Universidad de Huelva

Departamento de Matemáticas

Conjuntos equicompactos de operadores definidos en espacios de Banach

Memoria para optar al grado de doctor presentada por:

Enrique Serrano Aguilar

Fecha de lectura: 16 de diciembre de 2005

Bajo la dirección de los doctores:

Cándido Piñeiro Gómez
Juan Manuel Delgado Sánchez

Huelva, 2009

ISBN: 978-84-92679-86-7
D.L.: H 12-2009

Conjuntos equicompactos de operadores definidos en espacios de Banach

Enrique Serrano Aguilar

Departamento de Matemáticas – Universidad de Huelva

Conjuntos equicompactos de operadores definidos en espacios de Banach

Memoria presentada por
D. Enrique Serrano Aguilar
para optar al grado de Doctor.

Enrique Serrano Aguilar

V°B° Directores

Dr. Cándido Piñeiro Gómez,
Catedrático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva.

Dr. Juan Manuel Delgado Sánchez,
Profesor Asociado al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva.

Huelva, 21 de septiembre de 2005

A mi esposa Lucía y a mis hijas Lucía y Elena

Deseo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que de alguna manera han colaborado para que este proyecto viera la luz. En primer lugar, al Dr. Cándido Piñeiro que siempre ha sido un buen maestro y mejor amigo. Sin su constante apoyo, esta memoria seguramente nunca se habría completado. Al Dr. Juan Manuel Delgado que siempre ha estado dispuesto a ayudarme y siempre con un excelente humor. A mi amigo Ramón Rodríguez que siempre me dio ánimos y siempre estuvo dispuesto a asumir trabajos extra en mi beneficio. A mi esposa y a mis hijas pues ellas son el principal aliciente para mantener vivas mis ilusiones. A los amigos y compañeros que han confiado en mi.

Gracias a todos.

Índice general

Terminología y notación

En la redacción de la presente memoria, hemos procurado que la terminología y la notación empleadas se ajusten a las que encontramos en textos clásicos tales como los de B. Beauzamy [14] o J. Diestel [34]. De todas formas, puesto que siempre encontramos diferencias entre los diversos autores, fijaremos explícitamente aquí la mayor parte de la simbología utilizada y recordaremos algunas definiciones.

Denotaremos, respectivamente, por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ al conjunto de los números naturales, enteros, racionales, reales o complejos y $\mathbb{K}$ representará el cuerpo base de un espacio vectorial que, en nuestro caso, será siempre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Si X e Y son espacios de Banach o espacios vectoriales topológicos, en las definiciones y en los enunciados de los teoremas siempre asumiremos implícitamente que X e Y son distintos de $\{0\}$. Llamaremos $\mathcal{L}(X,Y)$ al espacio de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y, $\mathrm{L}(X,Y)$ al espacio de las aplicaciones lineales y X^* será el dual topológico de X. Dados $x \in X$ y $x^* \in X^*$, escribiremos indistintamente $x^*(x)$ o $\langle x, x^*\rangle$ para referirnos a la imagen de x por x^*. Si X es un espacio vectorial topológico (los e.v.t. que consideraremos siempre serán de Hausdorff), denotaremos por $\widetilde{X}$ al completado de X.

B_X y S_X representarán, respectivamente, la bola y la esfera unidad del espacio de Banach X, esto es, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. La topología débil de X será denotada por $\sigma(X, X^*)$ y la topología débil* de X^* por $\sigma(X^*, X)$. Por simplicidad, usaremos expresiones tales como "si $(x_n)_n \subset X \ldots$" en vez de expresiones como "si la sucesión $(x_n)_n$ cuyo *rango* está contenido en $X \ldots$". Si consideramos una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ de $(x_n)_n$, nos referiremos a la función $k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como a una función *creciente* en vez de decir que k es *estrictamente creciente*. Si la sucesión $(x_n)_n \subset X$ converge a x en norma o débilmente, escribiremos, respectivamente, $(x_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ o $(x_n)_n \xrightarrow{w} x$; si $(x_n^*)_n \subset X^*$ y converge a x^* en la topología débil*, escribiremos $(x_n^*)_n \xrightarrow{w^*} x^*$.

Además de las topologías anteriores, también consideraremos la SOT (*Strong Operator Topology*) y la WOT (*Weak Operator Topology*). En este caso, nuestro marco de referencia es el conjunto $\mathcal{F}(X, Y)$ de las aplicaciones de X en Y.

Dados $x \in X$, $y^* \in Y^*$ y $\varepsilon > 0$ se definen:

a) $V(0; x, \varepsilon) = \{T \in \mathcal{F}(X, Y) : \|Tx\| \leq \varepsilon\}$.

b) $V(0; x, y^*, \varepsilon) = \{T \in \mathcal{F}(X, Y) : |\langle Tx, y^* \rangle| \leq \varepsilon\}$.

El conjunto $\{V(0; x, \varepsilon) : x \in X , \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ es una subbase de entornos de cero para la SOT y $\{V(0; x, y^*, \varepsilon) : x \in X , y^* \in Y^* , \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ lo es para la WOT.

Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es:

a) *Compacto*: si $T(B_X)$ es un conjunto relativamente compacto en Y.

b) *Débil-compacto*: si $T(B_X)$ es un conjunto relativamente débil-compacto en Y.

c) *Condicionalmente débil-compacto*: si $T(B_X)$ es un conjunto condicionalmente débil-compacto en Y, esto es, si toda sucesión en $T(B_X)$ posee una subsucesión débil-Cauchy.

d) *Completamente continuo*: si para toda sucesión $(x_n)_x \subset X$ tal que $(x_n)_n \stackrel{w}{\to} 0$ se cumple que $(Tx_n)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$.

Denotaremos, respectivamente, por $\mathcal{K}(X, Y)$, $\mathcal{W}(X, Y)$, $\mathrm{C}\mathcal{W}(X, Y)$ y $\mathcal{V}(X, Y)$ al conjunto de operadores de X en Y que son compactos, débil-compactos, condicionalmente débil-compactos o completamente continuos.

$\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ es *colectivamente compacto* si $\bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X)$ es relativamente compacto en Y. Análogamente, si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$, decimos que M es *colectivamente débil-compacto* si $\bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X)$ es relativamente débil-compacto en Y y si $\mathrm{M} \subset \mathrm{C}\mathcal{W}(X, Y)$, decimos que M es *condicionalmente colectivamente débil-compacto* si $\bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X)$ es un conjunto condicionalmente débil-compacto. La notación es aceptada en toda la bibliografía por nosotros consultada salvo en [37, pág. 150]. Dichos conjuntos son llamados allí *equicompactos*, término que nosotros reservamos para otro concepto.

$\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X, Y)$ es *uniformemente completamente continuo* si para toda sucesión $(x_n)_n \subset X$ tal que $(x_n)_n \stackrel{w}{\to} 0$ se cumple que $(Tx_n)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$.

Los subconjuntos uniformemente completamente continuos de X^* ($X^* = \mathcal{V}(X, \mathbb{K})$) son llamado $(L)-$*conjuntos* por G. Emmanuelle [40] y aunque dicha notación es seguida por diversos autores (véase, por ejemplo, [47]), nosotros no la usaremos.

Dado un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, llamaremos T^* a su operador adjunto, esto es, al operador $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ definido por $T^*y^* = y^* \circ T$. En otras palabras: $\langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle$ para todo $x \in X$. Llamaremos $\mathcal{L}_*(X^*, Y)$ al espacio de los operadores débil*–débil continuos de X^* en Y. Análogamente, podemos considerar los espacios $\mathcal{K}_*(X^*, Y)$, $\mathcal{W}_*(X^*, Y)$ etc.

Sea $K \subset X$. Decimos que el conjunto K es:

a) *Limitado*: si para toda sucesión $(x_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(x_n^*)_n \overset{w^*}{\to} 0$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} \langle x, x_n^* \rangle = 0$ uniformemente en $x \in K$ (X tiene *la propiedad de Gelfand-Phillips* si todos sus subconjuntos limitados son relativamente compactos).

b) *De Dunford-Pettis*: si para toda sucesión $(x_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(x_n^*)_n \overset{w}{\to} 0$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} \langle x, x_n^* \rangle = 0$ uniformemente en $x \in K$ (esto es, si mirado como subconjunto de X^{**}, K es uniformemente completamente continuo).

La envolvente convexa de K será denotada por $\mathrm{co}(K)$ y la envolvente convexa y cerrada por $\overline{\mathrm{co}}(K)$. Las envolventes absolutamente convexa y absolutamente convexa y cerrada de K se representarán, respectivamente, por $\mathrm{aco}(K)$ y $\overline{\mathrm{aco}}(K)$.

Si X es un espacio de Banach e I un conjunto no vacío, se definen:

a) $\ell_1(I, X) = \left\{ \xi \colon I \longrightarrow X \mid \sum_{i \in I} \|\xi(i)\| < +\infty \right\} \quad \left(\|\xi\| = \sum_{i \in I} \|\xi(i)\| \right)$

b) $\ell_\infty(I, X) = \left\{ \xi \colon I \longrightarrow X \mid \sup_{i \in I} \|\xi(i)\| < +\infty \right\} \quad \left(\|\xi\| = \sup_{i \in I} \|\xi(i)\| \right)$

c) $c_0(I, X)$ es el cierre en $\ell_\infty(I, X)$ del conjunto $\{\xi \colon I \to X \mid \text{soporte de } \xi \text{ es finito}\}$

Si $X = \mathbb{K}$, escribiremos respectivamente $\ell_1(I)$ y $\ell_\infty(I)$ en vez de $\ell_1(I, \mathbb{K})$ y $\ell_\infty(I, \mathbb{K})$ y si $I = \mathbb{N}$, escribiremos simplemente ℓ_1 y ℓ_∞. Dado un elemento $\widehat{\alpha}$ perteneciente a $\ell_1(I)$ o a $\ell_\infty(I)$, lo representaremos indistintamente por $\widehat{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in I}$ o por $\widehat{\alpha} = (\alpha(i))_{i \in I}$. Si tenemos una sucesión $(\widehat{\alpha}_n)_n$ en $\ell_1(I)$ o en $\ell_\infty(I)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, será $\widehat{\alpha}_n = (\alpha_i^n)_{i \in I}$. Para cada $j \in I$, llamaremos $e_j = (\delta_i^j)_{i \in I}$ ($\delta_i^j = \chi_{\{j\}}(i)$).

Introducción

Esta memoria está dedicada a estudiar conjuntos de operadores compactos o débil-compactos que, en algún sentido, tengan un comportamiento uniforme. Tal idea se extiende en el capítulo tercero a conjuntos de operadores no necesariamente débil-compactos. La búsqueda de *uniformidades* es, en Matemáticas, un problema clásico y, ligados a estas *uniformidades*, aparecen grandes teoremas. Ejemplos no faltan: el Teorema de Ascoli, el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, el Teorema Central del Límite...

El origen de nuestra investigación se sitúa en los trabajos que, en la década de los sesenta, publicaron autores como P.M. Anselone, T.W. Palmer o K. Vala. A su vez, estos trabajos tuvieron su origen en problemas aparecidos en el estudio de ciertas ecuaciones integrales (véase, por ejemplo, el trabajo de Anselone [6]). En cualquier caso, es sobradamente conocida la importancia que los operadores compactos tienen en el estudio de toda clase de ecuaciones funcionales.

En primer lugar, nos ocuparemos de estudiar conjuntos de operadores compactos que sean, en algún sentido, *uniformemente compactos*. En esta dirección, la primera noción por nosotros conocida fue introducida por P.M. Anselone y R.H. Moore en 1964, precisamente, en un artículo que versa sobre ecuaciones integrales [8]. Un conjunto acotado $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ es *colectivamente compacto* si se comporta, como conjunto, tal como lo haría un solo operador compacto, entendido esto en el siguiente sentido: $\bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X)$ es relativamente compacto en Y. La idea es realmente simple y, tal vez por eso, ha demostrado ser muy útil.

Con esta noción ha ocurrido algo que en Matemáticas es frecuente, a saber: las herramientas introducidas para estudiar un problema han cobrado importancia propia. Así, el estudio de la compacidad colectiva se ha independizado del problema original y los resultados del estudio de esta noción han trascendido a otras áreas que, en principio, estaban alejadas de dicho problema.

A partir del año 1964 se publican una serie de artículos en los que se plantean y se resuelven importantes problemas ligados a la teoría de los conjuntos colectivamente compactos. Las aportaciones más notables las realizan P.M. Anselone ([4], [5] y [6]), T.W. Palmer [9] y K. Vala [87]. En algún sentido, esta etapa culmina con la publicación por parte de T.W. Palmer [72] de un famoso teorema que prueba que un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ es relativamente compacto en la norma operador si y sólo si M y M^* son colectivamente compactos ($\mathrm{M}^* = \{T^* : T \in \mathrm{M}\}$).

Desde luego, la teoría sigue desarrollándose aunque hay dos hechos que conviene destacar: 1) La mayoría de los estudios, a partir de la década de los 70, abandona el marco de los espacios de Banach para generalizar y obtener nuevos resultados en el marco de los espacios vectoriales topológicos. Entre los autores que siguen esta línea de investigación cabe destacar a M.V. Deshpande y N.E. Josi [30] y, más recientemente, a M.V. Deshpande y S.M. Padhey [31] o W. Ruess [82]. 2) En cualquier caso, el tema parece agotarse en cierta medida y no son demasiadas las referencias que, sobre el mismo, pueden encontrarse en las bases de datos a las que hemos tenido acceso. Es de señalar la generalización de la teoría que hacen en el año 2002 S.N. Chandler-Wilde y B. Zhang [23] para, nuevamente, aplicar los resultados al estudio de ciertas ecuaciones integrales.

Llegados a este punto, nuestro trabajo podía seguir, básicamente, dos caminos: 1º- Continuar desarrollando la teoría de los conjuntos colectivamente compactos allí donde otros la habían dejado (naturalmente, a partir de aquí las ramificaciones posibles son muy diversas). 2º- Revisar los orígenes de la propia teoría y abordar el estudio de un nuevo tipo de conjunto *uniformemente compacto* que fuera, en algún sentido, complementario a la noción de conjunto colectivamente compacto. Hemos optado por la segunda opción.

Una de las razones que nos llevaron a elegir la segunda de las opciones posibles fue la de tener en cuenta la siguiente observación: aunque hay diversas formas, naturalmente equivalentes, de caracterizar a los operadores compactos, tiene sentido la pregunta de si seguirán siendo estas caracterizaciones necesariamente equivalentes cuando las aplicamos a conjuntos de operadores compactos. Encontramos que la respuesta a esta pregunta es negativa y, por tanto, son posibles otras formas *razonables* de definir conjuntos *uniformemente compactos*. Además, dado que en origen los conceptos se solapan, cabe esperar la existencia de profundas conexiones entre todas las posibles nociones. En otras palabras: la vía para iniciar nuestra investigación estaba abierta.

Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto si y sólo si existe $(a_n^*)_n \subset X^*$ con $(a_n^*)_n \overset{\|\cdot\|}{\to} 0$ y tal que $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$. Así, hemos definido como *equicompactos* aquellos conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ para los que vale *la misma* sucesión nula de X^* para mayorar a *todos* los operadores de M. Tal como esperábamos, existen conexiones profundas entre nuestro concepto y el anterior: un conjunto M es equicompacto si y sólo si M^* es colectivamente compacto y también se cumple que un conjunto M es colectivamente compacto si y sólo si M^* es equicompacto. Hay una dualidad total entre ambos conceptos y, además, un conjunto M es equicompacto [colectivamente compacto] si y sólo si lo es M^{**}.

Una tercera noción es, en principio, posible: se trata de los conjuntos que podríamos denominar *secuencialmente equicompactos*, esto es, aquellos conjuntos acotados $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ tales que de toda sucesión $(x_n)_n \subset B_X$ es posible extraer una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Sin embargo, hemos probado que esta noción equivale a la equicompacidad. Además, la prueba proporciona una nueva caracterización de los conjuntos equicompactos que, a la postre, desemboca en otra nueva caracterización de los conjuntos colectivamente compactos. Ambas caracterizaciones, junto con las consecuencias que de ellas se derivan, jugarán un papel fundamental a lo largo de toda la memoria.

Aclaradas, en gran medida, las relaciones entre las dos nociones objeto de estudio y analizadas algunas de sus propiedades básicas, abordamos la labor de revisar los teoremas "clásicos". Nos referimos a los teoremas para caracterizar a los conjuntos relativamente compactos en $\mathcal{K}(X,Y)$ que fueron en su día probados por T.W. Palmer. Usando nuestras herramientas, proporcionamos dos nuevas demostraciones, una en términos de equicompacidad y la otra de compacidad colectiva. Seguimos, en nuestra opinión, caminos más directos y naturales de aproximación al problema por lo que creemos haber conseguido expresar de una manera más clara las ideas involucradas en dichas pruebas.

En la siguiente etapa, procuramos profundizar en la estructura de los conjuntos equicompactos. La idea original surge al examinar el trabajo de F. Mayoral [67] sobre los conjuntos uniformemente completamente continuos. En dicho trabajo, Mayoral prueba, para el caso en el que $X \not\hookrightarrow \ell_1$, un teorema formalmente idéntico a nuestra versión de uno de los teoremas de Palmer (teorema 1.2.1) salvo que donde él considera conjuntos uniformemente completamente continuos, nosotros hemos considerado conjuntos equicompactos. Se plantea entonces, de forma natural, la siguiente cuestión: en el caso de operadores individuales, si $X \not\hookrightarrow \ell_1$, *para todo* espacio Y se solapa, en $\mathcal{L}(X,Y)$, la noción de operador compacto con la de operador completamente continuo ¿Se solaparán también, si $X \not\hookleftarrow \ell_1$, las nociones de conjunto equicompacto y conjunto uniformemente completamente continuo? La respuesta que hemos encontrado va más allá de la pregunta inicial: la clase de los conjuntos equicompactos coincide en $\mathcal{K}(X,Y)$, *para algún* Y, con la de los uniformemente completamente continuos si y sólo si $X \not\hookleftarrow \ell_1$.

Un conjunto equicompacto siempre es uniformemente completamente continuo pero la cuestión es que la relación existente entre ambas nociones es más estrecha de lo que, en principio, pudiera pensarse. Dos ejemplos: 1) Profundizando en el estudio de esta relación, cuando consideramos conjuntos de operadores que son traspuestos, hemos obtenido una caracterización, bastante inesperada, de los espacios de Banach en los cuales los conjuntos de Dunford-Pettis son relativamente compactos. 2) Un conjunto es equicompacto si y sólo si se puede factorizar como composición de un conjunto uniformemente completamente continuo y un operador condicionalmente débil-compacto. Además, esta factorización sirve para caracterizar a los operadores condicionalmente débil-compactos.

Hasta donde nosotros sabemos, no hay más que las dos nociones anteriormente descritas para considerar de forma *razonable* conjuntos que sean *uniformemente compactos*. Puesto que sí se conocen intentos de generalización para los conjuntos colectivamente compactos, intentamos nosotros extender, en la medida de lo posible, la noción de conjunto equicompacto. La vía elegida es como sigue: dada una sucesión $(a_n^*)_n \overset{\|\cdot\|}{\to} 0$, podemos considerar $S\colon X \longrightarrow c_0$ definido, para cada $x \in X$, por $Sx = (\langle x, a_n^* \rangle)_n$. Así, un conjunto está mayorado por la sucesión $(a_n^*)_n$ si y sólo si está mayorado por el operador S. Si usamos otro espacio de Banach Z y otro operador $S\colon X \longrightarrow Z$ (sin más restricciones), podemos considerar la clase de los conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ tales que $\|Tx\| \leq \|Sx\|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Llamamos a estos conjuntos $(Z,S)-$*dominados*.

Es evidente que los conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ equicompactos son un caso particular de los $(Z,S)-$dominados, pero también lo son ciertos conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ uniformemente completamente continuos y los conjuntos $\mathrm{M} \subset \Pi_p(X,Y)$ uniformemente $p-$dominados. Usando conjuntos maximales $(Z,S)-$dominados, hemos probado un teorema de dominación en conjuntos finitos de X bastante general y, buscando el recíproco de este teorema, hemos obtenido condiciones suficientes de compacidad relativa en $\mathcal{K}(X,Y)$ y en $\mathcal{V}(X,Y)$, aunque en este último caso para una topología diferente de la inducida por la norma.

Tanto en el caso en el que estudiamos conjuntos de operadores compactos como débil-compactos, en ocasiones, aparecen conjuntos de la forma $\{T_n x_m : n, m \in \mathbb{N}\}$. Cuando entonces buscamos subsucesiones convergentes del tipo $(T_{k(n)} x_{k(n)})_n$, resultaría conveniente que, de alguna manera, se cancelaran mutuamente los efectos de los términos de la forma $T_n x_m$ con los de la forma $T_m x_n$. Estos problemas motivan la introducción de la propiedad que hemos dado en llamar del *límite cruzado*. Resulta que un conjunto es relativamente compacto si y sólo si es equicompacto y, además, posee dicha propiedad. No hemos profundizado mucho en el estudio de dicha propiedad y, sinceramente, no creemos que su peso sea determinante en posteriores estudios. Sin embargo, al estar relacionada con la compacidad, hemos decidido tenerla en cuenta aunque sea de una manera más bien marginal.

Además de extender el concepto de equicompacidad, hay una dirección clara para continuar nuestro trabajo: se trata de exportar nuestras nociones a conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$. En el caso del estudio de los conjuntos colectivamente débil-compactos, es de señalar la muy escasa bibliografía que, específicamente, hay sobre el tema en la literatura especializada. Puede legítimamente argumentarse que nada hay de extraño en ello pues sería éste un caso particular de las diversas vías de estudio que sobre los conjuntos colectivamente compactos se han abierto en el marco de los espacios vectoriales topológicos. De todas formas, sin quitarle validez a la argumentación anterior, seguimos pensando que el problema está poco estudiado.

En cuanto a la débil-equicompacidad, al menos el primer abordaje es claro: puesto que un operador débil-compacto no está necesariamente dominado por una sucesión débil-nula, el concepto de conjunto débil-equicompacto ha de ser introducido generalizando el concepto de conjunto *secuencialmente equicompacto*. Al tratar de seguir la estela del caso anterior, lo primero que llama la atención es la facilidad con la que pueden encontrarse ejemplos de conjuntos débil-equicompactos [colectivamente débil-compactos] tales que el conjunto formado por sus traspuestos no sea colectivamente débil-compacto [débil-equicompacto].

Un conjunto acotado $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ es equicompacto si y sólo si es compacto el operador $V\colon X \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M}, Y)$ definido de forma que, para cada $x \in X$ y cada $T \in \mathrm{M}$, se tiene que $Vx(T) = Tx$. Conseguíamos así, equiparar la equicompacidad de un conjunto con la compacidad de un solo operador. En el caso débil, de ningún modo se tiene una situación equivalente. Sin embargo, para los conjuntos colectivamente débil-compactos sí que se mantiene el paralelismo. Habíamos probado que un conjunto acotado $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ es colectivamente compacto si y sólo si el operador

$U\colon \ell_1(\mathrm{M},X)\longrightarrow Y$ definido, para cada $\xi\in\ell_1(\mathrm{M},X)$, por $U\xi=\sum_{T\in\mathrm{M}}T(\xi(T))$ es compacto. En el caso débil, la situación es, salvo las obvias diferencias, exactamente la misma. Más aún, M^* es colectivamente débil-compacto si y sólo si V es débil-compacto. Finalmente, es de señalar el siguiente hecho: sucede que un conjunto $\mathrm{M}\subset\mathcal{W}(X,Y)$ dominado por una sucesión débil-nula no tiene necesariamente que ser débil-equicompacto aunque sí es verdad que necesariamente M^* tiene que ser colectivamente débil-compacto.

El que se den estas *asimetrías* entre los casos débil y fuerte no significa que el estudio de las posibles dualidades no tenga interés (más bien sucede al contrario). Sin embargo, es claro que, antes de continuar, sería conveniente disponer de una caracterización manejable de los conjuntos débil-equicompactos. Tal caracterización existe y, además, es todo lo manejable que cabría esperar. El primer teorema del capítulo segundo prueba que un conjunto $\mathrm{M}\subset\mathcal{W}(X,Y)$ es débil-equicompacto si y sólo si: 1º- Toda sucesión acotada $(x_n)_n\subset X$ posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge débilmente para todo $T\in\mathrm{M}$ y 2º- El conjunto M^*y^* es relativamente compacto para todo $y^*\in Y^*$.

Al analizar las consecuencias de la anterior caracterización de los conjuntos débil-equicompactos, llama la atención el hecho de que hay muchas ocasiones en las que basta la condición de que M^*y^* sea relativamente compacto para todo $y^*\in Y^*$ para asegurar la débil-equicompacidad de M. Un caso típico se presenta cuando $X\not\hookrightarrow\ell_1$ pero, en modo alguno es el único. A tal extremo es esto cierto que, en algún momento, nos hemos planteado si esta condición sería, en el caso general, suficiente para asegurar la débil-equicompacidad. Tal cosa no sucede así pero el encontrar ejemplos de conjuntos $\mathrm{M}\subset\mathcal{W}(X,Y)$ *no* débil-equicompactos tales que M^*y^* sea relativamente compacto para todo $y^*\in Y^*$ no ha sido una tarea trivial. Todos los ejemplos que conocemos involucran a algún espacio en el que la bola unidad de su dual *no* es débil*-secuencialmente compacta. De hecho, pueden caracterizarse dichos espacios en términos de débil-equicompacidad. También, considerando el bidual, es posible seguir esta estela y caracterizar, en términos de débil-equicompacidad, a los espacios que no contienen copia de ℓ_1.

El primer estudio sistemático de las posibles dualidades entre las dos nociones débiles intenta seguir en paralelo con el que habíamos realizado en el caso de la norma. Puesto que las dualidades correspondientes no se dan en el caso general, establecemos dos posibles abordajes: 1) Estudiar condiciones adicionales a imponer a un conjunto $\mathrm{M}\subset\mathcal{W}(X,Y)$ [M^*] colectivamente débil-compacto [débil-equicompacto] para que M* [M] sea débil-equicompacto [colectivamente débil-compacto] y 2) Investigar clases de espacios de Banach en las que siempre se den alguna de esas dualidades. El primer problema tiene solución parcial: si M es colectivamente débil-compacto, entonces M* es débil-equicompacto si y sólo si M$^{**}x^{**}$ es relativamente compacto para todo $x^{**} \in X^{**}$ y si M* es colectivamente débil-compacto, entonces M es débil-equicompacto si y sólo si M$^*y^*$ es relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$. Sin embargo, cuando M (o M*) es débil-equicompacto sólo disponemos de algunos resultados parciales para asegurar la débil-compacidad colectiva de M* (o de M). En cuanto al segundo problema, siempre es la posesión o no de la propiedad de Schur por parte del espacio X^* o del espacio Y el factor que decide la cuestión. De hecho, hemos encontrado múltiples caracterizaciones de la propiedad de Schur en términos de débil-equicompacidad y de colectiva débil-compacidad.

En una segunda fase, estudiamos otro tipo de dualidades que no involucran sistemáticamente a la propiedad de Schur. En el origen de este estudio está la hipótesis *razonable* siguiente: aunque un conjunto M $\subset \mathcal{W}(X,Y)$ uniformemente completamente continuo no es necesariamente débil-equicompacto, entre ambos conceptos existen relaciones profundas. Llegamos así, a investigar condiciones para que se den las dualidades del tipo M *u.c.c.* $\Leftrightarrow$ M**c.d.c* o M**u.c.c.* $\Leftrightarrow$ M *c.d.c.* Por ejemplo, puede probarse que si Ω es un espacio topológico de Hausdorff compacto e Y un espacio de Banach arbitrario, entonces un conjunto M $\subset \mathcal{L}(C(\Omega), Y)$ es u.c.c si y sólo si M* es c.d.c. Estas dualidades están íntimamente relacionadas con la propiedad de Dunford-Pettis y con la propiedad recíproca de Dunford-Pettis. De hecho, obtenemos varias caracterizaciones de ambas propiedades en términos de estas dualidades. Hay que señalar un último detalle que pone de manifiesto que el paralelismo entre el caso de la norma y el caso débil es más profundo de lo que los primeros resultados podrían hacernos pensar: la dualidad M**u.c.c.* $\Rightarrow$ M *c.d.c.* se da si y sólo si en el espacio Y los conjuntos de Dunford-Pettis son relativamente débil-compactos. Esta dualidad es formalmente idéntica a la que obtuvimos para el caso de la norma y, de hecho, la demostración es, salvo los cambio obvios, exactamente la misma.

Si tuviéramos que hacer un resumen, éste podría consistir en la observación siguiente: hay ciertas *asimetrías* entre el desarrollo de la teoría en el caso de la norma y en el caso débil y no sólo asimetrías, sino también diferencias esenciales. Ahora bien, los desarrollos siguen guardando un evidente paralelismo y con eso queremos señalar que las semejanzas que encontramos cuando profundizamos en nuestros análisis son algo más que simples coincidencias formales.

Desde luego, el estudio de la débil-equicompacidad ha demostrado, en nuestra opinión, tener interés en sí mismo. El análisis de esta noción nos ha llevado a profundizar en aspectos esenciales de la teoría de los espacios de Banach tales como la débil*-secuencial compacidad de B_{X^*}, las propiedades de Dunford-Pettis y su recíproca o la propiedad de Schur. Sin embargo, nuestro interés primordial sigue siendo el de conseguir resultados de compacidad análogos al teorema de Palmer.

Es fácil convencerse de que el intento de obtener un resultado formalmente idéntico al teorema de Palmer para la topología débil de $\mathcal{W}(X,Y)$ está condenado al fracaso. Un conjunto débil-compacto en $\mathcal{W}(X,Y)$ no tiene por qué ser débil-equicompacto y, recíprocamente, ni aún en el caso en el que M y M* sean débil-equicompactos y colectivamente débil-compactos puede asegurarse la débil-compacidad de M. De todas formas, no quiere esto decir que no haya relaciones entre débil-compacidad y débil-equicompacidad: las hay y son, desde nuestro punto de vista, sumamente interesantes. Ligadas de manera esencial a este estudio aparecen, nuevamente, dos acompañantes familiares: la propiedad de Schur y la débil*-secuencial compacidad de B_{Y^*}. En cualquier caso, se hace evidente la necesidad de investigar el comportamiento de los conjuntos débil-equicompactos cuando consideramos otras topologías en $\mathcal{L}(X,Y)$.

Un análisis más a fondo del problema aconseja generalizar la propia noción de débil-equicompacidad de forma que, por un lado, podamos considerar conjuntos de operadores no necesariamente débil-equicompactos y, por otro lado, tengamos libertad para considerar clases de sucesiones más restringidas que la clase de todas las acotadas. Dada pues una cierta clase $\mathcal{G}$ de sucesiones, introducimos (en principio, en $\mathrm{L}(X,Y)$) el concepto de conjunto [condicionalmente] débil-equicompacto *sobre* $\mathcal{G}$. Resulta agradable comprobar que la mayoría de los teoremas que habíamos probado para analizar la estructura de los conjuntos débil-equicompactos sirve, casi sin cambios, en este contexto.

El siguiente paso lo sugiere la propia naturaleza del problema: si estamos estudiando conjuntos [condicionalmente] débil-equicompactos sobre una clase $\mathcal{G}$, deberíamos considerar en $\mathcal{L}(X,Y)$ una topología que dependa de dicha clase. La candidata natural en este contexto es, sin duda, la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{G}$. Cuando procedemos de este modo, empiezan a aparecer resultados interesantes.

En concreto, nos hemos centrado en la clase w_0 de las sucesiones débil-nulas y en la clase wc de las sucesiones débil-Cauchy. Las respectivas topologías $\mathcal{T}_{w_0}$

y $\mathcal{T}_{wc}$ asociadas a esas clases son, en general, diferentes pero coinciden sobre M si M es condicionalmente débil-equicompacto sobre w_0 (se puede probar que M es condicionalmente débil-equicompacto sobre w_0 si y sólo si lo es sobre wc). Se obtienen, además, varios resultados de convergencia que apuntan en la misma dirección anterior. Es de señalar que algunos de estos resultados tienen que ver, nuevamente, con la propiedad de Dunford-Pettis.

Estamos ya preparados para abordar el problema inicial. Resulta ser cierto un teorema formalmente idéntico al teorema de Palmer sólo que usando la topología de la convergencia uniforme. De hecho vamos un poco más lejos pues, aunque las topologías $\mathcal{T}_{w_0}$ y $\mathcal{T}_{wc}$ son diferentes, hemos probado que sobre ellas coinciden los compactos. La herramienta principal para probar este resultado ha sido, naturalmente, el teorema de Ascoli. En concreto, hemos probado que un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es relativamente compacto en $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$ si y sólo si lo es en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$ y, además, esto equivale a que M sea débil-equicompacto sobre w_0 y que $\mathrm{M}x$ sea relativamente débil-compacto para todo $x \in X$.

El último episodio tuvo su origen en la siguiente observación: si mantenemos todo el enjambre de definiciones anterior pero considerando en Y la topología de la norma, resulta que los conjuntos *equicompactos sobre* w_0 son, precisamente, los conjuntos uniformemente completamente continuos. La siguiente pregunta es obligada: ¿Será posible probar un teorema formalmente idéntico al anterior usando conjuntos uniformemente completamente continuos? La respuesta es afirmativa.

Capítulo 1

Conjuntos equicompactos

En la primera sección de este capítulo introducimos el concepto de conjunto equicompacto de operadores, relacionándolo con el conocido concepto de conjunto de operadores colectivamente compacto. Probaremos que estas nociones son duales en el siguiente sentido: un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ es equicompacto si y sólo si $\mathrm{M}^* = \{T^* : T \in \mathrm{M}\}$ es colectivamente compacto. Además, se darán caracterizaciones alternativas tanto para los conjuntos equicompactos como para los colectivamente compactos. Las consecuencias que se derivan de dichas caracterizaciones, serán piezas fundamentales a lo largo de toda la presente memoria.

En la segunda sección se revisa, usando nuestros conceptos, el estudio que sobre los conjuntos relativamente compactos en $\mathcal{K}(X, Y)$ fue en su día realizado, entre otros, por P. Anselone [4], T. Palmer [72] y K. Vala [87]. Se dan nuevas demostraciones de los teoremas "clásicos" y, además, se unifican los resultados.

En la tercera sección analizamos más a fondo la estructura de los conjuntos equicompactos y mostramos cómo siempre pueden generarse éstos a partir de conjuntos uniformemente completamente continuos. En particular, se prueba que la clase de los conjuntos uniformemente completamente continuos coincide con la de los equicompactos si y sólo si, el espacio inicial no contiene copia de ℓ_1.

En la cuarta sección se estudian los llamados conjuntos (Z, S)-dominados, como generalización de los equicompactos. Este concepto, nos proporciona un marco de referencia general para estudiar clases tan aparentemente alejadas como la de los equicompactos en $\mathcal{K}(X, Y)$ y la de los uniformemente $p-$dominados en $\Pi_p(X, Y)$. Además, buscando el recíproco de cierto teorema de dominación, hemos encontrado una nueva condición suficiente de compacidad en $\mathcal{K}(X, Y)$.

1.1. Conjuntos equicompactos

Definición 1.1.1. Sean X e Y espacios de Banach. Un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es *equicompacto* si existe $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^* = 0$ y $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$.

OBSERVACIONES:

1) Si M es equicompacto, necesariamente $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. En particular, cuando $\mathrm{M} = \{T\}$ coinciden las nociones de compacidad colectiva y equicompacidad para M con la de compacidad de T (teorema A.1.11).

2) Si M es equicompacto [colectivamente compacto], entonces M está acotado y tanto $\overline{\mathrm{M}}$ como $\mathrm{co}(\mathrm{M})$ son equicompactos [colectivamente compactos].

3) Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ y es relativamente compacto, entonces M es colectivamente compacto y equicompacto. En este último caso, la demostración no es inmediata. Obtendremos el resultado como un corolario de la proposición 1.1.2. $\triangleleft$

Proposición 1.1.2. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$*. Son equivalentes:*

1.- M *es equicompacto.*

2.- M^* *es colectivamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Sea $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$ y $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Sea $H = \bigcup_{T\in \mathrm{M}} T^*(B_{Y^*})$. Probaremos que $H \subseteq \overline{\mathrm{aco}}\,\{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Si existe $x_0^* \in H$ tal que $x_0^* \notin \overline{\mathrm{aco}}\,\{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, podemos encontrar $\alpha > 0$ y $x \in X$ tales que $|\langle x, x_0^*\rangle| > \alpha$ y $|\langle x, x^*\rangle| < \alpha$ para todo $x^* \in \overline{\mathrm{aco}}\,\{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ (teorema de separación). En consecuencia, se tiene que

$$\alpha \geq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle| \geq \|Tx\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} |\langle x, T^*y^*\rangle|$$

para todo $T \in \mathrm{M}$. Dado que $x_0^* \in H$, existen $T_0 \in \mathrm{M}$ e $y_0^* \in B_{Y^*}$ tales que $x_0^* = T_0^* y_0^*$. Pero entonces, $\alpha \geq |\langle x, T_0^* y_0^*\rangle| = |\langle x, x_0^*\rangle| > \alpha$ lo cual es absurdo.

