

287. Entrevistador: [**No dice nada**]

288. Alumno: No sé, profesor.

289. Entrevistador: Está bien. Explícame lo que hiciste en el problema 9, en donde contestaste que el valor medio de peces capturados no varía al considerarse el último alumno, porque éste no capturó ningún pez.

290. Alumno: [**Analiza previamente la respuesta que dio al problema y dice**]. Creo que no. Creo que el valor medio de peces capturados no varía porque el alumno que participó no capturó ningún pez. Para mi eso es lo que contaba.

291. Entrevistador: ¿Y si hubiese capturado 2 peces, por ejemplo?

292. Alumno: ¿Si hubiese capturado 2 peces? Así tendríamos que sumar… [**Murmura**]. Y aquí cada alumno capturó 3 peces, ¿no?

293. Entrevistador: No. De acuerdo con el enunciado un alumno capturó 3, el otro 4 y así sucesivamente.

294. Alumno: Ah, son 6.

295. Entrevistador: Sí, son 6. Más tarde se descubrió que otro alumno también había participado en la actividad. Ahora quiero saber que pasaría con el valor medio de peces capturados, si este último hubiera pescado 2 ejemplares, por ejemplo. ¿Cómo escribirías la expresión?

296. Alumno: Creo que sumaría todos los valores de los peces capturados, contando con este alumno y después dividiría por 7.

297. Entrevistador: OK. Pero si no captura ningún pez, en este caso…

298. Alumno: Yo voy a dividir por 6, porque el resultado de este alumno no cuenta, porque no capturó ningún pez.

299. Entrevistador: OK. Muchas gracias por haber colaborado conmigo

Entrevista al alumno A101CF

300. Entrevistador: En el problema 5 "Hijos", tú dividiste n por 2. ¿Podrías explicarme eso?

301. Alumno: [**Vuelve a leer el problema**]. ¿Qué hice yo? Ahh. Dividí el número de hijos por 2, para hallar el número medio. Sí, he dividido el número de hijos por 2, porque en general cuando es para hallar la media, o la mitad, se divide siempre por 2.

302. Entrevistador: ¿Para hallar la media? ¿Cuál es la noción que tienes de media?

303. Alumno: ¿Media?

304. Entrevistador: Sí. Tú dijiste media y después dijiste mitad. ¿Fue eso, no?

305. Alumno: ¿Lo dije? [**Risas**]. Sí, aquí se pregunta, ¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

306. Entrevistador: Sí, el número medio de hijos. ¿De qué se trata en este caso? ¿Cuál es la noción que tienes de eso?

307. Alumno: ¿Cómo lo puedo explicar? Una media, es más o menos como lo hice. Por ejemplo para diez mujeres, dos o tres son estériles, es más o menos una media, una estadística. Así que creo que es lo que se quiere aquí. Para este X número de familias, cuantos hijos, cuál es el número medio de hijos de cada familia, como si fuese la estadística de una cierta ciudad, una ciudad. Como aquí dice en la ciudad de Luanda, para una ciudad que tiene X familias, la familia X con ciertas personas, con X hijos, para hallar la media de cuántos hijos tiene por familias. Es algo así.

308. Entrevistador: ¿Pero cuando hablas de media, o valor medio, de qué estamos hablando?

309. Alumno: [**Se mantiene callada**]

310. Entrevistador: Por ejemplo, la media de un conjunto de datos.

311. Alumno: [**Piensa y después dice**] ¿Cómo lo explico? [**Risas**]. ¡Sabes! Es que a veces tenemos una idea y no la logramos expresar, es complicado.

312. Entrevistador: Es que tú dijiste que habías dividido el número de hijos por 2, después hablaste de mitad, y me quedé confuso en tu respuesta. Por eso te estoy pidiendo que me expliques con más detalles tu idea sobre la media aritmética de un conjunto de valores. ¿Ya has oído hablar del valor típico?

313. Alumno: No.

314. Entrevistador: ¿Has oído hablar del valor más frecuente?

315. Alumno: Creo que este sí. Por lo menos la expresión me suena. En términos escolar es que no, pero en otros lugares, sí.

316. Entrevistador: ¿Qué crees que debe ser la media? ¿El valor típico, el valor más frecuente, o la mitad?

317. Alumno: Yo creo que es el más frecuente [**susurrar**]. Creo que sí.

318. Entrevistador: OK. Situémonos ahora en el problema 7.a). Observa la expresión que dice "la composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas. ¿Qué

significa eso para ti? Si por ejemplo alguien te dice que la composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas por familias, ¿Qué es lo que sacas de eso?

319. Alumno: Eso significa, que en Benguela, puede incluso que haya una familia con más de 3'2 personas, con 5 o 4. Pero, si hacemos una estadística o hallar la media, en casi todas las familias encontraremos este número de personas, 3'2. Es eso.

320. Entrevistador: OK. Ahora, si te dicen que la composición media de familia en Benguela es de 3'2 personas. Y te piden indicar la composición de 5 familias que cumplen esta media. ¿Qué harías en este caso?

321. Alumno: Si la composición…

322. Entrevistador: Por ejemplo, la composición media de 5 familias en Benguela es de 3'2 personas. ¿Qué harías paras determinar la cantidad de personas que podrían componer cada una de estas 5 familias?

323. Alumno: [**Murmura e intenta realizar operaciones**].

324. Entrevistador: Mira que en el caso del problema del cuestionario, se pide indicar 10 familias que cumplen la condición del problema, ¿no?

325. Alumno: Sí, veo.

326. Entrevistador: Pero ahora, en vez de 10 familias estamos hablando de 5.

327. Alumno: Ajá.

328. Entrevistador: ¿Qué harías para determinar la composición de cada una de estas 5 familias?

329. Alumno: [**Permanece callada por algún tiempo y después contesta**]. Tenía que encontrar el total de personas de modo que al dividir por 5 diese 3'2. Es decir, que en cada familia existirían X personas, y luego al dividir por el total, iba a dar la media 3'2.

330. Entrevistador: ¿Y entonces cómo encontrarías este valor?

331. Alumno: [**risas**] Ahí está el problema.

332. Entrevistador: Pero en el problema del cuestionario conseguiste encontrarlo, como se ve aquí [**El entrevistador señala en la prueba del alumno**].

333. Alumno: Sí, ahí lo encontré, pero ahí fue fácil. ¿Por qué? ¿Qué es lo que hice? Ah…

334. Entrevistador: ¿Cómo encontraste el valor 32?

335. Alumno: ¿Cómo? Ehhh. Porque yo sabía que el 32 dividido por 10 iba a dar 3'2, es decir, si… podría ser cualquier otro valor, creo que de los demás colegas hubo alguien que encontró otro valor, pero yo he preferido usar este.

336. Entrevistador: Significa que podrías usar cualquier valor, como por ejemplo el 35 o 34, ¿es eso?

337. Alumno: Sólo si diese esta media de 3'2. Porque aquí dijeron que se debería encontrar 10 familias que cumplían esta media.

338. Entrevistador: OK.

339. Alumno: Desde que cumpliese la media, creo que estaría bien.

340. Entrevistador: Y en este caso, tratándose de 5 familias, hay que encontrar este valor, ¿no? ¿Cómo ibas a calcularlo?

341. Alumno: Déjame pensar.

342. Entrevistador: OK.

343. Alumno: Ah. Allí se dividió por 10, aquí hay que dividir por 5. [**Murmurando dice: Tengo que encontrar también estos dos valores. Ehhhmm…**].

344. Entrevistador: OK. No pasa nada. Pasemos a la otra pregunta. En la pregunta 7. a) encontraste la composición de cada familia. Pero no contestaste el apartado 7. b) del mismo problema. ¿Por qué?

345. Alumno: Así es, no lo he contestado. Creo que no entendí bien esa pregunta.

346. Entrevistador: [**Lee el enunciado**].

347. Alumno: Lo que no entendí ahí, es que decían que eran 5…

348. Entrevistador: Sí, se dan algunos datos: En la familia Pedalé eran 5 y los Rodrigues eran 2. Entonces, se quiere saber cómo estaría compuesta cada una de las otras 8 familias, para que se cumpla la media de 3'2.

349. Alumno: Pero quería saber si ese total tenía que ver con este. Si tenían que ser 10. Porque 8 y 2 son 10. ¿Y este 5, que estaría ahí haciendo?

350. Entrevistador: Mira, el objetivo era determinar la composición de las otras 8 familias. Porque ya se conoce la composición de 2 familias: los Pedalés y los Rodrigues, 8 y 2 son 10, ¿ves?

351. Alumno: Ahhhh

352. Entrevistador: [Repite la explicación]

353. Alumno: Entonces es prácticamente la misma cosa. ¿La media también es la misma?

354. Entrevistador: Sí.

355. Alumno: Ahhh.

356. Entrevistador: ¿Qué harías?

357. Alumno: Ellos (**refiriéndose a la familia Pedalé**) ya son 5 y los demás son 2. Entonces como 5 y 2 son 7, sólo tendría que poner los demás valores. Incluso podría usar los mismos datos si la media es 3'2.

358. Entrevistador: OK. Veamos el problema 8. a). Tampoco lo contestaste. ¿Qué precio se podría poner a cada marca para que el precio medio fuese de 1'50?

359. Alumno: [**Se queda en silencio**]

360. Entrevistador: Supongamos que tienes una pequeña tienda. Y tienes 8 marcas diferentes de paquetes de papas fritas. Quieres que el precio medio sea de USD 1'50. ¿Qué precio debes fijar a cada marca?

361. Alumno: [**No dice nada**]

362. Entrevistador: ¿Qué harías? ¿Sólo tienes que decirme como procederías?

363. Alumno: Mira. Todas las alternativas que intenté durante el test no me salieron, y además te digo que no fueron pocas [**Risas**]. Además tenía pereza mental.

364. Entrevistador: ¿Y ahora, puedes hacerlo?

365. Alumno: Creo que no.

366. Entrevistador: OK. En el caso de la pregunta 9, se dice que la media de peces capturados por 6 alumnos es la que es hallada mediante la expresión que aparece en el enunciado. Pero se supo posteriormente que otro alumno había participado en la actividad, aunque no capturó ningún pez. Ahora queremos saber si varía o no el valor medio de peces capturados al considerarse este último alumno.

367. Alumno: No.

368. Entrevistador: ¡Crees que no! ¿Por qué?

369. Alumno: No, porque aquí se habla de la cantidad de peces y no de participación. Luego, si el alumno que participó no ha pescando ningún pez, entones no varía.

370. Entrevistador: Vamos a ver. Te voy a preguntar de otra manera. Suponga que 5 amigas pretenden realizar una fiesta. Para ello, dieron, respectivamente, los siguientes valores en USD: 5, 10, 7, 2 y 5. ¿Cómo se puede determinar el valor medio de la contribución de estas 5 amigas?

371. Alumno: Sumamos estos valores dados y dividimos por 2, o si tuviesen una cuantía exacta por dar podría dividirse por esta cuantía, pero en este caso, se debe sumar y dividir la suma por 2.

372. Entrevistador: Es decir, ¿este es el valor medio?

373. Alumno: [**Confirma, moviendo la cabeza**].

374. Entrevistador: OK. Muchas gracias.

Entrevista al alumno A106CF

375. Entrevistador: En el problema 1, que dice… [**El entrevistador lee el problema**], tú has contestado que el profesor debe considerar 15 segundos, ¿no?

376. Alumno: Sí.

377. Entrevistador: ¿Por qué has considerado este tiempo?

378. Alumno: Porque fue el tiempo registrado por 4 alumnos.

379. Entrevistador: OK. ¿Y eso qué quiere decir en tu opinión?

380. Alumno: Yo escogí el 15 porque fue el número que la mayor parte de los alumnos registró.

381. Entrevistador: ¿Y si por ejemplo el profesor sumase todos los tiempos registrados y dividiese por 10?

382. Alumno: ¿Todos los tiempos que fueron dados?

383. Entrevistador: Sí.

384. Alumno: Yo creo que también se podría hacer.

385. Entrevistador: Y si se excluyera uno de los valores, y se sumasen los otros 9 y se dividieran por 9. Por ejemplo, excluir el 10, sumar otros 9 números y dividir por 9, ¿crees que también se podría hacer?

386. Alumno: Yo creo que se debe sumar los 10 valores y dividir por 10. Yo creo que dividir por 9,… ***[No termina la idea]***.

387. Entrevistador: ¿no puede ser?

388. Alumno: Yo creo que no.

389. Entrevistador: ¿Eso entonces significa que la respuesta que presentaste en el problema no es correcta?

390. Alumno: No, yo no dije que mi respuesta no era correcta, consideré el 15 porque es el valor más repetido. Para estimarlo, consideré que es el número que el profesor debía considerar.

391. Entrevistador: OK. Pero veamos. De los valores que están dados, ¿no notas nada que llama la atención?

392. Alumno: Hay algunos valores con comas y otros sin comas. Unos son valores decimales y otros no lo son.

393. Entrevistador: Observa por ejemplo cómo están presentados los valores. Casi todos están muy cerca del 15, pero hay uno que se aleja bastante de este valor.

394. Alumno: Sí. El 14'95 está cerca del 15.

395. Entrevistador: Pero el 15'05 también está cerca del 15, ¿no?

396. Alumno: Sí.

397. Entrevistador: Pero hay uno que se aleja mucho, ¿no?

398. Alumno: Sí, el 10.

399. Entrevistador: ¿Es el único número que se presenta en esta condición?

400. Alumno: Sí.

401. Entrevistador: ¿No ves que parece ser un valor extraño a este grupo?

402. Alumno: No lo creo.

403. Entrevistador: OK. Analicemos ahora el problema 2 "En una clase de ciencias". En este problema has elegido la opción "usar el número más repetido, que es el 6'2" como el método que recomiendas a los alumnos para determinar, con mayor precisión posible, el peso real del objeto.

404. Alumno: Sí.

405. Entrevistador: ¿Crees que podría seleccionarse la opción que dice "sumar los 9 números y dividir la suma por 9?

406. Alumno: Yo creo que sí.

407. Entrevistador: ¿Por qué?

408. Alumno: Creo que se podría porque se quiere determinar el peso con la mayor precisión posible. Creo que podrían.

409. Entrevistador: De esta forma, serían dos soluciones.

410. Alumno: Pero como sólo se debía escoger una… ***[Parece decir que si hubiese la posibilidad de elegir más de una opción, procedería así]***

411. Entrevistador: Y en el caso de la opción d) que dice: excluir el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8. ¿También podría considerarse como solución del problema?

412. Alumno: Yo creo que también se podría considerar porque el 15'3 es un valor que dista mucho de los demás. Aquí tenemos el 6'2, 6'0, el 15'3… me parece un valor que se distancia mucho de los demás.

413. Entrevistador: ¿Dices eso porque hice este comentario en el problema anterior?

414. Alumno: También por eso [**Risas**].

415. Entrevistador: OK. Vamos al problema 3. Donde dice que la profesora quiere resumir los datos, calculando el número típico de preguntas hechas en este día. Cuando se habla del número típico de preguntas, ¿cuál es la idea que te viene a la mente en este caso?

416. Alumno: ¿No será el número total? No tengo la certeza, es una hipótesis.

417. Entrevistador: Ponte cómoda, di lo que quieras.

418. Alumno: Es una hipótesis. No voy a poder contestar con precisión.

419. Entrevistador: OK. Como respuesta, tú elegiste la opción que dice: descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7. ¿Por qué?

420. Alumno: Porque el 0 no cuenta. El 0 no influye en nada.

421. Entrevistador: OK. ¿No se podía usar la opción que dice "descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7"?

422. Alumno: No, creo que es el 0 mismo.

423. Entrevistador: ¿Y la opción "sumar los 8 números y dividir por 8"?

424. Alumno: Continúo con la opción del apartado d), descartar el 0.

425. Entrevistador: OK.

426. Entrevistador: En el caso del problema 5, en que se pregunta: ¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistas? Cuando se habla de número medio de hijos, ¿a qué se está refiriendo?

427. Alumno: Yo creo que es la suma, cómo lo puedo explicar [**Se pone a pensar y vuelve a leer el problema**]. Creo que se ha sumado el número de hijos y se dividió por el número de familias, creo que fue lo que hice.

428. Entrevistador: ¿Es lo que has puesto como respuesta? [**En la respuesta tiene: 6/15= 0,4**].

429. Alumno: Sí. Número de hijos dividido por el número de familias. Como 10 familias no tenían hijos, sólo sumé el 7, 5 y 3 y en los hijos 1, 2 y 3.

430. Entrevistador: OK. Analicemos ahora el problema 6.a) "Gráfico de notas". Allí dice: cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el gráfico 1, los dos rectángulos que aparecen por encima del 14, indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron 14 valores. El grupo 1 tiene nota media de 11 valores. Había que comprobar que la nota media del grupo 2 también es igual a 11. ¿Qué hiciste?

431. Alumno: Yo utilicé la media aritmética.

432. Entrevistador: ¿Cuáles son los datos que usaste?

433. Alumno: 8+9+10+11+12+13+14 y la suma la dividí por 7. Y me dio 11.

434. Entrevistador: Pero mira. En el problema se dice que, por ejemplo los dos rectángulos que aparecen por encima del 14, indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron 14 valores. ¿Cómo se puede interpretar eso en el grafico?

435. Alumno: Tal como aquí se explicó. En el grupo 2, con 14, ninguno; dos con 13 valores, tres con 12 valores, ninguno con 11 valores; 3 con 10 valores; dos con 9 valores; y ninguno con 8 valores.

436. Entrevistador: Y entonces realizaste la operación. Sumaste los valores 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 y dividiste por 7. ¿Qué indica el valor 7, en este caso?

437. Alumno: Las notas. Aquí tenemos 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

438. Entrevistador: ¿El número total de notas?

439. Alumno: Sí.

440. Entrevistador: OK. Vamos al problema 7.a). Se afirma que la composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas. ¿Qué significa esta frase para ti?

