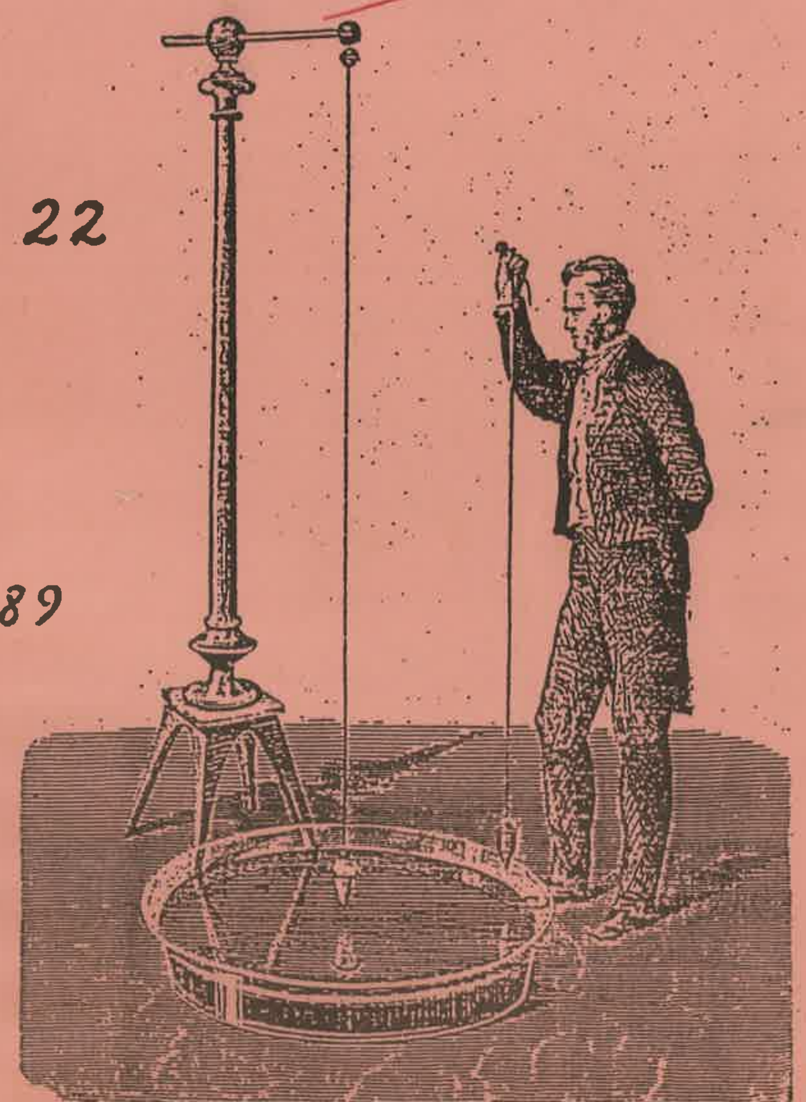
sociedad castellana Puig Adam de profesores de matemáticas

VII Concurso



Boletín nº 22

octubre 1989

B O L E T I N de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas

Octubre de 1989 nº 22 (1989-90)

- Toda la correspondencia para la Sociedad deberá dirigirse al

Apartado nº 9479

28080 - MADRID

(se recomienda no certificarla)

- La confección de este número ha estado a cargo de:

Julio Fernández Biarge
José Ramón Pascual Ibarra

- El dibujo de la portada, tomado de un libro antiguo, alude a la idea de Geometría como una idealización de lo que nos ofrece la realidad, comentada en un artículo del número anterior.

I N D I C E — Pag.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Francisco Lorenzo Miranda

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Amador Domingo Escribano (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretaria: Carmen García-Miguel Fernández

Vicesecretario: Francisco Quesada Cobo

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Jesús Begoña Aina

IN MEMORIAM

CALEB GATTEGNO

Con gran retraso, nos llega la triste noticia de la pérdida de **CALEB GATEÑO** (nos gusta, como a él le gustaba también, escribir así su nombre), que tuvo lugar en París en el verano de 1988. Si su desaparición fué una noticia de auténtico pesar para los matemáticos y educadores de todo el mundo, creemos sinceramente que de una manera muy especial ha de serlo para los españoles. Gateño, en efecto, consideraba a España como patria suya y la amaba de corazón, de una manera especialísima. En una ocasión, recordando su condición de sefardita, nos decía que su antepasado había salido de Zaragoza, donde ejercía la profesión de médico, en el siglo XVI. Hablaba español perfectamente, como otras muchas lenguas; pero en el castellano ponía especial cariño: ¡ Qué sorprendidos quedamos al comprobar que conocía perfectamente y cantaba con primor deliciosas canciones populares españolas !

Gateño había venido a España repetidas veces, pero su visita más importante fué en 1955, para introducir en España las *Regletas de Color* de **Cuisenaire**, que tan gran aceptación tuvieron en nuestro país. Entnces tuvo la fortuna de conocer a don **Pedro Puig Adam**, y cuando nosotros tratamos de hacer una pequeña biografía de **Gateño**, lo mejor será transcribir lo que escribía don Pedro:

> "... Nos habíamos conocido dos dias antes. Corría el mes de abril de 1955. El profesor **Caleb Gateño**, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres,

CALEB GATEÑO

había venido a Madrid para dar a conocer el material de Números en Color de **Cuisenaire**. Pronto nació entre los dos una mutua y fuerte amistad, originada, más que en la comunidad de ideas didácticas, en el sentimiento común de amor al niño y de íntegra dedicación a él. Comprendí en seguida que estaba en presencia de una personalidad avasalladora, de una enorme capacidad de trabajo y sacrificio, de un talento excepcional, de una singularísima originalidad de ideas y de una seguridad en sí mismo tan simpática por lo valiente como hiriente a veces por su brusca sinceridad. Secretario y organizador de la *Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática*, me había informado ampliamente de las tareas de dicha Comisión, invitándome a participar en ella. De origen remoto español, mostraba un gran interés en que España se incorporara al movimiento didáctico matemático moderno internacional. ..."

La Comisión que nos cita **Puig Adam**, la *CIAEM*, había nacido cinco años antes, por iniciativa de **Gateño**, y contaba entonces con la colaboración de epistemólogos y psicólogos como **Piaget**, **Gonseth**, **Beth**,...; de matemáticos como **Choquet**, **Dieudonné**, **Kurepa**, **Lichnerowicz**,... ; de pedagogos como **Gateño**, **Drenkhahn**, **E. Castelnuovo**, **Servais**, y el mismo **Puig Adam**. El intercambio de puntos de vista entre tales especialistas se realiza mediante reuniones internacionales que se celebran una o dos veces al año. El profesor **Gateño** acogió con entusiasmo la iniciativa de **Puig Adam** para que la 11ª Reunión de la Comisión se celebrase en Madrid, en abril de 1957, bajo el tema *"El Material de la Enseñanza Matemática"*, coincidiendo con una exposición de modelos y material didáctico matemático.

Tanto la Reunión como la Exposición citadas se celebraron en Madrid, en los locales del Instituto *San Isidro*, en abril de 1957. Esto fué muy excepcional, pues hasta entonces todas las reuniones se habían realizado en pequeñas ciudades, con objeto de conseguir un mejor conocimiento mutuo de los asistentes, que no solían ser demasiados. La exposición tuvo un excelente eco internacional; todas las revistas especilizadas europeas se refirieron ampliamente a ella, lo que contrastó con la indiferencia con que fué acogida en España, salvo raras excepciones.

En la citada Reunión, el profesor **Gateño** puso interés en mostrar la original utilidad de las *Regletas en Color* de **Cuisenaire**, con maravillosas lecciones impartidas a alumnos del Liceo Francés de Madrid, y las enormes posibilidades didácticas de sus *"Geoplanos"* para la enseñanza de la Geometría plana. También dedicó especial atención a las películas que acababan de producirse con destino a la enseñanza de las Matemáticas, en especial las de **Fletcher** (*"La recta de Simpson"*, *"La cardioide"* y otras) y las de su amigo, **J. L. Nicolet**, que eran mudas y muy cortas, de las que destacó su interés didáctico. Después de esta Reunión, **Gateño** volvió a España repetidas veces, e incluso llegó a establecer una empresa para la producción de regletas. Recordamos sobre todo la venida de **Gateño** con motivo del fallecimiento de don Pedro en 1960: Pronunció un bello y sentido discurso en la sesión necrológica celebrada en el Instituto San Isidro.

Gateño intervino con el mayor interés en la elaboración de los dos primeros libros publicados por la *Comisión*: *"L'enseignement des mathematiques"* y *"Le matériel pour l'enseignement des mathématiques"*, editados por *Délachaux et Niestlé, S.A.* (Neuchâtel) y traducidos al español y editados por *Aguilar*. Ambos libros fueron en su día los más preciosos y modernos en relación con la enseñanza de las Matemáticas. También don **Pedro Puig** publicó en la *Revista de Enseñanza Media* del Ministerio de Educación Nacional, a falta de otros que lo hicieran, una completa crónica de la *Exposición* de Madrid, con el título: *"El material didáctico matemático actual"*, que recoge, con sugestivas fotografías, el presentado en ella y las lecciones que se dieron durante su celebración.

Si pretendiéramos condensar la psicología de **Gateño** aplicada al aprendizaje de la Matemática, nos veríamos obligados a recoger sólo dos palabras: "Percepción y acción". El niño está mucho mejor dotado, según demuestra **Gateño** de lo que los pedagogos tradicionales le concedían. Es capaz de percibir, cuando dispone de un material multivalente apropiado, las más completas relaciones matemáticas, y actuando sobre ellas como en un juego, extraer las verdades matemáticas más profundas. Naturalmente, no basta con disponer del material; es necesario sobre todo tener un profesorado muy preparado y completo. Así explicábamos los éxitos de **Gateño** entre nosotros y comprendíamos que él mismo dejara la Universidad de Londres y se dedicara a la formación de maestros.

En una reunión de la *Comisión* que tuvo lugar en la U.R.S.S., **Gateño** no supo o no quiso amoldarse a las normas impuestas por el gobierno de aquel país y abandonó la *Comisión* por él fundada, para siempre; pero no solo abandonó la *Comisión* sino también, en parte, las actividades matemáticas, dedicándose, según creemos saber, a otras siempre vinculadas a la educación, pero esta vez relacionadas con las lenguas; en esta nueva labor, ha visitado numerosos paises (Abisinia, la India, etc.) enviado por organismos internacionales. Ultimamante sabemos que residía en Nueva York y participaba en programas educativos relacionados con la lengua en paises hispanoamericanos. Dió un curso en Barcelona hace pocos años.

* * * *

En otro lugar de este número de nuestro Boletín reproducimos, para mejor conocimiento de los lectores que no llegaron a conocer personalmente al profesor **Gateño**, el interesante artículo que publicó en el libro homenaje dedicado a **Puig Adam** en 1961, año de su muerte. Tiene este artículo dos partes: la primera relativa a las actividades de la enseñanza de las matemáticas en general y la segunda dando ideas sobre como orientar la reforma de esa enseñanza, muy particularmente en España. A pesar de los años transcurridos, muchas de sus recomendaciones conservan plenamente su validez y se ve claramente que muchos de los fracasos sufridos en los intentos de reforma llevados a cabo desde entonces, proceden de no haber atendido seriamente sus agudas observaciones y advertencias.

* * * *

VII CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

El *VII Concurso de Resolución de Problemas* convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras para alumnos de B.U.P. o F.P. correspondiente a 1989, se celebró en la mañana del pasado sábado 17 de Junio, en los locales que amablemente nos cedió, como en ocasiones anteriores, el Instituto "Beatriz Galindo".

Esta vez han participado 51 alumnos de primer curso de B.U.P., 53 de segundo y 57 de tercero (161 en total), o sea bastantes más que el año anterior, aunque no se llegó a la concurrencia registrada alguno de los años precedentes.

A los alumnos de cada curso se les propusieron cuatro problemas, para resolverlos en dos tandas de hora y media. Al final de esta crónica damos los enunciados, para que nuestros socios puedan juzgar su dificultad.

La entrega de premios y diplomas se realizó a las siete de la tarde del mismo día, en el salón de actos del Instituto "Beatriz Galindo", con gran asitencia de público.

Nuestro Presidente, Sr. Lorenzo Miranda, pronunció unas palabras de aliento a los partipantes y felicitación a los ganadores, haciendo público el agradecimiento de la Sociedad al Instituto "Beatriz Galindo", al Colegio

Oficial de Doctores y Licenciados, a los que desinteresadamente han contribuido a la organización del acto y participado en el Jurado, y a los que generosamente han contribuido a costear los premios entregados a los ganadores. Entre éstos figura en primer lugar la firma "Coca-Cola", que ha permitido incluir magníficas calculadoras en los lotes entregados. El citado Colegio de Doctores y Licenciados y la donación efectuada por la familia de nuestro maestro Puig Adam han hecho posible completar los premios con lotes de interesantes libros.