$2 \Rightarrow 1$

Como $H = \bigcup_{T\in \mathrm{M}} T^*(B_{Y^*})$ es relativamente compacto, existe una sucesión $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ y $H \subseteq \overline{\mathrm{co}}\,\{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Así pues,

$$\|Tx\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} |\langle x, T^*y^*\rangle| \leq \sup_{h^*\in H} |\langle x, h^*\rangle| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$$

para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. □

Nota 1.1.3. Si aplicamos el teorema anterior a los conjuntos de la forma $\mathrm{M} = \{T\}$, obtenemos que T es compacto si y sólo si T^* es compacto. Así pues, la proposición 1.1.2 puede considerarse como una generalización del teorema de Schauder (respecto del teorema 1.1.6 puede hacerse un comentario análogo). ◁

Corolario 1.1.4. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ *y* M *es relativamente compacto, entonces* M *es equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que el operador $\phi\colon \mathcal{K}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{K}(Y^*,X^*)$ definido para cada $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ por $\phi(T) = T^*$ es una isometría. Así pues, si M es relativamente compacto también lo es M^*. Pero entonces, M^* es colectivamente compacto lo cual, es equivalente a que M sea equicompacto. □

Proposición 1.1.5. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. *Son equivalentes:*

1.- M *es colectivamente compacto.*

2.- M^{**} *es colectivamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$ (es evidente que $2 \Rightarrow 1$)

Sean $D = \bigcup_{T\in\mathrm{M}} T^{**}(B_{X^{**}})$ y $H = \overline{\bigcup_{T\in\mathrm{M}} T(B_X)}^{\|\cdot\|_Y}$. Probaremos que $D \subseteq H$. En efecto, si $T \in \mathrm{M}$, se tiene que

$$\begin{aligned} T^{**}(B_{X^{**}}) &= T^{**}\left(\overline{B_X}^{\sigma(X^{**},X^*)}\right) \subseteq \overline{T^{**}(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)} \\ &= \overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)} \subseteq \overline{H}^{\sigma(Y,Y^*)} = H \end{aligned}$$

La última igualdad deriva del hecho de que H es $\|\cdot\|_Y$-compacto y, por tanto, también es débil-compacto. En consecuencia, H es débil-cerrado (obsérvese que para probar la primera inclusión sólo se necesita que T sea débil-compacto). □

Combinando los resultados obtenidos en 1.1.2 y 1.1.5 obtenemos:

Teorema 1.1.6. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. *Son equivalentes:*

1.- M *es equicompacto [colectivamente compacto].*

2.- M^* *es colectivamente compacto [equicompacto].*

3.- M^{**} *es equicompacto [colectivamente compacto].*

Una de las conclusiones del teorema 1.1.6 es que la equicompacidad de un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ es equivalente a la equicompacidad de M^{**}. La siguiente proposición proporciona información adicional pues nos permite afirmar que las sucesiones que mayoran a ambos conjuntos coinciden.

Proposición 1.1.7. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ *y* $(a_n^*)_n \subset X^*$ *es tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n^* = 0$ *y* $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $T \in \mathrm{M}$, *entonces también se cumple que* $\|T^{**}x^{**}\| \leq \sup_n |\langle x^{**}, a_n^*\rangle|$ *para todo* $x^{**} \in X^{**}$ *y todo* $T \in \mathrm{M}$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $x^{**} \in B_{X^{**}}$ y $T \in \mathrm{M}$. Elijamos $y^* \in B_{Y^*}$ tal que $\|T^{**}x^{**}\| = |\langle T^{**}x^{**}, y^*\rangle|$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a_n^*\| < \varepsilon/4$ para todo $n > n_0$. Consideremos ahora $W = W(0; a_1^*, \ldots, a_{n_0}^*, T^*y^*, \varepsilon/2)$. Como B_X es débil*-densa en $B_{X^{**}}$, existe $x \in B_X$ tal que $x \in x^{**} + W$. Así pues,

$$
\begin{aligned}
\|T^{**}x^{**}\| &= |\langle T^{**}x^{**}, y^*\rangle| = |\langle x^{**}, T^*y^*\rangle| \\
&\leq |\langle x^{**}, T^*y^*\rangle - \langle x, T^*y^*\rangle| + |\langle x, T^*y^*\rangle| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle - \langle x^{**}, a_n^*\rangle| + \sup_n |\langle x^{**}, a_n^*\rangle| \\
&\leq \varepsilon + \sup_n |\langle x^{**}, a_n^*\rangle|
\end{aligned}
$$

y dada la arbitrariedad de ε, se sigue que $\|T^{**}x^{**}\| \leq \sup_n |\langle x^{**}, a_n^*\rangle|$. □

Tanto los conjuntos colectivamente compactos como los equicompactos pueden entenderse como conjuntos *uniformemente compactos*, esto es, como aquellos subconjuntos de $\mathcal{K}(X,Y)$ que, en algún sentido, se comportan como un solo operador compacto. Así, cada uno de los conceptos anteriores tiene su origen en una de las siguientes caracterizaciones de los operadores compactos:

1.- $T(B_X)$ es relativamente compacto.

2.- Existe $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$ y $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$.

Hay una tercera caracterización para los operadores compactos a saber: "un operador T es compacto si y sólo si de cada sucesión acotada $(x_n)_n \subset X$ es posible extraer una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge". Podríamos pues, usar esta tercera vía para definir los conjuntos *secuencialmente equicompactos*. La pregunta siguiente es obvia: ¿Qué relación existirá entre los conjuntos *secuencialmente equicompactos* y los conjuntos equicompactos?

Teorema 1.1.8. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *acotado y consideremos el operador*

$$V : X \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M}, Y)$$

definido, para cada $x \in X$ *y cada* $T \in \mathrm{M}$*, por* $Vx(T) = Tx$*. Son equivalentes:*

1.- V *es compacto.*

2.- M *es equicompacto.*

3.- *Toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(Tx_{k(n)})_n$ *converge uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \Leftrightarrow 2$

Puesto que V es compacto, existe una sucesión $(a_n^*)_n \subset X^*$ con $(a_n^*)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$ tal que $\|Vx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$. Si tomamos ahora $x \in X$ y $T \in \mathrm{M}$ cualesquiera, obtenemos que

$$\|Tx\| = \|Vx(T)\| \leq \|Vx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$$

En el otro sentido la prueba es análoga.

$3 \Leftrightarrow 1$

Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X. Por hipótesis, existe una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ entonces $\|Tx_{k(p)} - Tx_{k(q)}\| < \varepsilon/2$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Se tiene, entonces, que

$$\|Vx_{k(p)} - Vx_{k(q)}\| = \sup_{T \in \mathrm{M}} \|Tx_{k(p)} - Tx_{k(q)}\| < \varepsilon$$

esto es, $(Vx_{k(n)})_n$ converge. La prueba del recíproco es similar. $\square$

El hecho de que la equicompacidad y la *equicompacidad secuencial* resulten ser conceptos equivalentes tiene consecuencias significativas.

Teorema 1.1.9. *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$. Son equivalentes:*

1.- *K es relativamente compacto.*

2.- *Toda sucesión acotada $(x_n^*)_n \subset X^*$ posee una subsucesión $(x_{k(n)}^*)_n$ tal que $(\langle x, x_{k(n)}^* \rangle)_n$ converge uniformemente en $x \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Leftrightarrow 2$

Para cada $x \in X$, definimos $T_x = 1 \otimes x$. Sea $\mathrm{M} = \{T_x : x \in K\}$. Dado que $T_x^* x^* = \langle x, x^* \rangle$, la condición (2) equivale a la equicompacidad de M^*, es decir, a que M sea colectivamente compacto (teorema 1.1.6). Finalmente, observemos que

$$K = \{T_x(1) : x \in K\} \subset \bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_{\mathbb{K}}) = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda K$$

esto es, M es colectivamente compacto si y sólo si K es relativamente compacto. $\square$

OBSERVACIONES: Resulta interesante aplicar el teorema 1.1.9 a algunos casos particulares conocidos. Por ejemplo:

1) Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $K = T(B_X)$, obtenemos que T es compacto si y sólo si de toda sucesión acotada $(y_n^*)_n \subset Y^*$ podemos extraer una subsucesión $(y_{k(n)}^*)_n$ tal que $(\langle Tx, y_{k(n)}^* \rangle)_n$ converge uniformemente en $x \in B_X$. Estamos, nuevamente, ante el teorema de Schauder.

2) Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ y tomamos $K = \bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X)$, obtenemos que M es colectivamente compacto si y sólo si, dada cualquier sucesión $(y_n^*)_n \subset Y^*$ acotada, existe una subsucesión $(y_{k(n)}^*)_n$ tal que $(\langle Tx, y_{k(n)}^* \rangle)_n$ converge uniformemente en $x \in B_X$ y $T \in \mathrm{M}$. En otras palabras, M es colectivamente compacto si y sólo si M^* es equicompacto. $\triangleleft$

Proposición 1.1.10. *Si $(T_n)_n \subset \mathcal{K}(X, Y)$ y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ son tales que:*

(a) $(T_n)_n \overset{SOT}{\to} T$.

(b) *El conjunto $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicompacto.*

entonces, $(T_n)_n \overset{\|\cdot\|}{\to} T$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ y $\|T_m x\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$ y todo $m \in \mathbb{N}$. Puesto que, para cada $x \in X$, se tiene que $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, obtenemos que

$$\|Tx\| = \left\| \lim_{m\to\infty} T_m x \right\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m x\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$$

lo cual, implica que T es compacto. Se sigue inmediatamente que el conjunto $\{T_n - T : n \in \mathbb{N}\}$ es equicompacto. Llamaremos $Q_n = T_n - T$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si suponemos que $\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\| > 0$, podremos encontrar una subsucesión de $(Q_n)_n$ (que seguiremos llamando igual) y $\varepsilon_0 > 0$ de forma que $\|Q_n\| > \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe entonces una sucesión $(x_n)_n \subset B_X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_n x_n\| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Como el conjunto $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicompacto, podemos extraer de $(x_n)_n$ una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Q_m x_{k(n)})_n$ converge uniformemente en $m \in \mathbb{N}$ (a un cierto y_m). Podemos encontrar entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tenga que $\left\|Q_m x_{k(n)} - y_m\right\| < \varepsilon_0/4$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Dado ahora $x_{k(n_0)}$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ es $\left\|Q_m x_{k(n_0)}\right\| < \varepsilon_0/4$. Por tanto, si $m \geq m_0$

$$\|y_m\| \leq \left\|Q_m x_{k(n_0)} - y_m\right\| + \left\|Q_m x_{k(n_0)}\right\| < \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Si tomamos ahora $m \geq \max\{n_0, m_0\}$, obtenemos que

$$\left\|Q_{k(m)} x_{k(m)}\right\| \leq \left\|Q_{k(m)} x_{k(m)} - y_{k(m)}\right\| + \left\|y_{k(m)}\right\| < \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$$

lo cual, está en contradicción con $(*)$. □

Conjuntos colectivamente compactos

Terminamos esta sección dando una caracterización de los conjuntos colectivamente compactos análoga a la dada en el teorema 1.1.8 para los equicompactos. Como enseguida veremos, esta analogía no es una simple coincidencia.

Teorema 1.1.11. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *acotado y consideremos el operador*

$$\begin{array}{rccc} U\colon & \ell_1(\mathrm{M}, X) & \longrightarrow & Y \\ & \xi & \longmapsto & U\xi = \sum_{T\in\mathrm{M}} T(\xi(T)) \end{array}$$

Son equivalentes:

1.- U *es compacto.*

2.- M *es colectivamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Sean $x \in X$ y $T \in \mathrm{M}$. Si definimos

$$\xi_{T,x}(S) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \neq T \\ x & \text{si} \quad S = T \end{cases}$$

entonces $\|\xi_{T,x}\| = \|\xi_{T,x}(T)\| = \|x\|$. Así pues, $\xi_{T,x} \in B_{\ell_1(\mathrm{M},X)}$ para todo $x \in B_X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Es claro que $U(\xi_{T,x}) = Tx$ por lo que, si $H = \bigcup_{T\in\mathrm{M}} T(B_X)$, obtenemos que

$$H = U\left(\{\xi_{T,x} : T \in \mathrm{M}, x \in B_X\}\right) \subseteq U\left(B_{\ell_1(\mathrm{M},X)}\right)$$

$2 \Rightarrow 1$

Si $\xi \in B_{\ell_1(\mathrm{M},X)}$, se tiene que

$$U(\xi) = \sum_{T\in\mathrm{M}} T(\xi(T)) = \sum_{\substack{T\in\mathrm{M}\\ \xi(T)\neq 0}} \|\xi(T)\|\, T\left(\frac{\xi(T)}{\|\xi(T)\|}\right) \in \overline{\mathrm{co}}(H)$$

y, en consecuencia, U es compacto. □

Nota 1.1.12. Recordamos en primer lugar que $\ell_1(\mathrm{I},X)^* = \ell_\infty(\mathrm{I},X^*)$. Probaremos ahora que el adjunto de U es el operador $\widehat{V}\colon Y^* \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M},X^*)$ definido para cada $y^* \in Y^*$ y $T \in \mathrm{M}$ por $\widehat{V}y^*(T) = T^*y^*$. En efecto, para cualesquiera $y^* \in Y^*$ y $\xi \in \ell_1(\mathrm{M},X)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \xi, U^*y^*\rangle &= \langle U\xi, y^*\rangle = \sum_{T\in\mathrm{M}} \langle T(\xi(T)), y^*\rangle \\ &= \sum_{T\in\mathrm{M}} \langle \xi(T), T^*y^*\rangle = \sum_{T\in\mathrm{M}} \langle \xi(T), \widehat{V}y^*(T)\rangle = \langle \xi, \widehat{V}y^*\rangle\end{aligned}$$

esto es, $U^* = \widehat{V}$ tal como se afirmaba. Esta observación, junto con los teoremas 1.1.8 y 1.1.11, nos proporciona una nueva demostración del hecho de que M es colectivamente compacto si y sólo si M^* es equicompacto (en realidad, para aplicar correctamente el teorema 1.1.8 deberíamos considerar $\ell_\infty(\mathrm{M}^*,X^*)$ en vez de $\ell_\infty(\mathrm{M},X^*)$ pero esta pequeña dificultad puede soslayarse fácilmente). ◁

1.2. Conjuntos relativamente compactos en $\mathcal{K}(X,Y)$

En los trabajos de T.W. Palmer [72] y P.H. Anselone [4] se dan condiciones para caracterizar a los conjuntos relativamente compactos en $\mathcal{K}(X,Y)$. Presentamos aquí una nueva demostración de cada una de las dos caracterizaciones dadas en [72].

Teorema 1.2.1 (T.W. Palmer, 1969 [72, teorema 2.2])**.** *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$*. Son equivalentes:*

1.- M *es relativamente compacto.*

2.- (a) M *es equicompacto* (M^* *colectivamente compacto en* [72]).

(b) $\mathrm{M}x = \{Tx : T \in \mathrm{M}\}$ *es relativamente compacto para cada* $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 1$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Probaremos que cualquier $(T_n)_n \subset \mathrm{M}$ contiene alguna subsucesión convergente. Como V es compacto (V es el operador definido en el teorema 1.1.8), existe en B_X una sucesión $x_1^1, \ldots, x_1^{t_1}, x_2^1, \ldots, x_2^{t_2}, \ldots$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$V(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{t_n} B\left(Vx_n^i; \frac{1}{n}\right)$$

Puesto que $\mathrm{M}x$ es relativamente compacto para cada $x \in X$, existe una subsucesión de $(T_n)_n$ (que seguiremos llamando igual) tal que $(T_n x_m^i)_n$ converge para cada $m \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, t_m\}$ (lema A.1.1). Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon/3$. Fijado n_0, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq m_0$, entonces $\left\|T_p x_{n_0}^i - T_q x_{n_0}^i\right\| < \varepsilon/3$ para todo $i \in \{1, \ldots, t_{n_0}\}$. Por otro lado, para cada $x \in B_X$, existe $i_x \in \{1, \ldots, t_{n_0}\}$ tal que $Vx \in B(Vx_{n_0}^{i_x}; 1/n_0)$. Así pues, si tomamos $p, q \geq m_0$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|T_p - T_q\| &= \sup_{x \in B_X} \|(T_p - T_q)x\| = \sup_{x \in B_X} \|Vx(T_p) - Vx(T_q)\| \\
&\leq \sup_{x \in B_X} \left\{\left\|(Vx - Vx_{n_0}^{i_x})(T_p)\right\| + \left\|Vx_{n_0}^{i_x}(T_p) - Vx_{n_0}^{i_x}(T_q)\right\|\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left\|(Vx_{n_0}^{i_x} - Vx)(T_q)\right\|\right\} \\
&\leq \sup_{x \in B_X} \left\{2\left\|Vx - Vx_{n_0}^{i_x}\right\| + \left\|T_p x_{n_0}^{i_x} - T_q x_{n_0}^{i_x}\right\|\right\} \\
&< 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

esto es, la sucesión $(T_n)_n$ converge. □

La demostración del siguiente teorema está inspirada en los argumentos usados por Galaz-Fontes en [45] aunque allí, el ámbito de la prueba se reduce al caso en el que el espacio X es reflexivo y separable.

Teorema 1.2.2 (T.W. Palmer, 1969 [72, teorema 2.1])**.** *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. *Son equivalentes:*

1.- M *es relativamente compacto.*

2.- (a) M *es colectivamente compacto.*

(b) $\mathrm{M}^* y^* = \{T^* y^* : T \in \mathrm{M}\}$ *es relativamente compacto para cada* $y^* \in Y^*$.

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 1$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Podemos suponer, sin que ello suponga pérdida de generalidad, que el espacio Y es separable. En efecto, es claro que $Y_0 = \overline{\mathrm{span}}\left\{\bigcup_{T\in\mathrm{M}} T(B_X)\right\}$ es separable. Como $\mathcal{K}(X,Y_0) \hookrightarrow \mathcal{K}(X,Y)$, si M es relativamente compacto en $\mathcal{K}(X,Y_0)$ también lo es en $\mathcal{K}(X,Y)$. Al ser Y separable, B_{Y^*} es metrizable para la topología $\sigma(Y^*,Y)$. Consideremos el espacio $C(B_{Y^*},X^*)$ de las funciones continuas de B_{Y^*} en X^* con la norma habitual del supremo. Definimos entonces el operador

$$\phi\colon \mathcal{K}(X,Y) \longrightarrow C(B_{Y^*},X^*)$$

de modo que $\phi(T)(y^*) = T^*y^*$ para todo $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ y todo $y^* \in B_{Y^*}$.

Probaremos en primer lugar que $\phi(\mathrm{M})$ es una familia equicontinua (este razonamiento aplicado a un conjunto de un solo operador, mostraría que ϕ está bien definida). Sean $y_0^* \in B_{Y^*}$ y $\varepsilon > 0$ dados. Si $H = \bigcup_{T\in\mathrm{M}} T(B_X)$, deben existir $y_1,\dots,y_N \in H$ tales que $H \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(y_i;\varepsilon/4)$. En particular, para cada $x \in B_X$ y $T \in \mathrm{M}$, existe $i_{T,x} \in \{1,\dots,N\}$ tal que $Tx \in B(y_{i_{T,x}};\varepsilon/4)$. Sean ahora $y^* \in B_{Y^*} \cap (y_0^* + W(0;y_1,\dots,y_N,\varepsilon/2))$ y $T \in \mathrm{M}$.

$$\begin{aligned}
\|\phi(T)(y^*) - \phi(T)(y_0^*)\| &= \|T^*y^* - T^*y_0^*\| \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} |\langle x, T^*(y^*-y_0^*)\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx, y^*-y_0^*\rangle| \\
&\le \sup_{\|x\|\le 1} \left\{ |\langle Tx - y_{i_{T,x}}, y^*-y_0^*\rangle| + |\langle y_{i_{T,x}}, y^*-y_0^*\rangle| \right\} \\
&\le 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Además, ϕ es una isometría. En efecto, si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ se tiene que

$$\|\phi(T)\| = \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \|\phi(T)(y^*)\| = \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \|T^*y^*\| = \|T^*\| = \|T\|$$

Para terminar, observemos que $\phi(\mathrm{M})y^* = \mathrm{M}^*y^*$ que, por hipótesis, es relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$. Así pues, el teorema de Ascoli (teorema A.3.9) garantiza que el conjunto $\phi(\mathrm{M})$ es relativamente compacto en $C(B_{Y^*}, X^*)$ lo cual, implica que M es relativamente compacto en $\mathcal{K}(X,Y)$. $\square$

Resulta evidente que si M es equicompacto y colectivamente compacto, entonces verifica las condiciones (a) y (b) de los teoremas 1.2.1 y 1.2.2. Así pues, podemos unificar estos dos resultados de forma natural en un único teorema.

Teorema 1.2.3. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. *Son equivalentes:*

1.- M *es relativamente compacto.*

2.- M *es equicompacto y colectivamente compacto.*

Corolario 1.2.4. *Sea* $A \subset X^*$. *Son equivalentes:*

1.- A *es relativamente compacto.*

2.- A *es equicompacto esto es, toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(\langle x_{k(n)}, x^*\rangle)_n$ *converge uniformemente en* $x^* \in A$.

3.- *Toda sucesión acotada* $(x_n^{**})_n \subset X^{**}$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)}^{**})_n$ *tal que* $(\langle x^*, x_{k(n)}^{**}\rangle)_n$ *converge uniformemente en* $x^* \in A$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \Leftrightarrow 2$ ($1 \Leftrightarrow 3$ es un caso particular del teorema 1.1.9)

La necesidad es clara. Para establecer la suficiencia, bastará con probar que todo subconjunto acotado de X^* es colectivamente compacto. Pero esto es inmediato pues si $A \subset X^*$ y $r = \sup_{x^* \in A} \|x^*\| < +\infty$, entonces $\bigcup_{x^* \in A} x^*(B_X) \subseteq B(0;r)$. $\square$

1.3. Conjuntos uniformemente completamente continuos

Estudiaremos en esta sección las relaciones existentes entre los conjuntos equicompactos y los uniformemente completamente continuos. En primer lugar, recordamos la caracterización obtenida por F. Mayoral, en el caso de que X no contenga copia de ℓ_1, para los conjuntos relativamente compactos de $\mathcal{K}(X,Y)$.

Teorema (F. Mayoral, 2001 [67]). *Supongamos que X no contiene copia de ℓ_1 y sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. Son equivalentes:*

1.- M *es relativamente compacto.*

2.- (a) M *es uniformemente completamente continuo.*

(b) $\mathrm{M}x$ *es relativamente compacto para cada $x \in X$.*

Todo operador compacto es completamente continuo (corolario A.1.4) y si el espacio X no contiene copia de ℓ_1, se cumple el recíproco (corolario A.1.5). Como enseguida veremos, estas afirmaciones sobre operadores individuales pueden extenderse a conjuntos de operadores a través del concepto de equicompacidad.

Teorema 1.3.1. *Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ acotado y consideremos el operador V definido en el teorema 1.1.8. Son equivalentes:*

1.- *V es completamente continuo.*

2.- *M es uniformemente completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

La prueba es inmediata pues $\|Tx\| \leq \|Vx\|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$.

$2 \Rightarrow 1$

Sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $\|Tx_n\| < \varepsilon/2$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Si tomamos $n \geq n_0$, obtenemos que

$$\|Vx_n\| = \sup_{T\in\mathrm{M}} \|Vx_n(T)\| = \sup_{T\in\mathrm{M}} \|Tx_n\| < \varepsilon$$

esto es, $(Vx_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. □

Lema 1.3.2. *Si $(x_n)_n \subset X$ es débil-Cauchy y $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ es uniformemente completamente continuo, entonces $(Tx_n)_n$ converge uniformemente en $T \in \mathrm{M}$.*

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata del lema A.1.3–(6). □

Teorema 1.3.3. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$*. Son equivalentes:*

1.- M *es equicompacto.*

2.- (a) M *es uniformemente completamente continuo.*

(b) *Para cada sucesión* $(x_n)_n \subset X$ *equivalente a la base canónica de* ℓ_1 *y cada* $\varepsilon > 0$*, existe una partición* $\{D_1, \ldots, D_p\}$ *de* $\mathbb{N}$ *tal que si* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *y* $n, m \in D_i$*, entonces* $\|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$ *para todo* $T \in \mathrm{M}$*.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

(a) Si M es equicompacto, V es compacto (teorema 1.1.8) y, por tanto, V es completamente continuo (corolario A.1.4). Pero entonces, M es uniformemente completamente continuo (teorema 1.3.1).

(b) Sean $(x_n)_n \subset X$ y un isomorfismo $\varphi\colon \ell_1 \longrightarrow \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\varphi(e_n) = x_n$. Es fácil comprobar que $\mathrm{M} \circ \varphi$ es equicompacto y, por tanto, $\varphi^* \circ \mathrm{M}^*$ es colectivamente compacto. Así pues, el conjunto

$$\bigcup_{T \in \mathrm{M}} \varphi^*(T^*(B_{Y^*})) = \{(\langle x_n, T^*y^*\rangle)_n : y^* \in B_{Y^*}, T \in \mathrm{M}\}$$

es relativamente compacto en ℓ_∞. Dado $\varepsilon > 0$, el teorema A.1.13 asegura la existencia de una partición $\{D_1, \ldots, D_p\}$ de $\mathbb{N}$ tal que si $i \in \{1, \ldots, p\}$ y $n, m \in D_i$, entonces $|\langle x_n - x_m, T^*y^*\rangle| < \varepsilon$ para todo $y^* \in B_{Y^*}$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Pero esto último, significa que $\|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$ para todo $T \in \mathrm{M}$.

$2 \Rightarrow 1$

Sea $(x_n)_n \subset X$ acotada. Podemos suponer, extrayendo una subsucesión en caso necesario, que $(x_n)_n$ es débil-Cauchy o es equivalente a la base canónica de ℓ_1. Si estamos en el primer caso, entonces $(Tx_n)_n$ converge uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ (lema 1.3.2) por lo que supondremos que estamos en el segundo caso. Existe pues, una partición $\{D_1^1, \ldots, D_{p_1}^1\}$ de $\mathbb{N}$ tal que si $i \in \{1, \ldots, p_1\}$ y $n, m \in D_i^1$, entonces $\|Tx_n - Tx_m\| < 1$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Puesto que algún D_i^1 es infinito, existe $k_1\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $\|Tx_{k_1(n)} - Tx_{k_1(m)}\| < 1$ para todos los $n, m \in \mathbb{N}$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Procediendo por inducción construimos, para cada $q > 1$, una función creciente $k_q\colon \mathbb{N} \longrightarrow k_{q-1}(\mathbb{N})$ tal que $\|Tx_{k_q(n)} - Tx_{k_q(m)}\| < 1/q$ para todos los $n, m \in \mathbb{N}$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Si definimos ahora $k(q) = k_q(q)$ para cada $q \in \mathbb{N}$, es inmediato comprobar que $(Tx_{k(n)})_n$ converge uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. □

Corolario 1.3.4. *Si X no contiene copia de ℓ_1 y $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X, Y)$ es uniformemente completamente continuo, entonces* M *es equicompacto.*

Nota 1.3.5. Usando el corolario 1.3.4, es claro que el teorema probado por F. Mayoral en [67] puede obtenerse como un caso particular del teorema 1.2.1. $\triangleleft$

Para que $X \not\hookrightarrow \ell_1$, es necesario y suficiente que $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{V}(X, Y)$ para *todo* Y (teorema A.1.6). Por contra, probaremos a continuación que $X \not\hookrightarrow \ell_1$ si y sólo si para *algún* Y coinciden en $\mathcal{K}(X, Y)$ la clase de los conjuntos equicompactos con la clase de los conjuntos uniformemente completamente continuos.

Lema 1.3.6. *Sean $A \subset X^*$ y $K \subset Y$ acotados. Definimos $\mathrm{M} = A \otimes K$, esto es, $\mathrm{M} = \{x^* \otimes y : x^* \in A, y \in K\}$. Son equivalentes:*

1.- M *es uniformemente completamente continuo* [M *es equicompacto*].

2.- A *es uniformemente completamente continuo* [A *es equicompacto*].

DEMOSTRACIÓN: $1 \Leftrightarrow 2$

Podemos suponer que $\sup_{x^* \in A} \|x^*\| = \sup_{y \in K} \|y\| = 1$ sin que ello implique pérdida de generalidad. Sea $(x_n)_n \subset B_X$ tal que $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$ y tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in K$ tal que $\|y_n\| > 1 - 1/n$. Si $n \in \mathbb{N}$, $x^* \in A$ e $y \in K$, se tiene que

$$\|\langle x_n, x^* \rangle y\| \leq |x^*(x_n)| < \|\langle x_n, x^* \rangle y_n\| + \frac{1}{n}$$

La segunda desigualdad demuestra que $1 \Rightarrow 2$ y la primera que $2 \Rightarrow 1$. La prueba de que M es equicompacto si y sólo si A es equicompacto es muy parecida y la omitimos. $\square$

Teorema 1.3.7. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X, Y)$ se cumple que si* M *es uniformemente completamente continuo, entonces* M *es equicompacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach Y tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ se cumple que si* M *es uniformemente completamente continuo, entonces* M *es equicompacto.*

3.- *X no contiene copia de ℓ_1.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo queda por probar que $2 \Rightarrow 3$

Para probar que $X \not\hookleftarrow \ell_1$, haremos uso de la caracterización dada para dichos espacios por G. Emmanuele (teorema A.1.6–(3)), esto es, probaremos que todo subconjunto de X^* uniformemente completamente continuo es relativamente compacto. Sea pues $A \subset X^*$ uniformemente completamente continuo. Si elegimos $y_0 \in S_Y$ y definimos $\mathrm{M} = A \otimes y_0$, entonces M es uniformemente completamente continuo (lema 1.3.6). En consecuencia, M es equicompacto y esto implica que A es equicompacto (lema 1.3.6). Aplicando ahora el corolario 1.2.4, concluimos que A es relativamente compacto. $\square$

Si $Y^* \not\hookleftarrow \ell_1$, $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ y M^* es uniformemente completamente continuo, entonces M^* es equicompacto. Resulta lógico ahora el plantearse la pregunta inversa, esto es: ¿Caracterizará esta propiedad a los espacios Y tales que $Y^* \not\hookleftarrow \ell_1$? La respuesta a esta pregunta es negativa.

Lema 1.3.8. *Sean $A \subset X^*$ acotado y $K \subset Y$. Definimos $\mathrm{M} = A \otimes K$ esto es, $\mathrm{M} = \{x^* \otimes y \,:\, x^* \in A,\, y \in K\}$. Son equivalentes:*

1.- M *es colectivamente compacto.*

2.- K *es relativamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $\sup_{x^* \in A} \|x^*\| = 1$ sin que ello suponga pérdida de generalidad. Se tiene entonces que

$$K \subseteq \overline{\{\langle x, x^*\rangle y : x \in B_X,\ x^* \in A,\ y \in K\}} = \overline{\bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X)} \subseteq \overline{\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda K}$$

La primera inclusión demuestra que $1 \Rightarrow 2$ y la segunda que $2 \Rightarrow 1$. $\square$

Lema 1.3.9. *Sea Y un espacio de Banach tal que todos sus subconjuntos de Dunford-Pettis sean relativamente compactos. Si X es un espacio de Banach arbitrario y $T^* \in \mathcal{V}(Y^*, X^*)$, entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(y_n^*)_n \subset Y^*$ tal que $(y_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$. Para todo $x \in B_X$, se tiene que

$$|\langle Tx, y_n^*\rangle| = |\langle x, T^* y_n^*\rangle| \leq \|T^* y_n^*\|$$

esto es, $T(B_X)$ es de Dunford-Pettis y, por tanto, es relativamente compacto. $\square$

Nota 1.3.10. El lema 1.3.9 está contenido en una proposición más general debida a G. Emmanuele [41, prop. 14]. De hecho, la condición dada en el lema 1.3.9 caracteriza completamente a los espacios en los cuales los conjuntos de Dunford-Pettis son relativamente compactos. $\lhd$

Teorema 1.3.11. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach X y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ se cumple que si M^* es uniformemente completamente continuo, entonces M^* es equicompacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach X tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ se cumple que si M^* es uniformemente completamente continuo, entonces M^* es equicompacto.*

3.- *Todo subconjunto de Dunford-Pettis de Y es relativamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Sean $K \subset Y$ un conjunto de Dunford-Pettis y $x_0^* \in S_{X^*}$. Definimos $\mathrm{M} = x_0^* \otimes K$. Si $(y_n^*)_n \subset Y^*$ y $(y_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|\langle y, y_n^*\rangle x_0^*\| = \lim_{n\to\infty} |\langle y, y_n^*\rangle| = 0$ uniformemente en $y \in K$, esto es, M^* es uniformemente completamente continuo y, por tanto, M^* es equicompacto. Pero entonces, M es colectivamente compacto lo cual, implica que K es relativamente compacto (lema 1.3.8).

$3 \Rightarrow 1$

Sea X un espacio de Banach arbitrario. Si $\mathrm{M}^* \subset \mathcal{V}(Y^*, X^*)$ es uniformemente completamente continuo, entonces el operador $V\colon Y^* \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M}, X^*)$ definido de forma que $Vy^*(T) = T^*y^*$ para cada $y^* \in Y^*$ y cada $T \in \mathrm{M}$, es completamente continuo. En efecto, basta con tener en cuenta que $\ell_\infty(\mathrm{M}, X^*) \approx \ell_\infty(\mathrm{M}^*, X^*)$ y aplicar el teorema 1.3.1. El lema 1.3.9, junto con la nota 1.1.12, nos permite afirmar ahora que el operador U usado en el teorema 1.1.11 es compacto. En otras palabras: M es colectivamente compacto y, por tanto, M^* es equicompacto. $\square$

Nota 1.3.12. Hay dos casos importantes que conviene señalar: si $Y = Z^*$ y $Z \not\hookleftarrow \ell_1$ o Y posee la propiedad de Schur, entonces todo subconjunto de Dunford-Pettis de Y es relativamente compacto [41, Introd.]. Es fácil pues, aportar ahora ejemplos de espacios Y en las condiciones del teorema 1.3.11 y tales que $Y^* \hookleftarrow \ell_1$. De hecho, el propio espacio ℓ_1 sirve como ejemplo. $\lhd$

Factorización de conjuntos equicompactos

Un conocido teorema (debido a Grothendieck) afirma que un operador es compacto, si y sólo si puede ser factorizado de forma conveniente a través de un cierto subespacio de c_0. Los conjuntos equicompactos se comportan, también en este sentido, como lo haría un solo operador compacto.

Proposición 1.3.13. *Sea $Q \in \mathcal{L}(X, Z)$. Son equivalentes:*

1.- $Q \in \mathcal{CW}(X, Z)$.

2.- *Si $A \subset Z^*$ es uniformemente completamente continuo, entonces $Q^*(A)$ es relativamente compacto.*

3.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{N} \subset \mathcal{V}(Z, Y)$ se cumple que si N es uniformemente completamente continuo, entonces $\mathrm{N} \circ Q$ es equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $Q \in \mathcal{CW}(X, Z)$, cualquier sucesión $(x_n)_n \subset X$ acotada posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Qx_{k(n)})_n$ es débil-Cauchy. Así, si $A \subset Z^*$ es un conjunto uniformemente completamente continuo, entonces $(\langle Qx_{k(n)}, a\rangle)_n = (\langle x_{k(n)}, Q^*a\rangle)_n$ converge uniformemente en $a \in A$ (lema 1.3.2). Pero esto implica que $Q^*(A)$ es relativamente compacto (corolario 1.2.4).

$2 \Rightarrow 3$

Sean Y un espacio de Banach arbitrario y $\mathrm{N} \subset \mathcal{V}(Z, Y)$ uniformemente completamente continuo. Probaremos que $Q^* \circ \mathrm{N}^*$ es colectivamente compacto. Si $((Q^* \circ S_n^*)y_n^*)_n \subset \bigcup_{S \in \mathrm{N}} Q^* \circ S^*(B_{Y^*})$, entonces el conjunto $A = \{S_n^* y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente completamente continuo. En efecto, si $(z_n)_n \subset Z$ es tal que $(z_n)_n \xrightarrow{w} 0$, se tiene que

$$|S_m^* y_m^*(z_n)| = |\langle S_m z_n, y_m^*\rangle| \leq \|S_m z_n\|$$

Así pues, $Q^*(A)$ es relativamente compacto y, por tanto, existe una subsucesión $((Q^* \circ S_{k(n)}^*)y_{k(n)}^*)_n$ convergente.