441. Alumno: [***Piensa por algún tiempo y contesta***]. No estoy segura, así que prefiero no decir nada.

442. Entrevistador: Si alguien te dice por ejemplo. Fulana, de media arregla el pelo 3'5 veces por mes.

443. Alumno: ¿3'5?

444. Entrevistador: Sí, 3'5 veces por mes, ¿qué conclusión puedes sacar de esta afirmación?

445. Alumno: Lo entendería mejor si fuese un número exacto. Por ejemplo, 2 veces por mes. Pero con estos valores 3'5, me resulta complicado.

446. Entrevistador: OK. Dime entonces ahora como encontraste el valor 32 al resolver el problema 7. a).

447. Alumno: Pregunté al profesor, si dónde dice "indique 10 familias que cumplen esta media" teníamos que indicar familias cuya suma al dividir por el número de familias daba la media. Y entonces encontré el 32.

448. Entrevistador: ¿Pero este valor podría ser 34 o 36?

449. Alumno: ¿Si podría ser 36? No sé si iba a dar este valor, yo no tengo máquina de calcular en este momento. Pero si no diera el valor 3'2 estaría incorrecto.

450. Entrevistador: ¿Pero cómo se encuentra este valor 32?

451. Alumno: ¿El 32? Sumando.

452. Entrevistador: Suponga que quieres determinar la composición de 5 familias que cumplen la media de 3'2. ¿Qué harías? Sólo 5 familias, en vez de 10.

453. Alumno: Iba a determinar 5 números cuya suma al dividir por 5 diera la media.

454. Entrevistador: ¿Y cómo ibas a encontrar este número? ¿Qué harías para encontrar este tal número, de manera que al dividir por 5 diese como resultado la media 3'2?

455. Alumno: Antes de encontrar el 32, fui dividiendo números, varios números, de modo que al dividir por el número de familias diese este número y ahí encontré el 32.

456. Entrevistador: Es decir, primeramente encontraste el 32.

457. Alumno: Sí.

458. Entrevistador: ¿Si fuesen 5 familias, también tenías que encontrar un número que dividido por 5 diese 3'2?

459. Alumno: Sí.

460. Entrevistador: Ahora pregunto, ¿cómo ibas a encontrar este número?

461. Alumno: Fui probando con la calculadora, con ciertos números, que al dividir por 10 diese 3'2. Había casos en que al dividir el resultado era mayor que 3'2 y en otros casos era menor. Fui probando hasta que encontré este número.

462. Entrevistador: ¿El valor 32?

463. Alumno: Sí.

464. Entrevistador: OK. Fuiste probando con distintos valores, dividiéndolos por 10, de modo que el resultado fuese 3'2.

465. Alumno: Sí, fue lo que hice.

466. Entrevistador: OK. ¿Y que pasó para no usar el mismo procedimiento en la pregunta 8.a)? ***[Refiriéndose al procedimiento usado en 7.a)]***

467. Alumno: No contesté porque no sabía cómo hacerla, no sabia. No supe interpretar bien la pregunta, por eso no conseguí hacerla.

468. Entrevistador: OK. Muchas gracias, una vez más.

Entrevista al alumno A121CF

469. Entrevistador: En el problema "Tiempo recorrido en los 100m" contestaste que para estimar el tiempo real recorrido por el estudiante, el profesor debe usar el tiempo de 15 segundos, porque es el tiempo que más se repite. ¿Por qué crees que el valor que más se repite es el que se debe considerar en la estimación?

470. Alumno: Porque si analizamos, por ejemplo, en un test, para saber si los alumnos se han copiado o no entre sí, o para saber si son inteligentes…, yo haría el análisis por el número de casos que se repiten, observando el número de coincidencias.

471. Entrevistador: ¿Es decir, las coincidencias te indican el resultado deseado?

472. Alumno: Sí, a través de las coincidencias yo supongo que el resultado puede ser el deseado. Si la mayoría encontró este resultado, entonces creo que ese valor se debe considerar.

473. Entrevistador: OK. Veamos ahora la pregunta 2 "En una clase de ciencias". En la misma se explica que los estudiantes quieren determinar con mayor precisión posible el peso real del objeto después de las mediciones realizadas por cada estudiante. De las opciones presentadas, elegiste la d) "Descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8. ¿Por qué has indicado esta opción?

474. Alumno: Ehhh, sinceramente en el test creo que yo… creo que sumé los otros 8 números, dividí por estos…, cómo lo explico, sumé todos los números, descartando el 15'3, y dividí por ellos nuevamente, sin tener en cuenta el valor descartado, pero como me dio un número grande, creí que debía utilizar ese método.

475. Entrevistador: No te he entendido. ¿Me lo puedes explicar nuevamente?

476. Alumno: Sumé sólo los 8 números, descartando el 15'3.

477. Entrevistador: En total eran 9 números.

478. Alumno: Sí, eran 9, saqué…, cómo te lo explico, aislé el 15'3, sumé los otros 8 números y dividí por 8, y me dio un número grande.

479. Entrevistador: ¿Un número grande? ¿Qué quieres decir con lo de "número grande"?

480. Alumno: ¿Cómo te lo explico? [**murmura: 6'2,… pero no explica**].

481. Entrevistador: OK. Y si seleccionases la opción del apartado c) "sumar los 9 números y dividir la suma por 9", ¿no daría un número grande?

482. Alumno: También daría, pero… [**No termina la idea**].

483. Entrevistador: En vez de la opción c) elegiste la opción d). ¿Quería saber por qué elegiste la d) y no la c) por ejemplo, después de lo que me contaste?

484. Alumno: No sé, porque las opciones parecen decir la misma cosa, y yo me quedé confusa. Yo me lleve más por la opción d) creyendo que podría ser la opción correcta.

485. Alumno: ¿Fue al azar? ¿No te basaste en nada para seleccionarla?

486. Alumno: [**Risas**]. Es que tampoco me acuerdo bien, por el tiempo. También creo que lo he descartado por ser el mayor número en el seno de los demás. La mayor parte de los números son 6 coma cualquier cosa. Como te dije antes, las coincidencias de los números. Consideré los otros números que eran más o menos aproximados, porque podrían ser reales. Entonces, pensé en la opción donde se ignora el 15'3, sumando los otros 8 números y dividiendo por 8.

487. Entrevistador: OK. Ahora volviendo al problema anterior. Si aquí pensaste en ignorar el 15'3, ¿por qué no procediste de la misma manera en el problema 1, si hay también un dato que presenta más o menos las mismas características?

488. Alumno: Ehhh, sí, sí, el 14. Hay 14'90 y 14'95.

489. Entrevistador: ¿Cuál es el dato que está algo distante de los demás, si se tiene en cuenta lo que explicaste en el problema 2?

490. Alumno: Creo que es el 10, ¿no? El 10, pero el 15 me llamó atención porque es un dato más repetitivo, y creí que podría ser este.

491. Entrevistador: Pero también en el problema 2 hay un dato que se repite con mayor frecuencia, el 6'2.

492. Alumno: Sí, pero yo descarté el 15'3, porque estaba fuera para poder considerarse, ¿Por qué todos están cerca del 6, excepto el 15'3?

493. Entrevistador: En el problema anterior también se podría pensar de la misma forma, ¿no? ¿Por qué casi todos los datos están alrededor de 15, con excepción del 10?

494. Alumno: Porque en el problema 1 me ha sonado más el valor 15, por eso lo indiqué como respuesta.

495. Entrevistador: OK. Continuemos entonces. Analicemos el problema 3 "Número de preguntas"

496. Alumno: [lee el problema y comenta riéndose]. Ahora veo que en esta pregunta casi contesté de la misma manera, y ya no me acordaba.

497. Entrevistador: Bueno, la respuesta que indicaste aquí es similar a la que diste en el problema 1 (usar el valor más repetido), pero es diferente de la que presentaste en el problema 2. ¿Quiero saber por qué elegiste esta opción y no otra?

498. Alumno: Porque…, cómo te lo puedo explicar,… son datos, son datos secundarios. Al ser el dato más repetido, me acuerdo que en el curso pasado (al resolver algunos problemas), hacíamos eso. El número más repetido o los números que más aparecían eran los que tenían la probabilidad de ser correcto. Por eso es que me he basado en eso.

499. Entrevistador: OK. ¿Y si por ejemplo optamos por "descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7?

500. Alumno: Creo que también sería una respuesta correcta, pero yo no la he elegido. Puede ser una opción correcta, quizás yo no he acertado en mi respuesta al indicar la opción "usar el número más repetido".

501. Entrevistador: ¿Crees que se podría descartar el cero?

502. Alumno: Yo creo que sí.

503. Entrevistador: ¿Y si elegimos la opción "sumar los 8 números y dividir por 8"?

504. Alumno: Creo que es diferente porque si sumamos los 8 números, en este caso el 0 estaría excluido, y luego al dividir… [**El entrevistador se dio cuenta que el alumno no entendió la pregunta y explica**].

505. Entrevistador: No es eso, me refiero a la otra opción. Sin descartar el 0, sumar los 8 números, incluyendo el 0, y dividir por 8.

506. Alumno: Sí. Podemos sumar, incluyendo el cero, pero al dividir, el cero ya no hace ninguna diferencia, no influenciaría en nada. Pero yo no fui por esta vía.

507. Entrevistador: ¿Y que tal si usamos el apartado que dice: "Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7". Observa que por ejemplo en la pregunta 2, has elegido una respuesta que se parece a esta. ¿Por qué aquí no consideraste esta opción?

508. Alumno: Yo creo que los problemas 2 y 3 tienen algunas diferencias. La pregunta 2 está relacionada con pesos. Ya en la pregunta 3 "número de preguntas" es probable que la alumna Ana hubiese hecho las 22 preguntas, porque eso puede pasar. Los demás hicieron menos preguntas. Creo que Ana puede tener más capacidades o más influencias. Pero en la pregunta del peso, no sé, creo que fue más allá de los demás resultados. Creo que esta opción… podría incluso ser la correcta, pero yo no sé por qué no fui con la misma, descartando el 22.

509. Entrevistador: OK. Continuemos. En la pregunta 4 "Hijos por familias", [Leyendo el problema], había que marcar una sólo de las respuestas presentadas, sabiendo que el número medio de hijos por familia es de 2'2. Tú elegiste la opción "En la

ciudad hay más familias con 3 hijos que con 2". ¿Me puedes explicar lo que entendiste en esta respuesta para elegirla?

510. Alumno: [**Vuelve a leer el problema**]

511. Entrevistador: Después de los datos del problema, la respuesta con la que estás de acuerdo es la que dice que "en la ciudad hay más familias con 3 hijos que con 2".

512. Alumno: Porque el 2'2 es una probabilidad, no es un dato…, cómo lo explico, no es un dato real, es una aproximación. Si ha llegado a 2'2, para mi es, cómo lo puedo decir, es una aproximación no es un dato real. Yo creí más en esta afirmación, porque de 2'2 a 3 no hay mucha diferencia, creo que la mayor parte tiene 3 y la minoría es la que se acerca a 2; creo que la mayoría tiene 3 hijos y la minoría tiene 2, porque 2'2 tira más para 3 o para 4 que para 2. Si se habla de 2'2, es porque no es exactamente 2. Por eso escogí esa afirmación.

513. Entrevistador. OK. Veamos ahora los apartados a) y b) del problema 7. Los has contestado. Pero tal como están las respuestas, da la idea de que antes determinaste la composición de cada familia y después comprobaste, para ver si la media era la que se indicaba en el problema. ¿Cómo encontraste el valor 32?

514. Alumno: [**Analiza la respuesta que dio**].

515. Entrevistador: ¿De dónde vino el 32?

516. Alumno: [**No contesta, piensa en el problema**]

517. Entrevistador: Déjame ver si te pregunto de otra forma. ¿Primeramente encontraste el valor 32 o empezaste indicando la composición de cada familia? Acuérdate que lo que se pretendía era indicar 10 familias que cumplían la media de 3'2.

518. Alumno: Yo fui…, cómo te lo explico; Fui usando la probabilidad, porque nuestra profesora nos ha enseñando, por ejemplo, que si uno no sabe un número exacto, o no conoce los datos, debe comenzar del mayor al menor número. Yo sabía que eran 10 familias; entonces un número dividido por 10 debía de dar 3'2. Empecé por los valores más pequeños. Sumaba y dividía por 10, me daba un valor pequeño. Fui aumentando los valores. Y entonces fui haciendo los cálculos con números mayores. Vi que el resultado daba 3 coma alguna cosa y fui siguiendo. Cuando el resultado fuese grande, disminuía el valor; como eran 10 familias, tenía que escoger bien los números para que al sumar y dividir la suma por 10 me diese como resultado el 3'2.

519. Entrevistador: Es decir, ¿no habías calculando previamente el 32?

520. Alumno: No, no lo tenía.

521. Entrevistador: ¿Fuiste atribuyendo valores, y sumabas?

522. Alumno: Sí, sumaba para ver si al dividir por 10 me diese 32. Del valor que encontrase, analizaba si debía aumentar o disminuir en los valores.

523. Entrevistador: ¿Imaginaste si, por ejemplo, tuvieses que determinar la composición de muchas familias?

524. Alumno: [**Risas**].

525. Entrevistador: ¿Que harías? ¿Usarías este procedimiento de probar con diferentes valores?

526. Alumno: Yo creo que encontraría el valor. Me acuerdo que en el curso pasado hicimos algo utilizando un proceso similar.

527. Entrevistador: ¿Sí? Bueno. Ahora, piensa conmigo: 3'2 es la media, ¿no?

528. Alumno: Sí

529. Entrevistador: 10 es el total de familias, ¿cierto?

530. Alumno: Sí.

531. Entrevistador: OK. ¿Existe alguna forma más simple y práctica para que se determine el valor 32, sin utilizar el proceso que usaste?

532. Alumno: Existir creo que debe existir, pero lo que yo aprendí y lo que está en mi mente es este procedimiento que permite encontrar la solución del problema. Si existe otro método no lo conozco, por eso usé este procedimiento. Creo que debe existir. Ya tuve casos similares al resolver problemas en algunos exámenes, por eso usé este método.

533. Entrevistador: OK. ¿Puedes decirme por qué no contestaste los problemas 8.a) y 8.b) "Supermercado"?

534. Alumno: Creo que el tiempo no fue suficiente para contestar estas preguntas, dado el tiempo que estuve pensando en las otras preguntas.

535. Entrevistador: Si ahora te doy el tiempo que quieres, ¿intentarías resolverlo?

536. Alumno: [**Lee el problema, en voz baja**]

537. Entrevistador: Si tienes disponibilidad, se quedarías en el aula del otro lado, mientras yo entrevisto a otra colega tuya, ¿es posible?

538. Alumno: No sé, no sé. ¿Es tan importante que haga eso? [**Risas**]

539. Entrevistador: No, no es eso. Es que como me dijiste que fue por falta de tiempo, quiero aprovechar la ocasión.

540. Alumno: Lo que pasa es que ahora tengo que estudiar, porque tengo otras actividades.

541. Entrevistador: OK. Pero dime. ¿Crees que esta pregunta es más difícil que la 7?

542. Alumno: Sí, es más difícil

543. Entrevistador: ¿Por qué piensas eso?

544. Alumno: Porque son cosas que nunca había visto, nunca tuve ejemplos iguales. Las cosas vistas son un poco más fáciles, pero como nunca hice cosas iguales,… puede ser, incluso, que sea fácil. Porque si yo sé hacer la pregunta 7 puede ser que consiga también hacer esta pregunta [**refiriéndose a la pregunta 8**]. Pero de momento, me quedo ahí.

545. Entrevistador: OK. Gracias por tu disponibilidad.

Entrevista al alumno A122CM

546. Entrevistador: Al contestar el problema 2 "En una clase de ciencias", en donde se dice que los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso

real del objeto que han medido con el mismo instrumento, has optado por el apartado c) "sumar los 9 números y dividir por 9". ¿Por qué crees que se debe usar esta opción?

547. Alumno: Hice eso de acuerdo con lo que aprendí en estadística, que normalmente cuando se nos presenta una condición en cualquier problema, debemos procurar por el número de observaciones, que en este caso es 9… Así que debemos sumar todos los valores que se dan y dividir por el número de observaciones.

548. Entrevistador: ¿Y qué vamos a encontrar de esta forma?

549. Alumno: Así encontramos la media aritmética.

550. Entrevistador: La media aritmética

551. Alumno: Sí, la media aritmética. Aquí se dice que "los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto". Para mí, ésta sería la forma ideal.

552. Entrevistador: OK. Me puedes decir ¿por qué no usaste la opción d) "Descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir la suma por 8"?

553. Alumno: [**Piensa y contesta**]. No la he escogido, porque…, bueno, hasta cierto punto podría coincidir con el resultado de la opción c). La desventaja al descartar el 15'3 es que disminuiría el número de observaciones, de 9 sólo tendríamos 8. También se podría usar, pero como (el problema) dice que quieren determinar con mayor precisión posible, yo tuve que hacerlo en un sentido global.

554. Entrevistador: Es decir, como en el problema se dice que quieren determinar el peso del objeto con la mayor precisión posible, había que considerar todos los datos, ¿es por eso?

555. Alumno: Sí, por eso mismo.

556. Entrevistador: OK. Pasemos ahora al problema 3 "Número de preguntas" [**El entrevistador lee el problema**]. Has elegido la opción d) "Descartar el 0, sumar los 7 números y dividir la suma por 7". ¿Me puedes explicar por qué esta opción y no otra?

557. Alumno: Bien, lo que me hizo pensar en esta opción es lo siguiente. La tabla nos presenta que Juan era un número de…

558. Entrevistador: Juan no hizo ninguna pregunta.

559. Alumno: Sí, no hizo ninguna pregunta. En este caso, no se debe considerar a una persona que no presentó ninguna duda. Ya los demás presentaron dudas. La profesora que… no, yo descarté el cero, porque el objetivo principal era hallar…, la profesora quería saber… ¿Qué dice mismo la pregunta?