Damos a continuación la lista de alumnos premiados, con indicación de la puntuación alcanzada y el centro de procedencia; el máximo de puntos que podían obtenerse era de 40, diez por cada problema totalmente resuelto.

Los cinco ganadores de **PRIMER CURSO** han sido los siguientes:

1º. **CÉSAR ALONSO GALLEGO**, del I. B. María Moliner de Coslada (Madrid) 24

2º. **MARCELINO MARTÍN PAJARES**, del I.B. Sta. Teresa de Jesús de Madrid 19

3º. **MARCOS BEJERANO DOMÍNGUEZ**, del Colegio JOYFE de Madrid. 18

4º. **ARANZAZU GONZALEZ CHICHARRO**, del I.B. Lope de Vega de Madrid 17

5º. **MARTA REDONDO MARTÍNEZ**, del I.B. Lorenzo Hervás y Panduro de Cuenca. 16

Los cinco ganadores de **SEGUNDO CURSO** han sido los siguientes:

1º **MARÍA JOSÉ CORRAL PÉREZ**, del I.B. de la Avda. de los Toreros de Madrid 24

2º **FERNANDO QUIRÓS ABAJO**, del I.B. Rafael Alberti de Coslada (Madrid) 23

3º **ESTHER CACERES MADROÑO**, del I.B. Marqués de Lozoya de Cuellar (Segovia) 19

4º **TICIANO CIUDAD MORA**, del I.B. Rafael Alberti de Coslada (Madrid) 18

5º **BRUNO MIGUEL FERNANDEZ RUIZ**, del I.B. Complutense de Alcalá de Henares 15

Y los cinco ganadores de **TERCER CURSO** han sido:

1º **JOSÉ LUIS PÉREZ CASELLES**, del I.B. Cervantes de Madrid (*) 25

2º **MARCO CASTRILLÓN LÓPEZ**, del I.B. de la Avda. de los Toreros de Madrid 24

3º **DANIEL ALMODOVAR HERRAIZ**, del I.B. Alfonso VIII de Cuenca (*) 23

4º **ALFONSO MUÑOZ HERNANDEZ**, del I.B. Conde de Orgaz de Madrid 22

5º **RAMÓN MURGA ZURIARRAIN**, del Colegio BERRIZ 21

Los alumnos señalados con (*) fueron premiados en nuestros concursos de años anteriores: Pérez Caselles fué primer premio de segundo curso en 1988 y Almodovar Herraiz fué segundo de segundo curso en ese año y primero de primer curso en 1987.

Confiamos en que nuestro Concurso haya servido de preparación y de estímulo para que los que han participado en él, hagan un brillante papel en la Olimpiada Matemática Española del curso próximo e incluso en otras competiciones internacionales, como viene ocurriendo con nuestros ganadores de otros años.

Muchos de los Centros que han presentado a los participantes premiados, vienen apareciendo sistemáticamente en las listas de campeones de cada año, lo que revela una encomiable labor de preparación de sus alumnos escogidos.

Esta Sociedad felicita cordialmente a los ganadores y a los centros de enseñanza que los han presentado y agradece la participación entusiasta, en un caluroso sábado de Junio, de todos los concursantes.

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en el concurso. Debemos advertir que, lamentablemente, en el enunciado del cuarto problema propuesto a los alumnos de segundo curso se omitió por error la palabra "impares", lo que hacía imposible probar lo que se pedía.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTRO VII CONCURSO

PRIMER CURSO

1. -- Sobre un diámetro de una circunferencia dada, se toma un punto arbitrario **A**. El punto **B** es uno de los extremos del diámetro perpendicular al que contiene al punto **A**. La recta **BA** corta a la circunferencia en **P**. La recta tangente a la circunferencia en el punto **P**, corta en **C** a la prolongación del diámetro que contiene a **A**. Demostrar que **CA = CP** .

2. -- Encontrar un número, cuadrado perfecto, de cuatro cifras, y tal que las dos primeras sean iguales y también sean iguales las dos últimas.

3. -- Una persona **A** tiene 200 pesetas, con las que compra tantos cuadernos como puede y le sobran 32 pesetas. Otra persona **B**, que dispone de 150 pesetas, también compra tantos cuadernos como puede, al mismo precio que los anteriores, y le sobran 24 pesetas. ¿ Cual es el precio del cuadreno ?

4. -- Calcular: $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+ \cdots +(n+1)\binom{n}{n}$

SEGUNDO CURSO

1. -- Representación gráfica de los puntos **P(x,y)** del plano, que verifican la ecuación:

$$(y + |2x| - 2)^2 + (y - |y|)^2 = 0 .$$

(con $|y|$ se representa el valor absoluto de y).

2. -- Sea P un punto interior de un rectángulo **ABCD** . Se conocen las distancias de P a tres vértices de dicho rectángulo; calcular la distancia de P al cuarto vértice. Aplicación: $PA = 5u$, $PB = 10u$, $PC = 14u$, $PD = ?$

3. -- ¿ Para qué valores de **a** , las raices de la ecuación $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ son reales ?

4. -- Dados los enteros impares **a** y **b** , probar que el número $a^3 - b^3$ es divisible por 2^n , si y solo si $a - b$ es divisible por 2^n .

TERCER CURSO

1. -- Demostrar que los puntos de inflexión de la línea

$$y = \frac{x}{\tan x}$$

están alineados.

2. -- En un sector circular de una circunferencia de radio **R** , se ha inscrito una circunferencia de radio **r** . La cuerda del sector es igual a **2a** . Demostrar que:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$$

3. -- En un triángulo ABC , de lados a , b , c y ángulos $A = 30°$, $B = 50°$, demostrar que se verifica

$$c^2 = b(a + b) \ .$$

4. -- Determinar los números **a** , **b** , de modo que la ecuación $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ admita la raiz $1 + i$.

XXX OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Bundesrepublik Deutschland
Braunschweig · Niedersachsen

13.-24. Juli 1989

La *XXX Olimpiada Internacional de Matemáticas* se ha celebrado en Braunschweig (ciudad natal de **Gauss**), en la República Federal Alemana, del 13 al 24 de Julio de 1989.

La participación ha superado nuevamente a todas las anteriores, tanto en número de paises, que este año han sido 50, como en número de estudiantes. Por primera vez concurrieron representantes de Portugal y Dinamarca.

Se propusieron seis problemas, cuyos enunciados ofrecemos en nuestra sección de **PROBLEMAS PROPUESTOS** (con los números 1º a 6º), para resolverlos en dos sesiones de cuatro horas y media cada una. Cada problema se valoraba con **7 puntos**, por lo que cada participante podía obtener hasta 42. Se concedían medallas de oro a los que alcanzasen 39 puntos o más, de plata a los que llegasen a 32, de bronce a los que obtuviesen por lo menos 18 y menciones de honor a los que, sin obtener medalla, resolviesen completamente un problema al menos.

Hubo resultados realmente brillantes. Se concedieron veinte medallas de oro, diez de ellas a participantes que alcanzaron la puntuación máxima de 42 puntos. De esas 20 medallas, 4 correspondieron a China, 3 a la Unión Soviética, 3 a Alemania del Este, 2 a Rumanía, 2 a Vietnam, 2 a Checoslovaquia, una a U.S.A, una a Bulgaria, una a Alemania Federal y una a Yugoslavia.

Por paises, los primeros clasificados fueron: China, con 237 puntos, Rumanía, con 223, La Unión Soviética, con 217, la R. D. Alemana, con 216 y los Estados Unidos de America, con 207.

España presentó a los seis ganadores de la XXV Olimpiada Matemática Española (ver nuestro Boletín número 21), obteniendo unos resultados discretos, aunque no tan brillantes como en alguna ocasión anterior. Por equipos, ocupó el puesto 39, con un total de 61 puntos. Se consiguió una medalla de bronce y cuatro menciones de honor. Los resultados individuales de los participantes españoles, con indicación de los números de puntos obtenidos, son los siguientes:

- **Vicente MUÑOZ VELAZQUEZ**, del I. B. "Dionisio Aguado", de Fuenlabrada (Madrid) **MEDALLA DE BRONCE** 21
- **Enrique GARCÍA LÓPEZ**, del Liceo Francés de Barcelona MENCIÓN DE HONOR 11
- **Cristina DRAPER FONTANALES**, del Colegio "Sierra Blanca" de Málaga MENCIÓN DE HONOR 11
- **Alberto GARCÍA MARTÍNEZ**, del Colegio "Nª Sª del Recuerdo" de Madrid MENCIÓN DE HONOR 8
- **Javier PORTELA LEMOS**, del Colegio de la "Compañía de María" de Vigo MENCIÓN DE HONOR 8
- **Leandro MARÍN MUÑOZ**, del Colegio "La Merced" de los HH. Maristas de Murcia 2

Recordaremos que Vicente MUÑOZ VELAZQUEZ recibió el primer premio del Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad, como alumno de 3º de B.U.P. en Junio de 1988, posteriormente fué campeón de la XXV Olimpiada Matemática Española y obtuvo medalla de plata en la 4ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Enrique GARCÍA LÓPEZ obtuvo medalla de bronce en esta misma O.I.M.

Aunque los resultados del equipo español no pueden considerarse como muy brillantes, debe recordarse la enorme dureza de la competición, debida a que algunos paises llevan muchos años compitiendo y, como conceden gran importancia a este tipo de certámenes olímpicos, someten a intensos entrenamientos a grupos de alumnos muy numerosos, de los que seleccionan una élite verdaderamente bien preparada. Confiamos en que en los años próximos nuestra participación irá mejorando y alentamos a los profesores de Matemáticas de toda España a que contribuyan a conseguirlo. Creemos que nuestra Sociedad, dentro de su ámbito territorial, ayuda eficazmente a ello a través de nuestros Concursos de Resolución de Problemas.

Felicitamos a todos los participantes, así como a los profesores que han contribuido a su preparación, y agradecemos las ayudas institucionales y personales que han permitido que unos jóvenes españoles compitan con los mejores de todo el mundo en una olimpiada de tanto prestigio.

Está previsto que la XXXI Olimpiada Internacional de Matemáticas correspondiente a 1990 se celebre, si la situación política lo permite, en China.

- - - - - - -

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADAS EN ESTE BOLETIN

Con objeto de facilitar a nuestros socios la consulta de datos sobre los últimos Concursos y Olimpiadas, ofrecemos un índice señalando los números y páginas donde pueden encontrarlas.

CONCURSOS DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD :

Número y año	Convocado en Boletín	Crónica - Enunciados
I (1983)	1	2, pag 11
II (1984)	3	4, pág 7
III (1985)	5	7, pág 3
IV (1986)	9	10, pág 5
V (1987)	13	15, pág 3
VI (1988)	17	19, pág 17
VII (1989)	20	

OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA :

Número y año	Primera fase (distritos)	Segunda fase (final)
XX (1984)		3, pág 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61

OLIMPIADA MATEMATICA IBERO-AMERICANA :

Número, año y lugar	Crónica y enunciados en Boletín nº
I (1986) Colombia	8, págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12, págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18, págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21, págs. 11 y 63

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL :

Número, año y lugar		Crónica y enunciados en Boletín nº
XXIV (1983)	París	2, pág. 15
XXV (1984)	Praga	4, pág. 67
XXVI (1985)	Helsinki	7, págs. 9 y 89
XXVII (1986)	Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987)	Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX (1988)	Australia	19, págs. 23 y 77
XXX (1989)	R. F. A.	22, págs. 15 y 73

UNA VISION «PRACTICA» PARA ESPAÑA, EN RELACION CON EL PROBLEMA DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Por CALEB GATEÑO

Nuestra amistad entrañable, y la íntima relación que mantuve con él en los últimos años de su vida, me permiten afirmar que nada hubiera causado tanta alegría a don Pedro Puig Adam como el ver iniciada en España una auténtica y profunda reforma estructural de la enseñanza de la Matemática.

Aunque su círculo de intereses se ceñía al estudio de las principales cuestiones planteadas por la didáctica y se extendía a las investigaciones con ella relacionadas, estoy seguro que hubiera apoyado con todo su entusiasmo cualquier intento para llevar a cabo tal reforma.

Desde marzo de 1955 seguíamos atentos la evolución española a este respecto comparándola con la situación mundial, de la que yo le tenía informado con mis cartas desde diferentes países. Y estábamos de completo acuerdo en que nada podía esperarse de un enfoque unilateral del problema, el cual, para conseguir algo eficaz, debería ser atacado desde todos los ángulos. No valía la pena ocuparse solamente de una posible reforma de la enseñanza superior, pues los estudiantes universitarios no podrían hacer mucho más de lo que hacen ahora sin la adquisición previa de una mejor preparación en los Institutos, y, a su vez, tampoco esta preparación necesaria será posible mientras continúen los niños accediendo a la enseñanza media cargados de los malos hábitos adquiridos en la primaria, y, en consecuencia, teniendo que dedicar buena parte del tiempo de su bachillerato en la supresión de los mismos y en la creación de aptitudes correctas hacia la Matemática. Estábamos, pues, convencidos de que la raíz del mal comienza en las escuelas, y que este mal se amplía, casi siempre, en los estudios posteriores, incluso en las escuelas superiores.