$3 \Rightarrow 1$

Para probar que $Q(B_X)$ es condicionalmente débil-compacto, basta con observar que si Y es un espacio de Banach arbitrario y $S \in \mathcal{V}(Z, Y)$, entonces $S(Q(B_X))$ es relativamente compacto y aplicar, a renglón seguido, el teorema A.1.8. $\square$

El siguiente teorema es sólo parcialmente original pues la implicación $1 \Rightarrow 2$ del mismo, es una adaptación casi literal de la prueba correspondiente para *un* operador que se incluye en el texto de Jarchow [58, 17.1.4]. Salvo los detalles técnicos necesarios para considerar un conjunto en vez de un solo operador, la única novedad de esta prueba respecto de aquella, es la apreciación de que el conjunto $\{S_T : T \in \mathrm{M}\}$ es equicompacto.

Teorema 1.3.14. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$*. Son equivalentes:*

1.- M *es equicompacto.*

2.- *Existen un subespacio cerrado* Z *de* c_0*,* $Q \in \mathcal{K}(X,Z)$ *y* $\mathrm{N} \subset \mathcal{K}(Z,Y)$ *equicompacto tales que* $\mathrm{M} = \mathrm{N} \circ Q$*.*

3.- *Existen un espacio de Banach* Z*,* $Q \in \mathcal{CW}(X,Z)$ *y* $\mathrm{N} \subset \mathcal{V}(Z,Y)$ *tales que* N *es uniformemente completamente continuo y* $\mathrm{M} = \mathrm{N} \circ Q$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo queda por probar que $1 \Rightarrow 2$

Sea $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$ y $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $\lambda_n = \sqrt{\|a_n^*\|}$ y $b_n^* = \lambda_n^{-1} a_n^*$ (podemos suponer que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Es evidente que $(\lambda_n)_n \in c_0$ y $(b_n^*)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$. Definimos ahora el operador Q y el conjunto $\mathrm{N} = \{S_T : T \in \mathrm{M}\}$ por

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle Q}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle S_T} \\ & Z & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Qx = (\langle x, b_n^*\rangle)_n & S_T(\langle x, b_n^*\rangle)_n = Tx \\ & \\ Z = \overline{\{Qx : x \in X\}} \hookrightarrow c_0 & \end{array}$$

Q es lineal, está bien definido y puesto que $\|Qx\| = \sup_n |\langle x, b_n^*\rangle|$, se sigue que Q es compacto (teorema A.1.11). Asimismo, se comprueba sin dificultad que S_T está bien definido y que $\|S_T\| \leq \|(\lambda_n)_n\|_\infty$ para todo $T \in \mathrm{M}$ por lo que podemos extender cada S_T por densidad al subespacio $Z = \overline{\{Qx : x \in X\}}$ de c_0. Puesto que $Z \hookrightarrow c_0$, se tiene que $Z^* \approx \ell_1 / Z^\perp$. Llamamos $\widehat{e}_n = [e_n]$, donde $(e_n)_n$ es la base canónica de ℓ_1. Es evidente que $\langle ((\langle x, b_n^*\rangle)_n, \lambda_m \widehat{e}_m\rangle = \langle x, \lambda_m b_m^*\rangle = \langle x, a_m^*\rangle$ y que $(\lambda_n \widehat{e}_n)_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} 0$. Así pues, para todo $T \in \mathrm{M}$, se tiene que

$$\|S_T(\langle x, b_n^*\rangle)_n\| = \|Tx\| \leq \sup_m |\langle ((\langle x, b_n^*\rangle)_n, \lambda_m \widehat{e}_m\rangle|$$

esto es, N es equicompacto. Finalmente, es claro que $\mathrm{M} = \mathrm{N} \circ Q$. $\square$

1.4. Conjuntos (Z, S)−dominados

Los ejemplos más simples de conjuntos equicompactos son aquellos para los que existe $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ tal que $\|Tx\| \leq \|Sx\|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Es natural plantear la pregunta inversa, esto es, la de si un conjunto equicompacto estará siempre dominado por un operador compacto. Es fácil convencerse de que la respuesta a esta pregunta es negativa. Podemos dar, no obstante, un resultado positivo en esa dirección aunque, para abordar esta cuestión, es más conveniente trabajar en un marco más general: el de los conjuntos (Z, S)−dominados.

Definición 1.4.1. Dado un espacio de Banach Z y un operador $S \in \mathcal{L}(X, Z)$, decimos que el conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ es (Z, S)−*dominado* si $\|Tx\| \leq \|Sx\|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$.

OBSERVACIONES:

1) Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ equicompacto. Consideremos (conservando la notación habitual) el operador $S\colon X \longrightarrow c_0$ definido por $Sx = (\langle x, a_n^*\rangle)_n$. Entonces M es un conjunto (c_0, S)−dominado.

2) Si $S \in \mathcal{V}(X, Z)$ y $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ es un conjunto (Z, S)−dominado, entonces M es uniformemente completamente continuo.

3) Dados un espacio de Banach Z y un operador $S \in \mathcal{L}(X, Z)$, definimos el conjunto maximal $\mathrm{M}(Z, S)$ como el conjunto de los operadores $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tales que $\|Tx\| \leq \|Sx\|$ para todo $x \in X$. Se prueba sin dificultad que $\mathrm{M}(Z, S)$ es no vacío $[B_{\mathcal{L}(Z,Y)} \circ S \subseteq \mathrm{M}(Z, S)]$, SOT-cerrado y convexo.

4) Si estamos en el primer caso, escribiremos $\mathrm{M}[(a_n^*)_n]$ en vez de $\mathrm{M}(c_0, S)$ y si $Z = Y$, escribiremos $\mathrm{M}(S)$ en vez de $\mathrm{M}(Y, S)$. $\lhd$

Ejemplo 1.4.2. Sea $\Pi_p(X, Y)$ el espacio de los operadores p-sumantes de X en Y dotado de la norma

$$\pi_p(T) = \sup \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^p \right)^{1/p} \ : \ (x_n)_n \in B_{\ell_p^w(X)} \right\}$$

donde $\ell_p^w(X)$ es el espacio de Banach de las sucesiones débilmente p-sumables en X. Llamamos a un conjunto $\mathrm{M} \subset \Pi_p(X, Y)$ uniformemente p-dominado, si existe una medida positiva de Radon μ en B_{X^*} tal que

$$\|Tx\|^p \leq \int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*)$$

para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Si $Z = L_p(\mu, B_{X^*})$ y definimos $S\colon X \longrightarrow Z$ por $(Sx)(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in B_{X^*}$ y todo $x \in X$, entonces cualquier conjunto p-dominado es $(Z,S)-$dominado. $\lhd$

Surge naturalmente la pregunta de si podemos, en un conjunto $(Z,S)-$dominado, sustituir el operador S por otro que esté en el propio conjunto o en $\mathcal{L}(X,Y)$. En ambos casos la respuesta es negativa. Sin embargo, se tiene el teorema siguiente:

Teorema 1.4.3. *Sean Y un espacio de Banach sin cotipo finito y $S \in \mathcal{L}(X,Z)$. Dados $\varepsilon > 0$ y $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$, existe $Q \in \mathrm{M}(Z,S)$ tal que $\|Tx_i\| \leq (1+\varepsilon)\,\|Qx_i\|$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ y todo $T \in \mathrm{M}(Z,S)$.*

DEMOSTRACIÓN: Como Y no tiene cotipo finito, contiene a ℓ_∞^n uniformemente. Así pues, dados $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un isomorfismo J_n de ℓ_∞^n sobre un subespacio de Y tal que $\|J_n^{-1}\| = 1$ y $\|J_n\| \leq 1+\varepsilon$ [36, teorema 14.1].

Dado $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$, elijamos $z_i^* \in B_{Z^*}$ tal que, para cada $i = 1,\dots,n$, sea $|\langle Sx_i, z_i^*\rangle| = \|Sx_i\|$. Sea $y_i = J_n e_i$ (llamamos $(e_i)_{i=1}^n$ a la base canónica de ℓ_∞^n) y definamos el operador $Q\colon X \longrightarrow Y$ de forma que $Qx = \frac{1}{1+\varepsilon} J_n((\langle Sx, z_i^*\rangle)_1^n)$ para cada $x \in X$. Se tiene entonces que

$$\|Qx\| \leq (1+\varepsilon)^{-1}\,\|J_n\|\,\|(\langle Sx, z_i^*\rangle)_1^n\|_\infty \leq \|Sx\| \sup_{1\leq i\leq n} \|z_i^*\| \leq \|Sx\|$$

esto es, $Q \in \mathrm{M}(Z,S)$. Consideremos ahora $y_i^* = e_i^* \circ J_n^{-1}$ (llamamos $(e_i^*)_{i=1}^n$ a la base canónica de $(\ell_\infty^n)^* \approx \ell_1^n$). Obsérvese que $\|y_i^*\| \leq 1$ para $i = 1,\dots,n$. Por el teorema de Hahn-Banach, hay una extensión de y_i^* que seguiremos llamando igual. Es inmediato el comprobar que $\langle y_i, y_j^*\rangle = \delta_i^j$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|Tx_i\| &\leq \|Sx_i\| = |\langle Sx_i, z_i^*\rangle| \\
&= \left|\sum_{j=1}^n \langle Sx_i, z_j^*\rangle\langle y_j, y_i^*\rangle\right| = \left|\langle\sum_{j=1}^n \langle Sx_i, z_j^*\rangle y_j, y_i^*\rangle\right| \\
&= (1+\varepsilon)|\langle Qx_i, y_i^*\rangle| \\
&\leq (1+\varepsilon)\,\|Qx_i\|
\end{aligned}$$

para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ y todo $T \in \mathrm{M}(Z,S)$. $\square$

El teorema anterior tiene un recíproco parcial que, además, proporciona una condición suficiente de compacidad relativa en $\mathcal{K}(X,Y)$.

Lema 1.4.4. *Sean X un espacio de Banach separable y $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Si existe $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ acotado tal que se satisfacen las propiedades:*

(a) $\mathrm{M} \subseteq \widehat{\mathrm{M}}$ *y* $\widehat{\mathrm{M}}$ *es SOT-numerablemente compacto.*

(b) Existe $C > 0$ tal que, para cada $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, existe $Q \in \widehat{\mathrm{M}}$ tal que $\|Tx_i\| \leq C\,\|Qx_i\|$ para todo $i = 1, \dots, n$ y todo $T \in \mathrm{M}$.

entonces existe $S \in \widehat{\mathrm{M}}$ tal que M *es S-dominado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_n)_n$ una sucesión densa en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $Q_n \in \widehat{\mathrm{M}}$ tal que, para todo $i = 1, \dots, n$ y todo $T \in \mathrm{M}$, se tiene que

$$\|Tx_i\| \leq C\,\|Q_n x_i\|$$

La sucesión $(Q_n)_n$ posee un valor SOT-adherente $S \in \widehat{\mathrm{M}}$. Un razonamiento estándar prueba que $\|Tx_i\| \leq C\,\|Sx_i\|$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_i\| < \min\{\varepsilon/2rC, \varepsilon/2r\}$ $\left(r = \sup\left\{\|Q\| : Q \in \widehat{\mathrm{M}}\right\}\right)$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\leq \|Tx - Tx_i\| + \|Tx_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + C\,\|Sx_i\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + C(\|Sx_i - Sx\| + \|Sx\|) \\
&< \varepsilon + C\,\|Sx\|
\end{aligned}$$

para todo $T \in \mathrm{M}$. Puesto que ε puede ser elegido de forma arbitraria, obtenemos que $\|Tx\| \leq C\,\|Sx\|$ para todo $T \in \mathrm{M}$. □

Teorema 1.4.5. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$*. Si existe* $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ *acotado tal que se satisfacen las propiedades:*

(a) $\mathrm{M} \subseteq \widehat{\mathrm{M}}$ *y* $\widehat{\mathrm{M}}$ *es SOT-numerablemente compacto.*

(b) Existe $C > 0$ tal que, para cada $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, existe $Q \in \widehat{\mathrm{M}}$ tal que $\|Tx_i\| \leq C\,\|Qx_i\|$ para todo $i = 1, \dots, n$ y todo $T \in \mathrm{M}$.

entonces M *es relativamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Se comprueba fácilmente que si $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es relativamente SOT-numerablemente compacto, entonces $\mathrm{M}x$ es relativamente compacto para todo $x \in X$. Así pues, para obtener la conclusión, sólo hay que probar que M es equicompacto y aplicar el teorema 1.2.1.

Si X es separable, existe $S \in \widehat{\mathrm{M}}$ tal que M es S-dominado (lema 1.4.4) y como $S \in \widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{K}(X,Y)$, M es equicompacto. Si X e Y son espacios de Banach arbitrarios y $(x_n)_n$ es acotada en X, consideramos $F = \overline{\mathrm{span}}\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y denotamos por i_F la inclusión canónica de F en X. Definimos $\mathrm{N} = \{T \circ i_F : T \in \mathrm{M}\}$ y $\widehat{\mathrm{N}} = \left\{Q \circ i_F : Q \in \widehat{\mathrm{M}}\right\}$. Es inmediato el comprobar que $\mathrm{N}, \widehat{\mathrm{N}} \subset \mathcal{K}(F,Y)$ y que cumplen las condiciones (a) y (b). Puesto que F es separable, se sigue que N es equicompacto. Existe entonces una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $((T \circ i_F)x_{k(n)})_n$ converge uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. La conclusión es ahora clara pues, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(T \circ i_F)x_{k(n)} = Tx_{k(n)}$. □

Nota 1.4.6. La condición 1.4.5$-(a)$ implica que $\mathrm{M}x$ es relativamente compacto para todo $x \in X$ pero la condición (b), por sí misma, no implica que M sea equicompacto. En efecto, el conjunto $\mathrm{M}(c_0, I)$ (I es la identidad en c_0) es precisamente la bola unidad de $\mathcal{L}(c_0, c_0)$ y el teorema 1.4.3 muestra que $\mathrm{M}(c_0, I)$ cumple la propiedad (b) con $C = 2$. Esto quiere decir que si M es la bola unidad de $\mathcal{K}(c_0, c_0)$, entonces M cumple la propiedad 1.4.5$-(b)$. Veamos ahora que $B_{\mathcal{K}(c_0,c_0)}$ no es equicompacto. Para cada $\beta = (\beta_n)_n \in B_{c_0}$ denotamos por T_β el operador definido, para cada $(\alpha_n)_n \in c_0$, por $T_\beta(\alpha_n)_n = (\alpha_n\beta_n)_n$. Resulta evidente que $T_\beta \in \mathrm{M}$ para todo $\beta \in B_{c_0}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|T_{e_n}e_n\| = \|e_n\| = 1$. Dado que $(e_n)_n \xrightarrow{w} 0$ en c_0, resulta que M no puede ser uniformemente completamente continuo y, en consecuencia, M no es equicompacto. ◁

Cambiando sólo algunos detalles en la prueba 1.4.5 obtenemos:

Teorema 1.4.7. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$. *Si existe* $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ *acotado tal que se satisfacen las propiedades:*

(a) $\mathrm{M} \subseteq \widehat{\mathrm{M}}$ *y* $\widehat{\mathrm{M}}$ *es SOT-numerablemente compacto.*

(b) *Existe* $C > 0$ *tal que, para cada* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, *existe* $Q \in \widehat{\mathrm{M}}$ *tal que* $\|Tx_i\| \leq C\,\|Qx_i\|$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *y todo* $T \in \mathrm{M}$.

entonces M *es uniformemente completamente continuo.*

Nota 1.4.8. La conclusión del anterior teorema puede parecer pobre en comparación con la obtenida en el teorema 1.4.5. Sin embargo, en el capítulo 3 obtendremos, para ciertas topologías en $\mathcal{V}(X,Y)$, una caracterización de los conjuntos relativamente compactos como aquellos conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ que son uniformemente completamente continuos y tales que $\mathrm{M}x$ es relativamente compacto para todo $x \in X$ (teorema 3.5.13). Así, combinando aquel resultado con el teorema 1.4.7, puede obtenerse una obvia mejora en la conclusión anterior. $\triangleleft$

1.5. Notas finales y ejemplos

El teorema 1.4.5 sugiere otra pregunta: ¿Los conjuntos equicompactos cumplen necesariamente la condición (b) del citado teorema?

Ejemplo 1.5.1 (Conjunto maximal equicompacto que no verifica 1.4.5$-(b)$)**.** Sea M el conjunto de todos los operadores de $\mathcal{K}(c_0, \ell_2)$ que satisfacen:

$$\|T\alpha\|_2 \leq \sup_n |\langle \alpha, \frac{1}{\sqrt{n}} e_n^* \rangle|$$

para todo $\alpha \in c_0$, esto es, $\mathrm{M} = \mathrm{M}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e_n^*\right)_n\right]$ ($(e_n^*)_n$ es la base unidad de ℓ_1). Supongamos que existan una constante $C > 0$ y conjunto acotado $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{K}(c_0, \ell_2)$ tales que para cada $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset c_0$ exista un $Q \in \widehat{\mathrm{M}}$ que domine a todos los operadores de M en ese conjunto. Considerando $(e_n)_n$ (la sucesión básica de c_0), encontraremos $(Q_n)_n \subseteq \widehat{\mathrm{M}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $T \in \mathrm{M}$ y todo $k = 1, \ldots, n$ se tenga que $\|Te_k\|_2 \leq C \|Q_n e_k\|_2$. Así pues, si $\{T_1, \ldots, T_n\} \subset \mathrm{M}$, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \|T_k e_k\|_2^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^{n} \|Q_n e_k\|_2^2 \qquad (*)$$

Si consideramos ahora los operadores $T_k \in \mathrm{M}$ definidos para cada $\alpha \in c_0$ por $T_k \alpha = \langle \alpha, \frac{1}{\sqrt{k}} e_k^* \rangle u_k$ (llamamos $(u_n)_n$ a los vectores unitarios de ℓ_2), entonces $\|T_k e_k\|_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$ y por $(*)$, obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$C^{-2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \|Q_n e_k\|_2^2$$

Recordemos finalmente que todo operador acotado T de c_0 en ℓ_2 es 2-sumante y que $\pi_2(T) \leq \lambda \|T\|$ para alguna constante $\lambda > 0$ [36, teorema 3.5]. Así pues,

$$\pi_2(Q_n)^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \|Q_n e_k\|_2^2 \geq C^{-2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Pero esto es absurdo pues si $\widehat{\mathrm{M}}$ está acotado en norma, también está acotado en la norma π_2. En particular, el razonamiento anterior muestra que ni siquiera cuando un conjunto es relativamente compacto puede asegurarse el cumplimiento de la condición 1.4.5$-(b)$. En efecto, se tiene que

$$\|T_n\| = \sup_{\|\alpha\|\leq 1} \left| \langle \alpha, \frac{1}{\sqrt{n}} e_n^* \rangle u_n \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

esto es, la sucesión $(T_n)_n$ es convergente y, por tanto, el conjunto $\mathrm{N} = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto. Sin embargo, N no puede cumplir la condición 1.4.5$-(b)$ para ningún conjunto acotado $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{K}(c_0, \ell_2)$. $\triangleleft$

Caracterización de los conjuntos equicompactos en $\mathcal{K}(\ell_1, Y)$

Si $T \in \mathcal{L}(\ell_1, Y)$, llamaremos $y_n^T = Te_n$. Recordemos que $T \in \mathcal{K}(\ell_1, Y)$ si y sólo si el conjunto $\left\{y_n^T : n \in \mathbb{N}\right\}$ es relativamente compacto en Y. Usando ahora algunas de las ideas utilizadas en la prueba del teorema 1.3.3, podemos caracterizar los conjuntos equicompactos de $\mathcal{K}(\ell_1, Y)$.

Teorema 1.5.2. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(\ell_1, Y)$ *acotado. Son equivalentes:*

1.- M *es equicompacto.*

2.- *Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una partición* $\{D_1, \ldots, D_p\}$ *de* $\mathbb{N}$ *tal que si* $1 \leq i \leq p$ *y* $n, m \in D_i$*, entonces* $\left\|y_n^T - y_m^T\right\| < \varepsilon$ *para todo* $T \in \mathrm{M}$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \Leftrightarrow 2$

M es equicompacto si y sólo si M^* es colectivamente compacto (proposición 1.1.2), esto es, si el conjunto $H = \bigcup_{T\in \mathrm{M}} T^*(B_{Y^*})$ es relativamente compacto en ℓ_∞. Es inmediata la comprobación de que $T^*y^* = (\langle y_n^T, y^* \rangle)_n$ para cada $T \in \mathrm{M}$ y cada $y^* \in Y^*$. Así pues, $H = \left\{(\langle y_n^T, y^* \rangle)_n : y^* \in B_{Y^*}, T \in \mathrm{M}\right\}$.

Puesto que el conjunto $\left\{\langle y_n^T, y^* \rangle : n \in \mathbb{N}, y^* \in B_{Y^*}, T \in \mathrm{M}\right\}$ está acotado, se tiene que H es relativamente compacto si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición $\{D_1, \ldots, D_p\}$ de $\mathbb{N}$ tal que si $i \in \{1, \ldots, p\}$ y $n, m \in D_i$, entonces $|\langle y_n^T, y^* \rangle - \langle y_m^T, y^* \rangle| < \varepsilon$ para todo $T \in \mathrm{M}$ y todo $y^* \in B_{Y^*}$ (teorema A.1.13). Pero eso significa que $\left\|y_n^T - y_m^T\right\| < \varepsilon$ para todo $T \in \mathrm{M}$. $\square$

Corolario 1.5.3. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(\ell_1, Y)$ *acotado. Si* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^T = 0$ *uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$*, entonces* M *es equicompacto.*

La propiedad del límite cruzado

Definición 1.5.4. Una sucesión $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ posee la *propiedad del límite cruzado* si toda sucesión acotada $(x_n)_n \subset X$ posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $\lim\limits_{n,m\to\infty}(T_n x_{k(m)} - T_m x_{k(n)}) = 0$.

Un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ posee la propiedad del límite cruzado si toda sucesión $(T_n)_n \subset \mathrm{M}$ posee una subsucesión $(T_{h(n)})_n$ con la propiedad del límite cruzado.

Nota 1.5.5. Si $T = T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(T_n)_n$ posee la propiedad del límite cruzado si y sólo si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. $\triangleleft$

Lema 1.5.6. *Sea $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Si $(T_n)_n$ posee la propiedad del límite cruzado, entonces se verifica:*

(1) *Cualquier subsucesión de $(T_n)_n$ posee la propiedad del límite cruzado.*

(2) *$(T_n)_n$ es SOT-convergente.*

(3) *Si M es equicompacto, entonces $(T_n)_n$ es convergente en norma.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Es evidente que si $\lim_{n,m\to\infty}(T_n x_{k(m)} - T_m x_{k(n)}) = 0$ y $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es creciente, entonces $\lim_{n,m\to\infty}(T_{h(n)} x_{k(h(m))} - T_{h(m)} x_{k(h(n))}) = 0$.

(2) Considerando sucesiones constantes, se deduce que $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existe para todo $x \in X$ y basta entonces con aplicar el teorema de Banach-Steinhaus.

(3) Es una consecuencia inmediata de (2) y de la proposición 1.1.10. $\square$

Lema 1.5.7. *Si una sucesión $(T_n)_n \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$ es convergente, entonces $(T_n)_n$ posee la propiedad del límite cruzado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. Si $(x_n)_n \subset B_X$, existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $\left\|Tx_{k(n)} - Tx_{k(m)}\right\| < \varepsilon/3$ y $\|T_n - T\| < \varepsilon/3$. Si tomamos ahora $n, m \geq n_0$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left\|T_n x_{k(m)} - T_m x_{k(n)}\right\| &\leq \left\|(T_n - T)x_{k(m)}\right\| + \left\|Tx_{k(m)} - Tx_{k(n)}\right\| + \left\|(T - T_m)x_{k(n)}\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

esto es, $(T_n)_n$ posee la propiedad del límite cruzado. $\square$

Teorema 1.5.8. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$. *Son equivalentes:*

1.- M *es relativamente compacto.*

2.- M *es equicompacto y posee la propiedad del límite cruzado.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

En primer lugar, M es equicompacto (teorema 1.2.3) y si $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M}$, existe una subsucesión $(T_{k(n)})_n$ convergente. Pero entonces, $(T_{k(n)})_n$ posee la propiedad del límite cruzado (lema 1.5.7).

$2 \Rightarrow 1$

Si $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M}$, existe una subsucesión $(T_{k(n)})_n$ que posee la propiedad del límite cruzado. Pero entonces, $(T_{k(n)})_n$ converge (lema 1.5.6). □

Corolario 1.5.9. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ *es equicompacto y posee la propiedad del límite cruzado, entonces* M *es colectivamente compacto.*

Si comparamos los enunciados de los teoremas 1.2.3 y 1.5.8, surge la pregunta de si la compacidad colectiva de M, por sí misma, será suficiente para asegurar la propiedad del límite cruzado. Por otro lado, el lema 1.5.6 plantea la cuestión de si una sucesión SOT-convergente necesariamente posee la propiedad del límite cruzado. En ambos casos la respuesta es negativa.

Ejemplo 1.5.10. Si $A \subset X^*$ está acotado, es colectivamente compacto (véase la demostración del corolario 1.2.4). En particular, el conjunto $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_1$ es colectivamente compacto.

Consideremos ahora una sucesión $(\widehat{\alpha}_n)_n \subset B_{c_0}$ con la propiedad siguiente: para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\widehat{\alpha}_n = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{p_n}, 0, \ldots) \qquad p_n \geq n$$

Es evidente que cualquier subsucesión de $(\widehat{\alpha}_n)_n$ goza de la misma propiedad. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $m > n$ tal que $m > p_n$ y entonces, $e_n(\widehat{\alpha}_m) - e_m(\widehat{\alpha}_n) = 1$. Por otro lado, el anterior razonamiento puede repetirse para cualesquiera subsucesiones de $(e_n)_n$ y $(\widehat{\alpha}_n)_n$. Así pues, A no posee la propiedad del límite cruzado. ◁

Ejemplo 1.5.11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $T_n \colon c_0 \longrightarrow \ell_1$ por $T_n = e_n \otimes e_n$. Si $\widehat{\alpha} = (\alpha_n)_n \in c_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\|T_n \widehat{\alpha}\| = \|\langle (\alpha_m)_m, e_n \rangle e_n\| = |\alpha_n|$$

es decir, $(T_n)_n \overset{SOT}{\to} 0$. Sin embargo, usando una sucesión $(\widehat{\alpha}_n)_n$ con la propiedad descrita en el ejemplo anterior, es fácil probar que $(T_n)_n$ no posee la propiedad del límite cruzado. $\triangleleft$

Capítulo 2

Conjuntos débil-equicompactos

Intentamos, en este capítulo, extender los resultados anteriores para conjuntos de operadores débil-compactos. Puesto que la condición de que exista una sucesión $(a_n^*)_n \subset X^*$ con $(a_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y tal que $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$ no es necesaria (aunque sí suficiente) para que un operador T sea débil-compacto, parece razonable definir los conjuntos débilmente equicompactos extendiendo el concepto de conjunto *secuencialmente equicompacto* contenido en el teorema 1.1.8.

Una vez establecido este punto de partida, hay varias preguntas que surgen espontáneamente: ¿Son conceptos duales la débil-equicompacidad, entendida en estos términos, y la débil-compacidad colectiva? ¿Hay relaciones similares a las establecidas en el teorema 1.2.3 entre los conjuntos débil-compactos en $\mathcal{W}(X,Y)$ y los débil-equicompactos? La respuesta a estas preguntas es, en general, negativa y necesitaremos imponer condiciones adicionales para obtener teoremas similares a los del capítulo anterior. Incluso, en algunas ocasiones, los resultados obtenidos parecen ir contra nuestra "*intuición*". Un ejemplo: no siempre un conjunto dominado por una sucesión débil-nula es débil-equicompacto.

Estas "*anomalías*" en el comportamiento de los conjuntos débil-equicompactos, obligan a analizar en profundidad la propia noción de débil-equicompacidad. Entran en juego entonces, de forma natural, los espacios que no contienen copia de ℓ_1, los que poseen la propiedad Schur, de Dunford-Pettis, recíproca de D.P. etc, pero quizás, el hecho más destacado es el papel que juegan los espacios de Banach X tales que B_{X^*} es débil*-secuencialmente compacta. Finalmente, estudiamos las conexiones existentes entre los conjuntos uniformemente completamente continuos y los colectivamente débil-compactos.

2.1. Conjuntos débil-equicompactos

Definición 2.1.1. Un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ es *débil-equicompacto* si toda sucesión acotada $(x_n)_n \subset X$ posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge débilmente uniformemente en $T \in \mathrm{M}$.

Lema 2.1.2. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$*,* $(x_n)_n \subset X$ *y* $(Tx_n)_n$ *es débil-Cauchy uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$*, entonces* $(Tx_n)_n$ *converge débilmente uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$*.*

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata del lema A.1.3–(2). $\square$

Teorema 2.1.3. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$*. Son equivalentes:*

1.- M *es débil-equicompacto.*

2.- (a) *Toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(Tx_{k(n)})_n$ *converge débilmente para todo* $T \in \mathrm{M}$*.*

(b) M^*y^* *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$*.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $(x_n)_n \subset X$ está acotada, existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(\langle Tx_{k(n)}, y^*\rangle)_n$ converge uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ para todo $y^* \in Y^*$. Así pues, M^*y^* es equicompacto para todo $y^* \in Y^*$ y, por tanto, es relativamente compacto (corolario 1.2.4).

$2 \Rightarrow 1$

Si $(x_n)_n \subset X$ está acotada, existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge débilmente para todo $T \in \mathrm{M}$. En particular, fijados $\varepsilon > 0$ e $y^* \in Y^*$, existe, para cada $T \in \mathrm{M}$, un n_T tal que si $p, q \geq n_T$ entonces $|\langle Tx_{k(p)} - Tx_{k(q)}, y^*\rangle| < \varepsilon/2$.

Por (b), existen $T_1, \ldots, T_N \in \mathrm{M}$ tales que $\mathrm{M}^*y^* \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(T_i^*y^*; \varepsilon/4C)$ en donde $C = \sup_n \|x_n\|$. Si $T \in \mathrm{M}$, sea $j_T \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $\left\|T^*y^* - T_{j_T}^*y^*\right\| < \varepsilon/4C$. Finalmente, si $n_0 = \text{máx}\{n_{T_1}, \ldots, n_{T_N}\}$, $p, q \geq n_0$ y $T \in \mathrm{M}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle Tx_{k(p)} - Tx_{k(q)}, y^*\rangle| &\leq |\langle x_{k(p)} - x_{k(q)}, T^*y^* - T_{j_T}^*y^*\rangle| + |\langle x_{k(p)} - x_{k(q)}, T_{j_T}^*y^*\rangle| \\
&\leq \left\|x_{k(p)} - x_{k(q)}\right\| \left\|T^*y^* - T_{j_T}^*y^*\right\| + |\langle T_{j_T}x_{k(p)} - T_{j_T}x_{k(q)}, y^*\rangle| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

esto es, la convergencia débil de $(Tx_{k(n)})_n$ es uniforme en $T \in \mathrm{M}$. $\square$

Nota 2.1.4. Obsérvese que si $(Tx_{k(n)})_n$ converge para todo $T \in \mathrm{M}$ y M^*y^* es relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$ esto *no* implica, en el caso general, que $(Tx_{k(n)})_n$ converge uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. En efecto, si $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $(x_n)_n \subset X$ está acotada, se tiene que $(Tx_n)_n$ converge débilmente si y sólo si $(Tx_n)_n$ converge (lema A.1.3–(4)). Así, si $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$, para probar que M es *débil-equicompacto* es indiferente exigir convergencia débil o convergencia en norma en el enunciado de la condición 2.1.3 $2-(a)$. Sin embargo, probaremos que si Y tiene la propiedad de Schur, entonces el cumplimiento de las dos condiciones anteriores garantiza la equicompacidad de M (corolario 2.1.20). ◁

Lema 2.1.5. *Sean* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$, $(x_n)_n \subset X$ *e* $(y_n^*)_n \subset Y^*$. *Se cumple que:*

(1) *Si* $(x_n)_n$ *es débil-Cauchy y* M^*y^* *es uniformemente completamente continuo para todo* $y^* \in Y^*$, *entonces* $(Tx_n)_n$ *converge débilmente uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$.

(2) *Si* $(y_n^*)_n \xrightarrow{w^*} 0$ *y* $\mathrm{M}^{**}x^{**}$ *es relativamente compacto para todo* $x^{**} \in X^{**}$, *entonces* $(T^*y_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ *uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$.

DEMOSTRACIÓN: (1) Si $\varepsilon > 0$ e $y^* \in Y$, puesto que $(x_n - x_m)_{n,m} \xrightarrow{w} 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $|\langle x_n - x_m, T^*y^* \rangle| < \varepsilon$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Así pues, $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Basta ahora con aplicar el lema 2.1.2.

(2) Los operadores de M^* son débil*-débil continuos. Se sigue ahora igual que en la prueba del teorema 2.1.3 ($2 \Rightarrow 1$). □

Corolario 2.1.6. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *acotado. Si* $X \not\hookleftarrow \ell_1$, *son equivalentes:*

1.- M *es débil-equicompacto.*

2.- M^*y^* *es uniformemente completamente continuo para todo* $y^* \in Y^*$.

3.- *Si* $(x_n)_n \subset X$ *y* $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, *entonces* $(Tx_n) \xrightarrow{w} 0$ *uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $A \subset X^*$ es relativamente compacto, es equicompacto (corolario 1.2.4) y, por tanto, es uniformemente completamente continuo (teorema 1.3.3).

$3 \Rightarrow 1$ (el lema 2.1.5 prueba que $2 \Rightarrow 3$)

Si $(x_n)_n \subset X$ está acotada, puesto que $X \not\hookleftarrow \ell_1$, contiene una subsucesión (que seguiremos llamando igual) débil-Cauchy. Si $(Tx_n)_n$ no es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$, existen $\varepsilon_0 > 0$, $y^* \in Y^*$, $(T_n)_n \subset \mathrm{M}$ y $h, k \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crecientes tales que $|\langle T_n x_{h(n)} - T_n x_{k(n)}, y^* \rangle| > \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero esto es absurdo pues $(x_{h(n)} - x_{k(n)})_n \xrightarrow{w} 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \langle T_n x_{h(n)} - T_n x_{k(n)}, y^* \rangle = 0$. □

Corolario 2.1.7. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *acotado. Si* X^* *es separable y* $\mathrm{M}^* y^*$ *es uniformemente completamente continuo para todo* $y^* \in Y^*$*, entonces* M *es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X \hookleftarrow \ell_1$, entonces ℓ_∞ es isomorfo a un cociente de X^* y, por tanto, X^* no puede ser separable. □

Corolario 2.1.8. *Sea* $(T_n)_n \subset \mathcal{W}(X,Y)$*. Si* $\mathrm{M} \subseteq \overline{\{T_n : n \in \mathbb{N}\}}$ *y* $\mathrm{M}^* y^*$ *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$*, entonces* M *es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_n)_n \subset X$ acotada. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\phi_n \colon \mathcal{W}(X,Y) \longrightarrow Y$ por $\phi_n(T) = Tx_n$, el lema A.1.1 asegura la existencia de una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(T_m x_{k(n)})_n$ converge débilmente para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sean $\varepsilon > 0$, $y^* \in Y^*$, $T \in \mathrm{M}$ y $C = \sup_n \|x_n\|$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$, entonces $|\langle T_m x_{k(p)} - T_m x_{k(q)}, y^* \rangle| < \varepsilon/2$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para cada $T \in \mathrm{M}$, sea $m_T \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_{m_T}\| < \varepsilon/4C\,\|y^*\|$. Tomando $p, q \geq n_0$ y $T \in \mathrm{M}$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle Tx_{k(p)} - Tx_{k(q)}, y^* \rangle| &\leq |\langle Tx_{k(p)} - T_{m_T} x_{k(p)}, y^* \rangle| + |\langle T_{m_T} x_{k(p)} - T_{m_T} x_{k(q)}, y^* \rangle| \\ &\qquad + |\langle T_{m_T} x_{k(q)} - Tx_{k(q)}, y^* \rangle| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

es decir, $(Tx_{k(n)})_n$ es débil-Cauchy para todo $T \in \mathrm{M}$. □

Corolario 2.1.9. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *acotado. Si* $H = \bigcup_{T\in\mathrm{M}} T^*(B_{Y^*})$ *es separable y* $\mathrm{M}^* y^*$ *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$*, entonces* M *es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_n)_n \subset X$ acotada. Puesto que H es separable, razonando igual que en la demostración del corolario 2.1.8, se prueba que existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(h^*(x_{k(n)}))_n$ converge para todo $h^* \in H$. En otras palabras, $(\langle x_{k(n)}, T^* y^* \rangle)_n$ converge para todo $y^* \in B_{Y^*}$ y todo $T \in \mathrm{M}$. □

Una caracterización alternativa de la débil-equicompacidad

Los corolarios anteriores nos muestran que hay situaciones en las que basta la condición $2-(b)$ del teorema 2.1.3 para asegurar la débil-equicompacidad de M. Aunque en el caso general esta condición no es suficiente, el encontrar ejemplos de conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *no* débil-equicompactos pero tales que M^*y^* sea relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$ no es una labor trivial. Para abrir nuevas vías de aproximación a éste y otros problemas, ha resultado de utilidad el disponer de una caracterización alternativa para los conjuntos débil-equicompactos.

Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ acotado. Para cada $y^* \in Y^*$, se define el operador

$$\begin{array}{rcl} V_{y^*}\colon X & \longrightarrow & \ell_\infty(\mathrm{M}) \\ x & \longmapsto & V_{y^*}(x) = (\langle Tx, y^*\rangle)_{T\in\mathrm{M}} \end{array}$$

Definimos ahora $\widehat{\mathrm{M}} = \{V_{y^*} : y^* \in B_{Y^*}\}$. Obsérvese que para definir $\widehat{\mathrm{M}}$ no es necesario que los operadores de M sean débil-compactos y, además, siempre se tiene que $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{L}(X, \ell_\infty(\mathrm{M}))$.

Lema 2.1.10. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *acotado. Son equivalentes:*

1.- M^*y^* *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$*.*

2.- $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{K}(X, \ell_\infty(\mathrm{M}))$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \Leftrightarrow 2$

Consideramos, para cada $y^* \in Y^*$, los operadores:

$$\begin{array}{rccl} U_{y^*}\colon & \ell_1(\mathrm{M}) & \longrightarrow & X^* \\ & (\xi_T)_{T\in\mathrm{M}} & \longmapsto & U_{y^*}(\xi_T)_{T\in\mathrm{M}} = \displaystyle\sum_{T\in\mathrm{M}} \xi_T T^* y^* \\ \widehat{V}_{y^*}\colon & X^{**} & \longrightarrow & \ell_\infty(\mathrm{M}) \\ & x^{**} & \longmapsto & \widehat{V}_{y^*}(x^{**}) = (\langle T^{**}x^{**}, y^*\rangle)_{T\in\mathrm{M}} \end{array}$$

Puede probarse sin dificultad que $U_{y^*}^* = \widehat{V}_{y^*}$, $\widehat{V}_{y^*}|_X = V_{y^*}$, $\ell_1(\mathrm{M}) \hookrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M})^*$ y $V_{y^*}^*|_{\ell_1(\mathrm{M})} = U_{y^*}$. En resumidas cuentas, U_{y^*} es compacto si y sólo si V_{y^*} es compacto. Asimismo, se prueba sin dificultad que

$$\mathrm{M}^*y^* \subseteq U_{y^*}(B_{\ell_1(\mathrm{M})}) \subseteq \overline{\mathrm{aco}}(\mathrm{M}^*y^*)$$

esto es, U_{y^*} es compacto si y sólo si M^*y^* es relativamente compacto. $\square$

Teorema 2.1.11. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$. *Son equivalentes:*

1.- M *es débil-equicompacto.*

2.- *Toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(V_{y^*}(x_{k(n)}))_n$ *converge para todo* $y^* \in Y^*$.

3.- (*a*) *Toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(V_{y^*}(x_{k(n)}))_n$ *es débil*-convergente para todo* $y^* \in Y^*$.

(*b*) $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{K}(X, \ell_\infty(\mathrm{M}))$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $(x_n)_n \subset X$ está acotada, existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge débilmente uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $y^* \in Y^*$, existe $n_{y^*} \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_{y^*}$, entonces $|\langle Tx_{k(n)} - Tx_{k(m)}, y^*\rangle| < \varepsilon/2$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Así pues,

$$\left\|V_{y^*}(x_{k(n)}) - V_{y^*}(x_{k(m)})\right\| = \sup_{T\in\mathrm{M}} |\langle Tx_{k(n)} - Tx_{k(m)}, y^*\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

es decir, $(V_{y^*}(x_{k(n)}))_n$ converge para todo $y^* \in Y^*$.

$3 \Rightarrow 1$ (es evidente que $2 \Rightarrow 3$)

Si $(x_n)_n \subset X$ está acotada, posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(V_{y^*}(x_{k(n)}))_n$ es débil*-convergente para todo $y^* \in Y^*$. En consecuencia, para cada $y^* \in Y^*$, existe $(\gamma_T^{y^*})_{T\in\mathrm{M}} \in \ell_\infty(\mathrm{M})$ tal que $((\langle Tx_{k(n)}, y^*\rangle)_{T\in\mathrm{M}})_n \overset{w^*}{\to} (\gamma_T^{y^*})_{T\in\mathrm{M}}$. Pero esto significa que, para todo $y^* \in Y^*$ y todo $T \in \mathrm{M}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\langle Tx_{k(n)}, y^*\rangle = \gamma_T^{y^*}$ (lema A.1.14). En otras palabras: $(Tx_{k(n)})_n$ es débil-Cauchy para todo $T \in \mathrm{M}$ lo cual, junto con el lema 2.1.10, prueba que M es débil-equicompacto. □

Corolario 2.1.12. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *acotado. Si* Y^* *es separable y* M^*y^* *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$, *entonces* M *es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $\phi\colon Y^* \longrightarrow \mathcal{K}(X, \ell_\infty(\mathrm{M}))$ definida para cada $y^* \in Y^*$ por $\phi(y^*) = V_{y^*}$ es lineal y acotada. Si $B_{Y^*} \subseteq \overline{\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$, se tiene que

$$\widehat{\mathrm{M}} = \phi(B_{Y^*}) \subseteq \phi\left(\overline{\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}\right) \subseteq \overline{\{\phi(y_n^*) : n \in \mathbb{N}\}}$$

es decir, $\widehat{\mathrm{M}}$ es separable. Un argumento estándar de diagonalización, similar al empleado en la prueba del corolario 2.1.8, completa la demostración. □

Nota 2.1.13. Si $B_{X^{**}}$ es débil*-secuencialmente compacta, la condición 2.1.11 $3-(a)$ muestra que, para asegurar la débil-equicompacidad de M, basta con que $\mathrm{M}^* y^*$ sea relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$. Desde luego, tal cosa puede suceder sin que $B_{X^{**}}$ sea débil*-secuencialmente compacta y, además, tampoco en este caso estamos realmente ante una situación nueva. Más bien, lo que el teorema 2.1.11 sugiere, es la conveniencia de prestar atención a la topología débil* cuando ello tenga sentido. $\triangleleft$

Ejemplo 2.1.14. Consideremos, para cada $s \in \mathbb{R}$, el operador:

$$\begin{array}{rcl} T_s \colon \ell_\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & c_0(\mathbb{R}) \\ (x_r)_{r\in\mathbb{R}} & \longmapsto & T_s(x_r)_{r\in\mathbb{R}} = (\delta_r^s x_r)_{r\in\mathbb{R}} \end{array}$$

Si definimos ahora $\mathrm{M} = \{T_s : s \in \mathbb{R}\}$, se comprueba fácilmente que $\|T_s\| = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y que $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(\ell_\infty(\mathbb{R}), c_0(\mathbb{R}))$.

M no es débil-equicompacto. En efecto, si M es débil-equicompacto, entonces cualquier sucesión $(\widehat{x}_n)_n \subset B_{\ell_\infty(\mathbb{R})}$ posee una subsucesión $(\widehat{x}_{k(n)})_n$ tal que $(T_s\widehat{x}_{k(n)})_n$ converge para todo $s \in \mathbb{R}$ y puesto que

$$\left\|T_s\widehat{x}_{k(n)} - T_s\widehat{x}_{k(m)}\right\| = \left\|(\delta_r^s(x_r^{k(n)} - x_r^{k(m)}))_{r\in\mathbb{R}}\right\| = |x_s^{k(n)} - x_s^{k(m)}|$$

se sigue que $(T_s\widehat{x}_{k(n)})_n$ converge si y sólo si $(x_s^{k(n)})_n$ converge. Sea pues, para cada $s \in \mathbb{R}$, $x_s = \lim_{n\to\infty} x_s^{k(n)}$. Si hacemos $\widehat{x} = (x_s)_{s\in\mathbb{R}}$, es claro que $\widehat{x} \in B_{\ell_\infty(\mathbb{R})}$ y, además, el lema A.1.14 asegura que $(\widehat{x}_{k(n)})_n \xrightarrow{w^*} \widehat{x}$. Pero esto es absurdo pues $B_{\ell_\infty(\mathbb{R})}$ *no* es débil*-secuencialmente compacta [34, pág. 226].

Para probar que $\mathrm{M}^*\widehat{\alpha}$ es relativamente compacto para todo $\widehat{\alpha} \in \ell_1(\mathbb{R})$, basta con probar que $\widehat{\mathrm{M}} \subset \mathcal{K}(\ell_\infty(\mathbb{R}), \ell_\infty(\mathbb{R}))$ (lema 2.1.10). Si $\widehat{\alpha} = (\alpha_r)_{r\in\mathbb{R}} \in B_{\ell_1(\mathbb{R})}$ y $\widehat{x} = (x_r)_{r\in\mathbb{R}} \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, se tiene que

$$V_{\widehat{\alpha}}\widehat{x} = (\langle T_s\widehat{x}, \widehat{\alpha}\rangle)_{s\in\mathbb{R}} = (\langle(\delta_r^s x_r)_{r\in\mathbb{R}}, (\alpha_r)_{r\in\mathbb{R}}\rangle)_{s\in\mathbb{R}} = (\alpha_s x_s)_{s\in\mathbb{R}}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $J_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ finito tal que $\sum_{r\notin J_\varepsilon} |\alpha_r| < \varepsilon$. En particular, se tiene que $|\alpha_r| < \varepsilon$ para todo $r \notin J_\varepsilon$. Si definimos

$$H_\varepsilon = \left\{ \left(\chi_{J_\varepsilon}(r)\alpha_r x_r\right)_{r\in\mathbb{R}} \,:\, (x_r)_{r\in\mathbb{R}} \in B_{\ell_\infty(\mathbb{R})} \right\}$$

entonces H_ε es relativamente compacto pues está contenido en la bola unidad de un subespacio de $\ell_\infty(\mathbb{R})$ de dimensión finita. Finalmente, es claro que

$$V_{\widehat{\alpha}}(B_{\ell_\infty(\mathbb{R})}) \subseteq H_\varepsilon + \varepsilon B_{\ell_\infty(\mathbb{R})}$$

esto es, $V_{\widehat{\alpha}}(B_{\ell_\infty(\mathbb{R})})$ es relativamente compacto. $\triangleleft$

A la vista de la nota 2.1.13, no resulta sorprendente que, en el ejemplo 2.1.14, el hecho de que $B_{\ell_\infty(\mathbb{R})}$ *no* sea débil*-secuencialmente compacta haya jugado un papel decisivo. Además, conviene señalar que los operadores que aparecen en dicho ejemplo son débil*-débil continuos. El próximo teorema pone de manifiesto que ambas circunstancias son algo más que simples coincidencias.

Teorema 2.1.15. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}_*(X^*, Y)$ se cumple que si $\mathrm{M}^* y^*$ es relativamente compacto para cada $y^* \in Y^*$, entonces M es débil-equicompacto.*

2.- *Para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}_*(X^*, c_0(B_X))$ se cumple que si $\mathrm{M}^* \widehat{\alpha}$ es relativamente compacto para todo $\widehat{\alpha} \in \ell_1(B_X)$, entonces M es débil-equicompacto.*

3.- *B_{X^*} es débil*-secuencialmente compacta.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Definimos, para cada $s \in B_X$, el operador:

$$\begin{aligned} T_s \colon X^* &\longrightarrow c_0(B_X) \\ x^* &\longmapsto T_s x^* = (\delta_x^s \langle x, x^* \rangle)_{x \in B_X} \end{aligned}$$

Consideremos ahora el conjunto $\mathrm{M} = \{T_s : s \in B_X\}$. Es claro que $\|T_s\| = 1$ para todo $s \in B_X$ y que $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X^*, c_0(B_X))$. Por otro lado, si $\varepsilon > 0$ y $\widehat{\alpha} \in B_{\ell_1(B_X)}$, es inmediato comprobar que $T_s(W(0; s, \varepsilon)) \subseteq W(0; \widehat{\alpha}, \varepsilon)$ para todo $s \in B_X$, es decir, $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}_*(X^*, c_0(B_X))$.

Si B_{X^*} no es débil*-secuencialmente compacta, razonando como en el ejemplo 2.1.14, resulta fácil obtener una contradicción probando que M no es débil-equicompacto mientras que $\mathrm{M}^* \widehat{\alpha}$ es relativamente compacto para todo $\widehat{\alpha} \in \ell_1(B_X)$.

$3 \Rightarrow 1$

Si $(x_n^*)_x \subset B_{X^*}$, existen $(x_{k(n)}^*)_n$ y $x^* \in B_{X^*}$ tales que $(x_{k(n)}^*)_n \xrightarrow{w^*} x^*$ y puesto que $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}_*(X^*, Y)$, se tiene que $(T x_{k(n)}^*)_n \xrightarrow{w} T x^*$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Dado que $\mathrm{M}^* y^*$ es relativamente compacto para cada $y^* \in Y^*$, razonando igual que en la demostración del teorema 2.1.3, se prueba que $(T x_{k(n)}^*)_n \xrightarrow{w} T x^*$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. □

Corolario 2.1.16. *Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$, B_{Y^*} es débil*-secuencialmente compacta y $\mathrm{M}^{**} x^{**}$ es limitado para todo $x^{**} \in X^{**}$, entonces M^* es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si B_{Y^*} es débil*-secuencialmente compacta, el teorema 1.1.9 prueba que todo conjunto limitado en Y es relativamente compacto. $\square$

El hecho de que $\sigma(X^{**}, X^*)|_X = \sigma(X, X^*)$, sugiere que podemos repetir la prueba del teorema 2.1.15 usando el espacio X^{**} pero tomando la restricción al espacio X de los correspondientes operadores. Procediendo de este modo, hemos obtenido el recíproco del corolario 2.1.6.

Teorema 2.1.17. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ se cumple que si $\mathrm{M}^* y^*$ es relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$, entonces M es débil-equicompacto.*

2.- *Para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, c_0(B_{X^*}))$ se cumple que si $\mathrm{M}^* \widehat{\alpha}$ es relativamente compacto para todo $\widehat{\alpha} \in \ell_1(B_{X^*})$, entonces M es débil-equicompacto.*

3.- $X \not\hookrightarrow \ell_1$.

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar que $2 \Rightarrow 3$

Para cada $s^* \in B_{X^*}$, se define el operador:

$$\begin{aligned} T_{s^*} : X &\longrightarrow c_0(B_{X^*}) \\ x &\longmapsto T_{s^*} x = (\delta_{x^*}^{s^*} \langle x, x^* \rangle)_{x^* \in B_{X^*}} \end{aligned}$$

Si $\mathrm{M} = \{T_{s^*} : s^* \in B_{X^*}\}$, es claro que $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, c_0(B_{X^*}))$ y que $\|T_{s^*}\| = 1$ para todo $s^* \in B_{X^*}$. Razonando igual que en el ejemplo 2.1.14, es fácil probar que $\mathrm{M}^* \widehat{\alpha}$ es relativamente compacto para todo $\widehat{\alpha} \in \ell_1(B_{X^*})$. Así pues, si $(x_n)_n \subset B_X$, existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(T_{s^*} x_{k(n)})_n$ converge para todo $s^* \in B_{X^*}$. Pero $\left\|T_{s^*} x_{k(n)} - T_{s^*} x_{k(m)}\right\| = |\langle x_{k(n)} - x_{k(m)}, s^* \rangle|$, es decir, $(T_{s^*} x_{k(n)})_n$ converge para todo $s^* \in B_{X^*}$ si y sólo si $(x_{k(n)})_n$ es débil-Cauchy. $\square$

Débil-equicompacidad y equicompacidad

Lema 2.1.18. *Sean $(x_n^*)_n \subset X^*$, $(y_n)_n \subset Y$ y $\mathrm{M} = \{x_n^* \otimes y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se cumple:*

(1) *Si $(x_n^*)_n$ está acotada e $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$, M es débil-equicompacto.*

(2) *Si $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ e $(y_n)_n$ está acotada, M^* es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Sólo hay que probar que $\{\langle y_n, y^*\rangle x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto para cada $y^* \in Y^*$ (corolario 2.1.8). Pero al ser $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$, se sigue inmediatamente que $\lim_{n\to\infty} \|\langle y_n, y^*\rangle x_n^*\| = 0$. La prueba de (2) es análoga. $\square$

Teorema 2.1.19. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach X y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ se cumple que si M es débil-equicompacto, entonces M es equicompacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach X tal que X tiene dimensión infinita y para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ se cumple que si M es débil-equicompacto, entonces M es equicompacto.*

3.- *Y posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Si Y no posee la propiedad de Schur, podemos encontrar $(y_n)_n \subset S_Y$ tal que $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Puesto que X tiene dimensión infinita, existe $(x_n^*)_n \subset S_{X^*}$ tal que el conjunto $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ no es relativamente compacto. Si $\mathrm{M} = \{x_n^* \otimes y_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces M es débil-equicompacto (lema 2.1.18) y, en consecuencia, M es equicompacto. Pero esto es absurdo pues $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} y_n \otimes x_n^*(B_{Y^*})$ lo cual, implica que M^* no puede ser colectivamente compacto.

$3 \Rightarrow 1$

Sea X un espacio de Banach arbitrario y $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ débil-equicompacto. Si $(x_n)_n \subset X$ está acotada, existen $(x_{k(n)})_n$ y un cierto y_T para cada $T \in \mathrm{M}$, tales que $(Tx_{k(n)})_n \xrightarrow{w} y_T$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Al ser Y de Schur, $\lim_{n\to\infty} Tx_{k(n)} = y_T$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Si la anterior convergencia no es uniforme en $T \in \mathrm{M}$, existen $\varepsilon_0 > 0$, $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M}$ y $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow k(\mathbb{N})$ creciente tales que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|T_n x_{h(n)} - y_{T_n}\right\| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Por otro lado, $(T_n x_{h(n)} - y_{T_n})_n \xrightarrow{w} 0$ pues $(Tx_{h(n)})_n \xrightarrow{w} y_T$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ y como Y posee la propiedad de Schur, $\lim_{n\to\infty} T_n x_{h(n)} - y_{T_n} = 0$ lo cual, está en contradicción con $(*)$. $\square$

Corolario 2.1.20. *Si el espacio Y posee la propiedad de Schur y $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$, entonces son equivalentes:*

1.- M *es equicompacto.*

2.- (*a*) *Toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(Tx_{k(n)})_n$ *converge para todo* $T \in \mathrm{M}$.

(*b*) $\mathrm{M}^* y^*$ *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del lema A.1.3–(4) y del teorema 2.1.19. □

Nota 2.1.21. Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$, M^* es débil-equicompacto y X^* posee la propiedad de Schur, el teorema 2.1.19 prueba que M^* es equicompacto. Es natural preguntarse si se cumple el recíproco. Veremos más adelante que la respuesta, con alguna limitación, es afirmativa (corolario 2.3.11). ◁

Conjuntos dominados por una sucesión débil-nula

Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y existe $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$, entonces $T \in \mathcal{W}(X,Y)$ (lema A.1.10). Tiene pues sentido, el estudio de los conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ dominados por una sucesión débil-nula.

Si un conjunto es débil-equicompacto, no está necesariamente dominado por una sucesión débil-nula. Más aún, a pesar de la semejanza formal entre los conjuntos dominados por una sucesión débil-nula y los equicompactos, tampoco es cierto que, en el caso general, todo conjunto dominado por una sucesión débil-nula sea débil-equicompacto. El siguiente teorema viene a zanjar esta cuestión.

Teorema 2.1.22. *Sea* X *un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach* Y *y todo* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *se cumple que si* M *está dominado por una sucesión débil-nula, entonces* M *es débil-equicompacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach* Y *tal que para todo* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ *se cumple que si* M *está dominado por una sucesión débil-nula, entonces* M *es débil-equicompacto.*

3.- X^* *posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Sean $A \subset X^*$ y $(x_n^*)_n \subset X^*$ con $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ tales que $|x^*(x)| \le \sup_n |\langle x, x_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in A$. Si $y_0 \in S_Y$ y $\mathrm{M} = \{x^* \otimes y_0 : x^* \in A\}$, se tiene que

$$\|x^* \otimes y_0(x)\| = \|\langle x, x^* \rangle y_0\| = |x^*(x)| \le \sup_n |\langle x, x_n^* \rangle|$$

para todo $x \in X$ y todo $x^* \in A$, esto es, M está dominado por $(x_n^*)_n$ y, por tanto, es débil-equicompacto. Si $(x_n)_n \subset X$ está acotada, existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(\langle x_{k(n)}, x^* \rangle y_0)_n$ converge débilmente uniformemente en $x^* \in A$. Se sigue inmediatamente que $(x^*(x_{k(n)}))_n$ converge uniformemente en $x^* \in A$, esto es, A es equicompacto es decir, relativamente compacto (corolario 1.2.4). Resumiendo: si $A \subset X^*$ está dominado por una sucesión débil nula, es relativamente compacto.

Si X^* no posee la propiedad de Schur, existirá una sucesión $(x_n^*)_n \subset S_{X^*}$ tal que $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$. Dado que el conjunto $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ está obviamente dominado por $(x_n^*)_n$, es relativamente compacto. Pero esto es absurdo pues ninguna subsucesión de $(x_n^*)_n$ puede ser convergente en norma.

$3 \Rightarrow 1$

Sea Y un espacio de Banach arbitrario y sean $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ y $(a_n^*)_n$ tales que $(a_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y $\|Tx\| \le \sup_n |\langle x, a_n^* \rangle|$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Al ser X^* de Schur, se tiene que $(a_n^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ y, entonces, M es equicompacto. En particular, M es débil-equicompacto. $\square$

2.2. Conjuntos colectivamente débil-compactos

El operador $U : \ell_1(\mathrm{M}, X) \longrightarrow Y$, definido por $U\xi = \sum_{T \in \mathrm{M}} T(\xi(T))$ para todo $\xi \in \ell_1(\mathrm{M}, X)$, ya fue usado en el capítulo anterior para caracterizar los conjuntos colectivamente compactos. Resulta agradable comprobar que sirve igualmente en el contexto de los conjuntos colectivamente débil-compactos.

Teorema 2.2.1. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *acotado. Son equivalentes:*

1.- U *es débil-compacto.*

2.- M *es colectivamente débil-compacto.*

3.- M^{**} *es colectivamente débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Para probar 1 $\Leftrightarrow$ 2, podemos fácilmente adaptar la demostración del teorema 1.1.11 y para probar 2 $\Leftrightarrow$ 3, hacemos lo propio con la proposición 1.1.5. $\square$

Lema 2.2.2. *Sean $A \subset X^*$ acotado y $K \subset Y$. Definimos $\mathrm{M} = A \otimes K$, esto es, $\mathrm{M} = \{x^* \otimes y : x^* \in A,\ y \in K\}$. Son equivalentes:*

1.- M *es colectivamente débil-compacto.*

2.- K *es relativamente débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba es prácticamente igual que la del lema 1.3.8. $\square$

Si M es colectivamente débil-compacto y el espacio Y posee la propiedad de Schur, entonces M es colectivamente compacto. En el próximo teorema, se establece que éste es el único caso en el que se da esta implicación.

Teorema 2.2.3. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach X y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ se cumple que si M es colectivamente débil-compacto, entonces M es colectivamente compacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach X tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ se cumple que si M es colectivamente débil-compacto, entonces M es colectivamente compacto.*

3.- *Y posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo queda por probar que 2 $\Rightarrow$ 3

Si Y no posee la propiedad de Schur, existe $(y_n)_n \subset S_Y$ tal que $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Elijamos $x_0^* \in S_{X^*}$ y consideremos el conjunto $\mathrm{M} = \{x_0^* \otimes y_n : n \in \mathbb{N}\}$. El lema 2.2.2 asegura que M es colectivamente débil-compacto y, por tanto, es colectivamente compacto. Pero $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\bigcup_{T\in \mathrm{M}} T(B_X)}$ lo cual es absurdo pues $(y_n)_n$ no puede poseer ninguna subsucesión que sea convergente en norma. $\square$

Nota 2.2.4. Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$, M^* es colectivamente débil-compacto y X^* posee la propiedad de Schur, es claro que M^* es colectivamente compacto. Es natural preguntarse si se cumple el recíproco. Veremos más adelante que la respuesta es afirmativa (corolario 2.3.5). $\lhd$

Ejemplo 2.2.5. Sea Y un espacio de Banach infinito-dimensional reflexivo y X un espacio de Banach arbitrario. Sean $x_0 \in S_X$ y $x_0^* \in S_{X^*}$ tales que $\langle x_0, x_0^* \rangle = 1$. Consideremos el conjunto de operadores $\mathrm{M} = x_0^* \otimes B_Y$. Como Y es reflexivo, B_Y es débil-compacta y, entonces, M es colectivamente débil-compacto (lema 2.2.2). Pero $\mathrm{M}^{**}x_0 = B_Y$ que no es relativamente compacto al ser Y de dimensión infinita. En consecuencia, M^* no puede ser débil-equicompacto. Análogamente, podemos usar el lema 2.1.18 para encontrar espacios X e Y y conjuntos $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ tales que M es débil-equicompacto pero M^* no es colectivamente débil-compacto. $\triangleleft$

Los ejemplos anteriores muestran que, en el caso general, la débil-compacidad colectiva y la débil-equicompacidad no son conceptos duales. Así pues, no podemos esperar que para el operador $V\colon X \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M}, Y)$ definido por $Vx(T) = Tx$ para todo $x \in X$ y todo $T \in \mathrm{M}$, se cumpla un resultado tan fuerte como el establecido en el teorema 2.2.1 para el operador U. De todas formas, la débil-compacidad de V tiene consecuencias significativas.

Teorema 2.2.6. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ *acotado. Son equivalentes:*

1.- V *es débil-compacto.*

2.- M^* *es colectivamente débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Leftrightarrow 2$

No resulta difícil probar que $\ell_1(\mathrm{M}^*, Y^*) \hookrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M}, Y)^*$. Ahora, un razonamiento similar al empleado en la nota 1.1.12 junto con el teorema 2.2.1, demuestra que M^* es colectivamente débil-compacto. En el otro sentido la prueba es análoga. $\square$

Corolario 2.2.7. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ *está dominado por una sucesión débil-nula, entonces* M^* *es colectivamente débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Usando un razonamiento similar al empleado la demostración del teorema 1.1.8, resulta fácil probar que V es débil-compacto. $\square$

Proposición 2.2.8. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ *acotado. Si el operador* V *es débil-compacto, de toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *podemos extraer una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(Tx_{k(n)})_n$ *converge débilmente para todo* $T \in \mathrm{M}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_n)_n \subset X$ una sucesión acotada. Al ser V débil-compacto, existen una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ y $g \in \ell_\infty(\mathrm{M}, Y)$ tales que $(Vx_{k(n)})_n \xrightarrow{w} g$, esto es, $\lim_{n\to\infty}\langle Vx_{k(n)}, F\rangle = \langle g, F\rangle$ para todo $F \in \ell_\infty(\mathrm{M}, Y)^*$. Si definimos

$$\begin{array}{rcccl} F_{T,y^*}\colon & \ell_\infty(\mathrm{M}, Y) & \longrightarrow & \mathbb{K} & \\ & f & \longmapsto & F_{T,y^*}(f) & = \langle f(T), y^*\rangle \end{array}$$

es claro que $F_{T,y^*} \in \ell_\infty(\mathrm{M}, Y)^*$ para todo $y^* \in Y^*$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle g(T), y^*\rangle &= \langle g, F_{T,y^*}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Vx_{k(n)}, F_{T,y^*}\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle Vx_{k(n)}(T), y^*\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tx_{k(n)}, y^*\rangle \end{aligned}$$

es decir, $(Tx_{k(n)})_n \xrightarrow{w} g(T)$ para todo $T \in \mathrm{M}$. □

Corolario 2.2.9. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ *es colectivamente débil-compacto, de toda sucesión acotada* $(y_n^*)_n \subset Y^*$ *podemos extraer una subsucesión* $(y_{k(n)}^*)_n$ *tal que* $(T^* y_{k(n)}^*)_n$ *converge débilmente para todo* $T \in \mathrm{M}$.

DEMOSTRACIÓN: El operador $\widehat{V}\colon Y^* \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M}, X^*)$ definido para cada $y^* \in Y^*$ y cada $T \in \mathrm{M}$ por $\widehat{V}y^*(T) = T^*y^*$ es el adjunto del operador U (nota 1.1.12). Basta ahora con aplicar el teorema 2.2.1 y la proposición 2.2.8. □

2.3. Dualidades (I)

En la investigación de las relaciones de dualidad entre los conjuntos débil-equicompactos y los colectivamente débil-compactos, no podemos esperar resultados tan fuertes como los obtenidos en la proposición 1.1.2 y el teorema 1.1.6. Parece pues más conveniente separar los casos e investigar, en cada caso, condiciones adicionales que aseguren dichas dualidades. Empezaremos por introducir cierta terminología.

Definición 2.3.1. $\mathcal{W}(X, Y)$ $[\mathcal{K}(X, Y)]$ es $\mathfrak{D}i$*-admisible* ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) si para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ $[\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)]$ se cumple la correspondiente dualidad:

$\mathfrak{D}1$ - Si M es débil-equicompacto, entonces M^* es colectivamente débil-compacto.

$\mathfrak{D}2$ - Si M^* es colectivamente débil-compacto, entonces M es débil-equicompacto.

$\mathfrak{D}3$ - Si M es colectivamente débil-compacto, entonces M^* es débil-equicompacto.

$\mathfrak{D}4$ - Si M^* es débil-equicompacto, entonces M es colectivamente débil-compacto.

Dualidad $\mathfrak{D}1$ $\boxed{\text{M } \textbf{d.e.c.} \Rightarrow \text{M}^* \textbf{ c.d.c.}}$

Si X es reflexivo, X^* también es reflexivo y la dualidad $\mathfrak{D}1$ no tiene interés pues entonces, M^* es colectivamente débil-compacto si y sólo si M está acotado.

Teorema 2.3.2. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{W}(X,Y)$ *es* $\mathfrak{D}1$*-admisible para cualquier espacio de Banach* X*.*

2.- $\mathcal{K}(X,Y)$ *es* $\mathfrak{D}1$*-admisible para algún espacio de Banach* X *no reflexivo.*

3.- Y *posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Sea X un espacio de Banach no reflexivo tal que $\mathcal{K}(X,Y)$ es $\mathfrak{D}1$-admisible. Como X^* no es reflexivo, existe $(x_n^*)_n \subset S_{X^*}$ tal que $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ no es débil-compacto. Si Y no posee la propiedad de Schur, existirá $(y_n)_n \subset S_Y$ con $(y_n)_n \overset{w}{\to} 0$. Si consideramos ahora $\mathrm{M} = \{x_n^* \otimes y_n : n \in \mathbb{N}\}$, el lema 2.1.18 asegura que M es débil-equicompacto mientras que el lema 2.2.2, asegura que M^* no es colectivamente débil-compacto.

$3 \Rightarrow 1$

Basta con aplicar el teorema 2.1.19 y la proposición 1.1.2. □

Dualidad $\mathfrak{D}2$ $\boxed{\text{M}^* \textbf{ c.d.c} \Rightarrow \text{M } \textbf{d.e.c.}}$

Proposición 2.3.3. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$*,* M^* *es colectivamente débil-compacto y* M^*y^* *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$*,* M *es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Basta con aplicar el teorema 2.1.3 y el corolario 2.2.9. □

Teorema 2.3.4. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{W}(X,Y)$ *es* $\mathfrak{D}2$*-admisible para todo espacio de Banach* Y*.*

2.- $\mathcal{K}(X,Y)$ *es* $\mathfrak{D}2$*-admisible para algún espacio de Banach* Y*.*

3.- X^* *posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ está dominado por una sucesión débil-nula, entonces M^* es colectivamente débil-compacto (corolario 2.2.7) y, por lo tanto, M es débil-equicompacto. En consecuencia, X^* posee la propiedad de Schur (teorema 2.1.22).

$3 \Rightarrow 1$

Se sigue inmediatamente de la proposición 2.3.3. □

Corolario 2.3.5. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ se cumple que si M^* es colectivamente débil-compacto, entonces M^* es colectivamente compacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach Y tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ se cumple que si M^* es colectivamente débil-compacto, entonces M^* es colectivamente compacto.*

3.- *X^* posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$ y que $3 \Rightarrow 1$)

Es una consecuencia de la proposición 1.1.2 y del teorema 2.3.4 □

Dualidad $\mathfrak{D}3$ $\boxed{\mathrm{M}\ \textbf{c.d.c.} \Rightarrow \mathrm{M}^*\ \textbf{d.e.c.}}$

Proposición 2.3.6. *Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ es colectivamente débil-compacto y $\mathrm{M}^{**}x^{**}$ es relativamente compacto para todo $x^{**} \in X^{**}$, M^* es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Basta con aplicar el teorema 2.1.3 y el corolario 2.2.9. □

Lema 2.3.7. *Si $\mathcal{W}(X,Y)$ $[\mathcal{K}(X,Y)]$ es $\mathfrak{D}3$-admisible y F es un subespacio cerrado de Y, entonces $\mathcal{W}(X,F)$ $[\mathcal{K}(X,F)]$ es $\mathfrak{D}3$-admisible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\psi\colon F^* \longrightarrow Y^*/F^\perp$ la isometría definida por $\psi(f) = [\phi]$, donde $\phi \in Y^*$ es una extensión de Hahn-Banach de f. Si $i\colon F \longrightarrow Y$ es la inyección canónica de F en Y, entonces $(i \circ T)^*\phi = T^*f$ para todo $T \in \mathcal{L}(X,F)$.

Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,F)$ es colectivamente débil-compacto, es inmediato comprobar que el conjunto $\mathrm{M}_0 = \{i \circ T : T \in \mathrm{M}\} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ también es colectivamente débil-compacto. Dado que $\mathcal{W}(X,Y)$ es $\mathfrak{D}3$-admisible, M_0^* es débil-equicompacto.

Consideremos ahora una sucesión acotada $(f_n)_n \subset F^*$ y sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $[\phi_n] = \psi(f_n)$. La sucesión $(\phi_n)_n$ está acotada en Y^* y, por lo tanto, contiene una subsucesión $(\phi_{k(n)})_n$ de modo que $((i \circ T)^* \phi_{k(n)})_n$ converge débilmente uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Pero $((i \circ T)^* \phi_{k(n)})_n = (T^* f_{k(n)})_n$. □

Lema 2.3.8. *Sea Y un espacio de Banach tal que $\mathcal{K}(X, Y)$ es $\mathfrak{D}3$-admisible para algún espacio de Banach X. Entonces, todo conjunto relativamente débil-compacto en Y es limitado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subset Y$ un conjunto relativamente débil-compacto. Elijamos $x_0 \in S_X$ y $x_0^* \in S_{X^*}$ tales que $\langle x_0, x_0^* \rangle = 1$. Consideremos $\mathrm{M} = x_0^* \otimes K$. El conjunto M es colectivamente débil-compacto (lema 2.2.2) y, por tanto, M^* es débil-equicompacto. Si $(y_n^*)_n \subset Y^*$ e $(y_n^*)_n \xrightarrow{w^*} 0$, entonces $(\langle y, y_n^* \rangle x_0^*)_n \xrightarrow{w} 0$ uniformemente en $y \in K$ (lema 2.1.5). En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \langle y, y_n^* \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y, y_n^* \rangle \langle x_0, x_0^* \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_0, \langle y, y_n^* \rangle x_0^* \rangle = 0$$

uniformemente en $y \in K$. En otras palabras: K es limitado. □

Teorema 2.3.9. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *$\mathcal{W}(X, Y)$ es $\mathfrak{D}3$-admisible para todo espacio de Banach X.*

2.- *$\mathcal{K}(X, Y)$ es $\mathfrak{D}3$-admisible para algún espacio de Banach X.*

3.- *Y posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Si Y no posee la propiedad de Schur, existe $(y_n)_n \subset S_Y$ tal que $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Usando el principio de selección de Bessaga-Pelczynski, podemos extraer una subsucesión básica (que seguiremos llamando $(y_n)_n$).

Consideremos ahora el subespacio $F = \overline{\mathrm{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si la sucesión $(y_n^*)_n$ es la bi-ortogonal de la sucesión básica $(y_n)_n$, se tiene que $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n^* \rangle y_n$ para todo $y \in F$. Como $\mathcal{K}(X, F)$ es $\mathfrak{D}3$-admisible (lema 2.3.7) y $K = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F$ es relativamente débil-compacto, K es limitado (lema 2.3.8). Por otro lado, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \langle y, y_n^* \rangle = 0$ para todo $y \in F$ pues $\lim_{n\to\infty} \|\langle y, y_n^* \rangle y_n\| = 0$. Así pues, $(y_n^*)_n \xrightarrow{w^*} 0$ y como K es limitado, $\lim_{n\to\infty} \langle y_m, y_n^* \rangle = 0$ uniformemente en $m \in \mathbb{N}$. Pero esto es absurdo pues $\langle y_m, y_n^* \rangle = \delta_n^m$.