560. Entrevistador: La profesora quiere calcular el número típico de preguntas hechas en este día. ¿Cuál de los siguientes métodos…?

561. Alumno: Cierto, ella quería calcular eso. De este modo, Juan tenía que ser excluido porque no hizo ninguna pregunta, mientras que los demás lo hicieron. Por eso yo descarté la posibilidad de incluir el 0.

562. Entrevistador: OK. Vamos a ver algo más en esta cuestión. ¿La expresión "número típico de preguntas" que significa para ti? ¿A qué se refiere?

563. Alumno: ¿Número típico de preguntas? Lo que puedo entender es que se refiere sólo a un tipo de preguntas. [**Piensa**]. No, perdona, se refiere a varios tipos de preguntas.

564. Entrevistador: Es decir, cuando se habla de número típico de preguntas, la idea es que se refiere a varios tipos de preguntas, ¿es eso?

565. Alumno: Sí.

566. Entrevistador: OK. Analicemos ahora lo que has contestado en la pregunta 5 "Hijos". [**Leyendo el problema**]. Donde se dice, "¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?" ¿Cuál es la idea que tienes de la expresión "número medio de hijos"?

567. Alumno: Es aquel número que, en condiciones normales, podemos encontrar en cualquier casa. De este modo, yo dije que el número medio de hijos de las familias entrevistadas es 1, porque nosotros observamos que el número de casas donde había 1 hijo es mayor en comparación con el número de casas donde no había hijos. De eso, podemos constatar, que de las casas donde había hijos, el número que nunca faltaba era 1, es decir, había siempre 1 hijo.

568. Entrevistador: Es decir, como el problema dice que "10 familias no tenían hijos, 7 familias tenían 1 hijo, 5 familias tenían 2 hijos, 3 familias tenían 3 hijos, no había ninguna familia con 4 hijos. Para ti el número medio de hijos es aquel valor que…

569. Alumno: Aquel número que en condiciones normales encontramos en la mayor parte de las casas que tienen hijos.

570. Entrevistador: ¿De las familias entrevistadas?

571. Alumno: Sí, de las familias entrevistadas.

572. Entrevistador: ¿Y cuál es este número?

573. Alumno: El 1. Porque si no lo encontramos aquí… pues, aquí encontramos 7, 15..., [**Continua, pero se entiende claramente lo que pretende decir**]

574. Entrevistador: Por eso la respuesta al problema debe ser…

575. Alumno: …que el número medio de las familias entrevistas es de 1 hijo por cada familia.

576. Entrevistador: Entonces no efectuaste ningún cálculo para encontrar este valor 1, o sea, sólo te basaste en este análisis.

577. Alumno: Sí. Pero también, podría ir por otra vía, analizando el número de observaciones de las familias entrevistadas. Iba a calcular todas las familias, y el número de hijos, y después iba a dividir por el número de familias.

578. Entrevistador: ¿Eso anularía la primera idea que habías presentado o sería lo mismo?

579. Alumno: Como no hice cálculos, sólo determiné la media… bueno, ahora no sé si al hacer cálculos encontraría el mismo valor.

580. Entrevistador: ¿Podrías repetirme lo que ibas hacer?

581. Alumno: Yo tomaría el número de observaciones, que en este caso son 25 familias, e iba a dividir por el número de hijos que tienen las familias, que en este caso son

4, no, 6. Así que, 6 dividido por 25, no sé cuánto iba a dar, es posible que daría aproximadamente este valor.

582. Entrevistador: OK. Bueno. Eso es todo lo que quería contigo. Muchas gracias.

Entrevista al alumno A125CM

583. Entrevistador: En el problema 2 "En una clase de ciencias", has elegido la opción "Sumar los 9 valores y dividir la suma por 9". ¿Me puedes explicar por qué has preferido esta alternativa?

584. Alumno: Sí, en las clases nosotros vimos que para hallar los resultados, tenemos que sumar primero los números y después dividir por…, cómo lo explico, ehhh…así: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

585. Entrevistador: Son nueve números.

586. Alumno: Sí, quería un lenguaje más…

587. Entrevistador: ¿9 datos?

588. Alumno: Sí, nueve datos.

589. Entrevistador: Nueve observaciones.

590. Aluno: Sí, es eso, 9 observaciones. Entonces dividimos por 9. Por ejemplo, si tuviésemos 7 observaciones, íbamos a sumar los números y dividir por 7.

591. Entrevistador: OK.

592. Alumno: Eso es lo que se llama… ¿cómo se dice?, pues, es la fórmula, la fórmula algebraica, que se aplica para hallar el resultado.

593. Entrevistador: ¿Eso significa que en cualquier problema donde aparezcan números, este es el método que se debe aplicar?

594. Alumno: Sí, es el método que se debe aplicar.

595. Entrevistador: ¿No dependerá del tipo de problema y de la situación que se presente?

596. Alumno: No, no depende del problema.

597. Entrevistador: Vea que, por ejemplo, este problema dice: los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. En este caso, para determinar el peso real del objeto, has optado por el apartado c).

598. Alumno: Sí, sumar los 9 números y dividir la suma por 9.

599. Entrevistador: ¿Y si hubieses elegido el apartado a) "Usar el número más repetido, que es el 6.2? ¿Qué estarías usando?

600. Alumno: ¿Si utilizásemos el apartado a)?

601. Entrevistador: Sí.

602. Alumno: Es el mismo caso. Pero en general, siempre tenemos que seguir la fórmula algebraica, tal como te dije. No podemos inventar cualquier dato para poder hallar… [**No termina la idea**]

603. Entrevistador: ¿Y si fuese el apartado d) "Descartar el valor 15.3, sumar los otros 8 números y dividir por 8"?

604. Alumno: ¿Descartar el valor 15.3, sumar los otros 8 números y dividir por 8? Bueno, este apartado, no se considera porque, en los datos se dan 9 observaciones, si fuesen 8, y si tuviésemos 8 números, eso sí sería otra cosa. Íbamos a sumar los 8 números y después dividir por 8.

605. Entrevistador: OK. Mire ahora el problema 3. [**El entrevistador lee el problema**]. Aquí los datos están en la tabla. La profesora quiere resumir los datos, calculando el número típico de preguntas hechas en este día. Tú has indicado como método recomendable, el apartado d) "Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7".

606. Alumno: Sí, el apartado d). Porque excluyendo o no el 0 el resultado siempre será el mismo. Ahora, si en el lugar del 0 ponemos 1 o 2, ahí sí sería otra cosa. Por eso pensé en descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.

607. Entrevistador: Pero veamos. ¿Cuántos datos están indicados en el problema?

608. Alumno: Son 8. Pero aquí se dice descartar el 0 y sumar los 7 números [**enfatiza**], sólo los siente números y dividir por 7.

609. Entrevistador: ¿El 0 no es parte de los datos?

610. Alumno: No, no lo es. Por eso dice aquí, descartar.

611. Entrevistador: ¿Eso no se contradice con lo que habías dicho con respecto al problema anterior, que hay que considerar todas observaciones, ya que aquí son 8?

612. Alumno: Sí, aquí son 8.

613. Entrevistador: ¿Entonces por qué no usaste el mismo método?

614. Alumno: Es que aquí la pregunta dice que debemos descartar el 0…

615. Entrevistador: No. La pregunta no dice eso. Esta es una opción, de las varias que están dadas. Esta fue la opción que has elegido. Lo que pasa es que en el problema 2, dijiste que siempre se debe sumar todas las observaciones y dividir por el número de observaciones. Ahora quiero saber por qué no has utilizado la opción que se relacionaba con el pensamiento que manifestaste en el problema 2. La alternativa b).

616. Alumno: Mira, aquí nos dice que: la profesora quiere resumir los datos, calculando el número típico de preguntas hechas en este día. En el otro problema se dice que los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. Y se pregunta ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendaría? Por eso, la respuesta es sumar los 9 números y dividir la suma por 9. Ya en el otro caso la profesora quiere saber cuántas preguntas fueron hechas en este día. Por eso no podemos utilizar el método usado en el problema anterior.

617. Entrevistador: Es decir, aquí se debe descartar el 0, sumar los otros 7 valores y dividir la suma por 7. ¿Por qué descartar el 0?

618. Alumno: No hace diferencia. Aunque no se descarte el 0, es lo mismo.

619. Entrevistador: Pero si no se descarta el 0 estaríamos a sugerir el apartado b) ¿no crees?

620. Alumno: ¿El apartado b)? ¿Sumar los 8 números y dividir por 8? Sí, sería este apartado. Pero aquí se dice descartar el 0, y sumar los otros 7 números. Y allí se habla de sumar los 8 números. Es lo mismo.

621. Entrevistador: OK. Vamos al problema 4 "Hijos por familia" [**El entrevistador lee el problema y dice**]. De acuerdo con los datos presentados en el problema, has optado por la alternativa a) que dice "La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 hijos". ¿Por qué indicaste esta opción?

622. Alumno: [**Vuelve a leer el problema y comenta**]. En el problema se dice que una institución escolar, en una pequeña ciudad, quiso determinar el número medio de hijos por familia en su ciudad. Dividieron el número total de hijos de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Eso significa que ellos hicieron: 50, que es el número total de familias…, si el número medio de hijos por familia es de 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo? Está bien claro que la mitad de las familias de la ciudad es de 2 hijos, porque allí hicimos, 50 dividido por… [**Murmura: ¿50 dividido por 2'2? ¿50?**] Sí, es verdad. Nosotros aquí dividimos el número total de familias, que es 50 y… [**Murmura pero no concluye**].

623. Entrevistador: Tú indicaste la opción que dice que "la mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 hijos".

624. Alumno: Sí.

625. Entrevistador: El problema dice que ellos querían determinar el número medio de hijos por familia, en la ciudad.

626. Alumno: Sí, yo determiné la media aritmética, es verdad; determiné la media aritmética. Sumé los datos, después dividí por 50, me dio un número y dividí por 2'2. Efectué la suma de la media aritmética, me dio un número, dividí por 50 y me dio 2'2. Sí, es eso. 2'2. Por eso es que yo seleccione este apartado.

627. Entrevistador: ¿lo puedes demostrar ahora?

628. Alumno: [**Se queda callado y pensativo**].

629. Entrevistador: Bueno, sí no lo puedes hacer no pasa nada.

630. Entrevistador: Pasemos al problema 5 "Hijos" [**El entrevistador lee el problema**]. Tú concluiste que el número medio de hijos de las familias entrevistadas es 2, pero no mostraste cómo has llegado a este valor. ¿Me puedes explicar cómo llegaste a esta conclusión?

631. Alumno: ¿Por qué yo llegué a esta conclusión? [**Lee el problema**].

632. Entrevistador: ¿Realizaste alguna operación para llegar a esta respuesta?

633. Alumno: Sí, he realizado.

634. Entrevistador: ¿Qué hiciste?

635. Alumno: [**medita y murmura**]

636. Entrevistador: ¿Qué me dices?

637. Alumno: No me acuerdo.

638. Entrevistador: Bueno, si no lo puedes hacer lo podemos dejar. Pasemos al problema 6 "Gráfico de notas, 6.B" [**El entrevistador lee el problema y dice]**. A la cuestión ¿Cuál de las afirmaciones es cierta?, elegiste la opción d) que dice que

"A pesar de que las medias son iguales en los dos grupo, el Grupo 2 es más homogéneo". ¿Qué fue lo que entendiste por l expresión "*más homogéneo*"?

639. Alumno: Nosotros debemos ver. Aquí el grupo 1 comienza por 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14. Pero en el grupo 2, se ve que sus notas superan las anteriores, por ejemplo, mientras que en el grupo 1 tenemos 10, en el grupo 2 tenemos 11. Si en el primero grupo se obtuvo 9, ya en el segundo se obtuvo 10. Es lo que me llevó a… [**No concluye**]. Las medias son iguales, sí, son iguales en los dos grupos, pero el grupo 2 es más homogéneo, porque, cómo lo puedo decir, es más elevado que el grupo 1. El grupo 1 empezó bien, 8, 9,… pero después el grupo 2 empezó a subir. Allí es 8, pero aquí es 9, allí es 9 pero aquí es 10, después 11, 12, 13 y 14.

640. Entrevistador: La idea que tienes de "más homogéneo" ¿es que las notas son más altas? ¿eso es lo que me quieres decir?

641. Alumno: No, no es eso. No es que sean más altas. Las medias son iguales, pero en el grupo 2 hubo más alteraciones, cómo te lo explico, superó el grupo 1, está más… [**No concluye**].

642. Entrevistador: ¿Superar en qué? ¿Cómo lo ha superado?

643. Alumno: Por ejemplo, en el grupo 1, aquí nos indican el 10, pero en el grupo 2 ahí ya aparece el 11.

644. Entrevistador: Observa. En el problema dice: Por ejemplo, en el grupo 1, los dos rectángulos que aparecen por encima del número 14, indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron 14 valores. Eso significa que donde no hay rectángulos no hubo alumnos con aquellas notas, ¿si? Por ejemplo por encima del 11, en el grupo 2, significa que no hubo alumnos con nota 11. ¿Entiendes?

645. Alumno: [**Se queda en silencio**]. Ahhh. Entonces, aquí también en el 8, significa que no hubo alumnos que tuvieron 8.

646. Entrevistador: Así es. ¿Tú no has leído el enunciado del problema antes de contestar?

647. Alumno: Yo leí el problema, pero… [**Justifica basándose en las explicaciones que dio anteriormente**].

648. Entrevistador: ¿Cuál es la idea que tienes de la expresión "más homogéneo"?

649. Alumno: ¿Más homogéneo? Ehhhh, más homogéneo, es algo que, cómo puedo decir, que está en el medio, está más o menos, está en la media, sí, está en la media. Eso es lo que es más homogéneo.

650. Entrevistador: OK. Muchas gracias. Es todo lo que quería preguntarte.

Anexo 7: Transcripción, en portugués, de entrevistas realizadas a los alumnos que participaron en el experimento de enseñanza sobre la media aritmética.

Entrevista ao aluno A3M

1. Entrevistador: Na pergunta 1 "Tempo percorrido nos 100 m", quando se perguntou pelo tempo que o professor devia considerar como estimação do tempo real percorrido pelo estudante e por que se devia utilizar este tempo tu puseste 14.98, não é?
2. Aluno: Sim.
3. Entrevistador: O que é que significa este valor?
4. Aluno: É a media. Eu fiz o somatório de todos os valores, menos o 10, porque comparado com os outros valores, estava abaixo dos outros valores. Se todos começaram a registar o tempo ao mesmo tempo, como é que um regista 10 segundos enquanto que os outros, os seus tempos estão assim muito próximos de 15 segundos. Para mim é um valor atípico. O professor nos tinha explicado que um valor atípico é um valor que muito acima da média o muito abaixo. Então…
5. Entrevistador: Acima ou abaixo da media? Ou que se afasta consideravelmente dos outros dados?
6. Aluno: Sim, alias dos outros dados. Como quase todos têm entre 14 e 15, este valor 10 está muito abaixo. Acho que deve ser um erro.
7. Entrevistador: OK. E como se denomina este tipo de valor?
8. Aluno: Sim, se chama valor atípico.
9. Entrevistador: Então o valor 14.98 é a média que obtiveste considerando os outros valores?
10. Aluno: Sim é a media.
11. Entrevistador: OK. E na segunda pergunta "Numa aula de ciências" tu escolheste a alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". O problema dizia que os estudantes querem determinar com a maior precisão possível o peso real dum objecto pequeno que mediram com um mesmo instrumento. Por que escolheste esta alínea e não outra?
12. Aluno: Pelo mesmo motivo que eu fiz na primeira. Fui observando os valores, por exemplo aqui tem 6.2, 6.0 e aparece o 15. Estamos a pesar um mesmo objecto com a mesma balança. Como é que um acha 6.15 e o outro vai achar mais do que o dobro? Eu vi que este valor não podia ser. Tem que ser um valor compreendido entre o 6.0 e o valor 6.15, entre os dois extremos e me deu 6.14, que é a media. [**O aluno calculou o valor embora não se pedisse**]
13. Entrevistador: OK. E no caso do problema 3 "Número de pergunta" [o entrevistador lê o problema e comenta]. A professora quer resumir estes dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. Aqui também há varias opções, que são os métodos que se poderiam recomendar à professora. Tu escolheste precisamente a opção "Somar os 8 números e dividir por 8".