No se piense, sin embargo, que esta situación sea exclusivamente española; se da en todos los países del mundo, y su gravedad la percibimos en toda su amplitud todos los que, de una u otra manera, estamos relacionados con el problema de la enseñanza: desde los directores generales hasta los maestros, pasando por los profesores universitarios, los de Instituto y los de Escuelas Normales. Y a todos nos produce una honda preocupación. Todos debemos sentirnos responsables, y de ahí la necesidad, como primera premisa para encontrar una solución adecuada, de unir nuestros esfuerzos para esclarecer el panorama real de tal situación.

Hoy día, la frecuente colaboración de los políticos y de los hombres de ciencia, aunados en el mejor servicio al bien común, está cambiando el ritmo de las realizaciones sociales. El conocimiento de la verdad, cuando no contradice intereses superiores, se proyecta pronto sobre la sociedad. Este fenómeno, ciertamente nuevo, se reflejó inicialmente desde los últimos treinta años en la Ciencia pura y en la Técnica. Llega ahora al plano de la acción social, y ya se habla, incluso, de una «ingeniería social» (Social Engineering). Lo que consideramos aquí pertenece a este aspecto de los valores sociales, ya que el progreso técnico y material de los pueblos está evidentemente vinculado con el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, en la base, y de las Ciencias después.

Nuestros lectores juzgarán del papel que cada uno puede desempeñar en la realización de una reforma fundamental de la enseñanza de la Matemática, considerada en su conjunto orgánico, en coordinación de los esfuerzos individuales y llevada a cabo con los apoyos pertinentes. Lo más que un individuo puede hacer particularmente es crear un clima de inquietud, abrir un camino a la reforma; pero si se quiere alcanzar una dimensión eficaz, se precisa la colaboración de todos. No obstante, no puedo personalmente sentirme descorazonado, a pesar de este sentimiento de incapacidad de mi actuar aislado, porque sé muy bien que hay mucha gente que como yo sufre al ver que la vida de nuestros hijos, en las escuelas, se pierde en la nada. Condición, pues, para el éxito, es la conciencia cierta de nuestra humildad; el convencimiento de nuestra dependencia respecto de los demás para poder hacer algo que sea verdaderamente eficaz. Si existiera alguien que dijera que no necesita de mí, o de los otros, este alguien no haría otra cosa que pregonar su vanidad junto con la certidumbre de su incapacidad para actuar.

He aquí, pues, lo primero que tenemos que aprender: la unión, el esfuerzo común, sostenido y amplio, será el mejor servicio a nuestra causa.

Lo segundo, también muy importante, es que nada podremos conseguir si basamos la reforma en ideas preconcebidas, lo que sería prueba de un entusiasmo aparente, superficial. Sólo la verdad convence, y sólo ella puede servir causa tan compleja como un cambio radical de procedimientos y rutinas seculares.

Lo tercero es que nosotros, en la profesión docente, deberemos desarrollar una estrategia realista, utilizando tácticas verdaderas que demostrarán, sin duda, haber localizado a los enemigos y nos permitirán llegar a ellos y vencerlos, pero siempre que contemos con los medios necesarios. No basta

disponer de los hombres, porque quizá nos falten las armas. Habremos, pues, de prepararnos convenientemente con la adquisición previa de los medios necesarios. En caso contrario, estamos expuestos a perder el afán y el empuje precisos para no decaer en nuestro entusiasmo.

El punto de partida será un análisis de nuestros conocimientos presentes: ¿qué sabemos, ciertamente, hoy?

La actual situación escolar nos muestra aspectos negativos y otros positivos:

— Sabemos que el maestro, o el profesor, intentan demostrar que saben las cosas (más o menos), mientras que lo importante es hacer que los alumnos las sepan. El maestro, o profesor, consideran sus conocimientos y creen que, con una simple exposición, los alumnos los captan y reciben. Este es el método autoritario, el modo tradicional de enseñar por la palabra y la repetición, mientras los alumnos guardan silencio.
— Sabemos que la eficacia de esta manera de hacer docente es casi nula y no se podrá mantener si queremos ir adelante.
— Sabemos que la enseñanza tradicional no ha tenido en cuenta todos los factores presentes en la situación escolar, y que algunos de ellos, si no los olvidamos, pueden transformar radicalmente nuestra postura ante la clase. Uno de estos factores es la capacidad espontánea del niño para aprender aquello que queremos enseñarle, siempre que conformemos el ambiente para que se le presente como un desafío.
— Sabemos que la situación escolar contiene, por lo menos, cuatro factores que pueden modificarse, renovando a la vez el ambiente y los resultados: 1) el profesor, 2) el alumno, 3) la relación entre ellos y 4) los elementos con los cuales se relacionan.
— Podemos adelantar que la clave fundamental para conseguir el éxito de nuestra reforma es no olvidar que el profesor y los alumnos son personas. El olvido de esta circunstancia, la deshumanización de la enseñanza, deja fuera de nuestras técnicas escolares un buen número de fuerzas actuantes sobre el aprendizaje. La psicología nos dice muchas cosas útiles sobre la motivación y la movilización de las energías mentales, que sólo se desencadenan en una relación personal, y no, como es el caso hoy en gran parte de nuestras clases, cuando la relación es semejante al de una cinta impresa que trata de grabar otras cintas vírgenes.
— En la relación profesor-alumno está implicado el método de enseñanza. Cambiar el método es ciertamente factible, y puede esperarse que los resultados logrados con métodos distintos sean también diferentes. Es evidente, por ejemplo, que un método basado en el principio de asimilación *(dominio continuo de las situaciones)* y en la movilización de las energías del estudiante, irá ciertamente acompañado de un sentimiento de alegría de aprender, de una facilidad de recuerdo

de lo esencial de las situaciones estudiadas y de una gran economía de tiempo.

— Los elementos que sirven para crear la relación entre el profesor y el alumno forman el contenido del programa de estudios. Este programa, en general, representa la dimensión social en la relación educativa, ya que es el grupo social quien decide lo que se tiene que enseñar.

— Sabemos hoy que no es necesario hacer el programa en la forma que se ha venido haciendo. Puede modernizarse y puede alterarse el orden de las materias sin pérdida de vigor y eficacia.

— Sabemos que muchas de las causas del fracaso de los alumnos se encuentran en la manera de enseñar que los maestros adoptan en su clase, y que estos fracasos no son inevitables. El estudio sistemático de los errores demuestra que éstos no son arbitrarios; pueden eludirse con una toma de conciencia sobre sus orígenes.

— Sabemos que la Matemática es una forma de la actividad humana y, como tal, acusa los defectos propios de las mentes creadoras. La historia de la Matemática se puede concebir como el conjunto de hallazgos, fruto de las discusiones tenidas entre sí por los hombres en torno del contenido de las situaciones creadas por ellos mismos, y, principalmente, de las relaciones extraídas como reflejo de las propias estructuras mentales.

— La actividad matemática es una serie de tomas de conciencia del dinamismo de relaciones subyacentes en situaciones constituidas ellas mismas por relaciones. Lo que generalmente se denomina abstracción, es una jerarquía de planos simbólicos en la que los conjuntos de relaciones están representados por un símbolo. Así, pues, no hay una abstracción única, como no hay un plano concreto único.

— Sabemos también que, si partimos de la realidad de la transformación de las estructuras mentales de cada uno de nosotros en estructuras mentales matemáticas, seremos capaces de crear individuales maneras de enseñar subordinadas al verdadero proceso de aprendizaje. Estas maneras de enseñar, únicas eficaces, son idénticas al autodidactismo, reconocido unánimemente como el único modo auténtico de saber algo.

— Sabemos que no todas las mentes funcionan del mismo modo y que, por tanto, el adoptar una de ellas como modelo único lleva consigo inevitablemente el sacrificio de un cierto número de alumnos. El milagro de la enseñanza tradicional es que, a pesar del olvido de este hecho fundamental, haya conseguido un número suficiente de éxitos para encontrar quien la defienda en contra de la prueba irrefutable de tantos fracasos. Y, sin embargo, la evidencia de las diferencias individuales debería ser el punto clave de los métodos que se propugnen para adoptar una didáctica capaz de lograr la síntesis entre la enseñanza y la realidad.

— Sabemos que cuando este factor se tiene verdaderamente en cuenta, entonces se descubre:

que los niños pueden aprender mucha más matemática, mucho mejor y en menos tiempo;

que el empleo de modelos multivalentes proporciona una cantidad de motivaciones y estímulos que preparan desde un principio a los alumnos, y les introducen en el dinamismo de la matemática de las relaciones;

que los programas pueden remoldearse de forma que las estructuras matemáticas elaboradas sigan un orden funcional psicológico, comenzando por el álgebra, o toma de conciencia del mundo operatorio, para continuar con la medida, que engendra los números y la aritmética. Los diferentes capítulos del programa aparecerán, pues, como unidades funcionales en torno de las diversas estructuras especiales articuladas entre sí.

Todo esto lo sabemos hoy. Quedan aún muchos sectores en los que estamos trabajando en busca de más luz y más documentos que precisen la calidad de nuestros conocimientos actuales, tratando de encontrar los caminos que puedan servir verdaderamente, no para un grupo de niños, sino para todos.

Aunque sea ya grande la lista de lo que hoy tenemos a nuestra disposición, es muy poco si se compara con lo que nos falta por escrutar. Sólo el esfuerzo concertado de la profesión puede llegar a cubrir las amplias zonas de ignorancia existentes, con la creación de la ciencia indispensable para que nuestros niños obtengan de nosotros el servicio a que tienen derecho.

* * *

La estrategia que me permito proponer a mis lectores para su discusión y, si les parece, para su puesta en marcha, arranca, pues, de la preocupación general de enfrentarse con la realidad misma.

Se necesita, en primer lugar, difundir lo conseguido hasta ahora, mostrando su eficacia en nuestras propias clases. Seguidamente, modificar programas y métodos en determinadas escuelas elegidas; preparar maestros y profesores en seminarios experimentales; organizar reacciones en cadena para lograr que un número suficiente de adeptos consigan el apoyo de una mayoría del magisterio y del profesorado que hagan viable la reforma estructural propuesta; elaborar técnicas adaptables a las diversas mentalidades al mismo tiempo que a los fines educativos aceptados.

En términos generales, la estrategia deberá planear a grandes rasgos la operación; la táctica permitirá conseguir los resultados paso a paso.

Aquí sólo consideramos el conjunto de ambas: el Ministerio procede inmediatamente al nombramiento de una Comisión especial formada por un grupo de personas elegidas por selección entre aquellas que demuestren un conocimiento exacto de lo que se trata de hacer, y le concede un plazo de seis meses para preparar los detalles de la acción al nivel nacional. Es importante, desde luego, fijar claramente los límites y los fines del trabajo que se encomienda a esta Comisión. Explícitamente debe constar:

a) Que se trata de un proyecto estrictamente profesional, sin ningún carácter político.

b) Que sus miembros, mientras se dediquen a esta tarea, estarán liberados de todos sus cargos y trabajos oficiales y privados, quedando obligados a consagrarse exclusivamente a la causa del estudio y mejora de la enseñanza de la Matemática en todos los niveles, escolar y estudiantil.

c) Que lo que se les exige es una labor precisa y ultimada en sus detalles, viable, capaz de traducirse inmediatamente en realizaciones prácticas.

d) Que no ha lugar a considerar límites de presupuestos, puesto que no se trata todavía de una legislación formal, ni, por otra parte, el Estado vendrá obligado a ejecutar todos los consejos emanados de la Comisión.

En esta Comisión nacional deberán participar los miembros seleccionados y otros consultantes. Los seleccionados deben ser:

a) Personas de experiencia y habilidad reconocidas.

b) De variada procedencia: maestros de párvulos, maestros o maestras de primaria, profesores de Normal y de Instituto, profesores de Universidad y de Escuelas Especiales, fisiólogos, lógicos, epistemólogos, historiadores.

c) Personas dotadas de un buen espíritu de cooperación, con capacidad para estudiar en común los problemas fundamentales de los procesos del aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, sin que la función o cargo que ahora desempeñan sea por este sólo motivo un criterio de elección.

Un método acertado para la selección de los miembros de la Comisión pudiera ser, tal vez, el nombramiento de un juez, nacional o extranjero, encargado de preparar un cuestionario que enviaría a buen número de personas que en principio estimase calificadas. La calidad de las respuestas recibidas sería la base para la elección de las personas seleccionadas, a la vez que proporcionaría los nombres de aquellas que podrían ser consultadas en determinadas circunstancias especiales.

Nombrada la Comisión, se le pediría que, en un plazo de seis meses, presentase al Ministerio un plan detallado de la labor a realizar conducente a una transformación de la estructura de la enseñanza de las Matemáticas, que:

1) Modernice los métodos y los programas.