$3 \Rightarrow 1$

Basta con aplicar los teoremas 2.2.3 y 1.1.6. $\square$

Dualidad $\mathfrak{D}4$ $\boxed{\mathrm{M}^* \textbf{ d.e.c.} \Rightarrow \mathrm{M} \textbf{ c.d.c.}}$

Las consideraciones que procede hacer en este caso sobre la reflexividad son análogas a las realizadas para la dualidad $\mathfrak{D}1$.

Teorema 2.3.10. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{W}(X, Y)$ *es $\mathfrak{D}4$-admisible para todo espacio de Banach Y.*

2.- $\mathcal{K}(X, Y)$ *es $\mathfrak{D}4$-admisible para algún espacio de Banach Y no reflexivo.*

3.- X^* *posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Supongamos que Y es no reflexivo, $\mathcal{K}(X, Y)$ es $\mathfrak{D}4$-admisible y X^* no posee la propiedad de Schur. Existirán entonces $(x_n^*)_n \subset S_{X^*}$ tal que $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ e $(y_n)_n \subset S_Y$ tal que su rango $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ no sea débil-compacto. Si definimos entonces el conjunto $\mathrm{M} = \{x_n^* \otimes y_n : n \in \mathbb{N}\}$, el lema 2.1.18 asegura que M^* es débil-equicompacto mientras que el lema 2.2.2, asegura que M no es colectivamente débil-compacto.

$3 \Rightarrow 1$

Basta con aplicar los teoremas 2.1.19 y 1.1.6. $\square$

Corolario 2.3.11. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ se cumple que si M^* es débil-equicompacto, entonces M^* es equicompacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach Y no reflexivo tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ se cumple que si M^* es débil-equicompacto, entonces M^* es equicompacto.*

3.- X^* *posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$ y que $3 \Rightarrow 1$)

Es una consecuencia inmediata de los teoremas 1.1.6 y 2.3.10. $\square$

2.4. Dualidades (II)

El estudio realizado en la sección 2.3 muestra que para obtener un enunciado equivalente al teorema 1.1.6, debemos exigir que X^* e Y posean la propiedad de Schur. Nos planteamos ahora, investigar otro tipo de dualidades para las cuales estas exigencias puedan ser rebajadas.

Definición 2.4.1. Sea E uno de los espacios $\mathcal{W}(X,Y)$, $\mathcal{V}(X,Y)$ o $\mathcal{K}(X,Y)$. El espacio E es $\mathfrak{C}i$-*admisible* ($i \in \{1,2,3,4\}$) si, para todo $\mathrm{M} \subset E$, se cumple la correspondiente dualidad:

$\mathfrak{C}1$ - Si M es uniformemente completamente continuo, entonces M^* es colectivamente débil-compacto.

$\mathfrak{C}2$ - Si M^* es colectivamente débil-compacto, entonces M es uniformemente completamente continuo.

$\mathfrak{C}3$ - Si M es colectivamente débil-compacto, entonces M^* es uniformemente completamente continuo.

$\mathfrak{C}4$ - Si M^* es uniformemente completamente continuo, entonces M es colectivamente débil-compacto.

Dualidad $\mathfrak{C}1$ $\boxed{\mathrm{M}\ \textbf{u.c.c.} \Rightarrow \mathrm{M}^*\ \textbf{c.d.c.}}$

Es evidente que si $\mathcal{V}(X,Y)$ es $\mathfrak{C}1$-admisible, entonces $\mathcal{V}(X,Y) \subseteq \mathcal{W}(X,Y)$. El próximo teorema establece que si $\mathcal{K}(X,Y)$ es $\mathfrak{C}1$-admisible para *algún* espacio Y, entonces la anterior inclusión se da *para todo* espacio de Banach Y.

Teorema 2.4.2. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{V}(X,Y)$ *es* $\mathfrak{C}1$-*admisible para todo espacio de Banach* Y.

2.- $\mathcal{K}(X,Y)$ *es* $\mathfrak{C}1$-*admisible para algún espacio de Banach* Y.

3.- *X posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis, esto es,* $\mathcal{V}(X,Y) \subseteq \mathcal{W}(X,Y)$ *para todo espacio de Banach* Y.

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Sea $A \subset X^*$ uniformemente completamente continuo. Sea $y_0 \in S_Y$ y definamos $\mathrm{M} = A \otimes y_0$. El lema 1.3.6 asegura que M es uniformemente completamente continuo y, entonces, $\mathrm{M}^* = y_0 \otimes A$ es colectivamente débil-compacto. Si tenemos ahora en cuenta el lema 2.2.2, concluimos que A es relativamente débil-compacto y, por tanto, X posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis (teorema A.2.8).

$3 \Rightarrow 1$

Sea Y un espacio de Banach arbitrario. Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ es uniformemente completamente continuo, el operador $V\colon X \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M},Y)$ definido en el teorema 1.1.8 es completamente continuo (teorema 1.3.1) y como X posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis, V es débil-compacto. El teorema 2.2.6, asegura ahora que M^* es colectivamente débil-compacto. $\square$

OBSERVACIONES:

1) Usaremos la expresión "X es $\mathfrak{C}1$-admisible" pues la naturaleza concreta del espacio Y no juega ningún papel en este contexto. En adelante, adoptaremos este convenio en las situaciones que sean similares.

2) A pesar de su semejanza formal, esta dualidad es esencialmente diferente de la dualidad $\mathfrak{D}1$ (página 58). Allí, usaríamos la expresión "Y es $\mathfrak{D}1$-admisible".

3) Si $X \not\hookleftarrow \ell_1$, entonces X posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis pero en este caso, la dualidad $\mathfrak{C}1$ no tiene interés (véase el teorema 1.3.7). $\triangleleft$

Dualidad $\mathfrak{C}2$ $\boxed{\mathrm{M}^* \textbf{ c.d.c} \Rightarrow \mathrm{M} \textbf{ u.c.c.}}$

Los enunciados (y las demostraciones) de los teoremas 2.4.2 y 2.4.3 son iguales salvo que los papeles de $\mathcal{W}(X,Y)$ y $\mathcal{V}(X,Y)$ están intercambiados.

Teorema 2.4.3. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{W}(X,Y)$ *es $\mathfrak{C}2$-admisible para todo espacio de Banach Y.*

2.- $\mathcal{K}(X,Y)$ *es $\mathfrak{C}2$-admisible para algún espacio de Banach Y.*

3.- *X posee la propiedad de Dunford-Pettis, esto es, $\mathcal{W}(X,Y) \subseteq \mathcal{V}(X,Y)$ para todo espacio de Banach Y.*

Si Ω es un espacio topológico de Hausdorff compacto e Y es un espacio de Banach, entonces todo operador $T\colon C(\Omega) \longrightarrow Y$ es débil-compacto si y sólo si es completamente continuo [37, pág. 160]. Así pues, tenemos el teorema siguiente:

Teorema 2.4.4. *Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff compacto, Y un espacio de Banach y $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(C(\Omega), Y)$. Son equivalentes:*

1.- M *es uniformemente completamente continuo.*

2.- M^* *es colectivamente débil-compacto.*

Nota 2.4.5. Si Ω es no disperso, entonces $C(\Omega) \hookleftarrow \ell_1$ (como ocurría en el caso anterior, si $X \not\hookleftarrow \ell_1$ el estudio de la dualidad $\mathfrak{C}2$ no tiene interés). $\lhd$

Dualidad $\mathfrak{C}3$ $\boxed{\mathrm{M}\ \textbf{c.d.c} \Rightarrow \mathrm{M}^*\ \textbf{u.c.c.}}$

Lema 2.4.6. *Si Y posee la propiedad de Dunford-Pettis y $T \in \mathcal{CW}(X,Y)$, entonces $T^* \in \mathcal{V}(Y^*, X^*)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $(y_n^*)_n \subset Y^*$, $(y_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y $(T^*y_n^*)_n$ no converge a cero en norma, podemos encontrar $\varepsilon_0 > 0$, $(x_n)_n \subset B_X$ y $k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga que

$$|\langle x_n, T^*y_{k(n)}^*\rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Dado que $T \in \mathcal{CW}(X,Y)$, existe $(x_{h(n)})_n$ tal que $(Tx_{h(n)})_n$ es débil-Cauchy y como Y posee la propiedad de Dunford-Pettis, $\lim_{n\to\infty}\langle Tx_{h(n)}, y_{k(h(n))}^*\rangle = 0$ lo cual, está en contradicción con $(*)$. $\square$

Teorema 2.4.7. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{W}(X,Y)$ *es $\mathfrak{C}3$-admisible para todo espacio de Banach X.*

2.- $\mathcal{K}(X,Y)$ *es $\mathfrak{C}3$-admisible para algún espacio de Banach X.*

3.- Y *posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Sean $(y_n)_n \subset Y$ e $(y_n^*)_n \subset Y^*$ tales que $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$ e $(y_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$. Elegimos $x_0^* \in S_{X^*}$ y definimos $\mathrm{M} = \{x_0^* \otimes y_n : n \in \mathbb{N}\}$. El lema 2.2.2 asegura que M es colectivamente débil-compacto y, por lo tanto, M^* es uniformemente completamente continuo. Así pues, $(\langle y_m, y_n^* \rangle x_0^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ uniformemente en $m \in \mathbb{N}$ lo cual, implica que $\lim_{n\to\infty} \langle y_n, y_n^* \rangle = 0$, esto es, Y posee la propiedad de Dunford-Pettis.

$3 \Rightarrow 1$

Sea X un espacio de Banach arbitrario. Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ es colectivamente débil-compacto, el operador $V : Y^* \longrightarrow \ell_\infty(\mathrm{M}^*, X^*)$ definido para cada $y^* \in Y^*$ de forma que $Vy^*(T^*) = T^* y^*$ cada $T^* \in \mathrm{M}^*$, es débil-compacto. En efecto, teniendo en cuenta la nota 1.1.12 y que $\ell_\infty(\mathrm{M}, X^*) \approx \ell_\infty(\mathrm{M}^*, X^*)$, el resultado se sigue del teorema 2.2.1. El lema 2.4.6, asegura ahora que V es completamente continuo y, por tanto, M^* es uniformemente completamente continuo (teorema 1.3.1). □

Dualidad $\mathfrak{C}4$ $\boxed{\mathrm{M}^* \textbf{ u.c.c.} \Rightarrow \mathrm{M} \textbf{ c.d.c.}}$

Las semejanzas entre este problema y el planteado en la página 30 no son sólo formales. En primer lugar, es obvio que si los conjuntos de Dunford-Pettis de Y son relativamente compactos, entonces $\mathcal{W}(X,Y)$ es $\mathfrak{C}4$-admisible para todo espacio de Banach X. Además, las demostraciones del lema 2.4.8 y del teorema 2.4.9 son prácticamente iguales que las demostraciones correspondientes del lema 1.3.9 y del teorema 1.3.11 por lo que omitiremos dichas demostraciones.

Lema 2.4.8. *Sea Y un espacio de Banach tal que todos sus subconjuntos de Dunford-Pettis sean relativamente débil-compactos. Si X es un espacio de Banach arbitrario y $T^* \in \mathcal{V}(Y^*, X^*)$, entonces $T \in \mathcal{W}(X,Y)$.*

Teorema 2.4.9. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{W}(X,Y)$ *es $\mathfrak{C}4$-admisible para todo espacio de Banach X.*

2.- $\mathcal{K}(X,Y)$ *es $\mathfrak{C}4$-admisible para algún espacio de Banach X.*

3.- *Todo subconjunto de Dunford-Pettis de Y es relativamente débil-compacto.*

Corolario 2.4.10. *Si Y cumple alguna de las siguientes propiedades:*

1) *Y^* posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis.*

2) *Y es débil-secuencialmente completo.*

entonces $\mathcal{W}(X,Y)$ es $\mathfrak{C}4$-admisible para todo espacio de Banach X.

DEMOSTRACIÓN: (1) Es una consecuencia inmediata de los teoremas A.2.8 y 2.4.9 (también se obtiene la conclusión aplicando los teoremas 2.2.1 y 2.4.2). Para probar (2), basta con tener en cuenta el teorema A.2.5. □

Corolario 2.4.11. *Si Y es un espacio de Banach de dimensión infinita $\mathfrak{C}3$-admisible y $\mathfrak{C}4$-admisible, entonces $Y \hookleftarrow \ell_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un espacio de Banach arbitrario y $\mathrm{M} = B_{X^*} \otimes B_Y$. Si $(y_n^*)_n \subset Y^*$, para cada $x^* \in B_{X^*}$, $y \in B_Y$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|y \otimes x^*(y_n^*)\| = \|\langle y, y_n^* \rangle x^*\| \leq \|y_n^*\|$$

Si $Y \not\hookleftarrow \ell_1$, entonces Y^* posee la propiedad de Schur y M^* es uniformemente completamente continuo. Así pues, M es colectivamente débil-compacto y, por tanto, B_Y es débil-compacta (lema 2.2.2). Pero esto es absurdo pues ningún espacio reflexivo de dimensión infinita posee la propiedad de Dunford-Pettis. □

2.5. Notas finales y ejemplos

En el capítulo anterior, vimos que un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ es equicompacto [colectivamente compacto] si y sólo si M^{**} es equicompacto [colectivamente compacto] (teorema 1.1.6) y en éste, hemos probado que un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ es colectivamente débil-compacto si y sólo si lo es M^{**} (teorema 2.2.1). En consecuencia, cabe preguntarse por la razón existente para no incluir un resultado similar para los conjuntos débil-equicompactos. La razón es bien sencilla: tal resultado no existe. Más aún, esta "*asimetría*" con los resultados obtenidos en el capítulo 1 tiene que ver, tal como se muestra en el siguiente ejemplo, con el hecho de que $B_{X^{**}}$ sea o no débil*-secuencialmente compacta.

Ejemplo 2.5.1. Definimos, para cada $s \in \mathbb{R}$, el operador:

$$\begin{array}{rcl} Q_s \colon c_0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & c_0(\mathbb{R}) \\ (x_r)_{r\in\mathbb{R}} & \longmapsto & Q_s(x_r)_{r\in\mathbb{R}} = (\delta_r^s x_r)_{r\in\mathbb{R}} \end{array}$$

Consideremos el conjunto $\mathrm{N} = \{Q_s : s \in \mathbb{R}\}$ y observemos que se tiene, para cada $s \in \mathbb{R}$, que $Q_s^{**} = T_s$ siendo T_s el correspondiente operador definido en el ejemplo 2.1.14. En otras palabras: $\mathrm{N}^{**} = \mathrm{M}$. Ahora bien, $\mathrm{M}^*\widehat{\alpha}$ es relativamente compacto para todo $\widehat{\alpha} \in \ell_1(\mathbb{R})$ por lo que también sucede lo mismo con $\mathrm{N}^*\widehat{\alpha}$ y puesto que $c_0(\mathbb{R}) \not\hookleftarrow \ell_1$, se sigue que N es débil-equicompacto (teorema 2.1.17). Sin embargo, N^{**} no es débil-equicompacto. $\triangleleft$

Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, c_0)$, el corolario 2.1.16 garantiza que M^* es débil-equicompacto si y sólo si $\mathrm{M}^{**}x^{**}$ es relativamente compacto para todo $x^{**} \in X^{**}$. Además, en este caso, es posible obtener una caracterización alternativa muy manejable. Recordamos que si $T \in \mathcal{L}(X, c_0)$, existe $(a_n^T)_n \subset X^*$ con $(a_n^T)_n \xrightarrow{w^*} 0$ y tal que:

$$\begin{array}{rcl} T \colon X & \longrightarrow & c_0 \\ x & \longmapsto & Tx = (\langle x, a_n^T\rangle)_n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} T^* \colon \ell_1 & \longrightarrow & X^* \\ e_n & \longmapsto & T^*e_n = a_n^T \end{array}$$

Se comprueba con facilidad que $\|T\| = \sup_n |a_n^T|$ y que T es débil-compacto si y sólo si $(a_n^T)_n \xrightarrow{w} 0$ (esto es, si $(\langle a_n^T, x^{**}\rangle)_n \in c_0$ para todo $x^{**} \in X^{**}$).

Teorema 2.5.2. *Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, c_0)$ un conjunto acotado. Son equivalentes:*

1.- M^* *es débil-equicompacto.*

2.- $\mathrm{M}^{**}x^{**}$ *es relativamente compacto para cada $x^{**} \in X^{**}$.*

3.- $(a_n^T)_n \xrightarrow{w} 0$ *uniformemente en $T \in \mathrm{M}$.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Si $x^{**} \in X^{**}$, entonces $\mathrm{M}^{**}x^{**} = \big\{(\langle a_n^T, x^{**}\rangle)_n : T \in \mathrm{M}\big\} \subset c_0$ es relativamente compacto. En consecuencia, existe $\widehat{\gamma} = (\gamma_n)_n \in c_0$ tal que $|\langle a_n^T, x^{**}\rangle| \leq \gamma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $T \in \mathrm{M}$. En otras palabras, $(a_n^T)_n \xrightarrow{w} 0$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$.

$3 \Rightarrow 1$

Sea $(\widehat{\alpha}_n)_n \subset B_{\ell_1}$. Como B_{ℓ_1} es débil*-secuencialmente compacta, existen una subsucesión de $(\widehat{\alpha}_n)_n$ (que seguiremos llamando igual) y un $\widehat{\alpha} \in B_{\ell_1}$ tales que

$(\widehat{\alpha}_n)_n \xrightarrow{w^*} \widehat{\alpha}$. Así pues, si $\widehat{\alpha}_n = (\alpha_k^n)_k$ y $\widehat{\alpha} = (\alpha_k)_k$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \alpha_k^n = \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dados $\varepsilon > 0$ y $x^{**} \in X^{**}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$, entonces se tiene que $|\langle a_k^T, x^{**}\rangle| < \varepsilon/4$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Fijado k_0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|\alpha_k^n - \alpha_k| < \varepsilon/2k_0C$ para todo $k \leq k_0$ (llamamos $C = \sup_{T\in\mathrm{M}} \|T\|\,\|x^{**}\|$). Si ahora tomamos $n \geq n_0$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle T^*\widehat{\alpha}_n - T^*\widehat{\alpha}, x^{**}\rangle| &= |\langle \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^n - \alpha_k) a_k^T, x^{**}\rangle| \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0} |\alpha_k^n - \alpha_k||\langle a_k^T, x^{**}\rangle| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\alpha_k^n - \alpha_k||\langle a_k^T, x^{**}\rangle| \\
&\leq \|T\|\,\|x^{**}\| \sum_{k=1}^{k_0} |\alpha_k^n - \alpha_k| + \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\alpha_k^n - \alpha_k| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $T \in \mathrm{M}$, esto es, $(T^*\widehat{\alpha}_n)_n \xrightarrow{w} T^*\widehat{\alpha}$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. □

Otros problemas de dualidad

Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$. Si M y M^* son equicompactos [colectivamente compactos], entonces M es relativamente compacto pero si planteamos el problema análogo para el caso en el que $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ y se tiene que M y M^* son débil-equicompactos, no podemos deducir resultados de débil-compacidad (en el próximo capítulo se aportan numerosos contra-ejemplos). Sin embargo, esto no quiere en absoluto decir que el problema planteado carezca de interés.

Necesitaremos usar, ocasionalmente, el siguiente lema (omitimos su demostración al ser ésta inmediata).

Lema 2.5.3. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ *acotado.* M *es uniformemente completamente continuo si y sólo si todo subconjunto numerable de* M *es uniformemente completamente continuo.*

Teorema 2.5.4. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ *acotado. Si* M *y* M^* *son débil-equicompactos y* X *posee la propiedad de Dunford-Pettis, entonces* M *es uniformemente completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: No hay pérdida de generalidad si suponemos que M es numerable (lema 2.5.3). Tampoco la hay si suponemos que Y es separable. En efecto, $F = \overline{\text{span}}\left\{\bigcup_{T\in \mathrm{M}} T(B_X)\right\}$ es separable pues los operadores son compactos y M es numerable. Es evidente que M, mirado como subconjunto de $\mathcal{K}(X,F)$, es débil-equicompacto. Argumentos similares a los empleados en la demostración del lema 2.3.7 prueban que M^*, mirado como subconjunto de $\mathcal{K}(F^*,X^*)$, es débil-equicompacto. Finalmente, es claro que si M es uniformemente completamente continuo en $\mathcal{K}(X,F)$, también lo es en $\mathcal{K}(X,Y)$.

Si $(x_n)_n \subset X$ y $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, entonces $(Tx_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ para todo $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Si la anterior convergencia no es uniforme en $T \in \mathrm{M}$, podemos encontrar $\varepsilon_0 > 0$, $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M}$ y $k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tales que

$$\left\|T_n x_{k(n)}\right\| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $(y_n^*)_n \subset B_{Y^*}$ tal que $\left\|T_n x_{k(n)}\right\| = \langle T_n x_{k(n)}, y_n^*\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como Y es separable, B_{Y^*} es débil*-secuencialmente compacta. Así pues, existen una subsucesión $(y_{p(n)}^*)_n$ y un $y^* \in B_{Y^*}$ tales que $(y_{p(n)}^*)_n \xrightarrow{w^*} y^*$. Al ser M^* débil-equicompacto, $(T^*(y_{p(n)}^* - y^*))_n \xrightarrow{w} 0$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ (lema 2.1.5). En particular, $(T_{p(n)}^*(y_{p(n)}^* - y^*))_n \xrightarrow{w} 0$ y como X posee la propiedad de Dunford-Pettis, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_{k(p(n))}, T_{p(n)}^*(y_{p(n)}^* - y^*)\rangle = 0 \qquad (**)$$

Como M es débil-equicompacto, $(Tx_{k(n)})_n \xrightarrow{w} 0$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ (lema 2.1.5). En particular, $\lim_{n\to\infty}\langle T_{p(n)}x_{k(p(n))}, y^*\rangle = 0$ y esto, teniendo en cuenta $(**)$, implica que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T_{p(n)}x_{k(p(n))}\right\| = \lim_{n\to\infty} \langle T_{p(n)}x_{k(p(n))}, y_{p(n)}^*\rangle = 0$$

lo cual, está en contradicción con $(*)$. □

Teorema 2.5.5. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *acotado. Si* M *y* M^* *son débil-equicompactos,* X *posee la propiedad de Dunford-Pettis y* B_{Y^*} *es débil*-secuencialmente compacta, entonces* M *es uniformemente completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: Obsérvese que la compacidad de los operadores de M sólo ha sido usada en la prueba del teorema 2.5.4 para conseguir un subespacio separable adecuado de Y. Por otro lado, la separabilidad de Y sólo se usa para asegurar la débil*-secuencial compacidad de B_{Y^*}. □

Nos planteamos ahora el recíproco del teorema 2.5.4, esto es, si la propiedad de Dunford-Pettis es necesaria para asegurar que un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ es uniformemente completamente continuo si M y M^* son débil-equicompactos. En el caso general esto no es así pues si Y tiene la propiedad de Schur y M es débil-equicompacto, entonces M es equicompacto (teorema 2.1.19) y, por tanto, M es uniformemente completamente continuo (teorema 1.3.3). En el próximo teorema se prueba que esta excepción es la única posible.

Teorema 2.5.6. *Si Y no posee la propiedad de Schur y para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ tal que M y M^* son débil-equicompactos se cumple que M es uniformemente completamente continuo, entonces X posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

DEMOSTRACIÓN: Si X no posee la propiedad de Dunford-Pettis, existen $\varepsilon_0 > 0$, $(x_n)_n \subset X$ y $(x_n^*)_n \subset X^*$ tales que $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y verificando que

$$|\langle x_n, x_n^* \rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que Y no posee la propiedad de Schur, podemos encontrar $(y_n)_n \subset S_Y$ tal que $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Hacemos ahora $\mathrm{M} = \{x_n^* \otimes y_n : n \in \mathbb{N}\}$. El lema 2.1.18 asegura que M y M^* son débil-equicompactos por lo que M es uniformemente completamente continuo. Así pues, $(\langle x_n, x_m^* \rangle y_m)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ uniformemente en $m \in \mathbb{N}$ lo cual, en particular, implica que $\lim_{n\to\infty} \|\langle x_n, x_n^* \rangle y_n\| = 0$. Pero $\|\langle x_n, x_n^* \rangle y_n\| = |\langle x_n, x_n^* \rangle|$ y esto, está en contradicción con $(*)$. $\square$

Cuando M o M^* es débil-equicompacto, no disponemos de una proposición análoga a la proposición 2.3.3 que nos sirva para determinar si M es colectivamente débil-compacto. Presentamos aquí, un resultado parcial en esa dirección.

Teorema 2.5.7. *Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$. Si X es reflexivo, M es débil-equicompacto y $\mathrm{M}x$ es relativamente débil-compacto para todo $x \in X$, entonces M es colectivamente débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $(x_n)_n \subset X$ acotada y $(T_n)_n \subset \mathrm{M}$. Como X es reflexivo, existen $x \in X$ y $(x_{k(n)})_n$ tales que $(x_{k(n)})_n \xrightarrow{w} x$. Dado que M es débil-equicompacto, se tiene que $(T(x_{k(n)} - x))_n \xrightarrow{w} 0$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ (corolario 2.1.6) lo cual, implica que $(T_{k(n)}(x_{k(n)} - x))_n \xrightarrow{w} 0$. Puesto que $\mathrm{M}x$ es relativamente débil-compacto, existen $y \in Y$ y $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow k(\mathbb{N})$ creciente tales que $(T_{h(n)}x)_n \xrightarrow{w} y$. Combinando los resultados anteriores, concluimos que $(T_{h(n)}x_{h(n)})_n \xrightarrow{w} y$, es decir, M es colectivamente débil-compacto. $\square$

Una nota sobre la propiedad recíproca de Dunford-Pettis

No conocemos un teorema análogo al teorema A.2.3 para la propiedad recíproca de Dunford-Pettis. Desde luego, existen otras caracterizaciones alternativas (véase, por ejemplo, [47, Th. 4.1]). Por nuestra parte, hemos encontrado una condición suficiente que tiene que ver, nuevamente, con la débil*-secuencial compacidad de B_{X^*}.

Teorema 2.5.8. *Si X es un espacio de Banach cumpliendo:*

(a) B_{X^*} es débil-secuencialmente compacta.*

(b) B_X es débil-secuencialmente densa en $B_{X^{**}}$.*

entonces X posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis.

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset X^*$ uniformemente completamente continuo. Probaremos que si $(x_n^*)_n \subset A$, posee una subsucesión débil-convergente. Como A es acotado, (a) asegura la existencia de una subsucesión de $(x_n^*)_n$ (que seguiremos llamando igual) y de $x_0^* \in X^*$ tales que $(x_n^*)_n \xrightarrow{w^*} x_0^*$. Dados pues $x \in B_X$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$|\langle x_n^*, x\rangle - \langle x_0^*, x\rangle| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (*)$$

Por (b), si $x^{**} \in B_{X^{**}}$ existe $(x_m)_m \subset B_X$ tal que $(x_m)_m \xrightarrow{w^*} x^{**}$. En particular, $(x_m)_m$ es débil*-Cauchy en $B_{X^{**}}$. Pero $\sigma(X^{**}, X^*)|_X = \sigma(X, X^*)$ con lo cual, $(x_m)_m$ es débil-Cauchy en B_X. Al ser A uniformemente completamente continuo, obtenemos que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \langle x^*, x_m\rangle = \langle x^*, x^{**}\rangle$$

uniformemente en $x^* \in A$. Podemos entonces, encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle x^*, x_{m_0}\rangle - \langle x^*, x^{**}\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $x^* \in A \cup \{x_0^*\}$. Fijado ahora $x_{m_0} \in B_X$, $(*)$ asegura que podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tenga que $|\langle x_n^*, x_{m_0}\rangle - \langle x_0^*, x_{m_0}\rangle| < \varepsilon/3$.

$$\begin{aligned} |\langle x_n^*, x^{**}\rangle - \langle x_0^*, x^{**}\rangle| &\leq |\langle x_n^*, x^{**}\rangle - \langle x_n^*, x_{m_0}\rangle| + |\langle x_n^*, x_{m_0}\rangle - \langle x_0^*, x_{m_0}\rangle| \\ &\qquad + |\langle x_0^*, x_{m_0}\rangle - \langle x_0^*, x^{**}\rangle| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

con lo que, finalmente, obtenemos que $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} x_0^*$. $\square$

Nota 2.5.9. Si $X \not\hookrightarrow \ell_1$, entonces $\mathcal{V}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{W}(X,Y)$ por lo que el teorema 2.5.8 carece de interés. Si X es separable, la condición 2.5.8$-(b)$ es equivalente a que $X \not\hookrightarrow \ell_1$ [34, pág. 236]. Así pues, el ámbito de aplicación del teorema se reduce a los espacios *no* separables que *sí* contengan copia de ℓ_1. $\triangleleft$

Capítulo 3

Problemas de compacidad

La búsqueda de teoremas de débil-compacidad similares al teorema 1.2.1 ha sido uno de los motivos para emprender el estudio de los conjuntos débil-equicompactos. Sin embargo, sucede que el teorema inicialmente perseguido no existe: un conjunto puede ser débil-compacto sin ser débil-equicompacto y, recíprocamente, un conjunto puede ser débil-equicompacto y puntualmente débil-compacto sin ser débil-compacto. Claro que esto no quiere decir que no existan conexiones entre los conjuntos débil-compactos y los débil-equicompactos: las hay, aunque las relaciones encontradas sean, para nosotros, algo sorprendentes.

Un análisis más a fondo del concepto de débil-equicompacidad, pone de manifiesto la necesidad de extender dicho concepto a clases más amplias de operadores y a subclases de sucesiones acotadas tales como la de las sucesiones débil-nulas o débil-Cauchy. En consecuencia, dada una clase de sucesiones, se introduce la noción de conjunto de operadores [condicionalmente] débil-equicompacto sobre dicha clase. Es de resaltar que se conservan, casi sin cambios, muchos de los teoremas probados para los conjuntos débil-equicompactos.

En este punto, se hace patente la necesidad de investigar el comportamiento de los conjuntos débil-equicompactos sobre una clase $\mathcal{G}$ de sucesiones pero usando, en $\mathcal{L}(X, Y)$, topologías que dependan de la clase $\mathcal{G}$. Llegamos así, de forma bastante natural, a considerar en $\mathcal{L}(X, Y)$ la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{G}$. En las secciones tercera y cuarta se estudia el comportamiento, en estas topologías, de los conjuntos [condicionalmente] débil-equicompactos sobre las correspondientes clases. Finalmente, en la sección quinta, se demuestran dos teoremas de compacidad formalmente idénticos al teorema 1.2.1.

3.1. Conjuntos débil-compactos en $\mathcal{W}(X,Y)$

Si un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ es relativamente compacto, entonces es equicompacto y colectivamente compacto. En el próximo teorema, se establece un resultado análogo para el caso en el que $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$.

Proposición 3.1.1. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ *es relativamente compacto, entonces*

(1) M *es colectivamente débil-compacto.*

(2) M *es débil-equicompacto.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Puesto que M es relativamente compacto, para cada $\varepsilon > 0$, existen $T_1, \ldots, T_N \in \mathrm{M}$ tales que $\mathrm{M} \subset \bigcup_{i=1}^N B(T_i;\varepsilon)$. Sea $H_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N T_i(B_X)$. Es claro que H_ε es relativamente débil-compacto. Dado $T \in \mathrm{M}$, sea $i_T \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $\|T - T_{i_T}\| < \varepsilon$, es decir, $Tx - T_{i_T}x \in \varepsilon B_Y$ y $T_{i_T}x \in H_\varepsilon$ para todo $x \in B_X$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Así pues,

$$\bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X) \subseteq H_\varepsilon + \varepsilon B_Y$$

esto es, $\bigcup_{T \in \mathrm{M}} T(B_X)$ es relativamente débil-compacto.

(2) Definimos, para cada $y^* \in Y^*$, el operador $\phi_{y^*} \colon \mathcal{W}(Y^*, X^*) \longrightarrow X^*$ de forma que $\phi_{y^*}(Q) = Qy^*$ para cada $Q \in \mathcal{W}(Y^*, X^*)$. Como M^* es relativamente compacto, $\phi_{y^*}(\mathrm{M}^*) = \mathrm{M}^* y^*$ es relativamente compacto. Basta ahora con aplicar la proposición 2.3.3 pues M^* es colectivamente débil-compacto. □

Es claro que no puede probarse el recíproco de la proposición 3.1.1. Es más, ni aún en el caso en el que $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ y tanto M como M^* sean débil-equicompactos y colectivamente débil-compactos, puede asegurarse que M sea relativamente débil-compacto.

Ejemplo 3.1.2. Para cada $\beta = (\beta_n)_n \in c_0$, se define el operador:

$$\begin{array}{rccc} T_\beta \colon & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & (\alpha_n)_n & \longmapsto & T_\beta(\alpha_n)_n = (\alpha_n\beta_n)_n \end{array}$$

Se comprueba fácilmente que $T_\beta \in \mathcal{K}(\ell_2, \ell_2)$, $\|T_\beta\| = \|\beta\|$ y $T_\beta^* = T_\beta$ para todo $\beta \in c_0$. Si consideramos ahora el conjunto $\mathrm{M} = \{T_\beta : \beta \in B_{c_0}\}$, es claro que M y M^* son colectivamente débil-compactos pues ℓ_2 es reflexivo y $\mathrm{M} = \mathrm{M}^*$.

Si $\gamma = (\gamma_n)_n \in \ell_2$, se tiene que $\mathrm{M}^*\gamma = \{(\beta_n\gamma_n)_n : (\beta_n)_n \in B_{c_0}\}$ y este conjunto es relativamente compacto pues

$$\|(0,\ldots,\beta_k\gamma_k,\ldots)\|_2 \leq \left(\sum_{n\geq k} |\gamma_n|^2\right)^{1/2}$$

y como $\ell_2 \not\hookrightarrow \ell_1$, se sigue que M y M^* son débil-equicompactos.

Pero M no es relativamente débil-compacto pues la aplicación $\phi\colon c_0 \longrightarrow \mathcal{K}(\ell_2,\ell_2)$ definida para cada $\beta \in c_0$ por $\phi(\beta) = T_\beta$ es una isometría y $\mathrm{M} = \phi(B_{c_0})$. $\lhd$

Llegados a este punto, parece lógico investigar en $\mathcal{W}(X,Y)$ la posible validez de un enunciado análogo al de la proposición 3.1.1 pero imponiendo a M sólo que sea relativamente débil-compacto. Sin embargo, es fácil aportar ejemplos que muestran que no podemos esperar, en el caso general, resultados paralelos a los obtenidos para la topología inducida por la norma.

Ejemplo 3.1.3. Si, para cada $\beta = (\beta_n)_n \in \ell_2$, consideramos el operador:

$$\begin{aligned} T_\beta\colon \ell_2 &\longrightarrow \ell_1 \\ (\alpha_n)_n &\longmapsto T_\beta(\alpha_n)_n = (\alpha_n\beta_n)_n \end{aligned}$$

entonces $T_\beta \in \mathcal{K}(\ell_2,\ell_1)$ pues $\|(0,\ldots,\alpha_k\beta_k,\ldots)\|_1 \leq \left(\sum_{n\geq k} |\beta_n|^2\right)^{1/2} \|(\alpha_n)_n\|_2$

Si $\phi\colon \ell_2 \longrightarrow \mathcal{K}(\ell_2,\ell_1)$ es el operador definido, para cada $\beta \in \ell_2$, por $\phi(\beta) = T_\beta$, entonces el conjunto $\mathrm{M} = \phi(B_{\ell_2})$ es débil-compacto en $\mathcal{K}(\ell_2,\ell_1)$.

Es inmediato comprobar que $T_\beta^*(\gamma_n)_n = (\gamma_n\beta_n)_n$ para todo $(\gamma_n)_n \in \ell_\infty$. Tomando ahora $\gamma = (1,1,\ldots)$, es claro que $\mathrm{M}^*\gamma = B_{\ell_2}$ que no es relativamente compacto y, en consecuencia, M no es débil-equicompacto. Además, M tampoco es colectivamente débil-compacto. En efecto, usando el hecho de que si $(\lambda_n)_n \in \ell_1$, entonces $(\sqrt{|\lambda_n|})_n \in \ell_2$, es fácil comprobar que $B_{\ell_1} \subseteq \bigcup_{\beta\in B_{\ell_2}} T_\beta(B_{\ell_2})$.

Puesto que ℓ_2 es reflexivo, M^* es colectivamente débil-compacto. Puesto que ℓ_1 posee la propiedad de Schur, $\mathrm{M}^{**}\beta$ es relativamente compacto para todo $\beta \in \ell_2$ y como ℓ_1 es separable, se sigue que M^* es débil-equicompacto (corolario 2.1.16). $\lhd$

La casuística puede ser muy variada. Por ejemplo, siguiendo la línea anterior, podemos considerar operadores $T_\beta\colon c_0 \longrightarrow \ell_2$ y construir fácilmente un conjunto débil-compacto $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(c_0, \ell_2)$ tal que M^* no sea ni colectivamente débil-compacto ni débil-equicompacto. En resumidas cuentas: en general, débil-compacidad y débil-equicompacidad son conceptos independientes. Surge pues, de forma natural, la cuestión de hallar condiciones bajo las cuales se dan relaciones de dependencia.