14. Aluno: Sim, porque não se podia descartar nem o zero nem o 22. Aqui ela está apontar o número de perguntas que cada aluno fez. Isso é como numa festa, se queremos determinar a media de idades dos participantes duma festa, mesmo que tem uma idade está muito acima ou abaixo das outras, temos que somar os valores e dividir pelo número de participantes. O 22 é muito alto em comparação com os outros valores, mas acho que é um valor que devemos ter em conta. O zero e o 22 têm que se somar porque ela quer saber o número típico de perguntas que os alunos fizeram neste dia. Então tem que se somar todas as perguntas e dividir pelo número de alunos. Para isso, não vamos descartar nenhum aluno.
15. Entrevistador: E por que não devemos descartar se no caso anterior procedemos assim? Onde é que está a diferença?
16. Aluno: [**Permanece em silencio**]
17. Entrevistador: Por exemplo disseste que não se deve descartar o 22, não é assim? Mas no problema anterior, sugeriste propuseste descartar o 15.3 Por que aí sim e aqui não?
18. Aluno: Aqui? Porque são vários alunos que estão a medir o peso dum objecto com um mesmo instrumento. Então, os valores que devem dar, devem ser mais ou menos aproximados. Se estão a medir o mesmo objecto e com a mesma balança, não é possível que haja um valor que seja o dobro dos outros que os outros acharam. Agora, aqui é como se estivéssemos a determinar a média das idades de um grupo de pessoas que estavam numa festa. Mesmo que a idade desta pessoa é maior ou menor, se esteve na festa temos que considerar.
19. Entrevistador: Ou seja, é porque o 22 é exactamente o número de perguntas feitas por aquele aluno.
20. Aluno: Sim, é por isso que não devemos descartar.
21. Entrevistador: E o caso do zero? Por que não excluímos o zero, se João não fez nenhuma pergunta?
22. Aluno: Ela quer saber o número típico de perguntas que os alunos fazem. Logo, embora o João não fez nenhuma pergunta, também deve contar no total, não se deve descartar.
23. Entrevistador: OK. Na pergunta 4 "Filhos por família". Podes dizer-me por que escolheste a opção c) (Há um total de 110 filhos na cidade)?
24. Aluno: [**Lê o problema silenciosamente e responde**:] Multipliquei o resultado que foi…, bem, havia 50 famílias, não é?
25. Entrevistador: Exacto.
26. Aluno: E viram que havia 2.2 filhos por família como média. Então multipliquei este valor por 50, para obter o número de filhos que existe na cidade. Porque dividindo o número de filhos da cidade pelas 50 famílias dá 2.2. Isso indica que há 110 filhos na cidade.
27. Entrevistador: E se tivéssemos optado pela alínea a) "A metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos", o que é que significaria isso?
28. Aluno: Não, pode ter famílias que têm 2 filhos ou inclusive que não têm nenhum filho. Não podemos afirmar que a metade, a maioria ou a minoria tem X filhos.

29. Entrevistador: E dizer que o número mais comum de filhos numa família é 2, o que é que isso significa? Qual é a ideia que te transmite esta expressão?

30. Aluno: [**Fica calado durante alguns segundos e responde**]: Eu não concordo com esta afirmação, porque não é obrigatório que o número mais comum de filhos numa família seja 2, porque pode ter famílias que tenham mais filhos ou menos filhos, o número mais comum pode ser 3, ou pode ser até 0, pode haver famílias que têm muitos filhos. Falar do número que mais se repete, acho que… [**Não conclui a ideia**].

31. Entrevistador: OK. Falemos agora sobre o que respondeste na pergunta 6 "Gráfico de notas". Depois de comprovares que a nota media do grupo 2 também é 11, ao argumentares a alínea b), sobre qual era o grupo que te parecia melhor, expressaste que "a media é calculada por grupo, por tanto os grupos estão em pé de igualdade". O que é que queres dizer com isso?

32. Aluno: Significa que nenhum dos grupos é melhor que o outro, porque tiveram o mesmo resultado. Ou seja, as médias são iguais.

33. Entrevistador: Ou seja, fizeste a analise considerando a igualdade das médias. Como as médias são iguais nenhum dos grupos é melhor.

34. Aluno: Sim.

35. Entrevistador: Te lembras que quando estudamos os gráficos dissemos que ao comparar gráficos era necessário considerar certas particularidades? Não te lembras que quando analisamos um problema sobre três gráficos de médias iguais, dissemos que apesar da igualdade das médias era possível distinguir diferenças entre os três grupos?

36. Aluno: [**Fica calado durante alguns segundos e responde**]: Quando é que foi mesmo?

37. Entrevistador: Na penúltima sessão.

38. Aluno: Eu não assisti a penúltima sessão.

39. Entrevistador: Mas assististe a última, não é?

40. Aluno: Sim a última assisti.

41. Entrevistador: Na última também revisamos este aspecto. Dissemos que ao comparar dos grupos de dados, entre outros aspectos, se devia ter em conta ao agrupamento dos dados ao redor da média. Não te lembras?

42. Aluno: Não, não me lembro.

43. Entrevistador: OK. Passemos a outra questão. Na pergunta 7 "Família" pediu-se que indicasses 10 famílias que cumprissem a media de 3.2. O que é que fizeste antes de indicar a composição de cada uma das famílias?

44. Aluno: O problema diz que a composição media da família em Benguela é de 3.2. Disseram para indicar 10 famílias. Então, eu multipliquei 3.2 por 10 e me deu 32.

45. Entrevistador: O que é que representa este valor?

46. Aluno: O valor 32?

47. Entrevistador: Sim.

48. Aluno: O número de pessoas. O número de pessoas que tem que se dividir pelo número de famílias. Como são 32 pessoas, dividido por 10 famílias tem que dar 3.2, que é a composição média da família em Benguela.
49. Entrevistador: OK. E depois de encontrar o valor 32, o que é que fizeste?
50. Aluno: Depois de encontrar 32, dividi…, não, reparti pelas 10 famílias.
51. Entrevistador: Repartiste 32 pelas 10 famílias?
52. Aluno: Sim, reparti pelas 10 famílias.
53. Entrevistador: Suponha por exemplo, que em vez de 10 famílias tivéssemos que indicar a composição de 5 famílias. O que é que farias neste caso, se além disso soubéssemos que a composição média da família é de 3.2 pessoas?
54. Aluno: Se fossem só 5 famílias?
55. Entrevistador: Sim.
56. Aluno: Faria a mesma coisa. Eu multiplicaria o número de famílias pela média: 5 por 3.2.
57. Entrevistador: OK. E o que é que farias depois com o resultado desta multiplicação?
58. Aluno: Dividiria pelo número de famílias.
59. Entrevistador: Disseste dividir?
60. Aluno: Sim, pelo número de famílias. Ia fazer uma repartição pelo número de famílias.
61. Entrevistador: OK. Está bom.
62. Entrevistador: Nas operações que apresentaste aqui na prova, puseste 10 dividido por 32. É isso mesmo?
63. Aluno: Não. Eu me enganei. Tem que ser ao contrário: 32 dividido por 10.
64. Entrevistador: OK. Analisemos agora a última questão, problema 9 "Peixes capturados". Podes explicar-me o que fizeste? Recorda que se pretendia saber se o valor médio de peixes capturados por cada aluno variava, ao considera-se o último aluno que não capturou nenhum peixe.
65. Aluno: Sim, neste caso como havia mais um aluno nós tínhamos que lhe considerar.
66. Entrevistador: Mas ele não capturou nenhum peixe?
67. Aluno: Sim, não capturou mas nós queremos saber o número médio de peixes capturados, incluindo também este aluno: Por isso já são 7. É mais um aluno.
68. Entrevistador: Então o que é que muda agora?
69. Aluno: Agora devemos dividir por 7 e não por 6.
70. Entrevistador: E de acordemos com o que nós vimos, o que é isso?
71. Aluno: Alterou o resultado. Eu não pus, mas pegamos o número de peixes, somamos, incluindo o zero, e dividimos por 7.
72. Entrevistador: OK. Muito obrigado por ter colaborado comigo.

Entrevista ao aluno A1M

73. Entrevistador: Gostaria que me esclarecesses algumas respostas que deste ao questionário. Por exemplo, na pergunta 1 "Tempo percorrido nos 100 m", o que é que fizeste para determinar o tempo que o professor devia considerar como estimação do tempo real percorrido pelo estudante?

74. Aluno: Primeiro vi se existiam números atípicos. Analisei as observações e notei que o número 10 parecia não estar muito enquadrado com os outros tempos. Os outros tempos estavam entre 14.90 e 15. E o 10 pareceu-me que era um número atípico, então desclassifiquei. Então coloquei os outros números numa tabela, porque era o método mais fácil, escrevi os tempos e as frequências deles. A seguir, multipliquei as frequências pelas observações e como eu sabia que eram 10 alunos, dividi por 9 e encontrei um resultado aproximado a 14.99. Acho que foi isso.

75. Entrevistador: OK. Preferiste utilizar uma tabela de frequências?

76. Aluno: Sim.

77. Entrevistador: Depois de descartar o 10, era possível utilizado outro método para encontrar o valor 14.99 sim ponderar os valores?

78. Aluno: Sim, acredito que eu podia fazer isso, utilizando a média simples. Tendo em conta também que são poucos valores, eu podia muito bem utilizar a média simples. Mas como havia alguns valores que se repetiam e também para poupar tempo na prova, utilizei a media ponderada.

79. Entrevistador: OK. Vamos agora analisar o que fizeste no problema 2 "Numa aula de ciência". Aqui, se pedia que recomendasses um método, de modo que os estudantes determinassem com a maior precisão possível o peso real dum objecto pequeno que eles mediram com um mesmo instrumento. Das opções apresentadas, tu escolheste a alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir a soma por 8". Por que foste por esta opção e não outra?

80. Aluno: Eu notei aqui que este peso 15.3 era um número atípico. É possível que este aluno que encontrou este peso não estava muito atento. Então optei por descartar este valor, recomendei que descartassem o valor 15.3, e somassem as outras observações e dividir por 8.

81. Entrevistador: OK. Particularmente se tivéssemos escolhido a opção a) "usar o número mais repetido, que é o 6.2", qual é a medida que estaríamos a usar neste caso?

82. Aluno: Era a moda, 6.2 é a moda. Mas eles queriam saber a media.

83. Entrevistador: OK. Então vamos ao problema 3 "Número de perguntas" [o entrevistador lê o problema e diz]: A professora quer resumir esses dados, calculando o número típico de perguntas feitas neste dia. A questão era saber qual dos métodos se devia recomendar. Tu propuseste a opção da alínea b) "somar os 8 números e dividir por 8", não é isso?

84. Aluno: Sim, tendo em conta que é o número de perguntas que a professora quer saber, acho que não se deve descartar o valor 22. Se a Ana fez este número de perguntas, acho que é porque necessitava. Então, numa aula, eu não posso descartar o 22. Por isso achei melhor a alínea de somar os 8 números e dividir a soma pelo número de alunos.

85. Entrevistador: OK. E por que não seleccionaste a alínea que diz "Descartar o valor 0, somar os outros 7 números e dividir por 7"?

86. Aluno: Sim, porque o zero também é uma observação. O João também fez parte da aula. Sendo assim, não vamos dividir por 7 senão por 8. Acho que assim não dá, porque a professora quer saber de todos os alunos. Por isso não descartei o 0.

87. Entrevistador: Bem, vamos agora a pergunta 4 "Filhos por família" Aqui também se dão varias opções e tu escolheste a c) que "Há um total de 110 filhos na cidade" O que é que te fez pensar nesta opção?

88. Aluno: Fui por esta alínea porque o cálculo da média pelo número de famílias ia dar isso, ia dar 110 filhos. Também fui por esta alínea porque as outras respostas não convinham, porque a média não significa que a metade das famílias da cidade têm mais de 2 filhos, porque está entre os extremos, é representativo, mas não significa obrigatoriamente que se encontra entre 2. Acho que as outras opções que estavam aí são suposições. Então me convinha mais… fiz um cálculo, me deu com mais precisão e então foi a alínea que eu escolhi. Uma alínea com mais precisão.

89. Entrevistador: OK. Analisemos agora o problema 6 "Gráfico de notas". Depois de comprovares que as médias são iguais nos dois grupos, para justificar qual era o grupo que te parecia melhor, respondeste que "o grupo 2 é melhor porque no mesmo há mais homogeneidade nas notas". O que é que queres dizer com isso?

90. Aluno: Sim, quando digo que há maior homogeneidade quero dizer que as notas estão mais unidas, quer dizer, há mais notas… ou seja, as notas dos alunos estão mais concentradas, quer dizer, os alunos tiveram todos quase as mesmas notas. Então, este grupo é melhor porque no mesmo há mais homogeneidade. Já o grupo 1, apesar de terem as melhores notas, também há muitos alunos… ou seja não há concentração de notas, ou seja, o grupo não está homogéneo, as notas não estão muito… ehhh

91. Entrevistador: Muito dispersas?

92. Aluno: Isso. No grupo 1 estão muito dispersas.

93. Entrevistador: OK. Passemos ao problema 7 "Família" A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas. Se pedia para indicar 10 famílias que cumprissem esta média. Escreveste os nomes das famílias e foste dando diferentes valores, não é?

94. Aluno: Sim.

95. Entrevistador: Eu queria o seguinte: Antes de encontrar os valores que indicaste, realizaste alguma operação?

96. Aluno: Sim, realizei. Multipliquei o número de famílias pela média. E isso me deu 32. Da aí já tinha uma base para fazer a distribuição em cada família.

97. Entrevistador: OK. Vejo que na sua distribuição não aparecem valores decimais.

98. Aluno: Sim, porque… depende do tipo de media. Aqui estamos a falar de pessoas, número de filhos… ehhh, é uma média…

99. Entrevistador: Composição de famílias.

100. Aluno: Sim, composição de famílias não pode ser… não é possível ter 3.2 pessoas numa casa. Ou seja, a média é uma media… ponderada, ponderada?...

[**Murmurando, diz: Constante? Ponderada?**], o termo falha-me Pois, nós sabemos que existem médias contínuas e médias…

101. Entrevistador: Variáveis

102. Aluno: Sim, variáveis. Era isso o que queria dizer. Variáveis contínuas e variáveis…

103. Entrevistador: Discretas?

104. Aluno: Sim, e discretas. Neste caso, a composição de famílias é uma variável discreta. Então eu não podia por aí números decimais.

105. Entrevistador: OK. Analisemos agora o que fizeste no problema 8 "Num supermercado". O procedimento que utilizaste aqui tem haver com o que utilizaste na pergunta anterior?

106. Aluno: Sim. Multipliquei a media por 8 marcas, para obter uma base e com esta base fazer a distribuição. Neste caso foi 12, depois de fazer a distribuição, a soma dá 12 e dividindo por 8 dá a media 1.50.

107. Entrevistador: E aqui se pode usar valores decimais?

108. Aluno: Sim, porque esta média, esta variável, é uma variável contínua, não é uma variável discreta. Então é preço, nós podemos dar valores decimais.

109. Entrevistador: No caso da alínea b) onde já davam três preços recomendados, como é que raciocinaste para determinar o preço das restantes marcas?

110. Aluno: Primeiro eu determinei o resultado da soma dos preços recomendados. Como já sabia que a base era 12, descontei deste valor o valor da soma dos preços recomendados. Depois distribui o valor que restou para as restantes marcas que não tinham preços.

111. Entrevistador: OK. Na pergunta 9 "Peixes capturados", onde se queria saber se variava ou não o valor médio de peixes capturados por cada aluno, ao considerar-se o aluno que não pescou nenhum exemplar, respondeste que o valor médio não variava.

112. Aluno: Sim, eu disse sim porque temos que considerar este último aluno como mais uma observação, então ao fazer a distribuição da quantidade de peixes pelos alunos o valor ia alterar, muito embora este aluno não pecou nenhum pez. E eu demonstrei em prática como é que isso ia acontecer. Consideramos o valor nulo deste aluno, mas ao dividir, no total temos que incluir este aluno que não capturou nenhum peixe.

113. Entrevistador: Isso significa que o total de alunos já não seria o mesmo?

114. Aluno: Sim, o total de alunos já não seria o mesmo. Já não seria 6, mas sim 7.

115. Entrevistador: OK. Muito obrigado por ter colaborado comigo.

Entrevista ao aluno A7F

116. Entrevistador: Gostaria de saber com mais detalhes sobre o que respondeste no teste. Por exemplo, no problema 1, onde se pergunta pelo tempo que devia considerar o professor como estimação do tempo real percorrido pelo estudante e

por que, tu assumiste que o professor devia considerar o 15 porque é o valor que se repete mais vezes e ao que os outros se aproximam.

117. Aluno: Umhum.

118. Entrevistador: Antes de responderes a pergunta, antes de chegar a esta conclusão, analisaste a forma como se apresentavam os dados, já que o que se pretendia era encontrar uma estimação?

119. Aluno: Sim, eu vi que havia quatro 15, ehhh, um 10, éhh! eu nem sequer tinha visto, os outros são o 14.95, o 15.05, que só falta cinco o passa 5, então vi que seria o 15.

120. Entrevistador: Então foi por isso, não é?

121. Aluno: Sim, foi por isso.

122. Entrevistador: Mas não te chamou atenção o facto de existir um 10 neste grupo de dados?

123. Aluno: Eu nem reparei este 10, só estou a ver agora.

124. Entrevistador: Não tinhas visto este valor?

125. Aluno: Não, só os outros.

126. Entrevistador: E se tivesses visto o 10, achas que…

127. Aluno: Mas também acho que não ia alterar nada, porque os outros estão mais aproximados ao 15.

128. Entrevistador: Te lembras que quando falamos dos problemas de estimação dissemos que a média aritmética era a medida mais indicada para este tipo de situações?

129. Aluno: Sim.

130. Entrevistador: E então por que não foste por aí e preferiste considerar o valor que mais se repete?

131. Aluno: [**Não responde**]

132. Entrevistador: E ao pensar no valor que mais se repete, o valor mais frequente, de quê medida estamos a falar? Quê nome recebe esta medida?

133. Aluno. É a média, não é?

134. Entrevistador: Achas que a média?

135. Aluno: Acho que sim.

136. Entrevistador: OK. Analisemos agora o que respondeste na pergunta 2.

137. Aluno: Mas porque? Esta errado o 15?

138. Entrevistador: Não é isso. Olha, o que pretendo é analisar a sua opinião, a sua forma de pensar, não é tanto saber se está correcta ou não. Me entendes?

139. Aluno: Mas qual seria a resposta certa então?

140. Entrevistador: Já te direi no fim desta conversa. Mas o meu objectivo é saber como raciocinaste em cada questão. Ver se as ideais que transmitimos nas aulas

permanecem ou se te guiaste por outras, OK? Não penses que te quero julgar, está bem?

141. Aluno: [**Responde sim, mas com mímica**].

142. Entrevistador: Seguimos então. Na pergunta 2 se diz: Nove estudantes pesaram um objecto pequeno… [o entrevistador lê o problema completo e comenta]: Olha que aqui se pedia para indicar o método que recomendarias aos estudantes para determinar com a maior precisão possível o peso real do objecto. Das várias opções apresentadas, sugeriste a alínea c) "somar os 9 números e dividir por 9".