2) Procure un número suficiente de docentes bien preparados para la puesta en marcha de esta transformación y asegure su continuidad.

3) Proponga un plan de desarrollo de la función docente matemática, basada en:

a) Un incremento notable del número de alumnos capacitados por sus estudios para acceder al profesorado.

b) El empleo de modos de trabajo didáctico más idóneos, por su adaptación a la realidad del alumno, que la simple transmisión verbal:

c) Una autoeducación permanente de los docentes por sí mismos y por los consultores de otras profesiones.

Esta tarea encomendada a la Comisión la estimo perfectamente factible, siempre que se cuiden escrupulosamente los principios expuestos, es decir: 1) si el Ministerio la adopta seriamente bajo sus auspicios, 2) si los miembros elegidos para constituirla lo son por las razones aducidas más arriba, 3) si la Comisión se pone seriamente al trabajo y consulta con quien pueda proporcionarle las ayudas necesarias, sin perder el tiempo en discutir opiniones vagas expuestas con tono de autoridad.

El punto de partida de los trabajos de la Comisión deberá ser un examen de las posibilidades reales de sus miembros y completar sus conocimientos por el estudio de lo realizado ya por otras personas del país o extranjeras. De esta forma, por asimilación de lo ya hecho en este sentido, podrá ahorrarse muchos esfuerzos y, decidiéndose a actuar sobre esta base, podrá traducir inmediatamente su estrategia en táctica.

Ciertamente, estoy convencido de que, trabajando intensa y sinceramente en el sentido indicado, en un plazo de un mes a seis semanas, un grupo de 50 profesores, maestros y psicólogos pueden asimilar suficientemente lo que se sabe hoy en el campo de la didáctica de las Matemáticas, y el país tendrá a su disposición un primer contingente de personas adiestradas capaces de prestar un gran servicio en el desarrollo subsiguiente.

La Comisión podría ahora emplear este contingente en una reacción en cadena, enviando grupos de 2 a 5 de los adiestrados para, a su vez, adiestrar en 10 o 15 centros del país durante un período de 6 a 10 semanas. Procediendo de esta forma, en un plazo de 10 a 16 semanas el país dispondrá ya de 500 a 800 profesores preparados para iniciar una campaña de renovación, basada en lo que con seguridad es sabido, y capaces de enfrentarse con el auténtico problema de la educación matemática de la nación.

Tales personas serían en este momento encargadas de prestar servicio por tiempo limitado en su provincia, empleándolas en la realización del plan que, aprobado por el Ministerio, habría sido propuesto por la Comisión. Naturalmente, no puede esperarse que todas estas personas hayan madurado suficientemente en este plazo, y, por ello, sería aconsejable que la Comisión propusiera mantener un contingente de 20 personas de los primeros grupos como directores o asesores de seminarios móviles, con el fin de afianzar los progresos de estos 800 profesores. Este grupo elegido tendría otras funciones, además de la de adiestramiento de sus colegas: constituidos como consejo asesor, podrían servir de directores de experiencias, estudiar el planteamiento de temas de trabajo e investigación en los centros provinciales, ensayos de material de enseñanza, métodos y programas experimentales, bajo la dirección de un experto nacional.

Entre las 800 personas adiestradas habrían de figurar los profesores de Escuelas de Magisterio, los inspectores de Enseñanza Primaria o los futuros inspectores. El Ministerio debería considerar que a estas personas, para poder llevar a cabo con éxito las tareas correspondientes a su función, ciertamente trascendental para el porvenir y economía de la nación, habrá que asignarles una remuneración suficiente que les permita liberarles de otras dedicaciones al margen de la labor encomendada. Si se cuenta con el concurso entusiasta y decidido de este grupo de profesores, ejemplar y capacitado, el país puede esperar que en un plazo de cinco años los problemas de preparación de magisterio nacional estén, si no todos resueltos, sí reducidos y en vía de solución.

* * *

¿Cuál sería el plan de trabajo a realizar en el primer seminario, de 4 a 6 semanas, con los 50 profesores elegidos inicialmente?

Dado por hecho que estos 50 profesores sean liberados de otras preocupaciones ajenas a su propia formación, y que vengan al seminario atraídos solamente por la índole de la tarea que les espera, y supuesto también que la persona encargada de dirigir el seminario tenga una experiencia y una visión clara de la enseñanza de las Matemáticas, se podría contestar:

Mi primera tarea consistiría en liberar la mente de los participantes de sus ideas preconcebidas. Labor que estimo muy sencilla, pues mi experiencia me dice que no hay un puñado de personas en todo el mundo que no haya rectificado espontáneamente sus prejuicios cuando se les ha colocado en contacto con la realidad. Con un solo día bastaría para la creación del clima necesario y para hacer que los ojos comiencen a abrirse en busca de la verdad. Choque afectivo inicial que no desaparece ni después de algunos meses, y este asombro bien pronto se convierte en intenso interés en comprender de lo que se trata.

En una sesión dedicada a analizar los errores de los alumnos en clases vecinas, encontraremos documentos suficientes para comenzar el estudio de la formación de estructuras mentales. Serán los mismos participantes los que vivan ahora la inquietud de un aprendizaje nuevo: el estudio práctico de su propia mente en actividad de aprender, y no el estudio de teorías aptas sólo para ser confiadas a la memoria. Estudio personal que constituirá la mejor fuente de observaciones para la comprensión de las mentes de sus alumnos. Bien pronto nuestra nueva actitud se convertirá en estado normal, por la adquisición del hábito de indagación sobre el proceso de formación de nuevas estructuras mentales. Poseeremos una disposición natural para la comprensión de los errores de los alumnos. Más aún, aprenderemos a aceptarlos, y hasta a solicitarlos, porque son el mejor indicio del proceso de formación de las nuevas ideas. Sin ellos sólo podríamos hacer un trabajo de adivinación.

Un maestro, un profesor que no desarrolle su capacidad como psicólogo no podrá servir a la causa de mejora de nuestra enseñanza. Por eso me preocupo especialmente de crear en cada uno de nosotros el deseo de profundizar en su propia mente, y en la de sus alumnos y compañeros. La pregunta que está siempre en mis labios en los trabajos del seminario es: ¿cuál es la mejor manera de hacer para que nadie se pierda en teorías, en ideas preconcebidas? Comprobaremos que muchas veces no tenemos a mano una respuesta y que tampoco hay libro que nos lo aclare. Así aprenderemos que la función docente nos coloca siempre frente a un misterio y nos obliga a un trabajo de investigación de lo desconocido. Esto también me parece ser importante: conseguir de cada uno que nunca pierda contacto con el misterio de la vida mental, y ayudarlos en su trabajo de investigación original sobre los acontecimientos que ocurren mil veces delante de cada uno de nosotros sin que nos percatemos de ellos.

Puesto que nuestro seminario está centrado sobre la realidad del aprendizaje matemático, todos los días doy clases experimentales y estudio con mis compañeros las contingencias diarias de las lecciones. Y siempre acontecen tal cantidad de cosas que yo sería incapaz de decir o analizar, y así llegamos a la conclusión, puesto que 102 ojos en alerta ven más que 2, de la conveniencia de la observación colectiva de la complejidad de una clase para poder sacar el provecho máximo, inmediato o mediato, de lo que los alumnos vieron o propusieron, o de lo que no veían y nos parecía obvio, etc.

En el seminario dedicamos nuestra preferencia a los temas más amplios del aprendizaje: ¿qué es la actividad matemática?; ¿qué lugar corresponde al álgebra en esta actividad?; ¿cuáles son las estructuras primitivas en esta situación?; ¿cómo funciona la mente para pasar de tal toma de conciencia a tal otra?; ¿podemos encontrar situaciones privilegiadas para presentar tal noción en su dinamismo? Investigación de situaciones más apropiadas a tal noción y comprobación en las clases. Estudio de una posible clasificación de las situaciones desde el punto de vista de su contenido estructural, o del alumno, o del profesor. ¿Cuáles son los factores que intervienen para que mientras Fulano escoge situaciones de tal tipo, Zutano las elige de tal otro?...

Una vez conseguida la iniciación del grupo en la naturaleza de su trabajo en común: estudio de las estructuras mentales dinámicas, consideración y discusión de las situaciones, será el momento de abordar la modernización del programa.

Modernizar, para mí, quiere decir empezar con estructuras amplias o situaciones poco estructuradas, y avanzar añadiendo estructuras y buscando sus efectos sobre la situación. Esto lleva consigo que la pedagogía dinámica actúa sobre clases de nociones y familias infinitas, equivalentes en cierto modo a una noción. Si no hay clases infinitas, no hay matemática. La actividad matemática es el descubrimiento de relaciones entre clases, y, por eso, siempre presentamos nuestras nociones desde el principio de esta forma.

La modernización del programa es, pues, el resultado de invertir muchas veces el orden de presentación de las nociones: el álgebra antes de la aritmética, las cuatro operaciones al mismo tiempo, y las clases de equivalencia desde el principio; fracciones y productos como dos visiones de la misma escritura; la división como sustracción reiterada e independientemente de los productos, etc. (Véanse mis libros *Aritmética con Números en Color*, tomos I a IX, y los libros del Maestro.)

Ya que las clases infinitas, las operaciones sobre conjuntos y las funciones de conjuntos son ahora nociones iniciales, ofrecidas y accesibles a los niños al comienzo de sus estudios primarios, podemos llevarlos con un programa muy distinto del tradicional a reconocer que el cálculo infinitesimal, la topología elemental, las estructuras algebraicas, etc., están hoy verdaderamente a su alcance. La modernización del programa tiene esta consecuencia especialmente trascendental: ¡es posible llevar a la escuela la enseñanza que hoy es universitaria! (Don Pedro, que en 1956 me decía que esto no sería posible, y que no veía entonces la posibilidad de colaborar conmigo en la preparación de textos tan adelantados para niños de Bachillerato, me escribía en una de sus últimas cartas que, después de las experiencias que venía realizando en sus clases, había llegado al convencimiento de la verdad de esta afirmación.)

Pero de todo ello, lo que estimo más importante es la pedagogía del *dominio continuo*, la cual nos permite vivir la realidad pedagógica de la misma manera que el investigador vive su ciencia. Las ideas que se tienen hoy de la lección, del horario, de en definitiva toda la situación escolar, se transforman radicalmente cuando se enfoca la enseñanza subordinando toda la actividad del aprendizaje a este principio: la certeza de la adquisición del dominio de una situación antes de proponer un cambio de tarea. De lo cual parece desprenderse la necesidad de una individualización de la enseñanza, pero yo no me atrevería a suscribir totalmente este postulado, pues estimo que hay todavía mucho que estudiar antes de decidir si dominio e individualización son tan sencillamente relacionables. El dominio es mucho más importante que el modo de trabajar, y es aquél el factor decisivo como guía de la enseñanza. A mi entender, cuando se ha comprendido bien que el dominio continuo es el sumo criterio pedagógico y didáctico, se reconoce que la práctica del repaso, por ejemplo, es signo de nuestros errores didácticos y debe desaparecer de la vida escolar. Este hecho, por sí solo, constituiría ya una revolución pedagógica, pues habrá de permitir a nuestros alumnos un ahorro del 30 al 50 por ciento de su tiempo.

Pero aún hay más. El dominio continuo ha demostrado la existencia de un *efecto acumulativo* en el aprendizaje, gracias al cual el alumno puede resolver por sí solo muchas tareas *sin estudiarlas*, debido al efecto de «transferencia» que tiene lugar. Porque, en realidad, existe una variedad de organizaciones de los conocimientos dominados, de forma que, a partir de los

enseñados, los demás resultan de la dinámica mental actuando espontáneamente sobre aquéllos.

Otro de los aspectos que habría que mostrar en el trabajo del seminario es el papel cada vez más reducido que se concede a la memoria. El reconocimiento de las situaciones es mucho más amplio que la pura memoria, y el cultivo deliberado de la actividad de las imágenes equipa al alumno con poderes mucho más fuertes de los que puede proporcionarle la enseñanza tradicional.

* * *

Con la puesta en práctica del proyecto esbozado en estas líneas, en un seminario de algunas semanas, el país tendría a su disposición un equipo de 50 personas con unas capacidades que no se cultivan hoy en ninguna institución existente y que podrían ser cardinales para servir a la causa de la necesaria reforma de la enseñanza de las Matemáticas. La influencia de este grupo de profesores, dotados de una nueva visión de la pedagogía, y dispuestos a seguir ampliando su saber en contacto con los problemas vivos del aprendizaje, sería decisiva en la solución del problema que propongo a la Comisión ministerial.

Sería, indudablemente, la mejor manera de honrar la memoria y de continuar la hermosa labor iniciada en el campo de la didáctica matemática por el maestro que fue don Pedro Puig Adam, al que, estoy seguro, todas las ideas contenidas en este artículo le parecerían perfectamente viables y desprovistas de fantasía. Nuestra amistad fue esencialmente creadora, y, sin duda, no habrá dejado de influir poderosamente en la elaboración de las ideas que preceden. Que su memoria esté asociada con el esfuerzo español, si, efectivamente, se decide a moverse en esta dirección.