Teorema 3.1.4. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ se cumple que si M es relativamente débil compacto, entonces M es débil-equicompacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach Y tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ se cumple que si M es relativamente débil compacto, entonces M es débil-equicompacto.*

3.- *X^* posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Si X^* no posee la propiedad de Schur, existe $(x_n^*)_n \subset S_{X^*}$ tal que $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$. El conjunto $A = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débil-compacto por lo que si $y_0 \in S_Y$ y definimos $\phi \colon X^* \longrightarrow \mathcal{K}(X, Y)$ de forma que, para cada $x^* \in X^*$, sea $\phi(x^*) = x^* \otimes y_0$, entonces $\phi(A) = A \otimes y_0$ es relativamente débil-compacto. En consecuencia, $A \otimes y_0$ es débil-equicompacto y de aquí, se sigue fácilmente que A es equicompacto. Así pues, A es relativamente compacto (corolario 1.2.4). Pero esto es absurdo pues $(x_n^*)_n$ no puede poseer ninguna subsucesión convergente en norma.

$3 \Rightarrow 1$

Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X, Y)$ relativamente débil-compacto. Puesto que $X \not\hookrightarrow \ell_1$, basta con probar que si $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, entonces $(Tx_n)_n \xrightarrow{w} 0$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ (corolario 2.1.6). Si existen $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, $y^* \in Y^*$, $\varepsilon_0 > 0$ y $(T_n)_n \subset \mathrm{M}$ tales que

$$|\langle T_n x_n, y^* \rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, como M es débil-compacto, podemos asumir (tomando una subsucesión si fuera necesario) que $(T_n)_n$ es débil-Cauchy. Pero entonces, también es débil-Cauchy la sucesión $(T_n^* y^*)_n$ y como X posee la propiedad de Dunford-Pettis, $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, T_n^* y^* \rangle = 0$ en contradicción con $(*)$. □

Nota 3.1.5. Desde luego, si X^* o Y poseen la propiedad de Schur, entonces $\mathcal{W}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)$. Sin embargo, este hecho no es especialmente relevante para la prueba de la parte $3 \Rightarrow 1$ del teorema anterior (véase la nota 2.1.4). ◁

Corolario 3.1.6. *Sean X e Y espacios de Banach. Son equivalentes:*

1.- *$\mathcal{K}(X,Y)$ posee la propiedad de Schur.*

2.- *X^* e Y poseen la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Tanto X^* como Y, pueden verse como subespacios de $\mathcal{K}(X,Y)$. En efecto, dados $x_0^* \in S_{X^*}$ e $y_0 \in S_Y$, los operadores $\phi\colon X^* \longrightarrow \mathcal{K}(X,Y)$ y $\varphi\colon Y \longrightarrow \mathcal{K}(X,Y)$ definidos respectivamente por $\phi(x^*) = x^* \otimes y_0$ y $\varphi(y) = x_0^* \otimes y$, son isometrías.

$2 \Rightarrow 1$

Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ relativamente débil-compacto. Si definimos, para cada $x \in X$, el operador $\phi_x\colon \mathcal{K}(X,Y) \longrightarrow Y$ por $\phi_x(T) = Tx$, obtenemos que $\phi_x(\mathrm{M}) = \mathrm{M}x$ es relativamente débil-compacto y, puesto que Y posee la propiedad de Schur, $\mathrm{M}x$ es relativamente compacto. Además, como X^* posee la propiedad de Schur, M es débil-equicompacto (teorema 3.1.4) y, por tanto, es equicompacto (teorema 2.1.19). Finalmente, el teorema 1.2.1 asegura que M es relativamente compacto. □

Teorema 3.1.7. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Existe un espacio de Banach X tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ se cumple que si M es relativamente débil compacto, entonces M^* es débil-equicompacto.*

2.- *Y posee la propiedad de Schur.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si Y no posee la propiedad de Schur, existe $(y_n)_n \subset S_Y$ tal que $(y_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Pero entonces, razonando como en el teorema 3.1.4 ($2 \Rightarrow 3$), podemos probar que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto lo cual, es absurdo.

$2 \Rightarrow 1$

Basta elegir X tal que X^* posea la propiedad de Schur y aplicar el corolario 3.1.6 (desde luego, ésta no es la única posibilidad existente). □

Si Y posee la propiedad de Schur, al comparar los teoremas 3.1.4 y 3.1.7 surge la pregunta de si, para todo espacio de Banach X y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$, se cumple que M^* es débil-equicompacto si M es relativamente débil-compacto.

Ejemplo 3.1.8. Se considera, para cada $\beta = (\beta_r)_{r\in\mathbb{R}} \in \ell_2(\mathbb{R})$, el operador:

$$\begin{aligned} T_\beta\colon \ell_1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \ell_1(\mathbb{R}) \\ (\alpha_r)_{r\in\mathbb{R}} &\longmapsto T_\beta(\alpha_r)_{r\in\mathbb{R}} = (\beta_r\alpha_r)_{r\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Sea $\mathrm{M} = \left\{T_\beta : \beta \in B_{\ell_2(\mathbb{R})}\right\}$. Es fácil comprobar que $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(\ell_1(\mathbb{R}), \ell_1(\mathbb{R}))$ y que M es débil-compacto. Sin embargo, un razonamiento similar al empleado en el ejemplo 2.1.14 prueba que M^* no es débil-equicompacto. $\triangleleft$

Tal como sucedía con el ejemplo 2.1.14, hemos tenido necesidad de usar el hecho de que $B_{\ell_\infty(\mathbb{R})}$ *no* es débil*-secuencialmente compacta. Dados nuestros antecedentes, es fácil conjeturar que esta circunstancia no es casual.

Teorema 3.1.9. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach X y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ se cumple que si M es relativamente débil-compacto, entonces M^* es débil-equicompacto.*

2.- *Y posee la propiedad de Schur y B_{Y^*} es débil*-secuencialmente compacta.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

En primer lugar, el teorema 3.1.7 prueba que Y posee la propiedad de Schur. Para cada $\beta = (\beta_y)_{y\in B_Y} \in \ell_2(B_Y)$, se define

$$\begin{aligned} T_\beta\colon \ell_1(B_Y) &\longrightarrow Y \\ (\alpha_y)_{y\in B_Y} &\longmapsto T_\beta(\alpha_y)_{y\in B_Y} = \sum_{y\in B_Y}(\beta_y\alpha_y)y \end{aligned}$$

Sea $\mathrm{M} = \left\{T_\beta : \beta \in B_{\ell_2(B_Y)}\right\}$. Es fácil comprobar que $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(\ell_1(B_Y), Y)$, M es débil-compacto y $T_\beta^* y^* = (\beta_y\langle y, y^*\rangle)_{y\in B_Y}$ para cada $\beta \in \ell_2(B_Y)$. Dada $(y_n^*)_n \subset Y^*$ acotada, existe $(y_{k(n)}^*)_n$ tal que $(T_\beta^* y_{k(n)}^*)_n$ converge para todo $\beta \in B_{\ell_2(B_Y)}$ y, en particular, converge si $\beta = e_z = (\delta_y^z)_{y\in B_Y}$ para todo $z \in B_Y$. Finalmente, dado que

$$\left\|T_{e_z}^* y_{k(n)}^*\right\| = \left\|(\delta_y^z\langle y, y_{k(n)}^*\rangle)_{y\in B_Y}\right\| = |\langle z, y_{k(n)}^*\rangle|$$

se tiene que $(y_{k(n)}^*)_n$ es débil*-convergente.

$2 \Rightarrow 1$

Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ débil-compacto. Un razonamiento similar al empleado en el corolario 3.1.6 ($3 \Rightarrow 1$), prueba que $\mathrm{M}^{**}x^{**}$ es relativamente compacto para todo $x^{**} \in X^{**}$. Basta entonces con aplicar el corolario 2.1.16. $\square$

3.2. Débil-equicompacidad en clases de sucesiones

Un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ puede tener un buen comportamiento sobre ciertas clases de sucesiones sin ser por ello débil-equicompacto (véase, por ejemplo, el lema 2.1.5). Además, después del estudio precedente, es lógico pensar que para obtener otros resultados de compacidad ligados al concepto de débil-equicompacidad, deberíamos considerar en $\mathcal{L}(X,Y)$ otras topologías distintas de la débil.

Aunque estamos interesados sobre todo en estudiar conjuntos de operadores, para introducir los conceptos siguientes es conveniente trabajar en un marco más general (véase, por ejemplo, el lema 3.5.3).

Definición 3.2.1. Sean X e Y espacios de Banach. Dados $\mathrm{M} \subset \mathrm{L}(X,Y)$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \{(x_n)_n \subset X : (x_n)_n$ es acotada$\}$), decimos que el conjunto M es:

(1) *Condicionalmente débil-equicompacto en* $\mathcal{G}$ si cualquier sucesión $(x_n)_n \in \mathcal{G}$ posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n \in \mathcal{G}$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$.

(2) *Débil-equicompacto en* $\mathcal{G}$ si cualquier sucesión $(x_n)_n \in \mathcal{G}$ posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n \in \mathcal{G}$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge débilmente uniformemente en $T \in \mathrm{M}$.

OBSERVACIONES:

1) Naturalmente, cuando $\mathcal{G} = \mathbf{B}$ diremos simplemente que M es [condicionalmente] débil-equicompacto. Es claro que si M es condicionalmente débil-equicompacto, entonces $\mathrm{M} \subset \mathrm{C}\mathcal{W}(X,Y)$ y si M es débil-equicompacto, entonces $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$.

2) Para resultar de interés, una clase $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{B}$ debe poseer la propiedad de que si $(x_n)_n \in \mathcal{G}$, entonces cualquier subsucesión de $(x_n)_n$ también pertenece a $\mathcal{G}$.

3) Si $\mathrm{M} \subset \mathrm{C}\mathcal{W}(X,Y)$ es condicionalmente débil-equicompacto, entonces M es condicionalmente débil-equicompacto sobre cualquier clase $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{B}$ que cumpla la propiedad antes mencionada.

4) Si M es condicionalmente débil-equicompacto sobre $\mathcal{G}$ y $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$, entonces M es débil-equicompacto sobre $\mathcal{G}$ (lema 2.1.2). En particular, esto ocurre siempre que Y sea débil-secuencialmente completo. $\lhd$

Teorema 3.2.2. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{CW}(X,Y)$*. Son equivalentes:*

1.- M *es condicionalmente débil-equicompacto.*

2.- (*a*) *Toda sucesión acotada* $(x_n)_n \subset X$ *posee una subsucesión* $(x_{k(n)})_n$ *tal que* $(Tx_{k(n)})_n$ *es débil-Cauchy para todo* $T \in \mathrm{M}$*.*

(*b*) $\mathrm{M}^* y^*$ *es relativamente compacto para todo* $y^* \in Y^*$*.*

DEMOSTRACIÓN: Es prácticamente igual que la prueba del teorema 2.1.3. □

Nota 3.2.3. Haciendo los cambios necesarios, siguen siendo válidos en este contexto el lema 2.1.5, y los corolarios 2.1.6 y 2.1.8. ◁

Dos clases de sucesiones merecerán una especial atención:

– $w_0 = \Big\{(x_n)_n \subset X : (x_n)_n \xrightarrow{w} 0\Big\}$.

– $w\mathrm{c} = \{(x_n)_n \subset X : (x_n)_n$ es débil-Cauchy$\}$

Lema 3.2.4. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$*. Son equivalentes:*

1.- *Si* $(x_n)_n \in w_0$*, entonces* $(Tx_n)_n \xrightarrow{w} 0$ *uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$*.*

2.- M *es débil-equicompacto sobre* w_0*.*

3.- M *es condicionalmente débil-equicompacto sobre* w_0*.*

4.- *Si* $(x_n)_n \in w\mathrm{c}$*, entonces* $(Tx_n)_n$ *es débil-Cauchy uniformemente en* $T \in \mathrm{M}$*.*

5.- M *es condicionalmente débil-equicompacto sobre* $w\mathrm{c}$*.*

DEMOSTRACIÓN: $3 \Rightarrow 1$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$ y que $2 \Rightarrow 3$)

Supongamos que existen $(x_n)_n \in w_0$, $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M}$, $y^* \in Y^*$, $\varepsilon_0 > 0$ y $k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|\langle T_n x_{k(n)}, y^* \rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Como $(x_{k(n)})_n \xrightarrow{w} 0$, existe $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $(Tx_{k(h(n))})_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ y como $(Tx_{k(h(n))})_n \xrightarrow{w} 0$ para cada $T \in \mathrm{M}$, la convergencia débil a cero de $(Tx_{k(h(n))})_n$ es uniforme en $T \in \mathrm{M}$. En consecuencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|\langle Tx_{k(h(n))}, y^*\rangle| < \varepsilon_0$ para todo $T \in \mathrm{M}$. En particular, $|\langle T_{h(n_0)}x_{k(h(n_0))}, y^*\rangle| < \varepsilon_0$ lo cual, está en contradicción con $(*)$.

$1 \Rightarrow 4$ (es evidente que $4 \Rightarrow 5$ y que $5 \Rightarrow 3$)

Si $(x_n)_n \in wc$ y $(Tx_n)_n$ no es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$, existirán $\varepsilon_0 > 0$, $h, k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crecientes, $y^* \in Y^*$ y $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle T_n x_{h(n)} - T_n x_{k(n)}, y^*\rangle| > \varepsilon_0 \qquad (**)$$

Pero $(x_{h(n)} - x_{k(n)})_n \xrightarrow{w} 0$ y, entonces, $\lim_{n\to\infty} |\langle T(x_{h(n)} - x_{k(n)}), y^*\rangle| = 0$ uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ lo cual, está en contradicción con $(**)$. □

Corolario 3.2.5. *Si $X \not\hookleftarrow \ell_1$ y $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ es débil-equicompacto sobre w_0, entonces M es débil-equicompacto.*

Corolario 3.2.6. *Un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es débil-equicompacto sobre w_0 si y sólo si M^*y^* es uniformemente completamente continuo para todo $y^* \in Y^*$.*

Corolario 3.2.7. *Si X posee la propiedad de Schur, entonces todo conjunto acotado $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es débil-equicompacto sobre w_0.*

DEMOSTRACIÓN: Si M está acotado, entonces M^*y^* está acotado en X^* para todo $y^* \in Y^*$ y como X posee la propiedad de Schur, es uniformemente completamente continuo (lema A.2.1). □

Corolario 3.2.8. *Sea $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Si M^*y^* es limitado para todo $y^* \in Y^*$, entonces M es débil-equicompacto sobre w_0.*

Obsérvese que los conjuntos débil-equicompactos sobre w_0 son los conjuntos uniformemente débil-débil secuencialmente continuos. Tendremos ocasiones suficientes para comprobar que esta analogía formal con los conjuntos uniformemente completamente continuos es algo más que una simple coincidencia. Por ejemplo, el teorema 1.3.7 prueba que $X \not\hookleftarrow \ell_1$ si y sólo si, en $\mathcal{K}(X,Y)$, los conjuntos uniformemente completamente continuos y los equicompactos coinciden; si ahora tenemos en cuenta el corolario 3.2.5, la siguiente pregunta parece obligada: si en $\mathcal{W}(X,Y)$ coinciden los conjuntos débil-equicompactos sobre w_0 con los débil-equicompactos ¿necesariamente $X \not\hookleftarrow \ell_1$?

Teorema 3.2.9. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ se cumple que si M es débil-equicompacto en w_0, entonces M es débil-equicompacto.*

2.- *Existe un espacio de Banach Y tal que para todo $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ se cumple que si M es débil-equicompacto en w_0, entonces M^*y^* es relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$.*

3.- *X no contiene copia de ℓ_1.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo queda por probar que $2 \Rightarrow 3$

Sea $A \subset X^*$ uniformemente completamente continuo y tomemos $y_0 \in S_Y$ e $y_0^* \in S_{Y^*}$ tales que $\langle y_0, y_0^* \rangle = 1$. Si definimos $\mathrm{M} = A \otimes y_0$, el lema 1.3.6 asegura que M es uniformemente completamente continuo. En particular, esto implica que M es débil-equicompacto sobre w_0. Así pues, M^*y^* es relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$ y puesto que $\mathrm{M}^* = y_0 \otimes A$, se tiene que $\mathrm{M}^*y_0^* = \langle y_0, y_0^* \rangle A = A$, esto es, A es relativamente compacto y, por tanto, $X \not\hookleftarrow \ell_1$ (teorema A.1.6–(3)). $\square$

3.3. Conjuntos WOT y SOT secuencialmente compactos

Lema 3.3.1. *Sean $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ e $y^* \in Y^*$. Si M^*y^* es relativamente compacto y $(T_n^*y^*)_n \xrightarrow{w^*} 0$, entonces $(T_n^*y^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Si definimos φ y ϕ por

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon X & \longrightarrow & c_0 \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = (\langle x, T_n^*y^* \rangle)_n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \phi\colon \ell_1 & \longrightarrow & X^* \\ e_n & \longmapsto & \phi(e_n) = T_n^*y^* \end{array}$$

se comprueba fácilmente que ambos están acotados y que $\varphi^* = \phi$. Dado que M^*y^* es relativamente compacto, ϕ es compacto. Así pues, φ es compacto y, por tanto, existe $\alpha = (\alpha_n)_n \in c_0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in B_X$ se tiene que $|\langle x, T_n^*y^* \rangle| < \alpha_n$. En resumidas cuentas, $\|T_n^*y^*\| \leq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto implica que $(T_n^*y^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. $\square$

Corolario 3.3.2. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{CW}(X,Y)$ *condicionalmente débil-equicompacto. Si* M *o* M^* *es relativamente WOT-secuencialmente compacto, respectivamente en* $\mathcal{L}(X,Y)$ *o en* $\mathcal{L}(Y^*,X^*)$*, entonces* M^* *es relativamente SOT-secuencialmente compacto en* $\mathcal{L}(Y^*,X^*)$*.*

DEMOSTRACIÓN: Si $(T_n)_n \overset{WOT}{\to} 0$, es inmediato comprobar que $(T_n^* y^*)_n \overset{w^*}{\to} 0$ para todo $y^* \in Y^*$. Si $(T_n^*)_n \overset{WOT}{\to} 0$, entonces $(T_n^* y^*)_n \overset{w}{\to} 0$ para todo $y^* \in Y^*$. Puesto que $\mathrm{M}^* y^* + Q y^*$ es relativamente compacto para todo $y^* \in Y^*$ y todo $Q \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$ (teorema 3.2.2), podemos aplicar, en ambos casos, el lema 3.3.1. □

Lema 3.3.3. *Sean* $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *y* $x \in X$*. Si* $\mathrm{M}x$ *es relativamente compacto y* $(T_n x)_n \overset{w}{\to} 0$*, entonces* $(T_n x)_n \overset{\|\cdot\|}{\to} 0$*.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\lim_{n\to\infty} T_n x \neq 0$, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tales que $\left\|T_{k(n)} x\right\| > \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\mathrm{M}x$ es relativamente compacto, alguna subsucesión de $(T_{k(n)} x)_n$ debe ser convergente y como $(T_n x)_n \overset{w}{\to} 0$, la convergencia debe ser a cero lo cual es absurdo. □

Corolario 3.3.4. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$*. Si* M^* *es condicionalmente débil-equicompacto y* M *o* M^* *es relativamente WOT-secuencialmente compacto, entonces* M *es relativamente SOT-secuencialmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si $(T_n)_n \overset{WOT}{\to} 0$ o $(T_n^*)_n \overset{WOT}{\to} 0$, es inmediato comprobar que $(T_n x)_n \overset{w}{\to} 0$ para todo $x \in X$. Aplicamos ahora el teorema 3.2.2 y el lema 3.3.3. □

La propiedad débil del límite cruzado

En la página 39 definíamos la *propiedad del límite cruzado* y probábamos posteriormente que la equicompacidad más dicha propiedad equivale a compacidad (teorema 1.5.8). En el caso débil, la propiedad correspondiente no nos permite obtener un resultado equivalente para la débil-compacidad. Sin embargo, sí obtendremos un teorema análogo al corolario 1.5.9 para los conjuntos condicionalmente colectivamente débil-compactos (teorema 3.3.8).

Definición 3.3.5. Una sucesión $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ tiene la *propiedad débil del limite cruzado* si toda sucesión acotada $(x_n)_n \subset X$ posee una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(T_n x_{k(m)} - T_m x_{k(n)})_{n,m} \overset{w}{\to} 0$.

Definición 3.3.6. Un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ posee la *propiedad débil del límite cruzado* si toda sucesión $(T_n)_n \subset \mathrm{M}$ posee una subsucesión $(T_{h(n)})_n$ con la propiedad débil del límite cruzado.

Lema 3.3.7. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{CW}(X,Y)$*. Si* $(T_n)_n \subset \mathrm{M}$ *y* M *es condicionalmente débil-equicompacto, entonces son equivalentes:*

1.- $(T_n)_n$ *tiene la propiedad débil del límite cruzado.*

2.- $(T_n^*)_n$ *es SOT-convergente.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $(T_n^*)_n$ no es SOT-convergente, existen $\varepsilon_0 > 0$, $y^* \in Y^*$, $(x_n)_n \subset B_X$ y $h, k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crecientes tales que $|\langle x_n, (T_{k(n)}^* - T_{h(n)}^*)y^*\rangle| > \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Si $(x_{l(n)})_n$ es tal que $(T_n x_{l(m)} - T_m x_{l(n)})_{n,m} \xrightarrow{w} 0$, hacemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{x}_n = x_{l(n)}$, $k(l(n)) = p(n)$ y $h(l(n)) = q(n)$. Se tiene entonces que $(T_n \widehat{x}_m - T_m \widehat{x}_n)_{n,m} \xrightarrow{w} 0$, $(T\widehat{x}_n)_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$ y, además,

$$|\langle \widehat{x}_n, (T_{p(n)}^* - T_{q(n)}^*)y^*\rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces,

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{x}_n, (T_{p(n)}^* - T_{q(n)}^*)y^*\rangle| \;\leq\; & |\langle T_{p(n)}\widehat{x}_n - T_n\widehat{x}_{p(n)}, y^*\rangle| + |\langle T_n\widehat{x}_{p(n)} - T_n\widehat{x}_{q(n)}, y^*\rangle| \\ & + |\langle T_n\widehat{x}_{q(n)} - T_{q(n)}\widehat{x}_n, y^*\rangle| \end{aligned}$$

y haciendo $n \to \infty$, el primer y tercer sumando tienden a cero porque $(T_n)_n$ posee la propiedad débil del límite cruzado y el segundo, por ser M condicionalmente débil-equicompacto. Hemos obtenido una contradicción con $(*)$

$2 \Rightarrow 1$

Si $(x_n)_n \subset B_X$, existe $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Dados $\varepsilon > 0$ e $y^* \in Y^*$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ se cumple que $\|(T_n^* - T_m^*)y^*\| < \varepsilon/2$ y $|\langle Tx_{k(n)} - Tx_{k(m)}, y^*\rangle| < \varepsilon/2$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Así pues, tomando $n, m \geq n_0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |\langle T_n x_{k(m)} - T_m x_{k(n)}, y^*\rangle| &\leq |\langle T_n x_{k(m)} - T_n x_{k(n)}, y^*\rangle| + |\langle x_{k(n)}, (T_n^* - T_m^*)y^*\rangle| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

esto es, $(T_n)_n$ posee la propiedad débil del límite cruzado. $\square$

Teorema 3.3.8. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{CW}(X,Y)$ *condicionalmente débil-equicompacto. Si* M *o* M^* *es relativamente WOT-secuencialmente compacto, entonces* M *es condicionalmente colectivamente débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, M^* es relativamente SOT-secuencialmente compacto (corolario 3.3.2). Aplicando ahora el lema 3.3.7, concluimos que M posee la propiedad débil del límite cruzado. Sean $(T_n)_n \subseteq \mathrm{M}$ y $(x_n)_n \subset B_X$. Pasando a subsucesiones dos veces si fuera necesario, podemos asumir que $(T_n)_n$ posee la propiedad débil del límite cruzado y que $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Así pues, existe $k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $(T_n x_{k(m)} - T_m x_{k(n)})_{n,m} \xrightarrow{w} 0$. Si tomamos $y^* \in Y^*$ y $n,m \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle T_{k(n)}x_{k(n)} - T_{k(m)}x_{k(m)}, y^*\rangle| \ \leq\ & |\langle T_{k(n)}x_{k(n)} - T_n x_{k(n)}, y^*\rangle| \\
&+ |\langle T_n x_{k(n)} - T_n x_{k(m)}, y^*\rangle| \\
&+ |\langle T_n x_{k(m)} - T_m x_{k(n)}, y^*\rangle| \\
&+ |\langle T_m x_{k(n)} - T_{k(m)} x_{k(n)}, y^*\rangle| \\
&+ |\langle T_{k(m)} x_{k(n)} - T_{k(m)} x_{k(m)}, y^*\rangle|
\end{aligned}$$

Si ahora hacemos $n,m \to \infty$, el primer y cuarto sumando tienden a cero por ser $(T_n^*)_n$ SOT-Cauchy y el segundo y quinto sumando tienden a cero por ser M condicionalmente débil-equicompacto. Con anterioridad, vimos que el tercer sumando tiende a cero. En resumidas cuentas, $(T_{k(n)}x_{k(n)})_n$ es débil-Cauchy. □

Ejemplo 3.3.9. Sea $T_\beta\colon (\alpha_n)_n \in c_0 \longmapsto (\beta_n\alpha_n)_n \in c_0$ ($\beta = (\beta_n)_n \in c_0$). Si definimos $\mathrm{M} = \{T_\beta : \beta \in B_{c_0}\}$, es fácil comprobar que $\mathrm{M} \subset \mathcal{K}(c_0, c_0)$, M es débil-equicompacto y M y M^* son relativamente WOT-secuencialmente compactos. Sin embargo, M no es colectivamente débil-compacto pues $\bigcup_{\beta \in B_{c_0}} T_\beta(B_{c_0}) = B_{c_0}$. Así pues, la conclusión del teorema 3.3.8 no puede ser, en general, mejorada. ◁

3.4. Las topologías $\mathcal{T}_{wc}$ y $\mathcal{T}_{w_0}$ en $\mathcal{L}(X,Y)$

Al estudiar conjuntos débil-equicompactos sobre una determinada clase $\mathcal{G}$, es natural el considerar topologías que dependan de $\mathcal{G}$. En primer lugar, vamos a centrar nuestra atención sobre las propiedades que poseen los conjuntos débil-equicompactos sobre w_0 cuando los miramos como subconjuntos de $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$ o de $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$, esto es, cuando dotamos a $\mathcal{L}(X,Y)$ de la topología de la convergencia uniforme sobre los elementos de wc o de w_0 (ver sección A.4, página 110).

Lema 3.4.1. *Sean X e Y espacios de Banach. Son equivalentes:*

1.- *X es débil-secuencialmente completo.*

2.- $\mathcal{T}_{w_0} = \mathcal{T}_{wc}$ $[\mathcal{T}_{w_0}^{\|\cdot\|} = \mathcal{T}_{wc}^{\|\cdot\|}]$.

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Dada $(x_n)_n \in wc$, sea $x \in X$ tal que $(x_n)_n \xrightarrow{w} x$. Consideremos los conjuntos $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x_n - x : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Si $W = W(0; y^*, \varepsilon)$ (o $W = \varepsilon B_Y$), es inmediato el comprobar que $\mathbf{U}(B, \frac{1}{2}W) \subseteq \mathbf{U}(A, W)$, esto es, $\mathbf{U}(A, W) \in \mathcal{T}_{w_0}$ (o $\mathbf{U}(A, W) \in \mathcal{T}_{w_0}^{\|\cdot\|}$ si $W = \varepsilon B_Y$).

$2 \Rightarrow 1$

Dada $(x_n)_n \in wc$, existe $(z_n)_n \in w_0$ tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\text{aco}}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ (teorema A.4.1). Puesto que $(z_n)_n \xrightarrow{w} 0$, el conjunto $\overline{\text{aco}}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es débil-compacto y, por tanto, la sucesión $(x_n)_n$ posee una subsucesión débil-convergente. Pero entonces, $(x_n)_n$ converge débilmente (lema A.1.2). $\square$

Como acabamos de ver, la topología $\mathcal{T}_{wc}$ es, en general, estrictamente más fina que $\mathcal{T}_{w_0}$. También puede probarse fácilmente que la topología $\mathcal{T}_{w_0}$ es, en general, estrictamente mas fina que la WOT. Sin embargo, se tiene el resultado siguiente:

Teorema 3.4.2. *Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ es débil-equicompacto sobre w_0, entonces las topologías $\mathcal{T}_{wc}$, $\mathcal{T}_{w_0}$ y WOT coinciden sobre* M.

DEMOSTRACIÓN: Sólo necesitamos probar que todo $\mathcal{T}_{wc}-$entorno de cero en M es un WOT-entorno de cero en M. Bastará con considerar los entornos de la forma

$$\mathbf{U}(A, W) \cap \mathrm{M} = \{T \in \mathrm{M} : Tx_n \in W \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

en donde $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}, (x_n)_n \in wc\}$ y $W = W(0; y_1^*, \ldots, y_p^*, 1)$ (ver sección A.4). Sea pues $\mathbf{U}(A, W) \cap \mathrm{M}$ uno de tales entornos. Puesto que $(x_n)_n$ es débil-Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $|\langle Tx_n - Tx_m, y_i^* \rangle| \leq 1/2$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ y todo $T \in \mathrm{M}$. Finalmente, si $V = V(0; x_1, \ldots, x_{n_0}, y_1^*, \ldots, y_p^*, \frac{1}{2})$, $n > n_0$, $i \in \{1, \ldots, p\}$ y $T \in V \cap \mathrm{M}$, obtenemos que

$$|\langle Tx_n, y_i^* \rangle| \leq |\langle Tx_n - Tx_{n_0}, y_i^* \rangle| + |\langle Tx_{n_0}, y_i^* \rangle| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

lo cual, claramente implica que $V \cap \mathrm{M} \subseteq \mathbf{U}(A, W) \cap \mathrm{M}$. $\square$

Teorema 3.4.3. *Sean X e Y espacios de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Las sucesiones convergentes para las topologías $\mathcal{T}_{wc}$, $\mathcal{T}_{w_0}$ y WOT coinciden.*

2.- *Si $(x_n)_n \in w_0$, entonces el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es limitado.*

3.- *Si $(x_n)_n \in wc$, entonces el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es limitado.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $(x_n)_n \in w_0$ y el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es limitado, existe $(x_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(x_n^*)_n \stackrel{w^*}{\to} 0$ pero la convergencia a cero de $(\langle x_m, x_n^* \rangle)_n$ no es uniforme en $m \in \mathbb{N}$. Tomemos entonces $y_0 \in S_Y$ y consideremos la sucesión $(T_n)_n = (x_n^* \otimes y_0)_n$. Es fácil comprobar que $(T_n)_n \stackrel{WOT}{\to} 0$; sin embargo, $(T_n)_n$ no es $\mathcal{T}_{w_0}-$convergente.

$2 \Rightarrow 3$

Si $(x_n)_n \in wc$ y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es limitado, existen $(x_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(x_n^*)_n \stackrel{w^*}{\to} 0$, $\varepsilon_0 > 0$ y $h, k \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crecientes tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle x_{h(n)}, x_{k(n)}^* \rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \geq 1$ tal que $|\langle x_{h(n)}, x_{k(n+p_n)}^* \rangle| < \varepsilon_0/2$ pues $(x_n^*)_n \stackrel{w^*}{\to} 0$. Existe ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|\langle x_{h(n+p_n)} - x_{h(n)}, x_{k(n+p_n)}^* \rangle| < \varepsilon_0/2$ pues $(x_{h(n+p_n)} - x_{h(n)})_n \stackrel{w}{\to} 0$. Finalmente, tomando $n \geq n_0$, se tiene que

$$|\langle x_{h(n+p_n)}, x_{k(n+p_n)}^* \rangle| \;\leq\; |\langle x_{h(n+p_n)} - x_{h(n)}, x_{k(n+p_n)}^* \rangle| + |\langle x_{h(n)}, x_{k(n+p_n)}^* \rangle| < \varepsilon_0$$

lo cual, está en contradicción con $(*)$.

$3 \Rightarrow 1$

Si $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ y $(T_n)_n \stackrel{WOT}{\to} 0$, entonces $(T_n^* y^*)_n \stackrel{w^*}{\to} 0$ para todo $y^* \in Y^*$. Si $(T_n)_n$ no es $\mathcal{T}_{wc}-$convergente a cero, podremos encontrar $(x_n)_n \in wc$, $\varepsilon_0 > 0$, $y^* \in Y^*$ y dos aplicaciones $h, k \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crecientes tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga que $T_{h(n)} x_{k(n)} \notin W(0; y^*, \varepsilon_0)$. Así pues, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|\langle x_{h(n)}, T_{k(n)}^* y^* \rangle| = |\langle T_{k(n)} x_{h(n)}, y^* \rangle| > \varepsilon_0$$

lo cual es absurdo pues $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es limitado y $(T_{k(n)}^* y^*)_n \stackrel{w^*}{\to} 0$. $\square$

Corolario 3.4.4. *Si toda $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es $\mathcal{T}_{w_0}-$convergente siempre que sea WOT-convergente, entonces X posee la propiedad de Dunford-Pettis*.*

Teorema 3.4.5. *Sean X e Y espacios de Banach. Son equivalentes:*

1.- *Las sucesiones débil-convergentes en $\mathcal{L}(X,Y)$ son $\mathcal{T}_{wc}-$convergentes.*

2.- *Las sucesiones débil-convergentes en $\mathcal{L}(X,Y)$ son $\mathcal{T}_{w_0}-$convergentes.*

3.- *X posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Si X no posee la propiedad de Dunford-Pettis, existen $(x_n)_n \subset X$ y $(x_n^*)_n \subset X^*$ tales que $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x_n^*\rangle \neq 0$. Si $y_0 \in S_Y$ y definimos $(T_n)_n = (x_n^* \otimes y_0)_n$, es fácil probar que $(T_n)_n$ no es $\mathcal{T}_{w_0}-$convergente. Sin embargo, $(T_n)_n$ es débil-convergente. En efecto, el operador $\phi\colon X^* \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ definido, para cada $x^* \in X^*$, por $\phi(x^*) = x^* \otimes y_0$ es claramente acotado y $(T_n)_n = (\phi(x_n^*))_n$.

$3 \Rightarrow 1$

Si $(T_n)_n \subset \mathcal{L}(X,Y)$ y $(T_n)_n \xrightarrow{w} 0$, entonces $(T_n^* y^*)_n \xrightarrow{w} 0$ para todo $y^* \in Y^*$. Si $(T_n)_n$ no es $\mathcal{T}_{wc}-$convergente a cero, existen $(x_n)_n \in \mathcal{WC}$, $\varepsilon_0 > 0$, $y^* \in Y^*$ y $h,k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crecientes tales que $T_{h(n)}x_{k(n)} \notin W(0; y^*, \varepsilon_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|\langle x_{h(n)}, T_{k(n)}^* y^*\rangle| = |\langle T_{k(n)}x_{h(n)}, y^*\rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Pero como $(x_{h(n)})_n$ es débil-Cauchy, $(T_{k(n)}^* y^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y X posee la propiedad de Dunford-Pettis, $\lim_{n\to\infty}\langle x_{h(n)}, T_{k(n)}^* y^*\rangle = 0$ en contradicción con $(*)$. $\square$

3.5. Compacidad en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$ y $\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$

Teorema 3.5.1. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *un conjunto acotado. Son equivalentes:*

1.- M *es precompacto en* $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$.

2.- M *es precompacto en* $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$.

3.- M *es débil-equicompacto en* $\mathcal{W}_0$.

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Aplicaremos el teorema de Ascoli (teorema A.3.8) a los espacios uniformes $(X,\sigma(X,X^*))$ y $(Y,\sigma(Y,Y^*))$ considerando en $\mathcal{L}(X,Y)$ la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{W}_0$. En primer lugar, dicho teorema asegura que

$$\mathrm{M}_A = \{\ T|_A\colon (A,\sigma(X,X^*)|_A) \longrightarrow (Y,\sigma(Y,Y^*))\ ,\ T\in \mathrm{M}\ \}$$

es uniformemente equicontinuo para cada $A = \left\{x_n : n\in\mathbb{N},\ (x_n)_n \xrightarrow{w} 0\right\}$. Así pues, dados $A\in\mathcal{W}_0$, $\varepsilon>0$ e $y^*\in Y^*$ existe un débil-entorno de cero U tal que si $x_n - x_m\in U$, entonces $Tx_n - Tx_m \in W(0;y^*,\varepsilon/2)$ para todo $T\in\mathrm{M}$ y como $(x_n)_n$ es débil-Cauchy, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m\geq n_0$, entonces $x_n-x_m\in U$. En resumidas cuentas: $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T\in\mathrm{M}$. Pero entonces, M es débil-equicompacto en $\mathcal{W}_0$ (lema 3.2.4).