143. Aluno: Umhum.

144. Entrevistador: Mas se no primeiro problema foste pelo valor que mais se repete, por que aqui não pensaste da mesma forma, já que também havia um valor que mais se repetia?

145. Aluno: Não porque no primeiro problema estavam a perguntar pelo tempo, para nós escolhermos, mas aqui já não. Temos que escolher qual é a resposta mais certa.

146. Entrevistador: Mas veja: No problema 1 apresentas como justificação o facto de existir números que mais se repetem. Sabendo que aqui, na pergunta 2, parece também uma opção relacionada com a justificação que deste na primeira pergunta, não seria mais justo escolher esta opção?

147. Aluno: Mas tem diferença, porque os outros valores estão muito próximo do 6.2; por exemplo o 15.3 já foge muito dos outros. Enquanto que no caso anterior, olhando para o 15 que se repete 4 vezes, os outros valores estão muito próximo deste valor com excepção do 10.

148. Entrevistador: Analisemos bem os valores: Olha que o 6.0, o 6.1, o 6.15, são valores muito próximos do 6.2, Não achas que a situação é similar a apresentada no problema 1?

149. Aluno: [**Permanece em silencio**].

150. Entrevistador: Por que não pensaste, por exemplo, na opção da alínea d) "Descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8"?

151. Aluno: Até pensei mesmo nessa, mas não me lembro que nas aulas se tinha falado de descartar.

152. Entrevistador: Não te lembravas?

153. Aluno. Não.

154. Entrevistador: Não te lembras que dissemos que ao utilizar a média para estimar uma medida era importante observar a existência de valores atípicos e que estes deviam ser excluídos porque afectavam a média?

155. Aluno: Me lembro que falamos de valores atípicos, mas não me lembro que dissemos que se devia descartar.

156. Entrevistador: Nós resolvemos um problema similar nas aulas, mas não importa, já te recordarei mais tarde. Vejamos agora o problema 4 "Filhos por família". No enunciado se diz que querem determinar o número médio de filhos por família na cidade e então dividiram o número total de filhos por 50. Se o número médio de filhos por família é 2.2, com qual das frases estais de acordo? Tu marcaste a frase que diz "a metade das famílias da cidade tem mais de 2 filhos. Por que esta opção?

157. Aluno: [**Permanece em silencio**].

158. Entrevistador: Lembre-se que eles querem determinar o número médio de filhos na cidade. Dividiram o número total de filhos da cidade por 50 e …

159. Aluno: Ahhh. Acho que aqui está bem errado, não é? [**assinalando a sua resolução**].

160. Entrevistador: Não é isso, eu não disse que estava errado.

161. Aluno: Agora vendo bem, acho que devia indicar outra alínea. Como se fala de 2.2, dá a impressão que têm mais de 2 filhos. Mas não seria metade, seria… [**faz uma pausa e continua**] que "Na cidade há mais famílias com 3 filhos do que com 2".

162. Entrevistador: E por que esta opção?

163. Aluno: Pelo valor que deu, 2.2.

164. Entrevistador: Por ser 2.2, e então?

165. Aluno: Passou de 2. Tem 2 ou mais.

166. Entrevistador: Ou seja, que na cidade há mais famílias com 3 filhos do que com 2, porque a média é 2.2. Isso significa que…

167. Aluno: [**Risos**].

168. Entrevistador: É que não entendi a sua explicação.

169. Aluno: Sim.

170. Entrevistador? E porque não podia ser 2?

171. Aluno: Porque está a passar já. O valor que deu.

172. Entrevistador: OK. Vamos agora a pergunta 5 "Filhos". [**O entrevistador lê o problema e comenta**]: Olha que o que se pretendia era determinar o número médio de filhos das famílias entrevistadas. Podes explicar-me com detalhes o que fizeste?

173. Aluno: Aqui [**assinalando no teste**] pus o número de famílias (coluna x_i: 10, 7, 5, 3, 4), aqui o número de filhos (coluna f_i: 0, 1, 2, 3, 0) e multipliquei (coluna x_i . f_i: 0, 7, 10, 9, 0), sim, e depois dividi o número de filhos, ou seja, o valor da multiplicação das famílias pelos filhos e dividi [**no teste pôs:** $\bar{x} = \frac{xi.fi}{fi} = \frac{26}{6} = 4.3$].

174. Entrevistador: OK. Os valores que indicaste por x_i se referem a famílias ou a filhos?

175. Aluno: As famílias.

176. Entrevistador: Mas aqui no problema o que se pretende é determinar o número médio de filhos ou de famílias?

177. Aluno: Número médio de filhos das famílias.

178. Entrevistador: Então quais são os valores que indicam a variável e quais os que indicam as frequências?

179. Aluno: [**Não diz nada**].

180. Entrevistador: Estes valores: 10, 7, 5, 3, se referem as variáveis ou as frequências?

181. Aluno: [**Não diz nada**].

182. Entrevistador: Olha. Aí diz, por exemplo: 7 famílias tinham um filho. Isso significa que com 1 filho havia 7 famílias, não é? Então qual é a variável? Filhos ou famílias?

183. Aluno: Seria filho, não é? Não é assim?

184. Entrevistador: Não vês algo que não está bem na tabela que apresentaste?

185. Aluno: Sim noto. Mas não tem nada a haver, posso pôr assim, mas na hora de fazer a multiplicação o resultado será o mesmo, não é assim?

186. Entrevistador: Mais veja. Na tua resposta dizes que o número médio de filhos das famílias entrevistadas é 4.3. Mas se tivesses mudado, olhando para os dados relacionados com o número de filhos deveria estar entre 0 e 3. Mas a média do número de filhos que encontraste é 4.3

187. Aluno: Não entendi. Assim já não teria que multiplicar?

188. Entrevistador: Não é isso. Lembras-te que dissemos que o valor médio devia estar compreendido entre os valores extremos? Ou seja entre o valor mínimo e o valor máximo?

189. Aluno: [**Permanece em silencio**].

190. Entrevistador: OK. Não faz mal. Analisemos o que fizeste no problema 7 "Família". Diz-se aí que a composição média da família em Benguela… [**Sem terminar a leitura do problema o aluno toma a palavra**].

191. Aluno: Não entendi este problema. Não sabia o que ia fazer.

192. Entrevistador: E no caso do problema 8 "Supermercado"?

193. Aluno: Também não, porque é semelhante a este.

194. Entrevistador: Não te lembras que nas aulas resolvemos dois problemas relacionados com os mesmos? Um deles se referia aos preços que se deviam pôr as garrafas de água mineral.

195. Aluno: Me lembro, mas… é que não sabia o que fazer.

196. Entrevistador: OK. No caso do problema 9, "Peixes capturados", respondeste que "o valor médio não varia ao considerar-se este último aluno que não pescou nenhum exemplar, porque ele não pecou nada e isso não ia afectar em nada". É isso?

197. Aluno: Ahá [**dizendo sim**]

198. Entrevistador: O que é que te fez pensar que a média não varia?

199. Aluno: Então se ele não deu nada, é zero, não é?

200. Entrevistador: É por isso?

201. Aluno: Sim. Olha, aqui estão os valores de cada um. Mas este último não tem nada.

202. Entrevistador: Pois, mas se consideramos este último aluno, no total já seriam 7 e não 6 alunos como anteriormente, não achas?

203. Aluno: [**Não diz nada**].

204. Entrevistador: E sendo agora 7 alunos, isso não faz variar a média?

205. Aluno: É que foi o que eu pensei.

206. Entrevistador: OK. Muito obrigado por colaborar comigo. Nos vemos numa próxima oportunidade.

Entrevista ao aluno A4F

207. Entrevistador: Na pergunta 1, "Tempo percorrido nos 100 m", se pedia o tempo que o professor devia considerar como estimação do tempo real percorrido por um estudante e justificar por que. Na tua resposta indicaste que o professor devia considerar 15 segundos porque é a moda.

208. Aluno: Professor! Estava tantas vezes repetido, não estava a ver como resolver. Então achei a moda. O professor disse que a moda é o número que se repete varias vezes num conjunto, então achei a moda.

209. Entrevistador: Mas veja que o problema dizia que o professor quer estimar o tempo real. A expressão estimar não te diz nada?

210. Aluno: Estimar?

211. Entrevistador: Sim. Te lembras da resolução do problema que se referia à estimação do peso do pacote de massa alimentar?

212. Aluno: Nesta aula eu faltei. Eu e as minhas amigas.

213. Entrevistador: Não estavas presente?

214. Aluno: Sim.

215. Entrevistador: OK. Mas também resolvemos um problema similar, o da estimação da medida do diâmetro de um objecto de forma cilíndrica. Lembras?

216. Aluno: Ehhh, acho que sim.

217. Entrevistador: Está bem, não faz mal. Então tu escolheste o 15 porque era o valor que mais se repetia.

218. Aluno: Sim, a moda.

219. Entrevistador: OK. Analisemos agora o problema 2 "Numa aula de ciência", onde os estudantes queriam determinar o peso real de um objecto, com a maior precisão possível, depois de o terem medido com o mesmo instrumento. Das várias opções dadas, tu escolheste a alínea d) "descartar o valor 15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". Por que não seleccionaste a opção "usar o número mais repetido, que é o 6.2", tal como procedeste na primeira pergunta?

220. Aluno: Porque nós fizemos um problema na turma, e recordo que havia um número que não tinha nada a haver com os outros e o professor disse que parecia um valor estranho. Acho que era sobre metros, o valor era 60 e tal e os outros estavam próximo de 6 ou 7, não sei… e o professor descartou. Eu aqui fiz o mesmo.

221. Entrevistador: Então por isso pensaste…

222. Aluno: Pensei em descartar este valor.

223. Entrevistador: E por que não fizeste o mesmo no problema anterior? Se os valores estão dados em segundos, não achas que o 10 está um pouco fora dos outros valores?

224. Aluno: [**Não diz nada**].

225. Entrevistador: Era possível proceder desta forma?

226. Aluno: [**Continua calada**].

227. Entrevistador: Eu estou a perguntar-te em função do que disseste agora. Disseste que escolheste esta opção porque te lembraste de um problema que se resolveu nas aulas, em que se procedia desta forma.

228. Aluno: Ehhh, mas eu aqui não escolhi a moda porque me lembrei daquele problema. Foi a minha luz professor [**Risos**].

229. Entrevistador: OK. Analisemos agora o problema 3 "Número de perguntas", onde a professora decide estudar o número de perguntas feitas pelos seus alunos. Das diferentes opções apresentadas tu seleccionaste a que diz "somar os 8 números e dividir a soma por 8".

230. Aluno: Sim, foi esta.

231. Entrevistador: Por que não pensaste em excluir o valor 22, tal como procedeste no caso anterior?

232. Aluno: Ehhh, [**risos**], no sé professor.

233. Entrevistador: Podíamos descartar o aluno que fez 22 perguntas?

234. Aluno: Sim, podíamos. Este aluno fez 22 perguntas durante uma aula, professor?

235. Entrevistador: Sim.

236. Aluno: Como é possível? Não é possível um professor fazer 22 perguntas?

237. Entrevistador: Não foi o professor. Foi uma aluna, segundo o que diz o problema.

238. Aluno: Ahhhh, sim.

239. Entrevistador: Não é possível?

240. Aluno: Sim, é possível.

241. Entrevistador: OK. Por que não escolheste a opção que diz "descartar o valor 0, somar os outros 7 números e dividir por 7"?

242. Aluno: Porque também conta, professor. Mesmo que não fez, conta.

243. Entrevistador: Devemos tê-lo em conta, não é?

244. Aluno: Sim, não podemos descartar.

245. Entrevistador: OK. Passemos então ao outro problema. Problema 4 "Filhos por família". [**O entrevistador lê o problema e diz**]. Neste problema se comenta: Se o número médio de filhos por família é 2.2, com qual das frases estás de acordo? Tu indicaste a opção "Há um total de 110 filhos na cidade". Por que chegaste a esta conclusão?

246. Aluno: Eu fiz: 110 a dividir por 50 e deu-me este valor. Então achei que… e é uma cidade, não é só uma casa. Numa cidade habita muita gente. Eu captei assim professor.

247. Entrevistador: Só por isso?

248. Aluno: Sim professor, eu fui… não digo que fui inteligente. Eu logo que vi o 110, peguei no 50 também para ver se o resultado… e deu-me isso. E então fui pondo a minha "cachola" a funcionar.

249. Entrevistador: Ou seja, tu não partiste do que se queria? Vejamos. O que é que se queria no problema? Aí diz: Uma instituição escolar, numa pequena cidade quer determinar o número médio de filhos por família. Isso não te diz nada?

250. Aluno: [**Não diz nada**].

251. Entrevistador: Nada?

252. Aluno. [**Continua calada**].

253. Entrevistador: OK. Não faz mal. Vamos ao problema 5 "Filhos".

254. Aluno: Acho que aqui não fiz nada.

255. Entrevistador: Não te preocupes. Só quero saber com detalhes o que fizeste. [**O Entrevistador lê o problema**]. Se pretendia determinar o número médio de filhos das famílias entrevistadas. Podias explicar-me o que fizeste?

256. Aluno: Isso é média aritmética, não é professor?

257. Entrevistador: Sim.

258. Aluno: É que eu não usei a fórmula. Eu tenho as frequências e…

259. Entrevistador: Quais são as frequências neste caso?

260. Aluno. O 0, 1, 2, e 3.

261. Entrevistador: E as variáveis?

262. Aluno: O 10, o 7, 5 e 3. [**Risos**]. Acho que isso deve estar errado, professor. Não sei. [**Risos; Na prova pôs: 26:6 = 4.3**].

263. Entrevistador: Bem. Passemos ao problema 7 "Família", que diz: A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas. Indique 10 famílias que cumprem esta média. Na composição que apresentaste puseste: 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.5, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1.

264. Aluno. [**Risos**]. Eu acho que isso está errado.

265. Entrevistador: Por que dizes isso?

266. Aluno. O professor disse nas aulas que nenhum filho é metade. 0.5, 0.1 filhos? Não existe. Não pode ser professor.

267. Entrevistador. E por que respondeste assim?

268. Aluno. Eu estava desesperada professor [**Risos**]. Eu pus, porque pensei num exercício de atribuir valores. Mas depois pensei que estava errado. Nenhuma família vai ter 0.5 ou 0.6 filhos. Não nada.

269. Entrevistador: OK. E por que não respondeste a alínea b) deste problema e o problema 8 "Supermercado"?

270. Aluno: Não consegui. Não fui capaz [**Risos**]. Não sabia o que fazer.

271. Entrevistador: Bem. Vejamos então o último problema "Peixes capturados" [**o entrevistador lê o problema**]. Se comenta que mais tarde se descobriu que um

outro aluno tinha participado na actividade, embora não pescou nenhum exemplar. A questão é saber se o número médio de peixes capturados por aluno varia ou não, ao considerar-se este último aluno e por quê? Tu respondeste: "Não varia, porque o número zero é um número".

272. Aluno: Sim, aí já não consegui falar por quê. Zero é um número… ele é neutro. Nunca vai diminuir nem aumentar. Acho que não varia, mesmo que utilizasse o zero. Ia dar a mesma média. Se não utilizasse acho que…

273. Entrevistador: Mas veja. Antes eram 6 alunos. Ao se ter em conta este último aluno o total de alunos já não é o mesmo, não achas?

274. Aluno: Sim, seriam 7.

275. Entrevistador: Pois bem, seriam 7. E isso não te faz pensar que o resultado altera?

276. Aluno: [**Não diz nada, só murmura**].

277. Entrevistador: OK. Obrigado por ter colaborado comigo.

Entrevista ao aluno A8F

278. Entrevistador: Na pergunta 1 "Tempo percorrido nos 100 m", onde se queria saber o tempo que deveria considerar o professor de educação física para estimar o tempo real percorrido pelo estudante e por quê, tu respondeste que "o tempo que deve considerar o professor é 14.49 segundos, porque é o tempo resultante da soma de todos os tempos, dividido pelo número de observações".

279. Aluno: Sim, a média.

280. Entrevistador: É a média de todos os valores apresentados?

281. Aluno: Sim.

282. Entrevistador: OK. Mas tratando-se de um problema de estimação, antes de calcular a média não fizeste uma análise dos dados proporcionados?

283. Aluno: Não sei, não me lembro, mas acho que sim.

284. Entrevistador: Não notaste se havia dados que chamavam mais atenção que os outros? Se havia alguns que distavam muito dos outros ou que não se enquadravam bem no grupo?

285. Aluno. Ahhhh, sim, o 10, não é? Só agora é que me estou a dar conta que o 10 aqui…

286. Entrevistador: Então não fizeste esta análise?

287. Aluno: Não.

288. Entrevistador: OK. E se tivesses visto isso antes, o que é que farias?

289. Aluno: Eliminar o 10 por ser um valor atípico.

290. Entrevistador: Excluí-lo?

291. Aluno: Sim.

292. Entrevistador: OK. Passemos então ao problema 2 "Numa aula de ciência". Das várias opções apresentadas, tu seleccionaste a alínea d) que diz "descartar o valor

15.3, somar os outros 8 números e dividir por 8". Por que pensaste em excluir este valor?

293. Aluno: Porque me parece um valor que está muito distante dos outros valores. É um valor atípico. Da forma como nós aprendemos com o professor, neste caso deve excluir-se este valor e achamos a média dos outros valores.

294. Entrevistador: Foi mais fácil ver este detalhe aqui no problema 2 em relação ao problema 1'

295. Aluno: Não é isso. Acho que foi distracção minha na pergunta 1, estva muito apressada e queria terminar o teste o mais cedo possível.

296. Entrevistador: OK. Mas és consciente de que nos problemas de estimação é necessário observar com atenção os dados, para ver se há observações anómalas, antes de realizar as operações, não é?