Nueva York, 23 de junio de 1961.

DE LA PRENSA

ESCASEZ DE PROFESORADO DE MATEMATICAS

EL PAIS del dia 8 de Septiembre de 1989 publicaba una crónica de su corresponsal *R. M. de Rituerto* en Londres titulada *"A la caza del profesor"*, en la que se comenta la escasez de profesores que sufre el Reino Unido, especialemente en el área de Matemáticas. Describe en ella los esfuerzos que se realizan actualmente para conseguir profesores tanto en las cercanas Alemania, Holanda y Dinamarca como en las lejanas Australia y Nueva Zelanda.

Informa, en particular, que "... el informe anual de la inspección de enseñanza británica señana carencias en física, química, matemáticas, diseño y lenguas extranjeras en la enseñanza media. El número de profesores es cada vez menor, y el vaticinio hecho el año pasado por la universidad de Manchester de que en 1995 habría un déficit de 4.000 profesores de matemáticas en la enseñanza media, ha quedado destrozado. El número de quienes hoy aspiran a ser profesores de matemáticas hace prever que en 1955 sólo habrá 12.000 para cubrir 22.000 plazas."

UNA APLICACION DEL TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Por José V. García Sestafe

En algunas aplicaciones prácticas se presenta el problema de que dada una matriz cuadrada A hay que obtener otra matriz B, tal que $B^2 = A$.

El problema, como es sabido, admite más de una solución; en general, si la matriz A no es degenerada, existen 2^n matrices solución, siendo n el orden de la matriz dada. En lo que sigue, el conjunto de las matrices solución se representará por $\sqrt{A}$.

La solución del problema en el caso de una matriz diagonalizable, se obtiene, como es sabido, de

$$\sqrt{A} = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde las λ_i son los valores propios de A, las $\sqrt{\lambda_i}$ se toman con doble signo y P es tal que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En el caso particular de que A sea una matriz 2×2, el problema se resuelve muy fácilmente aplicando el teorema de Cayley-Hamilton que dice: Toda matriz cuadrada verifica su ecuación característica. Para la matriz cuadrada A de orden 2 se verifica que su ecuación característica es:

$$\lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + |A| = 0$$

donde, respectivamente, $tr(A)$ y $|A|$ representan la traza y el determinante de A. Por el teorema citado se verifica (siendo I la matriz unidad 2×2)

$$A^2 - tr(A) \cdot A + |A| \cdot I = 0$$

donde, ahora, 0 es la matriz cero de orden 2.

De la igualdad anterior se deduce

$$tr(A) \cdot A = A^2 + |A| \cdot I = A^2 \pm 2\sqrt{|A|} \cdot A + |A| \cdot I \mp 2\sqrt{|A|} \cdot A =$$

$$= (A \pm \sqrt{|A|} \cdot I)^2 \mp 2\sqrt{|A|} \cdot A$$

de donde

$$A\left[tr(A) \pm 2\sqrt{|A|}\right] = (A \pm \sqrt{|A|} \cdot I)^2$$

y de aquí, si $tr(A) \pm 2\sqrt{|A|} \neq 0$, esto es, si los valores característicos de A son distintos,

$$\sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{tr(A) \pm 2\sqrt{|A|}}} \; (A \pm \sqrt{|A|} \cdot I)$$

de donde se obtienen las cuatro soluciones; nótese que el segundo y tercer $\pm$ se corresponden, por lo que existen 4 y sólo 4 soluciones distintas siempre que $|A| \neq 0$ y $tr(A) \pm 2|A| \neq 0$.

En el caso de que $|A| = 0$ y $tr(A) \neq 0$, existen sólo dos soluciones

$$\sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{tr(A)}} \cdot A$$

Si para la matriz $A = (a_{ij})$ de orden 2×2 se cumple $tr(A) \pm 2|A| = 0$, se verifica que $(a_{11} + a_{22})^2 = 4(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{22})$, o bien

$$(a_{11} - a_{22})^2 = -4a_{12}\, a_{21}$$

Por otra parte, el sistema para hallar los vectores propios es

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}\, x_2 = 0 \\ a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

y como los valores propios son iguales, $\lambda = (a_{11} + a_{22})/2$ resulta el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = 0 \\ a_{21}\, x_1 - \dfrac{(a_{11} - a_{22})}{2}\, x_2 = 0 \end{cases}$$

que es incompatible puesto que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & -\dfrac{a_{11} - a_{22}}{2} \end{vmatrix} = -\left[\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}\, a_{21}\right] = 0$$

y, por tanto, admite únicamente la solución trivial $x_1 = x_2 = 0$, no existiendo ninguna matriz P tal que $P^{-1}\, A\, P$ sea diagonal, o sea la matriz A no es diagonalizable.

EJEMPLOS

a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

La ecuación característica es $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$; por tanto, se cumple $A^2 - 6A + I = 0$, de donde

$$6A = A^2 + I = A^2 \pm 2A + I \mp 2A = (A \pm I)^2 \mp 2A$$

o bien

$$A(6 \pm 2) = (A \pm I)^2; \quad \sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{6 \pm 2}} (A \pm I)$$

Las cuatro soluciones son:

$$B_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $tr(R) = 14$ y $|A| = 49$, se tiene $tr(A) = 2\sqrt{|A|}$, la matriz no es diagonalizable y no existe ninguna matriz B, tal que $B^2 = A$.

c) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se cumple que $tr(A) = 2\sqrt{|A|}$, pero como es diagonal, existe $\sqrt{A}$:

$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

SOFTWARE PARA MATEMATICA COMPUTACIONAL

por

E. Roanes Macías

Durante el último cuarto de siglo se han conseguido desarrollar sistemas informáticos que permiten efectuar cálculos matemáticos en que intervienen símbolos sin valor numérico preadjudicado, es decir, indeterminadas. Simultáneamente, se ha conseguido implementar lenguajes de programación específicamente matemáticos (dialectos del ALGOL), que facilitan o posibilitan, según el caso, la elaboración de programas de esta naturaleza.

Ello ha permitido, de una parte, resucitar viejos algoritmos, como el clásico método de Sturm para determinar el número de raices reales de una ecuación algebraica con coeficientes reales (considerado muchos años inviable, salvo para polinomios sencillos o especialmente preparados), que ahora vuelven a tener interés práctico con algunas modificaciones y restricciones. De otra parte, el desarrollo de aquellos sistemas ha fomentado la dedicación al diseño, análisis, implementación y aplicación de otros algoritmos, dando lugar a nuevas disciplimas, como el Algebra Computacional.

Fué hacia 1963 cuando se comenzó a pensar en la posibilidad de aprovechar el lenguaje LISP para automatizar cálculos de Física Teórica relativos a partículas elementales y en 1966 apareció la primera publicación en este sentido. En 1968 se publicó la descripción del primer sistema algebraico general que permitía efectuar simplificaciones, que su autor, el Dr. Hearn, denominó REDUCE. Sus investigaciones se concretan hacía 1970 en el sistema Reduce 2 escrito en un dialecto de Algol (denominado hoy RLISP).

A partir de esta fecha, varios investigadores americanos, japoneses y europeos se dedican a trabajar sobre el tema, incorporando nuevos paquetes (integración analítica factorización multivariable, aritmética real con precisión arbitraria, resolución de ecuaciones y sistemas, etc) que se incluyen en Reduce 3 (versión 3.1), distribuida en 1983. Posteriormente, esta versión es mejorada y en 1985 aparece la versión 3.2, con implementaciones para una docena de tipos de ordenadores (PC-compatibles y Cray X/MP, entre ellos). Y en la versión 3.3, aparecida en 1988, se incorporan nuevos pa-

quetes: autovalores y autovectores, bases de Gröbner, ampliación de integración, resolución de ecuaciones y sistemas (este último experimental) y sobre todo se incorpora el uso de listas, con la comodidad que ello supone.
Reduce es a la vez un lenguaje de programación y un sistema de cálculo, que permite ejecutar operaciones matemáticas muy diversas: cálculo con matrices simbólicas (determinante, inversa, traspuesta, traza,...), operaciones con polinomios con número finito de indeterminadas (factorización, m.c.d., resultante,...), cálculo diferencial e integral simbólico, resolución de ecuaciones y sistemas, etc.

Naturalmente, la posibilidad de ser utilizado con ordenadores PC-compatibles es lo que ha dado mayor difusión al sistema Reduce. Pero, para usuarios de estos micros, conviene observar que Reduce precisa, al menos 512 K, aunque es preferible utilizar un AT con 640 K y disco fijo. Su principal inconveniente es no disponer de un editor de manejo razonablemente cómodo, lo que puede solucionarse en el modo indicado en otro artículo de este número del Boletín.

Hasta aquí nos hemos referido exclusivamente a Reduce, por ser el sistema pionero, el mas difundido y el mejor conocido del autor de esta nota, pero hoy existen varios sistemas mas de matemática conputacional, que describimos someramente.

MUMATH y MUSIMP es un sistema interactivo de matemática simbólica, para operaciones algebraicas y analíticas (MuMath es el conjunto de paquetes y MuSimp el lenguaje de programación en que están implementados, también basado en Lisp). Aunque su potencia de cálculo es menor que la de Reduce, en él aparecen implementadas las funciones elementales usuales (logaritmicas, trigonométricas, hiperbólicas, etc). Desarrollado en Hawai a partir de 1976, la versión de 1983 ha sido implementada para ordenadores compatibles con sistema operativo MS-DOS, así como para Apple II con tarjeta Z80, lo que ha incrementado su popularidad.

MATHCAD es un paquete con posibilidades similares a las del Mumath, incluyendo representación gráfica, muy cómoda de manejar.

MATHLAB es un sistema pensado para hacer la función de un "auxiliar" matemático al científico en su quehacer cotidiano. También está basado en Lisp y permite efectuar diversas operaciones matemáticas: diferenciación, integración indefinida, factorización polinómica, transformada de Laplace (directa e inversa) y resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes (simbólicos).

ALPI es un sistema desarrollado recientemente (1988) en las universidades de Pisa y Génova. Esta escrito en MuLisp. Incluye un paquete conteniendo algoritmos para cálculo de bases standard y de Gröbner.

También el sistema BUCHMORA, desarrollado conjuntamente por los profesores Buchberger (Univ. de Linz) y Mora (Univ. de Génova), contiene algoritmos similares a los del Alpi, pero implementados en lenguaje Modula-2 y compilados, lo que lo hace muy rápido en tiempo de ejecución, existiendo versiones para IBM-PC, Macintosh y Atari.

MAPLE es otro sistema que se ha desarrollado con mucho exito en la joven universidad Waterloo (Cánada). Está implementado para más de 20 tipos de ordenadores (Macintosh y Sun 4, entre ellos). Su desarrollo es tan rápido que aparecen hasta dos versiones por año, siendo la última, en este momento, la versión 4.2. Su calidad y comodidad de manejo, lo hacen ser actualmente uno de los más competitivos, junto al estadounidense MATHEMATICA.

Otros sistemas utilizados en matemática computacional son: MACSYMA, SCRATCHPAD, SAC-2, GALOIS (este último desarrollado en la universidad de Tasmania), pero con ellos no tenemos experiencia de uso.

Antes de concluir, deseo agradecer a los profesores: Juan Llovet (Univ. Alcalá), Ignacio Luengo y Emilia Alonso (Univ. Complutense) y Tomás Recio y Juan Manuel Olazabal (Univ. de Cantabría), su información relativa a algunos puntos de esta nota.

Bibliografía

BUCHBERGER, COLLINS, LOOS: Computer Algebra; Springer 1983

HEARN: Reduce User's Manual; Rand Publication 1985

RAYNA: Reduce. Software for Algebraic Computation; Springer 1987

RICE: Mathematical Aspect of Scientific Software; Springer 1988

EDITOR DE ARCHIVOS Y DE LINEAS PARA REDUCE

[O COMO HACER EL TRABAJO MAS COMODO A LOS MATEMATICOS USUARIOS DE ESTE LENGUAJE]

por

Cristóbal Pareja Flores
Eugenio Roanes Lozano

1. Introducción

Aunque esta sea una nota eminentemente informática y no matemática, pensamos que puede ser de gran utilidad para los matemáticos usuarios de REDUCE, conocer la posibilidad de trabajar en la forma que aquí se expone.

REDUCE es quizás el más difundido de los lenguajes específicamente diseñados para Cálculo Simbólico. Existen implementaciones sobre una gran variedad de ordenadores, pero es la realizada para ordenadores PC y compatibles la más usual.

Por un lado, supone un arma potentísima a la hora de trabajar en muchos de los campos de la matemática. Para quien no lo conozca, a título de ejemplo, permite utilizar directamente matrices simbólicas, la diferenciación viene implementada, y permite trabajar en anillos cociente.