$3\Rightarrow 1$

Dado que en la topología débil los conjuntos acotados son precompactos [77, Cap III, prop 6], sólo hay que probar que M_A es uniformemente equicontinuo para cada $A\in\mathcal{W}\mathrm{c}$. Sea $\mathcal{B}\subset\sigma(X,X^*)$ una base de entornos de cero absolutamente convexos. Probaremos que dados $\varepsilon>0$, $(x_n)_n\subset X$ débil-Cauchy e $y^*\in Y^*$, existe $U\in\mathcal{B}$ tal que si $x_n-x_m\in U$, entonces $Tx_n-Tx_m\in W(0;y^*,\varepsilon)$ para todo $T\in\mathrm{M}$. En primer lugar, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m>n_0$, entonces $Tx_n-Tx_m\in W(0;y^*,\varepsilon)$ para todo $T\in\mathrm{M}$ (lema 3.2.4). Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_n\neq x_m$ si $n\neq m$. Si elegimos ahora $V_0\in\mathcal{B}$ de modo que

$$V_0\cap\{x_i-x_j : i\neq j \quad i,j\leq n_0\}=\emptyset$$

tenemos que si $n,m>n_0$, entonces $Tx_n-Tx_m\in W(0;y^*,\varepsilon)$ para todo $T\in\mathrm{M}$ y si $n,m\leq n_0$ y $n\neq m$, entonces $x_n-x_m\notin V_0$.

<u>CASO 1: $(x_n)_n \xrightarrow{w} x$</u>

Podemos suponer que $x_n\neq x$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea $V_1\in\mathcal{B}$ tal que

$$V_1\cap\{x_m - x : m\leq n_0\}=\emptyset \qquad (*)$$

Sea ahora $n_0^*>n_0$ tal que si $n>n_0^*$, se tenga que $x_n-x\in\frac{1}{2}V_1$. Pero entonces, $x_n-x_m\notin\frac{1}{2}V_1$ para todo $n>n_0^*$ y todo $m\leq n_0$. En efecto, si $n>n_0^*$, $m\leq n_0$ y $x_n-x_m\in\frac{1}{2}V_1$, entonces $(x_m-x_n)+(x_n-x)=x_m-x\in V_1$ lo cual, está en contradicción con $(*)$. Para finalizar, tomamos $V_2\in\mathcal{B}$ de modo que

$$V_2\cap\{x_n-x_m : m\leq n_0<n\leq n_0^*\}=\emptyset$$

y definimos $U=V_0\cap(\frac{1}{2}V_1)\cap V_2$. Es claro que U cumple las condiciones requeridas.

CASO 2: $(x_n)_n$ no converge débilmente

Para cada $m \leq n_0$, existen $U_m \in \mathcal{B}$ y $n_m^* > n_0$ tales que $x_n - x_m \notin \frac{1}{2}U_m$ para todo $n > n_m^*$. En efecto, para cada $V \in \mathcal{B}$ existe $n_v \in \mathbb{N}$ $(n_v > n_0)$ tal que si $n, n' > n_v$, entonces $x_n - x_{n'} \in \frac{1}{2}V$. Si para cada $V \in \mathcal{B}$ existe $n' > n_v$ tal que $x_{n'} - x_m \in \frac{1}{2}V$, entonces $x_n \in x_m + V$ para todo $n > n_v$, es decir, $(x_n)_n \xrightarrow{w} x_m$ lo cual es absurdo. Sea $n_0^* = \max\left\{n_1^*, \ldots, n_{n_0}^*\right\}$ y elijamos $V_2 \in \mathcal{B}$ tal que

$$V_2 \cap \{x_n - x_m : m \leq n_0 < n \leq n_0^*\} = \emptyset$$

Finalmente, definimos $U = V_0 \cap \left(\bigcap_{m=1}^{n_0} \frac{1}{2}U_m\right) \cap V_2$. Es claro que U cumple las condiciones requeridas. □

Corolario 3.5.2. *Si $X \not\hookrightarrow \ell_1$, un conjunto acotado $\mathrm{M} \subset \mathcal{W}(X,Y)$ es precompacto en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$ si y sólo si es débil-equicompacto.*

Queremos ahora usar el teorema 3.5.1 para caracterizar los conjuntos *compactos* en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$ y $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$. Puesto que dichos espacios $\underbrace{\text{no son}}$, en general, completos, tomaremos como marco de referencia el espacio $\mathcal{L}_{wc}(X,\widetilde{Y})$.

Lema 3.5.3. *Sean $\mathrm{M} \subset \mathrm{L}(X,Y)$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathbf{B}$. Si M es condicionalmente débil-equicompacto en $\mathcal{G}$, entonces $\overline{\mathrm{M}}^{WOT}$ es condicionalmente débil-equicompacto en $\mathcal{G}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $T \in \mathrm{M}$. Dados $\varepsilon > 0$ e $y^* \in Y^*$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ y para todo $T \in \mathrm{M}$, se tiene que $|\langle Tx_n - Tx_m, y^*\rangle| < \varepsilon/3$. Si $Q \in \overline{\mathrm{M}}^{WOT}$, para cada $n \geq n_0$, existe $T_n \in \mathrm{M}$ tal que $T_n \in Q + V(0; x_{n_0}, \ldots, x_n, y^*, \varepsilon/6)$. Así pues, si $n > m \geq n_0$, entonces $T_n - T_m \in V(0; x_{n_0}, \ldots, x_m, y^*, \frac{\varepsilon}{3})$. Si ahora tomamos $n > m \geq n_0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} |\langle Qx_n - Qx_m, y^*\rangle| &\leq |\langle Qx_n - T_nx_n, y^*\rangle| + |\langle T_nx_n - T_nx_m, y^*\rangle| \\ &\quad + |\langle T_nx_m - T_mx_m, y^*\rangle| + |\langle T_mx_m - Qx_m, y^*\rangle| \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon \end{aligned}$$

es decir, $(Qx_n)_n$ es débil-Cauchy uniformemente en $Q \in \overline{\mathrm{M}}^{WOT}$. □

Corolario 3.5.4. *Si $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es condicionalmente débil-equicompacto en $\mathcal{G}$, entonces $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$ y $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{w_0}}$ son condicionalmente débil-equicompactos en $\mathcal{G}$.*

Si un conjunto acotado $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es condicionalmente débil-equicompacto sobre $\mathcal{G}$, entonces $\overline{\mathrm{M}}^{WOT}$ y $\overline{\mathrm{M}}^{SOT}$ también son condicionalmente débil-equicompactos sobre $\mathcal{G}$. Sin embargo, sólo podemos asegurar que $\overline{\mathrm{M}}^{WOT} \subset \mathrm{L}_s(X,\widetilde{Y})$ (teorema A.4.5) mientras que $\overline{\mathrm{M}}^{SOT} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ (lema 3.5.9).

Lema 3.5.5. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *es acotado y* $\mathrm{M}x$ *es relativamente débil-compacto para todo* $x \in X$*, entonces se cumple:*

(1) $\overline{\mathrm{M}}^{WOT} \subset \mathcal{L}(X,Y)$.

(2) $\sup\{\|T\| : T \in \mathrm{M}\} = \sup\left\{\|Q\| : Q \in \overline{\mathrm{M}}^{WOT}\right\}$.

DEMOSTRACIÓN: (1) En primer lugar, el teorema A.4.5 asegura que

$$\mathcal{L}_s(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{L}_s(X,\widetilde{Y}) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{L}_s(X,\widetilde{Y})} = \mathrm{L}_s(X,\widetilde{Y})$$

Puesto que $\widetilde{Y}^* = Y^*$ [58, 3.4.4], la topología débil de $\widetilde{Y}$ es precisamente $\sigma(\widetilde{Y},Y^*)$ y se tiene que $\{W(0;y^*,\varepsilon) : y^* \in Y^*, \varepsilon > 0\}$ es una subbase de entornos de cero para dicha topología. Sea $Q \in \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{L}_s(X,\widetilde{Y})}$. Dados $x \in X$ e $y^* \in Y^*$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $T_\varepsilon \in \mathrm{M}$ tal que $T_\varepsilon \in Q + V(0;x,y^*,\varepsilon)$, esto es, $|\langle Qx - T_\varepsilon x, y^*\rangle| < \varepsilon$. En otras palabras, $Qx \in \overline{\mathrm{M}x}^{\sigma(\widetilde{Y},Y^*)}$.

Puesto que $\overline{\mathrm{M}x}^{\sigma(Y,Y^*)}$ es compacto, también es compacto para $\sigma(\widetilde{Y},Y^*)$ y, por tanto, es $\sigma(\widetilde{Y},Y^*)-$cerrado. Así pues, se tiene que

$$\overline{\mathrm{M}x}^{\sigma(\widetilde{Y},Y^*)} \subseteq \overline{\overline{\mathrm{M}x}^{\sigma(Y,Y^*)}}^{\sigma(\widetilde{Y},Y^*)} = \overline{\mathrm{M}x}^{\sigma(Y,Y^*)}$$

lo cual, implica que $Qx \in \overline{\mathrm{M}x}^{\sigma(Y,Y^*)}$. En resumidas cuentas, $Q \in \mathrm{L}(X,Y)$.

Sea $C = \sup_{T\in\mathrm{M}} \|T\|$. Dado $x \in B_X$, sea $y^* \in B_{Y^*}$ tal que $\|Qx\| = |\langle Qx, y^*\rangle|$. Para cada $\varepsilon > 0$, elijamos $T_\varepsilon \in \mathrm{M}$ tal que $T_\varepsilon \in Q + V(0;x,y^*,\varepsilon)$. Se tiene que

$$\|Qx\| = |\langle Qx, y^*\rangle| \leq |\langle Qx - T_\varepsilon x, y^*\rangle| + |\langle T_\varepsilon x, y^*\rangle| \leq \varepsilon + C$$

esto es, $Q \in \mathcal{L}(X,Y)$. Finalmente, puesto que ε puede ser elegido de forma arbitraria, se tiene que $\|Q\| \leq C$ y esto prueba (2). □

Corolario 3.5.6. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *es acotado y* $\mathrm{M}x$ *es relativamente débil-compacto para todo* $x \in X$*, entonces* $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$, $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{w_0}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$.

Teorema 3.5.7. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *un conjunto acotado. Son equivalentes:*

1.- M *es relativamente compacto en* $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$.

2.- M *es relativamente compacto en* $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$.

3.- (a) M *es débil-equicompacto en* w_0.

  (b) $\mathrm{M}x$ *es relativamente débil-compacto para todo* $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

El que se cumple la condición (a) es una consecuencia inmediata del teorema 3.5.1 pues todo conjunto compacto es precompacto. Para probar (b), definimos, para cada $x \in X$, la aplicación lineal $\phi_x \colon \mathcal{L}_{w_0}(X,Y) \longrightarrow (Y, \sigma(Y,Y^*))$ de forma que $\phi_x(T) = Tx$ para todo $T \in \mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$. Si $A \in w_0$ y $x \in A$, trivialmente se cumple que $\phi_x(\mathbf{U}(A,W)) \subseteq W$ para todo débil-entorno de cero $W \in \sigma(Y,Y^*)$. Así pues, ϕ_x es continua y, por tanto, $\phi_x(\mathrm{M}) = \mathrm{M}x$ es relativamente débil-compacto.

$3 \Rightarrow 1$

El corolario 3.5.6 asegura que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ y el corolario 3.5.4 que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$ es débil-equicompacto en w_0. Aplicando ahora el teorema 3.5.1, concluimos que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$ es precompacto en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$. Por otro lado, es evidente que

$$\mathcal{L}_{wc}(X,Y) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{L}_{wc}(X,Y)}$$

y, por tanto, $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$ es precompacto en $\widetilde{\mathcal{L}_{wc}(X,Y)}$. Pero, entonces, $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$ es compacto en $\widetilde{\mathcal{L}_{wc}(X,Y)}$ pues es un subconjunto precompacto y cerrado en un espacio completo [58, 3.5.1]. Dado que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}} \subset \mathcal{L}_{wc}(X,Y)$, tenemos que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$ es compacto en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$ y, por tanto, M es relativamente compacto en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$. $\square$

Compacidad en $\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$ y en $\mathcal{V}_{w_0}(X,Y_{\|\cdot\|})$

Todos los conceptos introducidos en las secciones 2.1 y 3.2 pueden formularse de forma totalmente análoga si consideramos en Y la topología de la norma. Usando este lenguaje, un conjunto $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ es uniformemente completamente continuo si y sólo si es equicompacto sobre w_0. Esta observación, motiva de forma natural la siguiente pregunta: ¿Es posible, en este caso, hacer un recorrido paralelo al de los teoremas 3.5.1 y 3.5.7 para obtener resultados de compacidad análogos en

$\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$ y $\mathcal{V}_{w_0}(X,Y_{\|\cdot\|})$? Aunque se necesita de cierto trabajo previo, la respuesta es, afortunadamente, afirmativa.

Vamos a considerar los espacios $\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$ y $\mathcal{V}_{w_0}(X,Y_{\|\cdot\|})$, esto es, el espacio $\mathcal{V}(X,Y)$ dotado de las topologías inducidas, respectivamente, por $\mathcal{F}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$ y $\mathcal{F}_{w_0}(X,Y_{\|\cdot\|})$ (en la sección A.4 se describen dichas topologías). En primer lugar, si $\mathcal{G}=wc$ o $\mathcal{G}=w_0$, el teorema A.4.2 asegura que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{V}(X,Y)$ y que $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Por otro lado, es claro que $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})\hookrightarrow\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})$ y, además, el teorema A.4.3 asegura que $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})$ es completo (naturalmente, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})$ es el conjunto $\mathcal{L}((X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|))$ con la topología inducida por $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})$).

Antes de seguir, recordemos que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ *no* depende de la topología definida en X aunque cuando aplicamos el teorema de Ascoli, la situación cambia. La idea que queremos expresar se pone más claramente de manifiesto si enunciamos el teorema de Ascoli de la siguiente forma: *"Fijada la familia $\mathcal{G}$ (y, por tanto, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$), sea τ una topología uniforme en X tal que los elementos de $\mathcal{G}$ sean precompactos en τ. Sea $H\subset\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})$ tal que para toda $h\in H$ y todo $A\in\mathcal{G}$, la restricción $h|_A:(A,\tau|_A)\longrightarrow(Y,\|\cdot\|)$ sea uniformemente continua........"*

Así pues, si queremos usar el teorema de Ascoli en este contexto, en principio, deberíamos considerar conjuntos de operadores en $\mathcal{L}((X,\sigma(X,X^*)),(Y,\|\cdot\|))$ que, en general, es diferente de $\mathcal{V}(X,Y)$. Sin embargo, si analizamos más a fondo esta cuestión, nos encontramos con que el punto de vista anterior es demasiado conservador. De hecho, el lema siguiente prueba que, si consideramos los espacios uniformes $(X,\sigma(X,X^*))$ y $(Y,\|\cdot\|)$, entonces, dado un conjunto $\mathrm{M}\subset\mathrm{L}(X,Y)$, el teorema de Ascoli es aplicable si y sólo si $\mathrm{M}\subset\mathcal{V}(X,Y)$.

Lema 3.5.8. *Sea $T\in\mathrm{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

1.- $T|_A\colon(A,\sigma(X,X^*)|_A)\longrightarrow(Y,\|\cdot\|)$ *es uniformemente continua para todo* $A\in wc$

2.- $T|_A\colon(A,\sigma(X,X^*)|_A)\longrightarrow(Y,\|\cdot\|)$ *es uniformemente continua para todo* $A\in w_0$

3.- $T\in\mathcal{V}(X,Y)$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $\mathrm{M}=\{T\}$. Salvo algunos reajustes obvios, podemos proceder, punto por punto, como en la demostración del teorema 3.5.1. Sólo tenemos que cambiar $W(0;y^*,\varepsilon)$ por εB_Y allí donde aparece. □

Resumiendo: usaremos el teorema de Ascoli en $\mathcal{V}_{wc}(X, Y_{\|\cdot\|})$ para obtener resultados de *precompacidad* y luego, usaremos la completitud de $\mathcal{L}_{wc}(X, Y_{\|\cdot\|})$ para obtener resultados de *compacidad*.

Lema 3.5.9. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *es acotado y* $x \in X$*, entonces se cumple:*

(1) $\overline{\mathrm{M}}^{SOT} \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

(2) *Si* $\mathrm{M}x$ *es relativamente compacto, entonces* $\overline{\mathrm{M}}^{SOT}x$ *es relativamente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Si $Q \in \overline{\mathrm{M}}^{SOT}$, entonces $Q \in \mathrm{L}(X, Y)$ pues Y es completo. Se sigue ahora como en la segunda parte de la prueba del lema 3.5.5.

(2) Dado $\varepsilon > 0$, existen $T_1, \ldots, T_N \in \mathrm{M}$ tales que

$$\mathrm{M}x \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B\left(T_i x; \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Si $Q \in \overline{\mathrm{M}}^{SOT}$, existen $T \in \mathrm{M}$ y $j \in \{1, \ldots, N\}$ tales que $\|Qx - Tx\| < \varepsilon/2$ y $Tx \in B(T_j x; \varepsilon/2)$. Así pues, $\|Qx - T_j x\| < \varepsilon$, es decir, $\overline{\mathrm{M}}^{SOT}x \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(T_i x; \varepsilon)$. $\square$

Corolario 3.5.10. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X, Y)$*,* $x \in X$ *y* $\mathrm{M}x$ *es relativamente compacto, entonces* $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{w0}^{\|\cdot\|}}x$ *y* $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}^{\|\cdot\|}}x$ *son relativamente compactos.*

Lema 3.5.11. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X, Y)$ *es uniformemente completamente continuo, entonces* $\overline{\mathrm{M}}^{SOT}$ *es uniformemente completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: Dados $\varepsilon > 0$, $(x_n)_n \subset X$ tal que $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$ y $Q \in \overline{\mathrm{M}}^{SOT}$, en primer lugar, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\|Tx_n\| < \varepsilon/2$ para todo $T \in \mathrm{M}$. Por otro lado, para cada $n \geq n_0$ existe $T_n \in \mathrm{M}$ tal que $T_n \in Q + V(0; x_n, \varepsilon/2)$ por lo que si tomamos $n \geq n_0$, obtenemos que

$$\|Qx_n\| \leq \|Qx_n - T_n x_n\| + \|T_n x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

esto es, $\overline{\mathrm{M}}^{SOT}$ es uniformemente completamente continuo. $\square$

Corolario 3.5.12. *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X, Y)$ *es uniformemente completamente continuo, entonces* $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{w0}^{\|\cdot\|}}$ *y* $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}^{\|\cdot\|}}$ *son uniformemente completamente continuos.*

Teorema 3.5.13. *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{V}(X,Y)$ *acotado. Son equivalentes:*

1.- M *es relativamente compacto en* $\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$.

2.- M *es relativamente compacto en* $\mathcal{V}_{w_0}(X,Y_{\|\cdot\|})$.

3.- (a) M *es uniformemente completamente continuo.*

(b) Mx *es relativamente compacto para cada* $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: $2 \Rightarrow 3$ (es evidente que $1 \Rightarrow 2$)

Aplicaremos el teorema de Ascoli (teorema A.3.8) a los espacios uniformes $(X,\sigma(X,X^*))$ y $(Y,\|\cdot\|)$ considerando en $\mathcal{V}(X,Y)$ la topología $\mathcal{T}_{w_0}^{\|\cdot\|}$. Es evidente que un conjunto es precompacto si es relativamente compacto por lo que en primer lugar, puesto que Y es completo, se tiene que Mx es relativamente compacto en Y para todo $x \in X$. La prueba de que M es uniformemente completamente continuo es muy parecida a la del teorema 3.5.1 ($2 \Rightarrow 3$) y la omitimos.

$3 \Rightarrow 1$

Puede demostrarse un lema análogo al lema 3.2.4 y, en particular, se tiene que M es equicompacto sobre w_0 si y sólo si es equicompacto sobre wc (no sólo condicionalmente, pues si $(x_n)_n$ es débil-Cauchy y $T \in \mathcal{V}(X,Y)$, entonces $(Tx_n)_n$ converge (lema A.1.3)). Ahora, un razonamiento similar al empleado en la demostración del teorema 3.5.1 ($3 \Rightarrow 1$), prueba que M es precompacto.

Los corolarios 3.5.10 y 3.5.12 nos permiten, repitiendo los argumentos anteriores, probar que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}^{\|\cdot\|}}$ es precompacto en $\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$. Puesto que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}^{\|\cdot\|}}$ es cerrado en el espacio completo $\mathcal{L}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$, se deduce que $\overline{\mathrm{M}}^{\mathcal{T}_{wc}}$ es compacto en $\mathcal{L}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$ y, por tanto, también es compacto en $\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$. Así pues, M es relativamente compacto en $\mathcal{V}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$. $\square$

Apéndice A

Resumen de resultados usados

El objetivo de este anexo es contribuir a hacer más cómoda la lectura de la presente memoria. Se trata de un resumen de los principales resultados usados a lo largo de la misma y no tiene pretensión alguna de originalidad. Los teoremas importantes se remiten a su prueba original mientras que para los lemas y teoremas más instrumentales, solemos incluir la correspondiente prueba.

A.1. Algunos resultados de carácter general

Lema A.1.1 (Argumento de la diagonal)**.** *Sean X un conjunto, Y un espacio topológico y $\mathrm{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ tal que el conjunto $\mathrm{H}(x) = \{h(x) : h \in \mathrm{H}\}$ sea secuencialmente compacto para cada $x \in X$. Si $(x_n)_n \subset X$, cualquier sucesión $(h_n)_n \subset \mathrm{H}$ posee una subsucesión $(h_{k(n)})_n$ tal que $(h_{k(n)}(x_m))_n$ converge para todo $m \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $(x_n)_n \subset X$ y $(h_n)_n \subset \mathrm{H}$. Como $\mathrm{H}(x_1)$ es secuencialmente compacto, existe $k_1 \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $(h_{k_1(n)}(x_1))_n$ converge. Llamemos k_0 a la identidad en $\mathbb{N}$ y supongamos construidas $k_1, \ldots, k_m$ tales que k_i es, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, una función creciente $k_i \colon \mathbb{N} \longrightarrow k_{i-1}(\mathbb{N})$ de tal forma que la sucesión $(h_{k_i(n)}(x_i))_n$ converge. Considerando ahora la sucesión $(h_{k_m(n)})_n$ y el hecho de que $\mathrm{H}(x_{m+1})$ es secuencialmente compacto, encontraremos una función creciente $k_{m+1} \colon \mathbb{N} \longrightarrow k_m(\mathbb{N})$ tal que $(h_{k_{m+1}(n)}(x_{m+1}))_n$ converge. Construida la sucesión $(k_n)_n$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $k(n) = k_n(n)$. Resulta ahora rutinario el probar que la sucesión $(h_{k(n)}(x_m))_n$ es convergente para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema A.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Si una sucesión $(x_n)_n \subset X$ es débil-Cauchy y existen una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ y un $x \in X$ tales que $(x_{k(n)})_n \xrightarrow{w} x$, entonces $(x_n)_n \xrightarrow{w} x$.*

Lema A.1.3. *Sean X e Y dos espacios de Banach, $(x_n)_n \subset X$ una sucesión acotada y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se verifica que:*

(1) *Si $(x_n)_n$ es débil-Cauchy, entonces $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy.*

(2) *Si $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy y $T \in \mathcal{W}(X, Y)$, entonces $(Tx_n)_n$ converge débilmente.*

(3) *Si $(x_n)_n$ es débil-Cauchy y $T \in \mathcal{W}(X, Y)$, entonces $(Tx_n)_n$ converge débilmente.*

(4) *Si $(Tx_n)_n$ es débil-Cauchy y $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, entonces $(Tx_n)_n$ converge.*

(5) *Si $(x_n)_n$ es débil-Cauchy y $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, entonces $(Tx_n)_n$ converge.*

(6) *Si $(x_n)_n$ es débil-Cauchy y $T \in \mathcal{V}(X, Y)$, entonces $(Tx_n)_n$ converge.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Basta con tener en cuenta que T es débil-débil continua y que si $n, m \to \infty$, entonces $(x_n - x_m)_{n,m} \xrightarrow{w} 0$.

(2) Como $T \in \mathcal{W}(X, Y)$, existe una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que $(Tx_{k(n)})_n$ converge débilmente. Basta ahora con aplicar el lema A.1.2.

(3) Es una consecuencia inmediata de (1) y (2)

(4) Si $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, entonces el apartado (2) prueba que existe $y \in Y$ tal que $(Tx_n)_n \xrightarrow{w} y$. Si $\lim_{n\to\infty} Tx_n \neq y$, existirá $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga que

$$\left\|Tx_{k(n)} - y\right\| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Como T es compacto, existirá $h \colon \mathbb{N} \longrightarrow k(\mathbb{N})$ creciente tal que $(Tx_{h(n)})_n$ converge. Pero como $(Tx_{h(n)})_n \xrightarrow{w} y$, debe ser necesariamente $\lim_{n\to\infty} Tx_{h(n)} = y$ lo cual, está en contradicción con $(*)$.

(5) Es una consecuencia inmediata de (1) y (4).

(6) Si $(Tx_n)_n$ no converge, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $h, k \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crecientes tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left\|Tx_{h(n)} - Tx_{k(n)}\right\| > \varepsilon_0$. Pero esto es absurdo pues $(x_{h(n)} - x_{k(n)})_n \xrightarrow{w} 0$. $\square$

Corolario A.1.4. *Todo operador compacto es completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Si $(x_n)_n \subset X$ es tal que $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, entonces $(Tx_n)_n \xrightarrow{w} 0$ pues T es débil-débil continuo, y como $(x_n)_n$ es débil-Cauchy, $(Tx_n)_n$ converge (lema A.1.3–(5)). Así pues, $(Tx_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. $\square$

Corolario A.1.5. *Si $T \in \mathcal{V}(X,Y)$ y $X \not\hookleftarrow \ell_1$, entonces $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_n)_n \subset X$ acotada. Como $X \not\hookleftarrow \ell_1$, existe $(x_{k(n)})_n$ débil-Cauchy y como $T \in \mathcal{V}(X,Y)$, $(Tx_{k(n)})_n$ converge (lema A.1.3–(6)). $\square$

Teorema A.1.6. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *$X \not\hookleftarrow \ell_1$.*

2.- *Para todo espacio de Banach Y se tiene que $\mathcal{K}(X,Y) = \mathcal{V}(X,Y)$* [79, Add.].

3.- *Todo subconjunto de X^* uniformemente completamente continuo es relativamente compacto* (G. Emmanuele [40, teorema 2]).

Nota A.1.7. La exigencia de que $\mathcal{K}(X,Y) = \mathcal{V}(X,Y)$ *para todo* Y en la condición (2) del teorema anterior no puede ser rebajada. Por ejemplo, si Y tiene dimensión finita, entonces $\mathcal{L}(\ell_1,Y) = \mathcal{K}(\ell_1,Y) = \mathcal{V}(\ell_1,Y)$. $\triangleleft$

Teorema A.1.8 ([79, pág 377])**.** *Sean X un espacio de Banach y $K \subset X$. Son equivalentes:*

1.- *K es condicionalmente débil-compacto.*

2.- *Para todo espacio de Banach Y y todo $T \in \mathcal{V}(X,Y)$ se cumple que $T(K)$ es relativamente compacto.*

Teorema A.1.9 ([34, XIII, Ex.2 (iii)])**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

1.- *$T \in \mathcal{CW}(X,Y)$.*

2.- *Existen un espacio de Banach $Z \not\hookleftarrow \ell_1$, $Q \in \mathcal{L}(X,Z)$ y $R \in \mathcal{L}(Z,Y)$ tales que $T = R \circ Q$* (obsérvese que $\mathcal{L}(X,Z) = \mathcal{CW}(X,Z)$ y $\mathcal{L}(Z,Y) = \mathcal{CW}(Z,Y)$).

Lema A.1.10. *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $(a_n^*)_n \subset X^*$, $(a_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$ para todo $x \in X$, entonces $T \in \mathcal{W}(X,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos:

$$\begin{array}{rrcl} Q\colon & X & \longrightarrow & c_0 \\ & x & \longmapsto & Qx = (\langle x, a_n^*\rangle)_n \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} S\colon & \{Qx : x \in X\} & \longrightarrow & Y \\ & (\langle x, a_n^*\rangle)_n & \longmapsto & S(\langle x, a_n^*\rangle)_n = Tx \end{array}$$

Q está bien definido, es lineal y $\|Q\| \leq \sup_n \|a_n^*\|$. También S está bien definido pues si $(\langle x, a_n^*\rangle)_n = (\langle z, a_n^*\rangle)_n$, entonces $\|T(x-z)\| \leq \sup_n |\langle x-z, a_n^*\rangle| = 0$. Como

$$\|S(\langle x, a_n^*\rangle)_n\| = \|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle| = \|(\langle x, a_n^*\rangle)_n\|_\infty$$

se sigue que $\|S\| \leq 1$. Podemos pues, extender S al subespacio $F = \overline{\{Qx : x \in X\}}$ de c_0. Si $(e_m)_m$ es la base canónica de ℓ_1, se comprueba fácilmente que $Q^* e_m = a_m^*$ y como $\{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débil-compacto, Q^* es débil-compacto. $\square$

Teorema A.1.11. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

1.- *$T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

2.- *Existe $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ y $\|Tx\| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$ para todo $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Como T^* es compacto, existe una sucesión $(a_n^*)_n \subset X^*$ tal que $(a_n^*)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ y $T^*(B_{Y^*}) \subseteq \overline{\text{co}}\,\{a_n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Así pues, para todo $x \in X$ se tiene que

$$\|Tx\| = \sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle Tx, y^*\rangle| = \sup_{x^* \in T^*(B_{Y^*})} |\langle x, x^*\rangle| \leq \sup_n |\langle x, a_n^*\rangle|$$

$2 \Rightarrow 1$

Cambiando algún detalle, podemos repetir aquí la prueba del lema A.1.10. $\square$

Una nota sobre el espacio $\ell_\infty(I)$

Definición A.1.12. Sea $I \neq \emptyset$. Un conjunto $K \subset \ell_\infty(I)$ es *equivariante* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición $\{D_1, \ldots, D_p\}$ de I tal que para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ se cumple que si $u, v \in D_i$, entonces $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ para todo $f \in K$.

Teorema A.1.13 (K.Vala [87]). *Sean $I \neq \emptyset$ y $K \subset \ell_\infty(I)$. Son equivalentes:*

1.- *K es relativamente compacto.*

2.- (a) *K es equivariante.*

(b) *$Ku = \{f(u) : f \in K\}$ está acotado para cada $u \in I$.*

Lema A.1.14. *Sean $(\widehat{x}_n)_n \subset \ell_\infty(I)$ acotada y $\widehat{x} = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I)$. Son equivalentes:*

1.- *$(\widehat{x}_n)_n \xrightarrow{w^*} \widehat{x}$.*

2.- *$\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = x_i$ para todo $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

$x_j = \langle e_j, (x_i)_{i\in I}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle e_j, (x_i^n)_{i\in I}\rangle = \lim_{n\to\infty} x_j^n$

$2 \Rightarrow 1$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $(\widehat{x}_n)_n \subset B_{\ell_\infty(I)}$ (en particular, esto implica que también $\widehat{x} \in B_{\ell_\infty(I)}$). Sea $\widehat{\alpha} \in B_{\ell_1(I)}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $J \subset I$ finito tal que $\sum_{i\notin J} |\alpha_i| < \varepsilon/4$. Fijado J, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|x_i^n - x_i| < \varepsilon/2$ para todo $i \in J$. Así pues, tomando $n \geq n_0$ se obtiene que

$$|\langle\widehat{\alpha}, \widehat{x}_n - \widehat{x}\rangle| \leq \sum_{i\in J} |x_i^n - x_i||\alpha_i| + \sum_{i\notin J} |x_i^n - x_i||\alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

esto es, $(\widehat{x}_n)_n \xrightarrow{w^*} \widehat{x}$. □

A.2. Las propiedades de Schur, de Dunford-Pettis y rDP

Lema A.2.1. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *X posee la propiedad de Schur.*

2.- *Todo conjunto acotado en X^* es uniformemente completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $A \subset X^*$ es acotado, sea $C = \sup_{x^* \in A} \|x^*\|$. Consideremos $(x_n)_n \subset X$ con $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Al ser X de Schur, se tiene que $(x_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Dado pues $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $\|x_n\| < \varepsilon / C$. Así pues, si $x^* \in A$ y $n \geq n_0$

$$|x^*(x_n)| \leq \|x^*\| \, \|x_n\| \leq C \, \|x_n\| < \varepsilon$$

esto es, A es uniformemente completamente continuo.

$2 \Rightarrow 1$

Si $(x_n)_n \subset X$ y $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$, sea $(x_n^*)_n \subset S_{X^*}$ tal que $\langle x_n, x_n^* \rangle = \|x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Al ser $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ acotado, es uniformemente completamente continuo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $|\langle x_n, x_m^* \rangle| < \varepsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En particular, $\|x_n\| = \langle x_n, x_n^* \rangle < \varepsilon$ si $n \geq n_0$, esto es, $(x_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. □

Definición A.2.2. Sea X un espacio de Banach.

(1) El espacio X posee la *propiedad de Dunford-Pettis* si para todo espacio de Banach Y se verifica que $\mathcal{W}(X,Y) \subseteq \mathcal{V}(X,Y)$.

(2) El espacio X posee la *propiedad recíproca de Dunford-Pettis* si para todo espacio de Banach Y se verifica que $\mathcal{V}(X,Y) \subseteq \mathcal{W}(X,Y)$.

Teorema A.2.3 ([35]). *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *X posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

2.- *Si $(x_n)_n$ es débil-Cauchy y $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n^* \rangle = 0$.*

3.- *Si $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$ y $(x_n^*)_n$ es débil-Cauchy, entonces $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n^* \rangle = 0$.*

4.- *Si $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$ y $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n^* \rangle = 0$.*

Corolario A.2.4. *Si X^* posee la propiedad de Dunford-Pettis, entonces también X posee dicha propiedad.*

Teorema A.2.5 ([79, pág. 377]). *En todo espacio de Banach, los conjuntos de Dunford-Pettis son condicionalmente débil-compactos.*

Teorema A.2.6. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *X posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

2.- *Todo subconjunto condicionalmente débil-compacto de X es de Dunford-Pettis.*

3.- *Todo subconjunto relativamente débil-compacto de X es de Dunford-Pettis.*

4.- *Todo subconjunto relativamente débil-compacto de X^* es uniformemente completamente continuo.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Sea $K \subset X$ condicionalmente débil-compacto. Si K no es un conjunto de Dunford-Pettis, deben existir $\varepsilon_0 > 0$, $(x_n^*)_n \subset X^*$ con $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$ y $(x_n)_n \subseteq K$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que

$$|\langle x_n, x_n^* \rangle| > \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Pero existe una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ débil-Cauchy y puesto que X posee la propiedad de Dunford-Pettis, $\lim_{n\to\infty} \langle x_{k(n)}, x_{k(n)}^* \rangle = 0$ lo cual, contradice $(*)$.

$3 \Rightarrow 4$ (es evidente que $2 \Rightarrow 3$)

Sea $A \subset X^*$ relativamente débil-compacto y supongamos que existen $\varepsilon_0 > 0$, $(x_n)_n \subset X$ con $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$ y $(a_n^*)_n \subset A$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que

$$|\langle x_n, a_n^* \rangle| > \varepsilon_0 \qquad (**)$$

Sean $a^* \in X^*$ y $k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tales que $(a_{k(n)}^*)_n \xrightarrow{w} a^*$. Puesto que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es de Dunford-Pettis, $\lim_{n\to\infty} \langle x_m, a_{k(n)}^* - a^* \rangle = 0$ uniformemente en $m \in \mathbb{N}$. En particular, $\lim_{n\to\infty} \langle x_{k(n)}, a_{k(n)}^* - a^* \rangle = 0$ y como $\lim_{n\to\infty} \langle x_{k(n)}, a^* \rangle = 0$, debe ser $\lim_{n\to\infty} \langle x_{k(n)}, a_{k(n)}^* \rangle = 0$ lo cual, está en contradicción con $(**)$.

$4 \Rightarrow 1$

Sean $(x_n)_n \subset X$ con $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$ y $(x_n^*)_n \subset X^*$ con $(x_n^*)_n \xrightarrow{w} 0$. El conjunto $A = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débil-compacto y, por tanto, es uniformemente completamente continuo. Así pues, $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x^* \rangle = 0$ uniformemente en $x^* \in A$. En particular, $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n^* \rangle = 0$. $\square$

Corolario A.2.7. *Si X posee la propiedad de Schur, entonces X posee la propiedad de Dunford-Pettis.*

Hay una evidente simetría entre las propiedades de Dunford-Pettis y recíproca de Dunford-Pettis. Sin embargo, dicha simetría no es total. Por ejemplo, no podemos probar la correspondiente equivalencia contenida en el teorema A.2.6–(2) y tampoco existe un enunciado equivalente al corolario A.2.4.