297. Aluno: Sim, acho que estarei mais atenta.

298. Entrevistador: OK. Passemos então ao problema 3 "Número de perguntas". Aqui uma professora decide estudar quantas perguntas fazem os seus alunos. E para resumir os dados, ela calcula o número típico de perguntas feitas neste. Dos vários métodos por recomendar, tu indicaste a alínea b) "somar os 8 números e dividir a soma por 8". Por que este método e não outro?

299. Aluno: Foi para poder achar a média. Eu não podia descartar, por exemplo, o 22, porque realmente a Ana fez 22 perguntas. Não é como nos caso de medir… não podia descartar o 22 e então optei por esta alínea. Também não podia usar o número mais repetido...

300. Entrevistador: Número mais repetido, o que é que seria neste caso?

301. Aluno: [**Fica a pensar**].

302. Entrevistador: Também se conhece como número comum o mais frequente. Que medida seria? É a media, a mediana ou a moda?

303. Aluno: É a moda.

304. Entrevistador: Por que não pensaste em descartar o 0, somar os outros 7 números e dividir por 7?

305. Aluno: Não podia descartar o 0 pelo número de alunos. Éhhh, porque devemos ter em conta que houve um aluno que não fez nenhuma pergunta.

306. Entrevistador: OK. Analisemos agora o problema 4 "Filhos por família". O problema diz que uma instituição escolar … [**o entrevistador lê o problema e diz**]. Tu indicaste a opção que diz "Há um total de 110 filhos na cidade". Podes dizer-me por que chegaste a esta conclusão?

307. Aluno: Eu usei a fórmula: a soma é igual ao número de observações vezes a média e me deu este valor 110 filhos.

308. Entrevistador: Quais são os dados que eram conhecidos?

309. Aluno: Se conhecia a média e o número de observações.

310. Entrevistador: OK. Esta bem. Vamos analisar agora o que respondeste na pergunta 6 "Gráfico de notas". Depois de comprovares que a nota média do grupo 2 também é igual a 11, na alínea seguinte, para responder qual é o grupo que te parecia

melhor e por quê, respondeste que " O grupo que me parece melhor é o grupo 2, porque a maioria teve notas positivas e só 2 alunos tiveram negativas"

311. Aluno: Sim.

312. Entrevistador: OK. Mas na pergunta seguinte, das várias opções apresentadas, tu seleccionaste a que diz "Apesar de que as média são iguais nos dois grupos, o grupo 2 é mais homogéneo". Achas que as duas respostas estão relacionadas?

313. Aluno: Acho que não. Por acaso também fiquei em dúvida, porque naquele dia, quando falamos de gráficos, eu não entendi bem o que era homogeneidade. Acho que respondi aleatoriamente, não sabia se era a resposta certa ou não. Estava em dúvida.

314. Entrevistador: OK. Isso significa então que a tua real justificação é a que diz que o grupo 2 é melhor porque nele há mais alunos com notas positivas?

315. Aluno: Sim.

316. Entrevistador: OK. Mas quando assinalaste a opção que diz "o grupo 2 é mais homogéneo", o que foi que entendeste pela expressão "mais homogéneo"?

317. Aluno: Mais homogéneo? Não sei, não sei explicar. Como eu disse, também não entendi bem essa coisa de homogeneidade.

318. Entrevistador: Mas tu seleccionaste esta resposta!

319. Aluno: Eu nem sei por quê. Acho que não devia escolher esta resposta [**Risos**].

320. Entrevistador: OK. Analisemos então o problema 7 "Família" Aí dizem que a composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas. Havia que indicar 10 famílias que cumpriam esta média. Podes explicar-me o que fizeste antes de indicar os valores que formam os membros de cada família?

321. Aluno: Éhhh, o que é que eu fiz? Sim, o mesmo que fiz anteriormente. Usei a fórmula da soma. A soma é igual ao número de observações multiplicado pela média, e achei a soma. Depois da soma, fiz a distribuição de maneira que o somatório de todas… como posso disser? O somatório de todas as observações desse como resultado o valor da soma.

322. Entrevistador: OK. E para o problema 8? Há semelhanças com o problema 7?

323. Aluno: Sim, há.

324. Entrevistador: O problema dizia: Num supermercado havia 8 marcas diferentes de pacotes de batatas fritas. Quê preço se podia pôr a cada marca de pacote de batatas fritas, para que o preço médio seja de $1.50? Aqui tu usaste valores decimais, mas no problema 7 não. Podes explicar por quê?

325. Aluno: Não porque preço é um valor contínuo e número de família é um valor discreto, não posso tomar…

326. Entrevistador: Valor ou variável?

327. Aluno: Sim, variável.

328. Entrevistador: OK. E como é que raciocinaste para encontrar o preço das restantes marcas pedidas na alínea b) do problema 8?

329. Aluno: [**Não diz nada**].

330. Entrevistador: Aqui já se conheciam os preços de 3 marcas.

331. Aluno: Tendo em conta que 12 é a soma de tudo, então fui pondo valores aleatoriamente para que o cálculo fosse 12.

332. Entrevistador: Ou seja como já conhecias três preços, para as restantes marcas o que fizeste foi…?

333. Aluno: [**Risos**]. Fui somando professor. De maneira que a soma de todos os valores desse 12.

334. Entrevistador: OK. Passemos já a última questão. No problema 9 "Peixes capturados" se queria saber se o valor médio de peixes capturados por aluno variava, ao considerar-se o último aluno que não pescou nenhum exemplar.

335. Aluno: Se varia? Varia professor. É mais uma pessoa, e aiiii, não sou muito boa ao falar, professor.

336. Entrevistador: Olha o que tu respondeste: "Ao considerar-se o último aluno, o valor médio varia. A média será 2.5 em vês de 3, porque somamos o número de peixes e dividimos por 7". Quantas observações haviam antes?

337. Aluno: 6.

338. Entrevistador: E agora?

339. Aluno: 7.

340. Entrevistador: Mas o último aluno não pescou nenhum exemplar?

341. Aluno: Sim, não pescou nenhum peixe, mas são… éhhh, são 7 pessoas e queremos achar a média dos 7. Embora não pescou nada, temos que ter em conta, porque ele também esteve lá.

342. Entrevistador: É por isso?

343. Aluno: Sim, por isso mesmo.

344. Entrevistador: OK. Muito obrigado por ter colaborado.

Anexo 8: Traducción al español de la transcripción de entrevistas realizadas en el tercer estudio de la fase general de investigación.

Entrevista al alumno A3M

1. Entrevistador: En la pregunta 1 "Tiempo recorrido en los 100m", a la cuestión, ¿qué tiempo debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y por qué, en tu respuesta pones 14'98, ¿es eso, no?
2. Alumno: Sí.
3. Entrevistador: ¿Qué significa este valor?
4. Alumno: Es la media. Yo hice la suma de todos los valores, excepto el 10, porque comparado con los demás, noté que se encontraba muy por debajo del resto. Si todos comenzaron el registro del tiempo en el mismo instante, resulta extraño que uno obtenga 10 segundos mientras que otros registren unos tiempos cerca de los 15 segundos. Para mí es un valor atípico. El profesor había explicado que el valor atípico es un valor que está muy por encima de la media o muy por debajo. Entonces,…
5. Entrevistador: ¿Por encima o por debajo de la media? ¿o que se demarca considerablemente de los otros datos?
6. Alumno: Sí, perdón, de los datos. Como casi todos tienen valores entre 14 y 15, un valor de 10 está muy por debajo. Creo que debe ser un error.
7. Entrevistador: OK. ¿Y este valor cómo lo denominas?
8. Alumno: Sí, se llama valor atípico.
9. Entrevistador: ¿Entonces el valor 14'98 es la media que obtuviste con los otros valores?
10. Alumno: Sí, es la media.
11. Entrevistador: OK. Y en la pregunta 2 "En una clase de ciencias" has elegido la opción d) "descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8". En el problema se decía que los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Por qué has elegido esta opción y no otra?
12. Alumno: Por el mismo motivo que expliqué en el problema anterior. Fui observando los valores, por ejemplo aquí tenemos 6'2; 6'0, y aparece un 15.

Estamos pesando un mismo objeto, con la misma balanza. ¿Cómo es posible que uno encuentre por ejemplo 6'15 y el otro un peso por encima del doble? Yo vi que este valor no podía ser. Tenía que ser un valor comprendido entre el 6'0 y el valor 6'15, entre los dos extremos, y me dio 6'14, que es la media.

13. Entrevistador: OK. Y en el caso del problema 3 "número de preguntas" [**lee el problema**] La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas en ese día. Aquí hay también varias opciones, que son los métodos que se podrían recomendar a la profesora. ¿Y tú has elegido precisamente la opción "sumar los 8 números y dividir por 8"?

14. Alumno: Sí, porque aquí no podría descartar, ni el cero, ni el 22. Se trata del número de preguntas que cada alumno hizo. Es como en una fiesta, si queremos determinar la edad media de los participantes en una fiesta, tenemos que sumar todos los valores y dividir por el número de participantes, aunque haya una edad muy alejada de las demás. El 22 es muy alto, comparado con los demás valores, pero es un valor que se debe tener en cuenta. El cero y el 22 deben constar en la suma. Ella quiere determinar el número típico de preguntas hechas en este día. Entonces debe sumar todas las preguntas y dividir por el número de alumnos. Por eso no podemos descartar un alumno u otro.

15. Entrevistador: ¿Y por qué no lo descartamos si en el caso anterior, tuvimos que hacerlo? ¿Dónde está la diferencia?

16. Alumno: [**Permanece en silencio**]

17. Entrevistador: Aquí, por ejemplo, tú dijiste que no se debe descartar el 22, ¿no es así? Pero en el problema anterior, propusiste descartar el 15'3. ¿Por qué allí sí, y aquí no?

18. Alumno: Aquí, porque son varios alumnos que miden el peso de un objeto con un mismo instrumento. Los valores que deben dar deben ser más o menos aproximados. Si se mide el mismo objeto y con la misma balanza, no es posible que algunos obtengan un peso que sea el doble de los otros. Pero aquí, es como si fuésemos a determinar la media de edades de un grupo de personas que estaban en una fiesta. Independientemente de si la edad es mayor o menor, si estuvo ahí debemos considerarlo.

19. Entrevistador: Es decir, 22 es exactamente el número de preguntas hechas por aquel alumno.

20. Alumno: Sí, por eso.

21. Entrevistador: ¿Y el caso del cero? ¿Por qué no excluimos el cero, si Juan no hizo ninguna pregunta?

22. Alumno: Se quiere determinar el número típico de preguntas que los alumnos hacen. Luego, aunque Juan no hizo ninguna pregunta, también debe contar en el total, no se debe descartar.

23. Entrevistador: OK. En la pregunta 4 "Hijos por familia", ¿podría decirme por qué elegiste la opción c) "hay un total de 110 hijos en la ciudad"?

24. Alumno: [**lee el problema silenciosamente y contesta**]. Multipliqué el resultado que fue…, bueno, hay 50 familias, ¿no?

25. Entrevistador: Exacto.

26. Alumno: Y vieron que había 2'2 hijos por familia, como media. Entonces multipliqué este valor por 50, para obtener el número de hijos en la ciudad. Porque dividiendo el número de hijos de la ciudad por 50 da 2'2. Eso indica que hay 110 hijos en la ciudad.

27. Entrevistador: ¿Y si hubiésemos optado por el apartado a) "La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 hijos"? ¿Qué significaría eso?

28. Alumno: Mira, puede haber familias que tienen 2 hijos o incluso que no tienen ningún hijo. No podemos afirmar que la mitad, la minoría o la mayoría tienen X hijos.

29. Entrevistador: ¿Y decir que el número más común de hijos en una familia es 2? ¿Qué idea te transmite esta expresión?

30. Alumno: [**Permanece en silencio y después contesta**]. No estoy de acuerdo con esta afirmación, porque no es obligatorio que el número más común de hijos en una familia sea 2, porque puede haber familias que tengan más hijos o menos hijos, el número más común puede ser 3, o puede ser incluso 0, puede haber familias que tienen muchos hijos, hablar del número que más se repite, creo que…. [**No concluye la idea**]

31. Entrevistador: Bueno. Ahora hablemos de lo que contestaste en la pregunta 6 "gráfica de notas". Después de comprobar que la nota media del grupo 2 también es 11, al argumentar qué grupo te parecía mejor, en el apartado b), expresaste que "la media es calculada por grupo, por lo tanto, los grupos están en situación de igualdad". ¿Qué quieres decir con eso?

32. Alumno: Que ninguno de los grupos es mejor que el otro, porque obtuvieron el mismo resultado, es decir, la media.

33. Entrevistador: Es decir, ¿hiciste el análisis considerando la igualdad de las medias? Como las medias son iguales ningún de los grupos es mejor.

34. Alumno: Sí.

35. Entrevistador: ¿Te acuerdas que cuando hablamos de los gráficos decimos que al comparar gráficos era necesario atender a determinadas particularidades? ¿No te acuerdas que en las sesiones hablamos de tres gráficos que tenían medias iguales y dijimos que a pesar de la igualdad en las medias era posible distinguir diferencias entre los grupos?

36. Alumno: [**Permanece en silencio y después contesta**]. ¿Cuándo fue eso?

37. Entrevistador: En la penúltima sesión.

38. Alumno: Yo no asistí la penúltima sesión.

39. Entrevistador: ¿Pero asististe la última, no?

40. Alumno: Sí, a la última asistí.

41. Entrevistador: También en la última repasamos este aspecto. Hablamos de tener en cuenta a la agrupación de los datos en torno a la media cuando comparamos grupos, entre otros aspectos. ¿No te acuerdas?

42. Alumno: No, no me acuerdo.

43. Entrevistador: Bueno. Pasemos ahora a la otra cuestión. En la pregunta 7 "Familia" se pidió que indicases 10 familias que cumplían la media de 3'2. ¿Qué hiciste para indicar la composición de cada familia?

44. Alumno: En el problema se dice que la composición media de la familia en Benguela es de 3'2. Pidieron indicar 10 familias. Entonces, yo multiplique 3'2 por 10, y me dio 32.

45. Entrevistador: ¿Y qué representa este valor?

46. Alumno: ¿El valor 32?

47. Entrevistador: Sí

48. Alumno: El número de personas. El número de personas que debemos dividir por el número de familias. Como son 32 personas, divididas por 10 familias debe dar 3'2, que es la composición media de la familia en Benguela.

49. Entrevistador: OK. ¿Y después de encontrar el valor 32, que hiciste?

50. Alumno: Después de encontrar este valor, dividí 32,…repartí 32 por las 10 familias.

51. Entrevistador: ¿Repartiste 32 por las 10 familias?

52. Alumno: Sí, lo repartí por las 10 familias.

53. Entrevistador: Suponga por ejemplo, que en vez de 10 familias tuvieses que indicar la composición de 5 familias. ¿Qué harías en este caso, si supiésemos además que la composición media de la familia es de 3'2 personas?

54. Alumno: ¿La composición de 5 familias?

55. Entrevistador: Sí.

56. Alumno: Haría la misma cosa. Yo multiplicaría el número de familias por la media. 5 por 3'2.

57. Entrevistador: OK. ¿Y que harías después con el resultado encontrado?

58. Alumno: Dividiría por el número de familias.

59. Entrevistador: ¿Dijiste dividir?

60. Alumno: Sí, por el número de familias. Tengo que hacer una repartición por el número de familias.

61. Entrevistador: OK.

62. Entrevistador: Pero en las operaciones que presentaste pusiste 10 dividido por 32. ¿Es eso?

63. Alumno: No, eso fue una equivocación. Debía ser al revés: 32 dividido por 10.

64. Entrevistador: OK. Pasemos ahora a la última cuestión, problema 9 "Peces capturados". ¿Me puedes explicar lo que hiciste? Recuerda que se pretendía saber

si el valor medio de peces capturados por cada alumno variaba al considerarse que el último alumno no capturó ningún pez.

65. Alumno: Sí, en este caso, como había un alumno más, había que tenerlo en cuenta.

66. Entrevistador: Pero él no pescó ningún pez.

67. Alumno: Sí, no capturó ninguno pero nosotros queremos saber el número medio de peces capturados, incluyendo también a este alumno. Por eso ya son 7. Es un alumno más.

68. Entrevistador: ¿Entonces qué es lo que cambia ahora?

69. Alumno: Ahora debemos dividir por 7 y no por 6.

70. Entrevistador: Pero de acuerdo a lo que nosotros vimos, ¿qué es eso?

71. Alumno: Alteró el resultado. Yo no lo he puesto, pero sumamos todos los valores, incluyendo el cero y dividimos por 7.

72. Entrevistador: Bueno. Muchas gracias por haber colaborado conmigo.

Entrevista al alumno A1M

73. Entrevistador: Me gustaría que me aclarases algunas cosas en el cuestionario que contestaste. Por ejemplo, en la pregunta 1 "Tiempo recorrido en los 100 m", ¿qué fue lo que hiciste para determinar el tiempo que el profesor debería considerar como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante?

74. Alumno: Primeramente vi si existían números atípicos, analicé las observaciones y he notado que el valor 10 parecía no estar bien encuadrado con los otros tiempos. Los otros tiempos estaban más o menos entre 14 y 15. Concluí que el valor 10 era un número atípico y entonces lo descarté. Entonces coloqué los demás números en una tabla para determinar las frecuencias, porque era el método más fácil, escribí los tiempos y sus frecuencias. Luego, multipliqué las frecuencias por las observaciones y como ya sabía que eran 10 alumnos, dividí entonces por 9 y obtuve un resultado aproximado a 14'99. Creo que fue eso.

75. Entrevistador: OK. Preferiste utilizar una tabla de datos con sus frecuencias.

76. Alumno: Sí

77. Entrevistador: ¿Después de descartar el 10, podrías haber utilizado otro método para encontrar el 14’99 sin ponderar los valores?