Sin embargo, presenta, a juicio de todos los usuarios que conocemos, un inconveniente importante: la inexistencia de un editor "razonable" que permita corregir sobre la marcha los programas que vamos realizando. En consecuencia, la -atípicaforma de trabajar en Reduce es la siguiente:

1) se crea un archivo con un editor externo
2) se entra en Reduce (unos 10 segundos en un PC-AT)
3) se carga el archivo
4) se prueba el programa cargado

y si hay algún error o errata:

5) se sale de Reduce
6) se hacen las correciones pertinentes con el editor externo
7) se vuelve al paso 2)

Es evidente que el proceso anterior es extremadamente lento, por la cantidad de veces que hay que realizar el paso 2) hasta depurar un programa.

Por otra parte, la tecla F3 es redefinida, dejando de tener efecto. Por ello, si en alguna línea cometemos un error, hay que reescribir la línea completa.

2. Forma de atacar el problema

Lo óptimo sería tener un editor de archivos y otro de líneas. De este modo, podríamos reformar archivos sin salir de Reduce, y volver a obtener líneas ya tecleadas, con lo que el trabajo sería verdaderamente interactivo. La única solución que veíamos para ello era utilizar editores residentes (instalados en la zona alta de memoria) y tratar de evitar que interfirieran el ya de por sí delicado funcionamiento de Reduce. Elegimos como editor de archivos el Notepad del Sidekick de Borland Inc. (v. 1.56a) y como editor de líneas el Command EDitor (CED), de Christopher J. Dunford (v. 1.0).

Para quienes hemos trabajado con Reduce en esta particular implementación, son bien conocidos los problemas que acarrea hacer alteraciones (cambiar, por ejemplo, los archivos AUTOEXEC.BAT o CONFIG.SYS provoca la aparición del mensaje *******INCOMPATIBLE SESION FILE, al intentar cargar de nuevo la sesión de Reduce).

Además, se nos presentaba otro problema. Aunque estábamos trabajando con un AT con 1 Megabyte de memoria RAM, como en principio el sistema operativo MS-DOS sólo reconoce la primera página de 640 K, y ninguno de estos programas reconoce la expansión de memoria (?), teníamos disponibles sólamente 640 K. Pero instalar todo el Reduce (sesión BREDUCE.FRZ (*)) requiere un mínimo de 512 K, por lo que, en principio, los segmentos de memoria usados por los editores y por el Reduce se solapaban, lo que provocaba que no se pudiera arrancar la sesión de Reduce.

3. Instalación que proponemos

Podemos comenzar instalando el programa Sidekick en el disco duro, en el directorio SIDEKICK, y el editor CED en el directorio EDILIN (normalmente se usa Reduce en un equipo con disco duro, por lo que supondremos su existencia, no siendo, de todos modos, imprescindible).

A continuación tratamos de liberar memoria, con la adopción de un raquítico archivo CONFIG.SYS, conteniendo:

(*) Aunque estamos tratando el problema de compatibilizar el uso de estos editores con la sesión BREDUCE.FRZ de Reduce, todo lo anterior es válido para las sesiones MREDUCE.FRZ y TREDUCE.FRZ (únicas que pueden cargarse, si la cantidad de memoria disponible es menor).

sólamente:

country=034

Completamos el archivo AUTOEXEC.BAT, en nuestro caso:

```
echo off
path c:\;c:\dos\
keybsp
ver
prompt $p$g
cd edilin  }
ced        } (activa el CED)
cd..       }
cd sidekick }
skn         } (activa el Sidekick
cd..        }        -incompleto-)
date
```

De esta forma dejamos suficiente memoria RAM libre. No parece posible incluir otros programas residentes simultáneamente (mouse, por ejemplo), por lo que tendremos que evitar llamarlos desde el AUTOEXEC.BAT, si vamos a trabajar con Reduce.

Ahora debemos reinizializar el sistema y hacer de nuevo ejecutable la sesión de Reduce, pues hemos alterado los dos archivos anteriores (basta repetir los tres últimos pasos de la instalación de Reduce).

4. Cómo podemos trabajar ahora

4.1 El editor de líneas

En el archivo AUTOEXEC.BAT hemos incluido las órdenes para buscar y activar el editor CED.

Por tanto, a partir de ahora, cuando arranquemos el ordenador, se habrán producido cambios respecto del uso normal con el MS-DOS. Desglosemos los que más nos afectan.

- La tecla F3 no repite la línea anterior (de todos modos, en Reduce no tenía efecto)

- Las teclas → y ← permiten moverse hacia derecha e izquierda sobre una línea (antes de pulsar Return), sin alterarla

- Las teclas ↑ y ↓ permiten repetir las últimas líneas tecleadas (con un poco de práctica, permite reformar incluso *Sentencias Agrupadas* y *Procedures*, sin tener que guardarlos en disco)

- Ahora, al escribir, los modos de sustitución (cursor _) e inserción (cursor ■) son ambos operantes.

¡¡Todo ello funciona dentro de la sesión de Reduce!!

4.2 El editor de archivos

En el archivo AUTOEXEC.BAT hemos incluido las órdenes adecuadas para activar el Sidekick. Por ello, al conectar el ordenador, incluso dentro de la sesión de Reduce, pulsando simultáneamente las teclas Ctrl-Alt entramos en Sidekick y, eligiendo Notepad, en el editor.

Asignamos con el Setup del Sidekick un archivo en blanco al editor, que podemos dejar como archivo de trabajo para las sesiones de Reduce (también es posible editar otros archivos desde Notepad usando F3).

Para probar un programa escrito en Reduce, podemos proceder así:

1') Cargamos el Reduce
2') Entramos en el editor, escribimos o reformamos nuestro programa y lo salvamos, y salimos del editor (¡¡Seguimos estando en la sesión de Reduce!!)
3') Cargamos desde Reduce el archivo
4') Probamos el programa

Si hubiera algún error en el programa, basta repetir los pasos 2'),3') y 4'), que ahora son casi instantáneos, hasta su depuración.

La gran ventaja de este modo de trabajo es que no repetimos el lento proceso de carga de Reduce. Tampoco hay que volver a cargar en la sesión de trabajo otros archivos (si fueran necesarios), pues no llegamos a salir de ella.

5. Bibliografía

BORLAND INT. Inc.: Sidekick v.1.5 Owners Handbook, 1985

DUNFORD: CED, v. 1.0. User's Guide, 1985

HEARN: Reduce User's Manual (Version 3.2). 1986

RAYNA: Reduce. Software for Algebraic Computation. Springer-Verlag, New York 1987

TANDOM: MS-DOS. Manual de Referencia del Usuario (v. 3.20)

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ____

Dirección particular ______________________________

Código postal _____________ Teléfono ______________

Centro de trabajo _________________________________

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO NUMERARIO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ____________________

____

para que cargue en mi cuenta numº ____________________

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1988-89 y siguientes.

________________ de __________ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ______________ Banco ______________________

____

Ruego abonen con cargo a mi cuenta ___________ de número ____________________, los recibos de mi cuota anual en la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

Firmado: ______________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

SOCIEDAD CASTELLANA "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SOLICITUD DE ADHESION DE CENTRO

D. ____

como __________________ del Centro ___________________

____

domiciliado en ______________________________________

__________________ Código postal _______ Tfno. ___________

SOLICITA LA ADHESION A LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ______________________

____

para que cargue en la cuenta nº ____________________, los recibos correspondientes al curso 1988-89 y siguientes.

________________________ de __________ de 198 .

Fdo:

La cuota anual está actualmente establecida en 1.700 Pts.

Fecha ______________ Banco ______________________

____

Ruego abonen con cargo a la cuenta __________ de número ______________________, los recibos de la cuota anual de la Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente

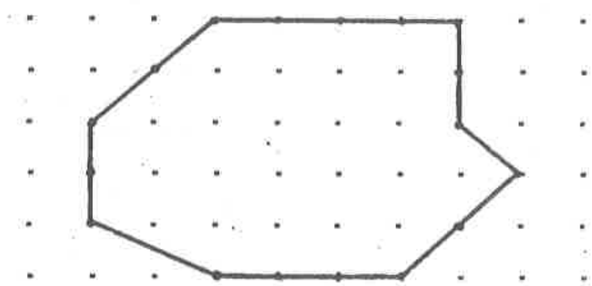
Firmado: ______________________________

Remítanse ambas partes a: Sociedad Castellana "PUIG ADAM" de Profesores de Matemáticas. Apartado nº 9479 - 28080-MADRID.

EL TEOREMA DE PICK

Luis Villacorta . I.B.Vicálvaro

Buscando cuestiones matemáticas sencillas, bellas y de comprensión entre los alumnos de bachillerato, con objeto de proporcionarles una visioh mas amplia de la matemática, nos encontramos con el Teorema de Pick. Este teorema trata del área de poligonos reticulares simples. Un poligono reticular simple es aquel cuyos vértices son puntos reticulares y sus lados no se cortan salvo en los vértices. Para aclararnos mas diremos que, en el plano Euclídeo, un punto raticular es aquel que tiene coordenadas enteras.



$A = I + B/2 - 1 = 20 + 17/2 - 1$

Fig. 1

En 1899, **George Pick** encontró una fórmula para hallar el área **A** de un polígono reticular simple **P**.

> **Teorema de Pick.**- El área **A** de un polígono reticular simple viene dada por
>
> $$A = I + B/2 - 1$$
>
> donde **I** y **B** designan el número de puntos reticulares interiores y del borde respectivamente del polígono. (fig. 1)

Las pruebas existentes del Teorema de Pick dependen en gran manera de triángulos reticulares primitivos, que son aquellos que no tienen puntos reticulares interiores ni en el borde, exceptuando los tres vértices.
El esquema para demostrar el Teorema de Pick va a ser el siguiente : veremos, en primer lugar, que el área de un triángulo reticular primitivo es igual a **1/2** y de este resultado

deduciremos el teorema.
Sea **XYZ** un triángulo reticular primitivo y sea **OXQY** el rectángulo reticular mínimo que lo contiene. Al ser mínimo el rectangulo, cada uno de sus lados pasa por un vértice del triángulo. La unica posibilidad para que el triángulo **XYZ** sea primitivo, es que uno de sus lados sea diagonal del minimo rectangulo, ya que, de otro modo, el triángulo tendria puntos reticulares interiores y no seria primitivo. (fig.2.a). Por ello, supongamos que **XY** sea la diagonal del rectangulo (fig. 2.b).

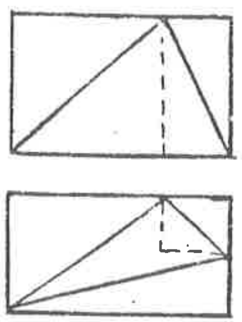


Fig. 2a.

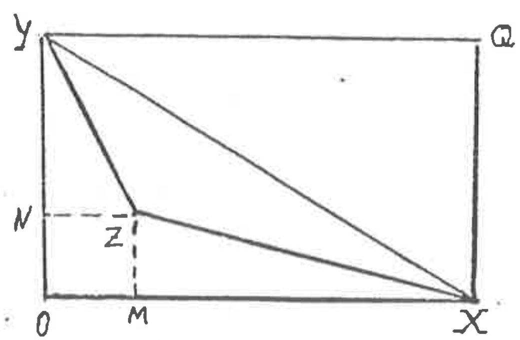


Fig 2b.

Sean **ZM** y **ZN** las perpendiculares respectivas a **OX** y **OY** (Z puede coincidir con **M**, **N** o **O**). Consideremos **O** como origen de coordenadas y **OX** y **OY** los ejes coordenados. Sean **m** y **x** las abcisas respectivas de los puntos **M** y **X**. Sean **n** e **y** las ordenadas respectivas de los puntos **N** y **Y**. Si designamos con **I(R)** el número de puntos reticulares interiores al rectangulo, entonces

$$I(OXQY) = (x-1).(y-1)$$

Como XY no contiene puntos reticulares excepto X e Y, se tiene

$$I(OXY) = I(OXQY)/2 = (x-1).(y-1)/2$$

De forma análoga

$$I(XZM) = (x-m-1).(n-1)/2$$

y

$$I(ZYN) = (m-1).(y-n-1)/2$$

Como XYZ no contiene puntos reticulares interiores, se verifica

$$I(OXY) - I(XZM) - I(ZYN) = m.n$$

donde **m.n** es el número de puntos reticulares en **OMZN** excluyendo aquellos oque estan en **OM** y **ON**. Por tanto, resulta

$$(x-1).(y-1) - (x-m-1).(n-1)/2 - (m-1).(y-n-1)/2 = m.n$$

Simplificando esta igualdad resulta

$$x.y - x.n - m.y = 1$$

Finalmente, si designamos con **A(R)** el area del polígono **R**, se verifica

$$A(XYZ) = A(OXY) - A(XZM) - A(ZYN) - A(OMZN) =$$

$$= x.y/2 - (x-m).n/2 - m.(y-n)/2 - m.n =$$

$$= x.y/2 - x.n/2 + m.n/2 - m.y/2 + m.n/2 - m.n =$$

$$= (x.y - x.n - m.y)/2 = 1/2$$

Una vez visto que el área de un triángulo reticular primitivo es 1/2, demostremos el Teorema de Pick.
Sean **P1** y **P2** dos polígonos reticulares unidos uno a otro a lo largo de un lado comun **MN**.(fig.3).