El siguiente teorema se debe a T. Leavelle pese a lo cual, incluimos su demostración. Se hace de este modo porque no hemos podido localizar, en las bases de datos a las que tenemos acceso, el artículo original. Las referencias a dicho artículo son a través de terceros (por ejemplo [40] y [47]) y en ellas, dicho artículo se cita como "*por aparecer*". Basándonos en dichas referencias, suponemos que la prueba original emplea una técnica de demostración similar a la que aquí presentamos.

Teorema A.2.8. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

1.- *X posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis.*

2.- *Todo subconjunto de X^* uniformemente completamente continuo es relativamente débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$

Si $A \subset X^*$ es uniformemente completamente continuo, es fácil ver que

$$\begin{aligned} V\colon X &\longrightarrow \ell_\infty(A) \\ x &\longmapsto Vx = (\langle x, a\rangle)_{a\in A} \end{aligned}$$

es completamente continuo. Así pues, V es débil-compacto y, por tanto, también es débil-compacto el operador $U = V^*|_{\ell_1(A)}$ (obsérvese que $\ell_1(A) \hookrightarrow \ell_\infty(A)^*$). Un razonamiento similar al empleado en la prueba del teorema 1.1.11, nos permite ahora probar fácilmente que $A \subseteq U(B_{\ell_1(A)})$.

$2 \Rightarrow 1$

Sean Y un espacio de Banach arbitrario, $T \in \mathcal{V}(X,Y)$ y $(x_n)_n \subset X$ tal que $(x_n)_n \xrightarrow{w} 0$. Si $y^* \in B_{Y^*}$, tenemos que

$$|\langle x_n, T^*y^*\rangle| = |\langle Tx_n, y^*\rangle| \leq \|Tx_n\|$$

lo cual, implica que $\lim_{n\to\infty} |T^*y^*(x_n)| = 0$ uniformemente en $y^* \in B_{Y^*}$, esto es, el conjunto $T^*(B_{Y^*})$ es uniformemente completamente continuo y, por tanto, es relativamente débil-compacto. En otras palabras, T^* es débil-compacto. $\square$

Corolario A.2.9. *Si X es infinito-dimensional y posee la propiedad de Schur, entonces X no posee la propiedad recíproca de Dunford-Pettis.*

DEMOSTRACIÓN: Si X posee la propiedad de Schur y la propiedad recíproca de Dunford-Pettis, entonces B_{X^*} es uniformemente completamente continuo (lema A.2.1) y, por tanto, es relativamente débil-compacto (teoremaA.2.8). Así pues, X^* (y por tanto X) debe ser reflexivo. Sin embargo, ningún espacio reflexivo de dimensión infinita posee la propiedad de Schur. $\square$

A.3. Espacios uniformes

Definición A.3.1. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{U} = \{V_i \subset X \times X : i \in I\}$ es una *uniformidad* en X si:

(1) $\Delta \subseteq V$ para todo $V \in \mathcal{U}$ $[\Delta = \{(x, x) : x \in X\}]$.

(2) Si $V \in \mathcal{U}$, entonces $V^{-1} \in \mathcal{U}$ $[V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in V\}]$.

(3) Para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $V' \in \mathcal{U}$ tal que $V' \circ V' \subseteq V$ $[(x, y) \circ (y, z) = (x, z)]$.

(4) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$.

(5) Si $V \subseteq M$ y $V \in \mathcal{U}$, entonces $M \in \mathcal{U}$.

Al par $(X, \mathcal{U})$ se le denomina *espacio uniforme*.

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Para cada $V \in \mathcal{U}$ y cada $x \in X$, se define $V(x) = \{y \in X : (x, y) \in V\}$. La familia $\{V(x) : x \in X, V \in \mathcal{U}\}$ es una base de entornos de una topología en X a la que llamaremos $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Sea $D = \{d_i : i \in I\}$ una familia de semidistancias en X. Para cada $r > 0$ y cada $i \in I$, se define el conjunto $B_{r,i} = \{(x, y) : d_i(x, y) < r\}$. La familia $\{B_{r,i} : r > 0, i \in I\}$ es subbase de una uniformidad en X que denotaremos por $\mathcal{U}_D$. Además, todo espacio uniforme puede ser obtenido a partir de una familia de semidistancias [61, cap. 6].

Si X es un espacio localmente convexo y $\mathcal{B}$ es una base de entornos de cero, entonces el conjunto $\mathcal{U} = \{\{(x, y) \in X \times X : x - y \in V\} : V \in \mathcal{B}\}$ es una base para la uniformidad de X.

Definición A.3.2. Dados dos espacios uniformes $(X, \mathcal{U})$, (Y, Λ) y una función $f\colon X \longrightarrow Y$, decimos que f es *uniformemente continua* si, para cada $W \in \Lambda$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que si $(x, x') \in V$, entonces $(f(x), f(x')) \in W$.

Definición A.3.3. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio de Hausdorff uniforme. El espacio X es *precompacto* si para todo $V \in \mathcal{U}$ existen $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} V(x_i)$.

La topología de la convergencia uniforme en $\mathcal{F}(X, Y)$

Sea X un conjunto e (Y, Λ) un espacio uniforme. Para cada $W \in \Lambda$, se define

$$\mathbf{U}(W) = \{(f, g) \in \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(X, Y) : (f(x), g(x)) \in W \text{ para todo } x \in X\}$$

Se prueba sin dificultad que, para cualesquiera $W, W' \in \Lambda$, se cumple:

(1) $(f, f) \in \mathbf{U}(W)$ para todo $f \in \mathcal{F}(X, Y)$.

(2) $\mathbf{U}(W)^{-1} = \mathbf{U}(W^{-1})$.

(3) $\mathbf{U}(W \circ W') \supseteq \mathbf{U}(W) \circ \mathbf{U}(W')$.

(4) $\mathbf{U}(W \cap W') = \mathbf{U}(W) \cap \mathbf{U}(W')$

lo cual, implica que el conjunto $\{\mathbf{U}(W) : W \in \Lambda\}$ es base de una uniformidad en $\mathcal{F}(X, Y)$. El espacio uniforme obtenido por este método será denotado por $\mathcal{F}_\Lambda(X, Y)$. A la topología asociada a esta uniformidad se la conoce como la *topología de la convergencia uniforme*. Obsérvese que

$$\mathbf{U}(W)(f) = \{g \in \mathcal{F}(X, Y) : g(x) \in W(f(x)) \text{ para todo } x \in X\}$$

En particular, $(f_n)_n \xrightarrow{\Lambda} f$ si y sólo si, para cada $W \in \Lambda$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $f_n(x) \in W(f(x))$ para todo $x \in X$.

La topología $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ en $\mathcal{F}(X, Y)$

Sea X un conjunto, $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de X e (Y, Λ) un espacio uniforme. Para cada $A \in \mathcal{G}$ y cada $W \in \Lambda$, se define

$$\mathbf{U}(A, W) = \{(f, g) \in \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(X, Y) : (f(x), g(x)) \in W \text{ para todo } x \in A\}$$

Se prueba sin dificultad que, para cualesquiera $A \in \mathcal{G}$ y $W, W' \in \Lambda$, se cumple:

(1) $(f, f) \in \mathbf{U}(A, W)$ para todo $f \in \mathcal{F}(X, Y)$.

(2) $\mathbf{U}(A, W)^{-1} = \mathbf{U}(A, W^{-1})$.

(3) $\mathbf{U}(A, W \circ W') \supseteq \mathbf{U}(A, W) \circ \mathbf{U}(A, W')$.

lo cual, implica que el conjunto $\{\mathbf{U}(A, W) : A \in \mathcal{G}, W \in \Lambda\}$ es subbase de una uniformidad en $\mathcal{F}(X, Y)$. El correspondiente espacio uniforme se denota por $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(X, Y)$; la topología asociada a la uniformidad se conoce como *topología de la convergencia uniforme sobre los elementos de* $\mathcal{G}$ y la denotamos por $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$. Obsérvese también que

$$\mathbf{U}(A, W)(f) = \{g \in \mathcal{F}(X, Y) : g(x) \in W(f(x)) \text{ para todo } x \in A\}$$

En particular, $(f_n)_n \xrightarrow{\mathcal{G}} f$ si y sólo si, para cada $A \in \mathcal{G}$ y cada $W \in \Lambda$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $f_n(x) \in W(f(x))$ para todo $x \in A$.

Teorema A.3.4 ([16, TG X.3, prop 1])**.** *Si Y es separado y $\mathcal{G}$ es un recubrimiento de X, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ es separado.*

Nota A.3.5. Es claro que si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} \preccurlyeq \mathcal{T}_{\mathcal{G}'}$. Sin embargo, hay un caso importante en el que podemos añadir conjuntos a $\mathcal{G}$ sin afectar por ello a la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$. En efecto, se sigue inmediatamente de las definiciones que

(1) Si $B \subset A$, entonces $\mathbf{U}(A, W) \subseteq \mathbf{U}(B, W)$

(2) $\mathbf{U}(A_1 \cup A_2, W) = \mathbf{U}(A_1, W) \cap \mathbf{U}(A_2, W)$

lo cual, implica que la topología de la $\mathcal{G}$-convergencia uniforme no cambia si a la familia $\mathcal{G}$ se añaden las uniones finitas de elementos de $\mathcal{G}$ y todos los subconjuntos de dichas uniones. En particular, este razonamiento prueba que, para toda familia $\mathcal{G}$, la topología de la convergencia uniforme es más fina que la topología de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{G}$. $\triangleleft$

Equicontinuidad: el teorema de Ascoli

Definición A.3.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, (Y, Λ) un espacio uniforme y $x_0 \in X$. Un conjunto $\mathrm{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ es *equicontinuo en* x_0 si, para todo $W \in \Lambda$, existe $V(x_0) \subset X$, entorno de x_0, tal que para todo $x \in V(x_0)$ y toda $f \in \mathrm{H}$, se tiene que $f(x) \in W(f(x_0))$.

Definición A.3.7. Si $(X, \mathcal{U})$ e (Y, Λ) son espacios uniformes, $\mathrm{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ es *uniformemente equicontinuo* si, para todo $W \in \Lambda$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que para todo $(x, x') \in V$ y toda $f \in \mathrm{H}$, se tiene que $(f(x), f(x')) \in W$.

Es claro que si H es equicontinuo en X, entonces $\mathrm{H} \subset C(X, Y)$; si es uniformemente equicontinuo, entonces las funciones de H son uniformemente continuas. Sin embargo, puede haber conjuntos de funciones uniformemente continuas que sean equicontinuos en X y que no sean uniformemente equicontinuos.

Teorema A.3.8 (Ascoli [16, T.G. X.17, teor 2])**.** *Sean X e Y dos espacios uniformes, $\mathcal{G}$ un recubrimiento de X formado por conjuntos precompactos y* H *un conjunto de aplicaciones de X en Y tal que para toda $h \in \mathrm{H}$ y todo $A \in \mathcal{G}$, la restricción $h|_A$ de h al conjunto A sea uniformemente continua. Son equivalentes:*

1.- H *es precompacto en la topología de la $\mathcal{G}$-convergencia uniforme.*

2.- (*a*) $\mathrm{H}|_A = \{h|_A : h \in \mathrm{H}\}$ *es uniformemente equicontinuo para todo $A \in \mathcal{G}$.*

(*b*) $\mathrm{H}(x) = \{h(x) : h \in \mathrm{H}\}$ *es precompacto para todo $x \in X$.*

En las aplicaciones, a menudo se presenta el caso en el que X es un espacio métrico compacto e Y es un espacio de Banach. Recordemos que el espacio $C(X, Y)$ con las operaciones habituales y dotado de la norma del supremo ($\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$), es un espacio de Banach. Además, se cumple que:

(1) Si $f \in C(X, Y)$, entonces f es uniformemente continua.

(2) La topología inducida en $C(X, Y)$ por la norma del supremo coincide con la topología de la convergencia uniforme.

(3) Si $\mathrm{H} \subset C(X, Y)$ es equicontinua en X, entonces H es uniformemente equicontinua [16, T.G. X.12, cor 2].

Tenemos, entonces, la siguiente versión del teorema de Ascoli:

Teorema A.3.9 (Ascoli [27, pág141, teor 7.5.7])**.** *Sea X un espacio métrico compacto, Y un espacio de Banach y $\mathrm{H} \subset C(X, Y)$. Son equivalentes:*

1.- H *es relativamente compacto en $(C(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$.*

2.- (*a*) H *es equicontinuo en X.*

(*b*) $\mathrm{H}(x) = \{h(x) : h \in \mathrm{H}\}$ *es relativamente compacto para todo $x \in X$.*

A.4. Topologías uniformes en $\mathcal{L}(X,Y)$

Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos (salvo indicación en contra, asumiremos que todos los espacios considerados son de Hausdorff) y $\mathcal{L}(X,Y)$ el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y. Sea $\mathcal{G}$ una familia de conjuntos acotados en X tal que $\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A = X$. Llamaremos $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ al espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ dotado de la topología de la $\mathcal{G}$-convergencia uniforme, esto es, mirado como subespacio topológico de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(X,Y)$.

OBSERVACIONES:

1) No hay restricción al suponer que la familia $\mathcal{G}$ es cerrada para las uniones finitas (ver nota A.3.5).

2) La topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ es localmente convexo [63, Cap. 8 - § 39 (1)].

3) La topología de X no juega ningún papel en la construcción de $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$. Únicamente influye en el *tamaño* de $\mathcal{L}(X,Y)$. $\triangleleft$

Sea $\mathcal{B}$ una base de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados en Y (una tal base siempre existe [81, pág. 10]). Si $A\in\mathcal{G}$ y $W(0)\in\mathcal{B}$, es evidente que

$$\mathbf{U}(A,W)(0)=\{T\in\mathcal{L}(X,Y):T(A)\subseteq W(0)\}$$

Por economía de notación, escribiremos $\mathbf{U}(A,W)$ en vez de $\mathbf{U}(A,W)(0)$. Puede probarse sin dificultad que se cumple:

1) $\mathbf{U}(A,W)$ es absorbente.

2) $\mathbf{U}(A,W)$ es absolutamente convexo.

3) $\mathbf{U}(A_1\cup A_2, W_1\cap W_2)\subseteq \mathbf{U}(A_1,W_1)\cap\mathbf{U}(A_2,W_2)$.

4) $\rho\mathbf{U}(A,W)=\mathbf{U}(A,\rho W)$

5) $\bigcap_{\substack{A\in\mathcal{G}\\ W(0)\in\mathcal{B}}}\mathbf{U}(A,W)=\{0\}$

es decir, el conjunto $\{\mathbf{U}(A,W): A\in\mathcal{G}, W(0)\in\mathcal{B}\}$ es una base de entornos de cero absolutamente convexos en $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$.

Sea $\mathcal{G}$ un recubrimiento de X formado por conjuntos acotados. Decimos que $\mathcal{G}$ es una *familia saturada* si verifica las condiciones siguientes:

(a) Si $A \in \mathcal{G}$, entonces $\rho A \in \mathcal{G}$ para todo $\rho > 0$.

(b) Si $A \in \mathcal{G}$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathcal{G}$.

(c) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$, entonces $\overline{\text{aco}}\,\{A_1 \cup A_2\} \in \mathcal{G}$.

Dada una familia $\mathcal{G}$, se define la *envolvente saturada* de $\mathcal{G}$, que denotaremos por $\widetilde{\mathcal{G}}$, como la intersección de todas las familias saturadas que contienen a $\mathcal{G}$.

Teorema A.4.1 ([63, Cap. 8 - § 39 (2)])**.** *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos y $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos recubrimientos de X formados por conjuntos acotados. Son equivalentes:*

1.- $\mathcal{L}_{\mathcal{G}_1}(X,Y) = \mathcal{L}_{\mathcal{G}_2}(X,Y)$.

2.- $\widetilde{\mathcal{G}}_1 = \widetilde{\mathcal{G}}_2$.

Teorema A.4.2 (Bourbaki [17, TVS III.13, p.1 y cor])**.** *Sea $\mathcal{H}(X,Y)$ un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(X,Y)$. La topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{H}(X,Y)$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ es localmente convexo, si y sólo si $T(A)$ es acotado en Y para todo $A \in \mathcal{G}$ y todo $T \in \mathcal{H}(X,Y)$.*

Teorema A.4.3 (Bourbaki [17, TVS III.23, p.12])**.** *Si X es un espacio bornológico localmente convexo, Y un espacio localmente convexo completo y $\mathcal{G}$ una familia de acotados en X que contiene a las sucesiones nulas, entonces $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ es completo.*

Topologías en $\mathcal{L}(X,Y)$ cuando X e Y son espacios de Banach

Si X e Y son espacios de Banach y $T\colon X \longrightarrow Y$ es lineal, se cumple que T es débil-débil continuo si y sólo si T es continuo para las topologías de las normas, esto es, $\mathcal{L}((X,\sigma(X,X^*)),(Y,\sigma(Y,Y^*))) = \mathcal{L}((X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|))$. Tomaremos pues, operadores de $\mathcal{L}(X,Y)$, familias de conjuntos acotados en X y entornos de cero pertenecientes a la topología $\sigma(Y,Y^*)$ o a la topología de la norma en Y.

Como ya se ha señalado, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ sólo depende de la familia $\mathcal{G}$ y de la topología de Y. Para evitar confusiones, adoptaremos el siguiente convenio: cuando consideremos en Y la topología débil, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ será el espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ dotado de la topología de la $\mathcal{G}$-convergencia uniforme y $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ será su correspondiente topología. Si consideramos en Y la topología de la norma, denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X,Y_{\|\cdot\|})$ al correspondiente espacio y por $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\|\cdot\|}$ a su topología.

Estamos especialmente interesados en las siguientes topologías:

1) $\mathcal{S}=\{A\subset X : A \text{ finito}\}$.

   (*a*) <u>El espacio $\mathcal{L}_s(X,Y)$</u>
   Si $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ y $W=W(0;y_1^*,\dots,y_m^*,\varepsilon)$, tenemos que

$$\mathbf{U}(A,W)=\big\{T\in\mathcal{L}(X,Y) : |\langle Tx_i,y_j^*\rangle|\le\varepsilon \quad i=1,\dots,n \quad j=1,\dots,m\big\}$$

   es decir, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ no es otra que la WOT (*Weak Operator Topology*). Denotaremos por $V(0,x,y^*,\varepsilon)=\{T\in\mathcal{L}(X,Y) : |\langle Tx,y^*\rangle|\le\varepsilon\}$

   (*b*) <u>El espacio $\mathcal{L}_s(X,Y_{\|\cdot\|})$</u>
   Si $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ y $\varepsilon>0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(A,\varepsilon B_Y) &= \{T\in\mathcal{L}(X,Y) : Tx_i\in\varepsilon B_Y \quad i=1,\dots,n\}\\ &= \{T\in\mathcal{L}(X,Y) : \|Tx_i\|\le\varepsilon \quad i=1,\dots,n\}\end{aligned}$$

   es decir, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|}$ no es otra que la SOT (*Strong Operator Topology*). Denotaremos por $V(0,x,\varepsilon)=\{T\in\mathcal{L}(X,Y) : \|Tx\|\le\varepsilon\}$

2) Consideramos ahora la familia[1] $w_0=\Big\{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset X : (x_n)_n\xrightarrow{w}0\Big\}$.

   (*a*) <u>El espacio $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$</u>
   Si $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\in w_0$ y $W=W(0;y_1^*,\dots,y_m^*,\varepsilon)$, tenemos que

$$\mathbf{U}(A,W)=\big\{T\in\mathcal{L}(X,Y) : |\langle Tx_n,y_j^*\rangle|\le\varepsilon \quad n\in\mathbb{N} \quad j=1,\dots,m\big\}$$

   (*b*) <u>El espacio $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y_{\|\cdot\|})$</u>
   Si $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\in w_0$ y $\varepsilon>0$, tenemos que

$$\mathbf{U}(A,\varepsilon B_Y)=\{T\in\mathcal{L}(X,Y) : \|Tx_n\|\le\varepsilon \quad n\in\mathbb{N}\}$$

[1] La familia w_0 fue definida en la sección 3.2 como la familia de las sucesiones débil-nulas mientras que aquí, consideramos el rango de dichas sucesiones. Por simplicidad, mantendremos el mismo nombre para ambas clases.

3) $wc = \{\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X : (x_n)_n$ es débil-Cauchy$\}$.

   (a) El espacio $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$
   Si $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in wc$ y $W = W(0; y_1^*, \ldots, y_m^*, \varepsilon)$, tenemos que

$$\mathbf{U}(A,W) = \left\{T \in \mathcal{L}(X,Y) : |\langle Tx_n, y_j^*\rangle| \leq \varepsilon \quad n \in \mathbb{N} \quad j = 1,\ldots,m\right\}$$

   (b) El espacio $\mathcal{L}_{wc}(X, Y_{\|\cdot\|})$
   $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in wc$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\mathbf{U}(A, \varepsilon B_Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \|Tx_n\| \leq \varepsilon \quad n \in \mathbb{N}\}$$

4) $b = \{A \subset X : A$ es acotado$\}$. Es claro que la familia $\{B(0;r) : r > 0\}$ genera la misma topología que la familia b.

   (a) El espacio $\mathcal{L}_b(X,Y)$
   Si $r > 0$ y $W = W(0; y_1^*, \ldots, y_m^*, \varepsilon)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(rB_X, W) &= \left\{T \in \mathcal{L}(X,Y) : |\langle Tx, y_j^*\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{r} \quad x \in B_X \quad j = 1,\ldots,m\right\} \\ &= \left\{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \left\|T^* y_j^*\right\| \leq \frac{\varepsilon}{r} \quad j = 1,\ldots,m\right\}\end{aligned}$$

   (b) El espacio $\mathcal{L}_b(X, Y_{\|\cdot\|})$
   Es obvio que se trata de $\mathcal{L}(X,Y)$ con la norma operador.

Dado que se tiene la cadena de inclusiones:

$$\mathcal{S} \subset w_0 \subset wc \subset b$$

las correspondientes topologías satisfacen:

$$\text{WOT} \preccurlyeq \mathcal{T}_{w_0} \preccurlyeq \mathcal{T}_{wc} \preccurlyeq \mathcal{T}_b$$

$$\text{SOT} \preccurlyeq \mathcal{T}_{w_0}^{\|\cdot\|} \preccurlyeq \mathcal{T}_{wc}^{\|\cdot\|} \preccurlyeq \mathcal{T}_b^{\|\cdot\|}$$

Nota A.4.4. Hay un hecho que conviene destacar: si queremos obtener resultados de compacidad usando el teorema de Ascoli, nuestro marco de referencia *debería* ser un espacio *completo*. En general, cuando consideramos topologías débiles, los espacios $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y)$ y $\mathcal{L}_{wc}(X,Y)$ no son completos. Esto hace más difícil la obtención de resultados de *compacidad* a partir de resultados de *precompacidad* que son los que, en principio, proporciona el teorema de Ascoli.

Para atacar este problema, cuando trabajemos con $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}((X,\tau),(Y,\|\cdot\|))$ donde τ es una topología en X menos fina que la de la norma, tendremos en cuenta en primer lugar que $\mathcal{L}((X,\tau),(Y,\|\cdot\|)) \subseteq \mathcal{L}((X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|))$. Dado que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ no depende de τ (como ya se ha señalado, ésta influye sólo en el *tamaño* de $\mathcal{L}(X,Y)$), resulta evidente que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}((X,\tau),(Y,\|\cdot\|)) \hookrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{G}}((X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|))$$

Este hecho es especialmente relevante cuando $\mathcal{G}$ es w_0 o wc pues, entonces, los espacios $\mathcal{L}_{w_0}(X,Y_{\|\cdot\|})$ y $\mathcal{L}_{wc}(X,Y_{\|\cdot\|})$ son completos (teorema A.4.3). $\triangleleft$

Notas sobre las topologías WOT y SOT

A menudo, nos interesará el comportamiento del cierre en la WOT o la SOT de conjuntos acotados en $\mathcal{L}(X,Y)$. Esta cuestión es particularmente importante cuando tratamos problemas de compacidad pues los espacios $\mathcal{L}_s(X,Y)$ y $\mathcal{L}_s(X,Y_{\|\cdot\|})$ no son, en general, completos.

Teorema A.4.5. *Sean X e Y espacios localmente convexos. Se verifica que*

(1) $\mathrm{L}_s(X,Y)$ *es cerrado en* $\mathcal{F}_s(X,Y)$ (Bourbaki [17, TVS III.16 prop. 4]).

(2) $\widetilde{\mathcal{L}_s(X,\widetilde{Y})} = \mathrm{L}_s(X,\widetilde{Y})$ (Köthe [63, 8−§ 39.6 (7)]).

Teorema A.4.6 ([39, pág 511])**.** *Sea* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *acotado. Son equivalentes:*

1.- M *es SOT-compacto* [*WOT-compacto*]

2.- (*a*) M *es SOT-cerrado* [*WOT-cerrado*].

(*b*) $\mathrm{M}x$ *es relativamente compacto* [*débil-compacto*] *para todo* $x \in X$.

Teorema A.4.7 ([39, pág 511])**.** *Si* $\mathrm{M} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *es SOT-secuencialmente compacto* [*WOT-secuencialmente compacto*], *entonces* $\overline{\mathrm{M}}^{SOT}$ *es SOT-compacto* [$\overline{\mathrm{M}}^{WOT}$ *es WOT-compacto*].

Bibliografía

[1] J. Aguayo-Garrido, *Wakly compact operators and the Dunford-Pettis property on uniform spaces*, Annales mathématiques Blaise Pascal, vol. 5 nº 2 (1998) 1–6.

[2] S. Alpay, *On collectively compact positive operators*, Rev. Roumanie Math. 34, (1989) nº 9, 779–791.

[3] S. Alpay, *On majorization of collectively compact operators*, J. Karadezniz University, 8 (1985) 25–29.

[4] P.M. Anselone, *Collectively compact and totally bounded sets of linear operators*, Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 17 nº 7 (1968) 613–621.

[5] P.M. Anselone, *Compactness properties of sets of operators and their adjoints*, Math. Z. 113 (1970) 233–236.

[6] P.M. Anselone, *Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1971).

[7] P.M. Anselone, *Recents advances in operator approximation theory*, Birkhauser, Basel-Boston, Mass., (1986).

[8] P.M. Anselone, R.H. Moore, *Approximate solutions of integral and operator equation*, J. Math. Anal. Appl., 10 (1964) 268–277.

[9] P.M. Anselone, T.W. Palmer, *Collectively compact sets of linear operators*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 25 nº 3 (1968) 417–422.

[10] R. Ansorge, *Approximation of set-valued operators by sequences of set-valued collectively compact operators*, Approximation theory, III (Proc. Conf., Univ.

Texas, Austin, Tex., 1980), pp. 169–174. Academic Press, New York-London, 1980.

[11] R. Aron, M. Lindström, W.M. Ruess, R. Ryan, *Uniform factorization for compact sets of operators*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 127 nº 4 (1999) 1119–1125.

[12] R.G. Bartle, N. Dunford, J.T.Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math., 7 (1955), 289–305.

[13] E. Bherends, *New proofs of Rosenthal's ℓ_1-theorem and the Josefson-Nissenzweig theorem*, arXiv:math.FA/9403211 v1 (1994).

[14] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North–Holland Mathematics Studies 68, Amsterdam (1985).

[15] F. Bombal, *Sobre algunas propiedades de espacios de Banach*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Madrid (1990) 83–116.

[16] N. Bourbaki, *Topologie Generale, Tome II, Chapitre X, Espaces fonctionels*, Hermann, Paris, 1974.

[17] N. Borbaki, *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, Berlin (1987).

[18] J. Bourgain, J. Diestel, *Limited operators and strict cosingularity*, Math. Nachr. 119 (1984) 55–58.

[19] J. Borwein, S. Fitzpatrick, *Weak* sequential compctness and bornological limit derivatives*, Journal of Convex Analysis, vol. 2 nº 1/2 (1995) 59–67.

[20] J.M. Castillo, M. González, *On the Dunford-Pettis property in Banach spaces*, Acta Univ, Carolinae-Math et Phys. vol. 35 nº 2 (1994) 5–12.

[21] J.M. Castillo, M. González, *New results on the Dunford-Pettis property*, Bull. London Math. Soc. 27 (1995) 599–605.

[22] P. Cembranos, J. Mendoza, *Spaces of vector-valued functions*, Lecture notes in Math. 1676, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1997).

[23] S.N. Chandler-Wilde, B. Zhang, *A generalized collectively compact operator theory with an application to integral equations on unbounded domains*, J. of Integral eq. and appl. vol. 14 nº 1 (2002) 11–52.

[24] M.D. Contreras, S. Díaz, *$C(K;A)$ and $C(K;H1)$ have the Dunford-Pettis property*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol 124, nº 11, (1996) 3413–3417.

[25] W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, A. Pelczynsky, *Factoring weakly compact operators*, J. of Functional Analysis, 17 (1974) 311–327.

[26] J. Dazord, *Factoring operators through c_0*, Math. Ann. 220 (1976) 105–122.

[27] J. Dieudonné, *Fundamentos de Análisis Moderno*, Editorial Reverté, Barcelona (1974).

[28] J. D. Depree, H. S. Klein, *Characterization of collectively compact sets of linear operators*, Pacific Journal Of Mathematics Vol. 55, No. 1, (1974) 45–54.

[29] J. D. Depree, H. S. Klein, *Semi-groups and collectively compact sets of linear operators*, Pacific Journal Of Mathematics Vol. 55, No. 1, (1974) 55–63.

[30] M.V. Deshpande, N.E. Joshi, *Collectively compact and semi-compact sets of linear operators in topological vector spaces*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 43 nº 2 (1971) 317–326.

[31] M.V. Deshpande, S.M. Padhey, *A note on semigroups of nonlinear operators*, J. Indian Math. Soc. 49 (1985)

[32] M.V. Deshpande, S.M. Padhey, *A note on collectively compact sets and Banach algebras*, J. Indian Math. Soc. 48 (1984)

[33] S. Díaz, *Weak compactness in $L_1(\mu, X)$*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 124 nº 9 (1996) 2685–2693.

[34] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer–Verlag, New York (1984).

[35] J. Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, vol. 2 (1980) 15–60.

[36] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambrige studies in advanced mathematics, 43, Cambridge (1995).

[37] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector measures*, A.M.S. Surveys, 15, Providence, Rhode Island (1977).

[38] N. Dunford, B.J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 47 (1940) 323–392.

[39] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators*, Wiley Classic Library, New York 1988.

[40] G. Emmanuele, *A dual caracterization of Banach spaces not containing* ℓ_1, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics vol. 34 nº 3-4 (1986) 155–160.

[41] G. Emmanuele, *Banach Spaces in which Dunford-Pettis sets are relatively compact*, Archiv der Mathematik, vol. 58 (1992) 477–485.

[42] G. Emmanuele, *Some Remarks on the position of the space* $\mathcal{K}(X,Y)$ *inside the space* $\mathcal{W}(X,Y)$, New Zeland Journal of Mathematics, vol. 26 (1997) 183–189.

[43] G. Emmanuele, *Some permanence results of properties of Banach spaces*, sin publicar.

[44] J. Farmer, W. Johnson, *Polinomial Schur and polinomial Dunford-Pettis properties*, arXiv:math.FA/9211210 v1 17 Nov 1992.

[45] F. Galaz-Fontes, *Note on compact sets of compact operators on a reflexive and separable Banach space*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 126 nº2 (1998) 587–588.

[46] A.S. Geue, *Precompact and collectively semi-precompact sets of semi-precompact continuous linear operators*, Pacific Journal Of Mathematics Vol. 52, No. 2, (1974) 377–401.

[47] M. González, J.M. Gutiérrez, *The compact weak topology on a Banach space*, Proceedings of the Royal Society of Edimburg, 120A (1992) 367–379.

[48] M. González, *Weakly continuous mappings on Banach spaces with the Dunford-Pettis property*, J. of Mathematical Analysis and Appl. 173 (1993) 470–482.

[49] M. González, J.M. Gutiérrez, *Factoring Compact sets of operators*, J. of Mathematical Analysis and Appl. 255 (2001) 510–518.

[50] A. Grothendieck, *Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paolo, 8 (1953), 1–179.

[51] A. Grothendieck, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretsky–Rogers*, Bol. Soc. Mat. Sâo Paolo, 8 (1953), 81–110.

[52] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canad. J. Math., 5 (1953), 129–173.

[53] S. Guerre-Delabrière, *Classical sequences in Banach spaces*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[54] J. Hagler, W.B. Johnson, *On Banach spaces whose dual balls are not weak* sequentially compact*, Israel Journal of Mathematics, vol. 28 nº 4 (1977) 325–329.

[55] J. Hagler, *Some more Banach spaces which contain ℓ_1*, Studia Mathematica, T.XLVI (1973) 35–42.

[56] H.R. Enriquez, *On the collective compactness of strongly continuous semigroups and cosine functions of operators*, Taiwanese J. Math. 2 (1998) nº 4 497–509.

[57] J.A. Jaramillo, A. Prieto, I. Zalduendo, *Sequential convergences and Dunford–Pettis properties*, Ann. Ac. Sci. Fennicae Math. vol 25 (2000) 467–475.

[58] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgar, 1981.

[59] W.B. Johnson, *Factoring compact operators*, Israel Journal of Mathematics, vol. 9 (1971) 337–354.

[60] W.B. Johnson, H.P. Rosenthal, *On ω^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces*, Studia Mathematica, T.XLIII (1972) 77–92.

[61] J.L. Kelley, *General Topology*, Springer-Verlag, New York, 1975 (Reprint of the 1955 ed. published by Van Nostrand).

[62] R. Kress, *Linear integral equations*, Springer-Verlag, New York, 1999

[63] G. Köthe, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York (1979)

[64] S.S. Khurana, *Weak sequential convergence in* L_E^∞ *and Dunford-Pettis property of* L_E^1, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 78 nº 1 (1980) 85–88.

[65] P. Lewis, *Dunford-Pettis sets*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 129 nº 11 (2001) 3297–3302.

[66] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I. Sequence spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 92, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1977).

[67] F. Mayoral, *Compact sets of compact operators in absence of* ℓ_1, Proc. Amer. Math. Soc. 129 nº 1 (2001) 79–82.

[68] P. Meyer-Nieberg, C. Möller, *Weak compactness in dual spaces*, Achiv der Mathematik, 78 (2002) 215–222.

[69] J. Mujica, *Banach spaces not containing* ℓ_1, Ark. Mat. 41 (2003) 363–374.

[70] E. Odell, H.P. Rosenthal, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing* ℓ_1, Israel Journal of Mathematics, vol. 20 (1975) 375–384.

[71] M.I. Ostrovskii, *Weak* sequential closures in Banach space theory and their applications*, arXiv:math.FA/0203139 v1 14 Mar 2002.

[72] T.W. Palmer, *Totally bounded sets of precompact operators*, Proc. Amer.Soc 20 (1969) 101–106.

[73] P. Pethe, N. Thakare, *Note on Dunford-Pettis property and Schur property*, Indiana Univers. Math. Journal vol. 27-1 (1978) 91–92.

[74] A. Pelczynski, *On strictly singular and strictly cosingular operators*, Bull. de L'Academie Pol. des Sciences, vol. XIII nº 1 (1965) 31–41.

[75] A. Pelczynski, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 10 (1962), 641–648.

[76] D.J. Randtke, *A compact operator characterization of* ℓ_1, Math. Ann, 208 (1974) 1–8.

[77] A.P. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge University Press, second edition (1973).

[78] H.P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ_1*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 71 (1974) 2411–2413.

[79] H.P. Rosenthal, *Point-wise compact subsets of the first Baire class*, American Journal of Math., 99 (1977) 362–378.

[80] R.A. Ryan, *Dunford-Pettis properties*, Bull. Ac. Polonaise des Sciences, vol 27, nº 5 (1979) 373–378.

[81] W. Rudin, *Análisis Funcional*, Editorial Reverté, Barcelona (1979).

[82] W. Ruess, *Compactness and collective compactness in spaces of compact operators*, Journal of Mathematical Anal. and Appl. 84 (1981) 400-417.

[83] E. Saksman, H.O. Tylli, *Structure of subspaces of the compact operators having the Dunford-Pettis property*, Math. Zeitschrift 232 (1999) 411–425.

[84] E. Serrano, C. Piñeiro, J.M. Delgado, *Equicompact sets of operators defined on Banach spaces*, Proc. of the Amer. Math. Soc.[2], vol 134, nº 3 (2006) 689–695.

[85] E. Serrano, C. Piñeiro, J.M. Delgado, *Weakly equicompact sets of operators defined on Banach spaces*, Achiv der Mathematik[2], vol 86 (2006) 231–240.

[86] B. Tanbay, *A survey of the Schur property*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 45 4 (2000) 723–735.

[87] K. Vala, *On compact sets of compact operators*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser A I 351 (1964).

[88] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge University Press, 1991.

[2] Aunque la redacción de esta memoria finalizó el 21 de septiembre de 2005, en dicha fecha los editores ya habían confirmado las referencias aportadas aquí.