78. Alumno: Sí, creo que podría hacerlo de otra manera, utilizar la media simple. Teniendo en cuenta también que son pocos valores, podría perfectamente utilizar la media simple. Pero como ya había algunos valores que se repetían y para ahorrar tiempo en la prueba, utilicé la media ponderada.

79. Entrevistador: OK. Veamos ahora el problema 2 “En una clase de ciencias”. Aquí, se pedía recomendar un método, de manera que los estudiantes determinasen con la mayor precisión posible el peso real de un objeto pequeño que ellos midieron con un mismo instrumento. De las opciones dadas, tú sugeriste la opción d) “descartar el valor 15’3, sumar los otros 8 números y dividir la suma por 8”. ¿Por qué fuiste por esta opción y no otra?

80. Alumno: Aquí, el peso 15’3 me pareció un valor atípico. Es posible que el alumno que pesó no estuviese muy atento. Por eso, recomendé a estos alumnos que descartasen el valor 15’3, y sumasen las otras observaciones y dividiesen por 8

81. Entrevistador: OK. En particular, si hubiésemos elegido la opción a) “usar el número más repetido, que es el 6’2”, ¿qué medida estaríamos usando en este caso?

82. Alumno: Es la moda, 6’2 es la moda. Pero ellos querían saber la media.

83. Entrevistador: OK. Ahora pasemos a la pregunta 3 “Número de preguntas”, [**leyendo el problema**]. La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas en ese día. La cuestión era saber cuáles de los métodos se debía recomendar. Propusiste el apartado b) “sumar los 8 números y dividir por 8”, ¿no es así?

84. Alumno: Sí, teniendo en cuenta que se trata del número de preguntas hechas por cada alumno, creo que no se debe descartar el valor 22. Si Ana hizo este número de preguntas, creo que es porque lo necesitaba. Entonces, estando en una clase, yo no puedo descartar el 22. Por eso opté por sumar los 8 números y dividir por el número de alumnos.

85. Entrevistador: OK. ¿Y por qué no seleccionaste el apartado que dice “Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7”?

86. Alumno: Sí, porque el 0 también es un dato, Juan también hizo parte de la clase. Si no lo consideramos, íbamos a dividir por 7, y no por 8, pero creo que así no da, porque la profesora quiere tener en cuenta a todos los alumnos. Por eso no descarté el 0.

87. Entrevistador: Bueno, vamos a la pregunta 4 "Hijos por familia". Aquí también se dan varias opciones y tú elegiste la opción c) que dice: Hay un total de 110 hijos en la ciudad. ¿Qué te hizo pensar en este apartado?

88. Alumno: Fui por este apartado porque el cálculo de la media por el número de familias iba a dar eso, iba a dar 110 hijos. Fui también por esta opción porque las otras respuestas no encajaban. La media no significa que la mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 hijos, porque está entre los extremos, es un número representativo, pero no significa obligatoriamente que está encuadrado entre 2. Creo que las otras opciones que se encuentran allí son suposiciones. Entonces me convenía más…, hice un cálculo, me dio con mayor precisión y fue el apartado que escogí. Un apartado que se ajustaba a los datos.

89. Entrevistador: OK. Analicemos ahora el problema 6 "Gráfica de notas". Después de que comprobaste que las medias son iguales en los dos grupos, para contestar, qué grupo te parecía mejor, justificaste que "el grupo 2 era mejor, porque en él hay más homogeneidad en las notas". ¿Qué querías decir con eso?

90. Alumno: Bueno, cuando digo que hay mayor homogeneidad, quiero decir que las notas están más unidas, es decir hay más notas…, es decir, las notas de los alumnos están más concentradas, es decir, los alumnos tuvieron casi todos las mismas notas. Así que, este grupo es mejor porque en el mismo hay más homogeneidad. Si vemos el grupo 1, a pesar de que tuvieron las notas más altas, existe también muchos alumnos…, es decir, no hay concentración de notas, es decir, el grupo no es homogéneo, las notas están muy… ehhh.

91. Entrevistador: ¿Muy dispersas?

92. Alumno: Eso. En el grupo 1 están muy dispersas.

93. Entrevistador: OK. Pasemos al problema 7 "Familia". La composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas. Se pedía indicar 10 familias que cumplían esta media. Escribiste los nombres de las familias y fuiste dando diferentes valores, ¿no es verdad?

94. Alumno: Sí.

95. Entrevistador: Yo quería saber lo siguiente: ¿Antes de encontrar los valores que indicaste, realizaste alguna operación?

96. Alumno: Sí. Efectué operaciones. Multipliqué el número de familias por la media. El resultado me dio 32. A partir de ahí, ya tenía una base para efectuar la distribución en cada familia.

97. Entrevistador: OK. Veo que en su distribución no aparecen valores decimales.

98. Alumno: Sí, porque depende del tipo de media. Aquí estamos hablando de personas, número de hijos…

99. Entrevistador: Composición de familias

100. Alumno: Sí, en la composición de familias no es posible tener 3'2 personas en una casa. Es decir la media es una media… ponderada, ¿ponderada?... [**Murmurando, ¿constante?, ¿ponderada?**] El término no me viene. Pues, nosotros sabemos que existen medias continuas y medias…

101. Entrevistador: Variables

102. Alumno: Sí, variables. Era eso lo que quería decir. Variables continuas y…

103. Entrevistador: ¿Discretas?

104. Alumno: Sí, y discretas. En este caso, la composición de familia es una variable discreta. Así que no podía poner ahí números decimales.

105. Entrevistador: OK. Veamos ahora la pregunta 8 "En un supermercado". ¿El procedimiento que usaste en este caso es el mismo en relación al que utilizaste en la pregunta anterior?

106. Alumno: Sí. Multipliqué la media por las 8 marcas para obtener una base y con esta base hacer la distribución. En el caso fue 12, después de hacer la distribución, la suma da 12, dividiendo por 8 da la media 1'50.

107. Entrevistador: ¿Y ahí se pueden usar valores decimales?

108. Alumno: Sí, porque esta media, esta variable, es una variable continua, no es una variable discreta. Se trata de precio, podemos utilizar valores decimales.

109. Entrevistador: En el caso del apartado b) donde ya indicaban tres precios recomendados, ¿cómo razonaste para determinar el precio de las restantes marcas?

110. Alumno: Primeramente, determiné el resultado de la suma de los precios recomendados. Como ya sabía que la base era 12, resté de este valor la suma de los precios recomendados. Luego distribuí el valor restante a las otras marcas que no tenían precios.

111. Entrevistador: OK. Para la pregunta 9 "Peces capturados", en la que se quería saber si variaba el valor medio de peces capturados por cada alumno, al considerase el alumno que no pescó ningún ejemplar, contestaste que el valor medio variaba.

112. Alumno: Sí, porque tenemos que considerar este último alumno como una observación más, luego al realizar la distribución de la cantidad de peces por todos los alumnos el valor iba a alterar a pesar de que este alumno no capturó ningún pez. Y yo lo mostré a través de los cálculos. Consideramos el valor nulo de este alumno, pero en el total, al dividir, tenemos que incluir ese alumno que no capturó ningún pez.

113. Entrevistador: ¿Eso significa que el total de alumnos ya no sería el mismo?

114. Alumno: Sí, el total de alumnos ya no sería el mismo. Ya no sería 6, pero sí, 7.

115. Entrevistador: OK. Muchas gracias por haber colaborado conmigo.

Entrevista al alumno A7F

116. Entrevistador: Me gustaría saber con más detalle lo que has contestado en el test. Por ejemplo, en la pregunta 1, en donde se preguntaba qué tiempo debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y por qué, asumiste que el profesor debía considerar el 15 por ser el valor que se repite más veces y al que los demás se aproximan.

117. Alumno: Ajá.

118. Entrevistador: ¿Antes de contestar a la pregunta, antes de llegar a esta conclusión, hiciste un análisis sobre la forma como se presentaban los datos, atendiendo a que lo que se quería era estimar?

119. Alumno: Sí, vi que había cuatro 15, ehhh, un 10, y yo ni siquiera lo había visto, los demás son el 14'95, el 15'05, a uno le falta 5 y el otro pasa de 5, así que escogí el 15.

120. Entrevistador: ¿Entonces fue por eso, no?

121. Alumno: Sí, fue por eso.

122. Entrevistador: Pero, ¿no te ha llamado la atención, el hecho de que hubiera un 10 en este grupo de datos?

123. Alumno: Ni siquiera lo había visto, sólo ahora lo estoy viendo, sabes.

124. Entrevistador: ¿No lo habías visto?

125. Alumno: No, sólo los demás.

126. Entrevistador: Y si hubieses visto el 10, crees que…

127. Alumno: Pero también creo que no iba a alterar nada, porque los demás valores están más cerca del 15.

128. Entrevistador: ¿Te acuerdas que cuando hablamos de los problemas de estimación dijimos que la media aritmética era la medida más indicada para este tipo de situaciones?

129. Alumno: Sí

130. Entrevistador: ¿Y por qué no fuiste por ahí y preferiste considerar el valor que más se repite?

131. Alumno: [**Permanece en silencio**]

132. Entrevistador: Y al hablar del valor que más se repite, o valor más frecuente ¿de qué medida estamos hablando? ¿Qué nombre recibe esta medida?

133. Alumno: Es la media, ¿no?

134. Entrevistador: ¿Crees que es la media?

135. Alumno: Creo que sí.

136. Entrevistador: OK. Analicemos ahora lo que contestaste en la pregunta 2.

137. Alumno: ¿Pero la respuesta que di en la pregunta 1 es incorrecta?

138. Entrevistador: No es eso. Mira, lo que yo pretendo es analizar tu opinión, tu forma de pensar, no tanto saber si la respuesta es correcta o incorrecta, ¿me entiendes?

139. Alumno: ¿Pero cuál sería la respuesta correcta, entonces?

140. Entrevistador: Ya te diré al final de esta conversación. Pero mi objetivo es saber cómo has razonado en cada cuestión. Ver si las ideas que transmitimos en las clases han permanecido o te has guiado por otras ¿OK? No pienses que te quiero juzgar, ¿está bien?

141. Alumno: [**Contesta sí, de forma gestual**]

142. Entrevistador: Seguimos entonces. En la pregunta 2, se dice: Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño… [**Lee el problema completo**]. Mira, aquí se pedía indicar el método que recomendarías a los estudiantes para determinar con mayor precisión posible el peso real del objeto. De las varias opciones presentadas, sugeriste el apartado c) "sumar los nueve números y dividir la suma por 9".

143. Alumno: Ajá.

144. Entrevistador: Pero si en el primer problema fuiste por el valor que se repitía más, ¿Por qué aquí no razonaste de la misma forma, ya que también hay valores que se repiten?

145. Alumno: No, porque en el primer problema estaban preguntando cuál era el tiempo y nosotros debíamos escoger de los tiempos dados, pero aquí ya no. Debíamos ver cuál de las respuestas era correcta.

146. Entrevistador: Pero mira: En la pregunta 1 presentas como justificación el hecho de existir números que más se repiten. Sabiendo que aquí, en la pregunta 2, aparece una opción que se relaciona con la justificación que habías dado en la primera pregunta, ¿no sería más justo escogerla?

147. Alumno: Pero hay diferencias, porque los otros valores no están muy cerca del 6'2; por ejemplo el 15'3 se encuentra muy distante. Mientras en el caso anterior, viendo el 15 que se repite 4 veces, los demás valores están muy próximos a este valor, excluyendo el 10.

148. Entrevistador: Analicemos bien; mira que el 6'0, el 6'1, el 6'15, son valores muy cercanos al 6'2. ¿No crees que la situación sea similar?

149. Alumno: [**Permanece en silencio**]

150. Entrevistador: ¿Por qué no pensaste por ejemplo en el apartado d) descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8?

151. Alumno: Yo había pensado mismo en este apartado, pero no me acordaba de que en las clases se había hablado de descartar.

152. Entrevistador: ¿No te acordabas?

153. Alumno: No

154. Entrevistador: ¿No te acuerdas que dijimos que si utilizamos la media para estimar una medida era importante observar la existencia de valores atípicos y que estos deberían ser descartados porque afectan a la media?

155. Alumno: Me acuerdo que hablamos de los valores atípicos, pero no me acuerdo que se dijera que debían descartarse.

156. Entrevistador: Nosotros resolvimos un problema similar en las clases, pero no importa, ya te lo enseñaré más tarde. Veamos ahora la pregunta 4 "Hijos por familia". Se quiere determinar el número medio de hijos por familia en la ciudad, así que dividen el número total de hijos por 50. Si el número medio de hijos por familia es 2'2, ¿con cuál de las frases estás de acuerdo? Tú marcaste la frase que dice: la mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 hijos. ¿Por qué esta opción?

157. Alumno: [**Permanece en silencio**]

158. Entrevistador: Acuérdate que se quería determinar el número medio de hijos en la ciudad. Se dividió el número total de hijos de la ciudad por 50 y…

159. Alumno: Ahhhhh. Creo que aquí está completamente incorrecto, ¿verdad? [**Señalando su resolución**]

160. Entrevistador: No, yo no dije que era incorrecto.

161. Alumno: Ahora viendo bien, creo que debía indicar otra opción. Si se habla de 2'2 da la impresión de que tienen más de 2 hijos. Pero no sería la mitad, sería… [**Silencio**], que "En la ciudad hay más familias con 3 hijos que con 2".

162. Entrevistador: Y ¿Por qué esta opción?

163. Alumno: Por el valor que dio, 2'2.

164. Entrevistador: Por ser 2'2, entonces…

165. Alumno: Pasó del valor 2. Tiene 2 o más.

166. Entrevistador: Es decir, que en la ciudad hay más familias con 3 hijos que con 2, porque la media es 2'2. Eso quiere decir…

167. Alumno: [**Risas**]

168. Entrevistador: No, es que no entendí la explicación.

169. Alumno: Sí.

170. Entrevistador: ¿Y por qué no podía ser 2?

171. Alumno: Porque el valor (de la media) pasa de 2.

172. Entrevistador: OK. Vamos a la pregunta 5 "Hijos". [**Lee el problema**]. Observa que lo que se pretende es determinar el número medio de hijos de las familias entrevistadas. ¿Me puedes explicar con detalle lo que hiciste aquí?

173. Alumno: Aquí [**señalando en la prueba**] he puesto el número de familias (columna xi: 10, 7, 5, 3, 4), aquí el número de hijos (columna fi: 0, 1, 2, 3, 0) y multipliqué (columna xi **.** fi: 0, 7, 10, 9, 0), sí, y después dividí el valor de los hijos, es decir, el valor de la multiplicación de las familias por los hijos y dividí [**En el teste escribió:** $\bar{x} = \frac{xi.fi}{fi} = \frac{26}{6} = 4'3$, **omitiendo incluso el símbolo de la suma**] .

174. Entrevistador: OK. Los valores que indicaste por xi, ¿se refieren a familias o a hijos?

175. Alumnos: Se refieren a familias.

176. Entrevistador: Pero aquí, en el problema ¿lo que se pretende es determinar el número medio de hijos o el número medio de familias?

177. Alumno: Número medio de hijos de las familias.

178. Entrevistador: ¿Entonces cuáles son los valores que indican la variable y cuáles los que indican las frecuencias?

179. Alumno: [**Permanece en silencio**]

180. Entrevistador: Estos valores 10, 7, 5, 3, ¿se refieren a la variable o las frecuencias?

181. Alumno: [**Permanece en silencio**]

182. Entrevistador: Mira, allí se dice por ejemplo: 7 familias tenían un hijo. Eso es lo mismo que decir, con 1 hijo había 7 familias, ¿no? Entonces ¿Cuál es la variable: Hijos o familias?

183. Alumno: Sería hijo, ¿no? ¿No es así?

184. Entrevistador: ¿No notas algo erróneo en la tabla que presentas?

185. Alumno: Sí lo noto. Pero aunque se cambie, en el momento de multiplicar el resultado será el mismo. ¿No es así?

186. Entrevistador: Pero mira. En tu respuesta dices que el número medio de hijos de las familias entrevistadas es 4'3. Pero si no hubieses cambiado, mirando los datos relacionados con el número de hijos, debía variar entre 0 y 3. Pero la media del número de hijos que encontraste es 4'3.

187. Alumno: No entendí. ¿Eso significa que ya no debía multiplicar?

188. Entrevistador: No es eso. ¿Te acuerdas que dijimos que el valor medio debía estar comprendido entre los valores extremos, es decir entre el valor mínimo y el valor máximo?

189. Alumno: [**Permanece en silencio**]

190. Entrevistador: OK. No pasa nada. Pasemos al problema 7 "Familia". Dice que la composición media de la familia en Benguela… [**Sin terminar la lectura del problema el alumno toma la palabra**]

191. Alumno: No entendí este problema. No sabía qué hacer.

192. Entrevistador: Y el problema 8 "En un supermercado"?

193. Alumno: Tampoco lo entendí porque los dos son similares.

194. Entrevistador: ¿No te acuerdas que en las clases resolvimos dos problemas relacionados? Uno de los cuales se refería a la búsqueda de los precios de las botellas de agua.

195. Alumno: Me acuerdo, pero…, es que no sabía qué hacer.

196. Entrevistador: OK. En el caso del problema 9 "Peces capturados" contestaste que "el valor medio no varía al considerarse este último alumno que no pescó ningún ejemplar, porque él no pescó nada y eso no iba afectar en nada". ¿Es eso no?

197. Alumno: Ajá

198. Entrevistador: ¿Qué te hizo pensar que no varía?

199. Alumno: Entonces, si él no tiene nada es cero, ¿no es así?

200. Entrevistador: ¿Es por eso?

201. Alumno: ¡Sí! Mira, aquí están los valores de cada uno. Pero este último no tiene nada.

202. Entrevistador: Pues, pero si consideramos este último alumno, en total ya serían 7 y no 6 como anteriormente, ¿no crees?