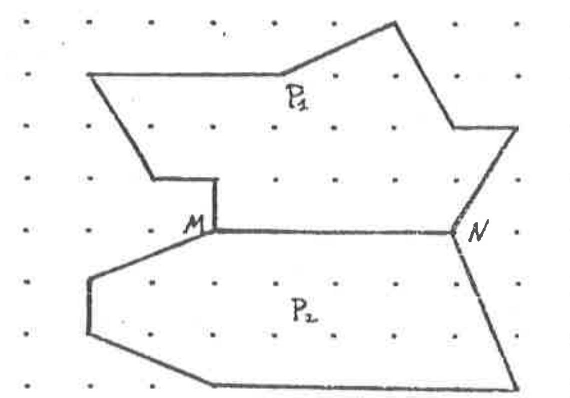


fig.3

Supongamos cierto el Teorema de Pick para cada uno de los polígonos **P1** y **P2**. Es decir, **A=I + B/2 - 1**. Vamos a ver que tambien se verifica para el polígono **P = P1 U P2**.
Sean **A**, **A1**, **A2**, **i**, **i1**, **i2**, **b**, **b1**, **b2** las areas, número de puntos reticulares interiores y en el borde de los polígonos **P**, **P1** y **P2** respectivamente. De acuerdo con nuestra hipótesis se verifica

$$A1 = i1 + b1/2 - 1$$

$$A2 = i2 + b2/2 - 1$$

Designando con k el número de puntos reticulares en el segmento MN, incluidos los extremos, es evidente que se cumple

$$A = A1 + A2$$

$$i = i1 + i2 + (k - 2)$$

$$b = (b1 - k) + (b2 - k) + 2$$

Por tanto,

$$A = A1 + A2 = i1 + b1/2 - 1 + i2 + b2/2 - 1 =$$

$$= (i1 + i2 + k - 2) + 1/2\ (b1 + b2 - 2k + 2) - 1 =$$

$$= i + b/2 - 1$$

como queriamos demostrar.
El Teorema de Pick es ahora inmediato, porque todo polígono reticular se puede descomponer en triángulos reticulares primitivos, en los se verifica el Teorema de Pick

$$1/2 = I + B/2 - 1, \qquad I = 0;\ B = 3$$

Una vez demostrado el Teorema de Pick vamos a ver a seguidamente que este teorema es topologicamente equivalente a la famosa Fórmula de Euler en un mapa plano simple. Para ello, verermos primeramente que del Teorema de Pick se deduce la Formula de Euler en un mapa plano simple y, a continuación, deducir de la Fórmula de Euler en un mapa plano simple el Teorema de Pick.

Comencemos poniendonos de acuerdo en lo que entendemos por mapa plano simple. Un mapa plano simple es una partición del plano en c regiones (una de ellas infinita) por medio de a curvas simples uniendo pares de v puntos. (fig.4)

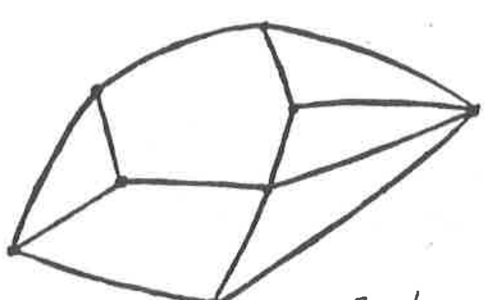


Fig. 4.

Seguidamente veamos un resultado previo independiente del Teorema de Pick. Sea P un polígono reticular simple descompuesto en T tiángulos reticulares primitivos. Designemos por L el número de lados en la triangulación. Hay B lados de triángulo alrededor del borde del polígono P y L-B lados de triángulo en el interior del polígono que son comunes a dos triángulos de la triangulación. Por tanto, los 3T lados de los T triángulos incluyen cada uno de los L-B lados interiores dos veces y cada uno de los B lados del borde una vez con lo que resulta

$$3T = 2(L - B) + B = 2L - B \qquad [1]$$

A continuación, considerendo el polígono reticular simple P y la triangulación en T triangulos reticulares primitivos, sabiendo que el área de un triángulo reticular primitivo es 1/2 se verifica $A = 1/2\ T$, y del Teorema de Pick se deduce

$$I + B/2 - 1 = 1/2\ T$$

o, tambien

$$T = 2I + B - 2 \qquad [2]$$

Llevando [2] a [1] y despejando L resulta

$$L = 3I + 2B - 3 \qquad [3]$$

Sea un mapa plano simple con v vértices, c regiones (una infinita) y a aristas. En el interior de cada una de las c-1 regiones finitas introduzcamos un nuevo vértice y lo unimos con todos los vértices de la región con una curva simple formando una triangulación del mapa. Si realizamos una copia de la triangulación del mapa y suponemos en la copia que las aristas son moldeables, se pueden estirar, encoger etc., podremos transformar la triangulación del mapa en una triangulacion en triángulos reticulares primitivos de un polígono reticular simple. La triangulación del mapa plano simple y la triangulacion en triángulos reticulares primitivos del polígono reticular simple son topologicamente equivalentes. Designemos el número total de vertices de esta triangulacion por I+B. Como hay v vértices originales en el mapa y c-1 regiónes finitas, en cada una de las cuales hemos introducido un nuevo vértice, se verifica

$$I + B = v + c - 1 \qquad [4]$$

Cada triangulo, en la triangulación, esta limitado por una arista original del mapa y dos nuevas aristas. Por otra parte cada arista es lado de dos triangulos. Si designamos por **T** el número total de triángulos y por **L** el numero total de aristas se verifica

$$L = a + T \qquad [5]$$

Por tanto, utilizando [4] y [5] se verifica

$$v + c - a = (I + B + 1) - (L - T)$$

sustituyendo en esta igualdad el valor de **T** obtenido en [2] resulta

$$v + c - a = (I + B + 1) - (L - 2/3\, L + 1/3\, B) =$$

$$= (I + B + 1) - (L + B)/3$$

sustituyendo **L** por el valor de [3] resulta

$$v + c - a = (I + B + 1) - (3 I + 2 B + B - 3)/3 = 2$$

que era lo que queriamos demostrar.

Una vez que hemos visto que del Teorema de Pick se deduce la fórmula de Euler para un mapa plano simple, vamos a ver, a continuación, que de la Fórmula de Euler se deduce el Teorema de Pick, con lo que se demuestra la equivalencia topológica de estos dos resultados. Para ello veremos, en primer lugar, que de la Fórmula de Euler se deduce la igualdad [2], de la igualdad [2] deduciremos que el área de un triángulo reticular primitivo es **1/2** y de esta afirmación se sigue el Teorema de Pick

Sea P un polígono reticular simple y una triangulación de él en T, triángulos reticulares primitivos. Esta triangulación, considerada como mapa plano, tendrá **c = T +1** caras, y supongamos que tenga **v = B + I** vertices, donde B son los vértices en el borde del polígono e I los vértices interiores, y supongamos que tenga **a = L** aristas. Se deduce de [1]

$$v + c - a = 2 \implies B + I + T + 1 - (3/2\, T + 1/2\, B) = 2$$

$$\implies 1/2\, T = 1/2\, B + I + 1 - 2 \implies T = 2 I + B - 2$$

Ahora, supuesto esto, veamos que el área de un triángulo reticular primitivo es **1/2**. Sea un triángulo reticular primitivo OPQ, que supondremos con un vértice en el origen de coordenadas. Supongamos que el rectángulo reticular mínimo que le contiene, **OMQN**, tiene de medidas de lados **m** y **n** respectivamente. (figura 5).

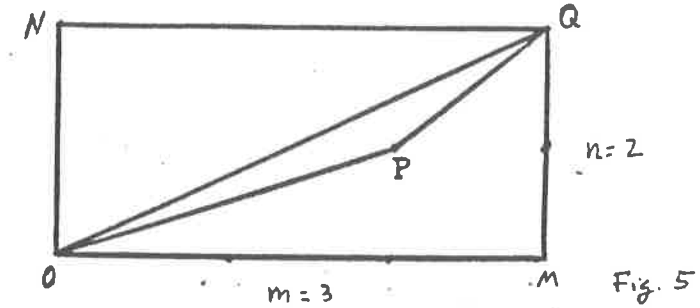


Fig. 5

Se verifica

$$I = (m - 1).(n - 1) \quad ; \quad B = 2 m + 2 n$$

Si trazamos una triangulación de **OMQN** en **T** triángulos reticulares primitivos se cumple, segun nuestra suposición,

$$T = 2 I + B - 2 = 2.(m - 1).(n - 1) + 2.m + 2.n = 2\, m.n$$

Luego tenemos **2.m.n** triángulos reticulares primitivos, cada uno de ellos con area no menor de **1/2**. Como el área del rectángulo es **m.n**, necesariamente el área de cada uno de ellos debe de ser **1/2**, porque de otro modo el área total excedería de **m.n**. Una vez demostrado este resultado el Teorema de Pick se deduce por medio de la demostración realizada anteriormente.

Terminamos este sencillo resultado indicando que se pueden encontrar interesantes aplicaciones de él en la referencia 5.

Referencias.

1.- W.W. Funkenbush, From Euler's Formula to Pick's formula using and edge theorem. Am. Math. Month, 81 (1974)647-648
2.- R.W.Gaskell,M.S.Klamkin, and P.Watson, Triangulations and Pick Theor. Math.Magazine (1976) 35-37.
3.- A.M.Yaglom and I.M.Yaglom, Challengin Mathematical Problems with Elementary Solutions. Vol. 2.

4.- I.Niven and H.S.Zuckerman. Lattice points and polygonal area, Amer. Math. Month. 74 (1967) 1195-1200.

5.- J.H.Conway and H.S.M.Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns, Math. Gaz. (1973) 87-94,175-186.

ORDENACION MEDIANTE ARBOLES BINARIOS

Cristóbal Pareja Flores
Esc. Univ. de Estadística
Univ. Complutense

1. Introducción.

En proceso de datos es frecuentemente necesaria la ordenación de información que agilice su posterior búsqueda y recuperación. Cuando los elementos considerados son unos pocos, cualquier método es válido, y es muy natural entonces optar por el más sencillo o rápido de implementar.

Pero cuando deseamos tratar una gran cantidad de información es cuando cobra importancia la elección de un método bueno, en algún sentido, para nuestra aplicación particular. A este tópico se ha dedicado una extensa bibliografía.

Se persiguen cualidades que giran en torno a economizar la memoria y el tiempo empleados. La estructura que soporte los datos y la forma de trabajar sobre ella deben elegirse pensando en alcanzar este doble objetivo, o en llegar a una solución de compromiso cuando ello no sea posible.

2. Modelización del problema.

Normalmente, los elementos que componen nuestra lista inicial poseen componentes que son irrelevantes en el momento de la ordenación. Por ejemplo, la tarea de ordenar fichas bibliográficas por autores no necesita tener en cuenta las editoriales o el número de registro que figuran en la ficha.

Para simplificar, los diversos campos que repercuten en el lugar relativo de cada elemento se considerarán agrupados en uno, cuyo valor se denomina *clave del ítem*.

Por otra parte, sea cual fuere la naturaleza de la clave, podemos ahora considerarla en su forma más simple como una cadena de bits, portadores, todos y cada uno de ellos, de una nota distintiva, que afecta a la clave del ítem en cuestión de una manera elemental.

Si es L la longitud en bits de una clave, hay 2^L claves distintas, y determinar una de ellas exige exactamente L preguntas de tipo lógico.

El conjunto de esas claves es coordinable con $\{0,1,\dots,2^L-1\}$, mediante por ejemplo la función

$$f_L : \text{CLAVES DE LONGITUD } L \longrightarrow \{0,\dots,2^L-1\}$$
$$[b_1,b_2,\dots,b_i,\dots,b_L] \longrightarrow \sum_{i=1}^{L} b_i \cdot 2^{L-i},$$

siendo $b_i \in \{0,1\}$ el i-ésimo bit de la clave, con $i \in \{1,\dots,L\}$.

Y entonces, considerada una clave como una cadena de L bits, la pregunta i-ésima elemental

(P_i) ¿Es un 1 el i-ésimo bit de CLAVE?

se corresponde con la comparación (en notación Pascal)

$$(C_i) \quad f_L(\text{CLAVE}) \bmod 2^{L-i+1} \geq 2^{L-i}$$

O sea, se tiene la equivalencia

$$b_i = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f_L(\text{CLAVE}) \bmod 2^{L-i+1} \geq 2^{L-i},$$

siendo b_i = CLAVE [i].