203. Alumno: [**Permanece en silencio**]

204. Entrevistador: Y siendo ahora 7 alumnos ¿esto no hace variar el resultado?

205. Alumno: Es que esto fue lo que yo pensé.

206. Entrevistador: OK. Muchas gracias por haber colaborado conmigo. Nos vemos en una próxima oportunidad.

Entrevista al alumno A4F

207. Entrevistador: En la pregunta 1 "Tiempo recorrido en los 100m", se pedía el tiempo que el profesor debía considerar como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y justificar por qué. En su respuesta indicaste que el profesor debía considerar es 15 porque es la moda.

208. Alumno: Profesor, el 15 estaba tantas veces repetido que yo no sabía cómo resolver el problema. Entonces fui por la moda. El profesor dijo que la moda es el valor que más se repite en un conjunto de datos, entonces indiqué la moda.

209. Entrevistador: Pero mira que en el problema decía: el profesor quiere estimar el tiempo. ¿La expresión estimar, no te dice nada?

210. Alumno: ¿Estimar?

211. Entrevistador: Sí. ¿Te acuerdas que resolvimos un problema similar que se refería a la estimación del peso del paquete de pasta alimenticia?

212. Alumno: Yo no estaba presente en esta clase. Yo y mis amigas, no estábamos presentes.

213. Entrevistador: ¿No estabas presente?

214. Alumno: Sí.

215. Entrevistador: OK. Pero también resolvimos un problema similar, el de la estimación de la medida del diámetro de un objeto de forma cilíndrica, ¿te acuerdas no?

216. Alumno: Ehhh, creo que sí.

217. Entrevistador: Bueno, no pasa nada. Así que tú elegiste el 15 porque era el valor que más se repetía.

218. Alumno: Sí, la moda.

219. Entrevistador: OK. Veamos ahora el problema 2 "En una clase de ciencias", donde los estudiantes querían determinar el peso real del objeto, con la mayor precisión posible, después de medirlo con un mismo instrumento. De las varias opciones indicadas, tú elegiste la opción d) "descartar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8". ¿Por qué no indicaste la opción "usar el número más repetido, que es el 6.2", tal como procediste en la primera pregunta?

220. Alumno: Porque nosotros resolvimos un problema en las clases, y recuerdo que había un valor que estaba muy alejado de los demás, y el profesor dijo que parecía que no tenia nada que ver con los demás. Creo que era un problema sobre metros, el valor era 60 y pico y los demás valores estaban cerca de 6 o 7, no sé… y yo aquí hice lo mismo.

221. Entrevistador: Entonces, por eso pensaste…

222. Alumno: Pensé en descartar este valor.

223. Entrevistador: ¿Y por qué no hiciste lo mismo en el problema anterior? Si los valores están dados en segundos, ¿no crees que el 10 estaba muy alejado de los demás?

224. Alumno: [**Permanece en silencio**]

225. Entrevistador: ¿Era posible proceder de esta forma?

226. Alumno: [**Permanece en silencio**]

227. Entrevistador: Te estoy preguntando en función de lo que afirmaste ahora. Dijiste que elegiste esta opción porque te acordabas de un problema resuelto en clase, en el cual se procedía de esa forma.

228. Alumno: Ehhh, en este problema no indiqué la moda, porque me acordé de aquel problema. Fue lo que me vino en ese momento profesor [**risas**].

229. Entrevistador: OK. Analicemos ahora el problema 3 "Número de preguntas", donde la profesor decide estudiar el número de preguntas hechas por sus alumnos. De las diferentes opciones presentadas tú seleccionaste la que dice "sumar los 8 números y dividir la suma por 8".

230. Alumno: Sí, fue esta.

231. Entrevistador: ¿Por qué no pensaste en excluir el valor 22, tal como procediste en el caso anterior?

232. Alumno: Ehhhh, [**risas**], no sé profesor.

233. Entrevistador: ¿Podríamos descartar el alumno que hizo 22 preguntas?

234. Alumno: Sí, podríamos. ¿Este alumno hizo 22 preguntas en una clase, profesor?

235. Entrevistador: Sí.

236. Alumno: ¿Cómo puede ser? No es posible para un profesor hacer 22 preguntas.

237. Entrevistador: No fue el profesor. Fue una alumna, de acuerdo con los datos.

238. Alumno: Ahhhh. Sí.

239. Entrevistador: ¿No es posible?

240. Alumno: Sí, es posible.

241. Entrevistador: ¿Por qué no elegiste la opción que dice "descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7"?

242. Alumno: Porque también debemos contar con él, a pesar de no haber hecho ninguna pregunta.

243. Entrevistador: Hay que tenerlo en cuenta, ¿no?

244. Alumno: Sí, no podemos descartarlo.

245. Entrevistador: OK. Pasemos al otro problema. Problema 4 "Hijos por familia". [**Leyendo el problema**]. En el problema se comenta: ¿si el número medio de hijos por familia es de 2'2, con cuáles de las frases estás de acuerdo? Y tú indicaste la opción "Hay un total de 110 hijos en la ciudad". ¿Por qué llegaste a esta conclusión?

246. Alumno: Yo hice: 110 dividido por 50 y me dio este valor. Entonces yo creí que… pues, y si se trata de una ciudad, no es una casa. En una ciudad habita mucha gente. Yo lo entendí así, profesor.

247. Entrevistador: ¿Sólo por eso?

248. Alumno: Sí profesor, yo fui… no digo que fui inteligente. Pero después que vi el 110, cogí también el 50 a ver si el resultado era este y me dio eso. Y entonces he puesto mi cabeza a funcionar.

249. Entrevistador: Es decir, ¿tú no partiste de lo que se quería? Veamos. ¿Qué es lo que se quería en el problema? Allí dice: Una institución escolar en una pequeña ciudad quiere determinar el número medio de hijos por familia. ¿Eso no te dice nada?

250. Alumno: [**Permanece en silencio**]

251. Entrevistador: ¿Nada?

252. Alumno: [**Permanece en silencio**]

253. Entrevistador: OK. No pasa nada. Vamos al problema 5 "Hijos".

254. Alumno: Creo que aquí no hice nada.

255. Entrevistador: No te preocupes. Sólo quiero saber con detalle lo que hiciste. [**Leyendo el problema**]. Se pretendía determinar el número medio de hijos de las familias entrevistas. ¿Podrías explicarme lo que hiciste?

256. Alumno: Eso es media aritmética, ¿no es así profesor?

257. Entrevistador: Sí.

258. Alumno: Es que yo no usé la fórmula. Yo tengo las frecuencias y…

259. Entrevistador: ¿Cuáles son las frecuencias en este caso?

260. Alumno: El 0, 1, 2 y 3.

261. Entrevistador: ¿Y las variables?

262. Alumno: El 10, el 7, 5 y 3. [**Risas**]. Creo que eso debe ser incorrecto, profesor. No sé. [**Risas**; **al resolver la prueba puso 26: 6 = 4'3**].

263. Entrevistador: Bueno. Pasemos entonces al problema 7 "Familia", que dice: La composición media de la familia en Benguela es de 3'2. Indique 10 familias que cumplan esta media. En tu composición pones: 0'5 ; 0'5; 0'5; 0'6; 0'5; 0'2; 0'1; 0'1; 0'1; 0'1.

264. Alumno: [**Risas**]. Creo que es incorrecto.

265. Entrevistador: ¿Por qué dices eso?

266. Alumno: El profesor dijo en las clases que ningún hijo es mitad. No existe 0'5, 0'1 hijo. No puede ser profesor.

267. Entrevistador: ¿Y por qué lo has puesto?

268. Alumno: Estaba desesperada profesor [**Risas**]. Yo lo he puesto, porque pensé en un problema donde se debía atribuir valores. Pero más tarde, me di cuenta de que era incorrecto. Ninguna familia puede tener 0'5 o 0'6 hijos. No es posible.

269. Entrevistador: OK. ¿Y por qué no contestaste el apartado b) de este problema y el problema 8 "Supermercado"?

270. Alumno: No conseguí. No he sido capaz. [**Risas**]. No sabía qué hacer.

271. Entrevistador: Bueno. Veamos entonces el último problema, "Peces pescados" [**leyendo el problema**]. Se comenta que más tarde se descubrió que otro alumno había participado en la actividad, aunque no pescó ningún ejemplar. La cuestión era saber si el número medio de peces capturados por alumno variaba, al considerarse este último alumno y por qué. Tú contestaste: "No varía, porque el número 0 es un número".

272. Alumno: Sí. Ahí ya no he podido decir por qué. Cero es un número… es número neutro. Nunca va a disminuir ni aumentar. Creo que no varía, aunque se considere el 0. Iba a dar la misma media. Si yo no considerase creo que…

273. Entrevistador: Pero vea. Antes eran 6 alumnos. Al tenerse en cuenta a un alumno más, el total de alumnos ya no es el mismo, ¿no crees?

274. Alumno: Sí. Serían 7.

275. Entrevistador: Pues, serían 7. ¿Y eso no hace pensar que altera el resultado?

276. Alumno: [**Permanece en silencio**]

277. Entrevistador: OK. Gracias. Muchas gracias por haber colaborado conmigo.

Entrevista al alumno A8F

278. Entrevistador: En la pregunta 1 "Tiempo recorrido en los 100m, en donde se quería saber qué tiempo debería considerar el profesor de educación física para estimar el tiempo real recorrido por el estudiante y por qué, tú contestaste que "el tiempo que debe considerar el profesor es 14'49 s, porque es el tiempo resultante de la suma de todos los tiempos, dividido por el número de observaciones".

279. Alumno: Sí, la media.

280. Entrevistador: ¿Es la media de todos los datos presentados?

281. Alumno: Sí.

282. Entrevistador: Pues, tratándose de un problema de estimación, antes de calcular la media ¿no hiciste primeramente un análisis de los datos presentados?

283. Alumno: No sé, no me acuerdo, pero creo que sí.

284. Entrevistador: ¿No notaste si había datos que llamaban más atención que otros? ¿Si hay algunos que se alejan mucho de los demás, o que se encuadran bien en el grupo?

285. Alumno: Ahhhh, sí, el 10, ¿no? Sólo ahora me estoy dando cuenta que el 10 aquí…

286. Entrevistador: Entonces, ¿no hiciste este análisis?

287. Alumno: No

288. Entrevistador: OK. ¿Y si lo hubieses visto antes, que harías?

289. Alumno: Eliminar el 10, por ser un valor atípico.

290. Entrevistador: ¿Descartarlo?

291. Alumno: Sí

292. Entrevistador: OK. Pasemos ahora al problema 2 "En una clase de ciencias". De las varias opciones presentadas, tú indicaste la opción d) que dice: descartar el valor

15’3, sumar los otros 8 números y dividir por 8. ¿Por qué pensaste en excluir este valor?

293. Alumno: Porque me parece un valor que está muy distante de los demás datos. En este caso es un valor atípico. Tal como aprendimos con el profesor, en este caso se debe excluir este valor y buscar la media con los otros.

294. Entrevistador: ¿Fue más fácil ver este detalle aquí en el problema 2 que en el problema 1?

295. Alumno: No es eso, creo que estaba despistada en la pregunta 1, estaba muy apurada, y quería terminar el test lo antes posible.

296. Entrevistador: OK, pero eres consciente de que en problemas de estimación es necesario observar primeramente los datos, para ver si no hay observaciones anómalas, antes de realizar las operaciones ¿no?

297. Alumno: Sí, creo que estaré más atenta.

298. Entrevistador: OK. Pasemos entonces al problema 3 “Número de preguntas”. Aquí una profesora decide estudiar cuantas preguntas hacen sus alumnos. Y para resumir los datos, ella calcula el número típico de preguntas hechas en este día. De los varios métodos a recomendar tú indicaste el apartado b) “sumar los 8 números y dividir la suma por 8”. ¿Por qué este método y no otro?

299. Alumno: Fue para poder hallar la media. Yo no podía descartar, por ejemplo, el 22, porque efectivamente, Ana hizo aquel número de preguntas. No es como en situación de medir… no podía descartar el 22 y entonces opté por este apartado. Tampoco no podía usar el número más repetido,…

300. Entrevistador: Número más repetido, ¿Qué medida sería en este caso?

301. Alumno: [**Permanece en silencio**]

302. Entrevistador: Número más repetido, también se conoce como número común o más frecuente, ¿qué medida sería? Es la media, mediana, moda,…

303. Alumno: Es la moda.

304. Entrevistador: ¿Por qué no pensaste en descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7?

305. Alumno: No podía descartar el 0 por el número de alumnos. Ehhh, porque debemos tener en cuenta que hay un alumno que no hizo ninguna pregunta.

306. Entrevistador: OK. Analicemos ahora el problema 4 "Hijos por familia". El problema dice que en una institución escolar… [**Lee el problema**]. … si el número medio de hijos por familia es de 2'2, ¿con cuál de las frases estás de acuerdo? Tú indicaste la opción 2 que dice "Hay un total de 110 hijos en la ciudad". ¿Me puedes decir por qué llegaste a esta conclusión?

307. Alumno: Yo usé la fórmula: la suma es igual al número de observaciones por la media y me dio este valor 110 hijos.

308. Entrevistador: ¿Qué datos eran conocidos en el problema?

309. Alumno: Se conocía la media y el número de observaciones.

310. Entrevistador: OK. Bueno. Veamos ahora el problema 6 "Gráfica de notas". Después de comprobar que la nota del grupo 2 también era igual a 11, en el apartado siguiente, para contestar qué grupo te parecía mejor y por qué, respondiste que: "El grupo que me parece mejor es el grupo 2, porque la mayoría tubo notas positivas y sólo 2 alumnos suspendieron".

311. Alumno: Sí.

312. Entrevistador: OK. Pero en la pregunta siguiente, de las diversas opciones presentes, tú indicaste la opción que dice "A pesar de que las medias son iguales en los dos grupos, el grupo 2 es más homogéneo". ¿Crees que las dos respuestas están relacionadas?

313. Alumno: Creo que no. En realidad me quedé confusa, porque aquel día, cuando se habló de gráficos, yo no entendí exactamente lo que era la homogeneidad. Creo que contesté aleatoriamente, no sabía si era la respuesta correcta o no. Estaba confusa.

314. Entrevistador: OK. ¿Esto significa entonces que tú justificación real es la que dice que el grupo 2 es mejor porque en él hay alumnos con más notas positivas?

315. Alumno: Sí

316. Entrevistador: OK. Pero cuando señalaste la opción que dice "el grupo 2 es más homogéneo" ¿qué fue lo que entendiste por la expresión "más homogéneo"?

317. Alumno: ¿Más homogéneo? No sé, no sé explicarlo. Como dije, no entendí bien eso de homogeneidad.

318. Entrevistador: Pero tú elegiste esa opción.

319. Alumno: No sé porque. Creo que no debía haberla elegido [**risas**].

320. Entrevistador: OK. Ahora analicemos el problema 7 "Familia". Allí dice que la composición media de la familia en Benguela es de 3'2 personas. Había que indicar 10 familias que cumplían esta media. ¿Me puedes explicar lo que hiciste en este apartado, antes de indicar los valores que forman los miembros de cada familia?

321. Alumno: Ehhh, ¿qué hice yo? Pues, lo mismo que hice anteriormente. Usé la fórmula de la suma. La suma es igual al número de observaciones multiplicado por la media, y encontré la suma. Entonces, después de la suma, hice la distribución de manera que el sumatorio de todas… ¿cómo lo puedo decir? El sumatorio de todas las observaciones diese como resultado el valor de la suma.

322. Entrevistador: OK. ¿Y para el problema 8? ¿Hay semejanzas con el problema 7?

323. Alumno: Sí hay.

324. Entrevistador: El problema decía: En un supermercado había 8 marcas diferentes de paquetes de papas fritas. ¿Qué precio se puede poner a cada marca de paquete de papas fritas para que el precio medio sea de $1'50? Aquí tú usaste valores decimales, pero en el problema 7 no. ¿Me puedes explicar eso?

325. Alumno: No, porque precio es un valor continuo y el número de familias es un valor discreto, no puede tomar…. [**No termina la idea**]

326. Entrevistador: ¿Valor o variable?

327. Alumno: Sí, una variable.

328. Entrevistador: OK. ¿Y cómo razonaste para encontrar el precio de las restantes marcas pedidas en el apartado b) del problema 8?

329. Alumno: [**No dice nada**]

330. Entrevistador: Aquí ya se conocía el precio de 3 marcas.

331. Alumno: Teniendo en cuenta que 12 es la suma de todo, entonces fui poniendo valores aleatoriamente para que el cálculo diese 12.

332. Entrevistador: O sea, como ya conocía tres precios, para las restantes marcas lo que hiciste fue…

333. Alumno: [**Risas**] Fui sumando, profesor. De manera que la suma de todos los valores diese 12.

334. Entrevistador: OK. Pasemos ya a la última cuestión. En el problema 9 "Peces capturados", se quería saber si el valor medio de peces capturados por alumno variaba, al considerarse que el último alumno no pescó ningún ejemplar.

335. Alumno: ¿Si varía? Varía, profesor. Es una persona más, y … uyyy, no soy buena hablando, profesor.

336. Entrevistador: Mira, tú contestaste: "Al considerarse el último alumno, el valor medio varía. La media será 2'5 en vez de 3, porque sumamos el número de peces y dividimos por 7". ¿Cuántas observaciones teníamos antes?

337. Alumno: 6

338. Entrevistador: ¿Y ahora?

339. Alumno: 7.

340. Entrevistador: Pero este último alumno no pescó ningún ejemplar.

341. Alumno: Sí, no pescó ningún pez, pero, son... ehhh… son 7 personas y queremos determinar la media de los 7. Aunque no pescó nada, hay que tenerlo en cuenta, porque él también estuvo presente.

342. Entrevistador: ¿Es por eso?

343. Alumno: Sí, por eso mismo.

344. Entrevistador: OK. Muchas gracias por haber colaborado conmigo.