3. Representación de una lista de CLAVES de la misma longitud mediante árboles.

Una lista de cadenas elementales de bits de longitud L = 0 puede representarse con un nodo elemental con tan sólo un campo CONTADOR.

Dada una lista de cadenas de bits de longitud L > 0, puede obtenerse una partición del mismo en dos sublistas:

- la sublista 0 está formada por las cadenas que empiezan con un 0.

- la sublista 1 consta de las cadenas cuyo primer bit es un 1.

Entonces, es posible representar esa lista con un árbol binario, en cuya ramas izquierda y derecha representaremos las claves que empiecen respectivamente por 0 y 1, o mejor aún, las claves *decapitadas* (de longitud L - 1), puesto la cabeza de cada clave es una característica ya determinada en cada rama.

Se ve que, avanzando por una rama cualquiera, el prefijo determinado va completándose, mientras que la lista de subclaves (claves sucesivamente decapitadas) correspondientes a ese prefijo disminuye. Así, cuando una rama no tiene clave alguna que clasificar, tampoco tiene sentido seguir avanzando por ella, y entonces puede marcarse tal rama como vacía.

Por ejemplo,

{ [011], [111], [001], [000], [110], [001], [110], [000], [110] }

Partición:

{ [011], [001], [000], [001], [000] }   { [111], [110], [110], [110] }

Decapitación:

{ [11], [01], [00], [01], [00] }   { [11], [10], [10], [10] }

Partición:

{ [01], [00], [01], [00]} {[11]}   { } {[11], [10], [10], [10] }

Decapitación:

{ [1], [0], [1], [0]} {[1] }   {[1], [0], [0], [0] }

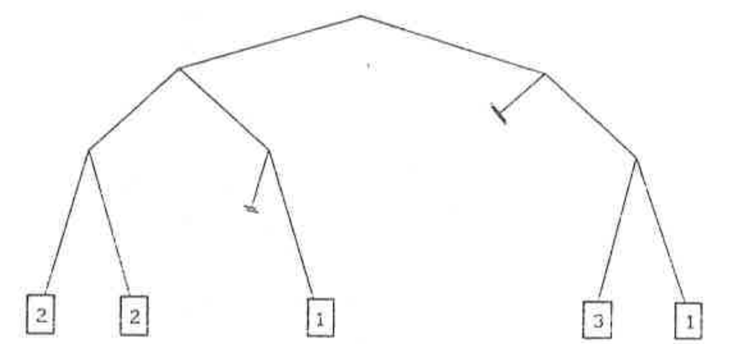
Partición:

{ [0], [0]} { [1], [1]} { } {[1]}   {[0], [0], [0]} {[1]}

Decapitación:

{ [] , [] } { [] , [] } { [] }   { [], [], [] } {[]}

En resumidas cuentas, no son precisas las etiquetas de las ramas, ya que consisten constantemente en ceros si son a la izquierda y unos si son a la derecha. Y tampoco son necesarias las particiones parciales, puesto que cada una de ellas puede recuperarse a partir de sus ramas. Como corolario de lo anterior, la lista inicial está determinada inequívocamente por la forma del árbol y los contadores de las hojas (donde se anota el número de ítems de una clave determinada), y viceversa. La lista considerada en el ejemplo se corresponde con el siguiente árbol:



4. El paso a multiconjuntos (*) numéricos.

Tratemos de reducir el problema de ordenar N claves definidas por L bits al de ordenar N enteros, con posibles repeticiones, del conjunto $\{0,1,\dots,2^L-1\}$. Consideremos de momento que L es conocido de antemano.

Cada número entero n de ese conjunto admite una única descomposición de la forma

$$n = b_L + b_{L-1} \cdot 2 + b_{L-2} \cdot 2^2 + b_{L-3} \cdot 2^3 + \dots + b_1 \cdot 2^{L-1}$$

(*) Llamaremos multiconjuntos a las secuencias finitas, cuyos ítems están posiblemente repetidos, y tales que dos de ellas no son distinguibles por el orden de sus elementos.

Por tanto, la aplicación, que asocia a cada entero del conjunto $\{0,1,\dots,2^L-1\}$ una clave de longitud L, es la función inversa de la f_L descrita anteriormente.

La biyección establecida entre los enteros de $\{0,1,\dots,2^L-1\}$ y las claves de longitud L, junto con la correspondencia, también biyectiva, establecida entre todos los multiconjuntos de claves de longitud L y un cierto conjunto de todos los posibles árboles de un cierto tipo (binarios, de profundidad L, con posibles ramas cortadas y hojas dotadas de un contador con un entero no negativo) sugiere inmediatamente la existencia de una biyección entre los multiconjuntos de enteros y los árboles de las características señaladas, tal como sugiere el siguiente diagrama:

f_L^{-1}: $\{0,\dots,2^L-1\}$ ⟶ {CLAVES DE LONGITUD L}

un entero de $\{0,\dots,2^L-1\}$ ⟶ una clave

{MULTICONJUNTOS DE CLAVES DE LONGITUD L} ⟶ {ARBOLES CON CONTADORES}

una secuencia de claves de longitud L ⟶ un árbol con contadores

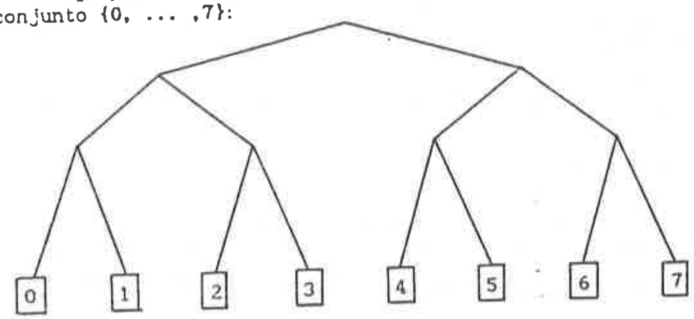
{MULTICONJUNTOS DE ENTEROS DE $\{0,\dots,2^L-1\}$} ⟶ {ARBOLES CON CONTADORES}

Dejando de lado de momento las cuestiones que suscita esta asimilación de problemas, y las que surgen de la particular solución dada por este algoritmo, presentamos a continuación una estructura de datos y unas operaciones sobre ella, dejando para más tarde afrontar las cuestiones aludidas.

5. Representación de multiconjuntos numéricos mediante árboles.

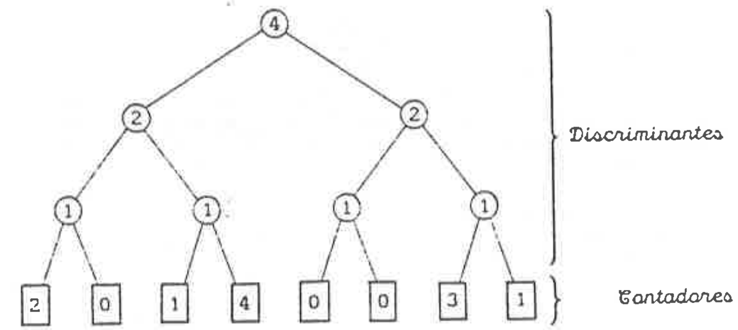
Cualquier conjunto de la forma $\{0,\dots,2^i-1\}$ está representado mediante un árbol completo (es decir, con todas sus ramas y hojas) de profundidad i.

Por ejemplo, el siguiente árbol, de profundidad 3, representa al conjunto $\{0, \dots, 7\}$:

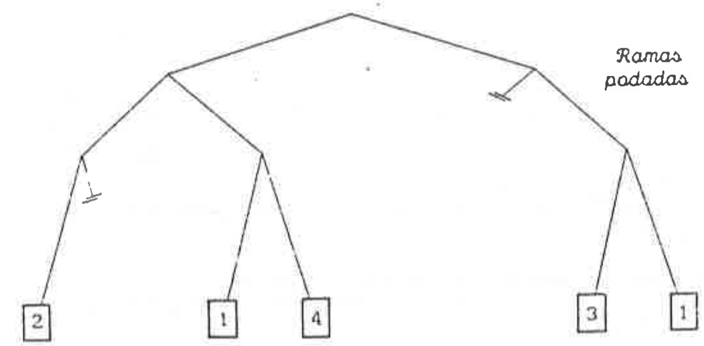


Para cada conjunto de la forma $\{0,\dots,2^i-1\}$ tal representación es única, y en el árbol resultante, la posición de cada hoja determina un elemento del conjunto. Por tanto, es redundante etiquetarlas con dichos elementos. Más conveniente resulta en cambio colocar un contador que nos permita acumular los elementos del multiconjunto asociado cuantas veces se repitan.

Entonces, el multiconjunto <0, 0, 2, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 7> tiene la siguiente representación:



Por último, no se pierde información y en cambio se ahorra memoria podando las ramas cuyas hojas están vacías.



6. La estructura de datos de base y las operaciones sobre ella.

Nuestra estructura subyacente será como la descrita: partiremos del árbol elemental consistente en una hoja, que admite elementos del conjunto {0}. La representación de nuestro tipo de base en Pascal es la siguiente:

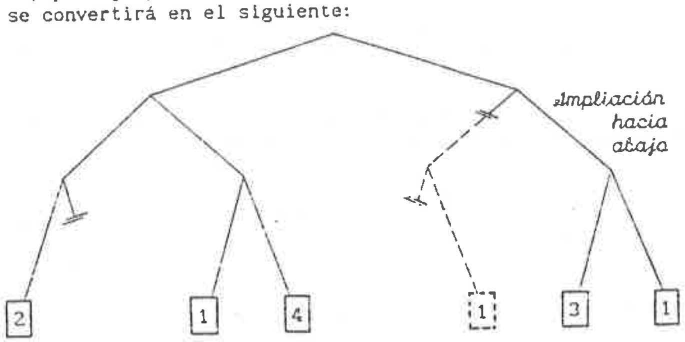
```
type
     tipoArbol = ^tipoNodo;
     tipoNodo  = record
                     cuantos   : integer;
                     izdo, dcho: tipoArbol
                 end;
```

Y el procedimiento siguiente establece su existencia inicial:

```
procedure IniciArbol (var arbol_dato : tipoArbol);
     begin
          new (arbol_dato);
          with arbol_dato^ do begin
                                   cuantos := 0;
                                   izdo := nil;
                                   dcho := nil
                              end
     end;
```

Entonces, nuestro método de acción ampliará el árbol sólo cuando deba recibir un elemento distinto que lo requiera. Con tal fin, pueden ser necesarias ampliaciones de dos tipos (por ahora se describirán mediante ejemplos).

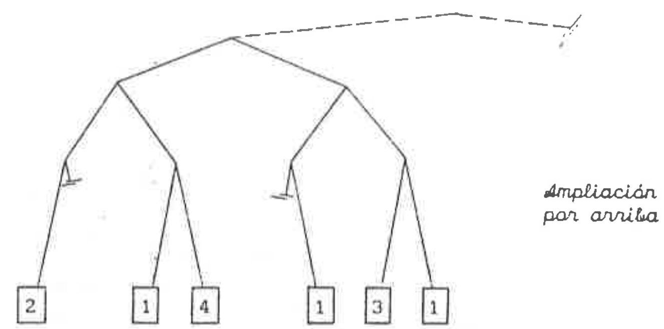
-1- Alargamiento de una rama:
Si, por ejemplo, el árbol de la figura debe aceptar un 5, se convertirá en el siguiente:



El procedimiento que lleva a cabo esta inserción es el siguiente:

```
procedure Insertar (var ArbolDato: tipoArbol;
                    NuevoNum,discr_arbol: rangoNumeros);
     begin
          if ArbolDato = nil then IniciArbol(ArbolDato);
          with ArbolDato^ do cuantos := cuantos + 1;
          if discr_arbol > 0 then
            if NuevoNum < discr_arbol
               then insertar (ArbolDato^izdo,
                              NuevoNum,
                              discr_arbol div 2)
               else insertar(ArbolDato^dcho,
                              NuevoNum - discr_arbol,
                              discr_arbol div 2)
     end;
```

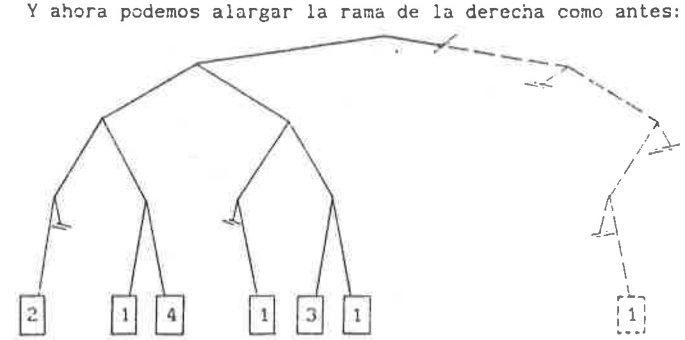
-2- Ampliación del rango de valores que admite el árbol:
Si ahora deseamos incluir en el árbol anterior el elemento 13, nuestro árbol no tiene capacidad a menos que lo ampliemos *por la raíz*, del siguiente modo:



El siguiente procedimiento extiende el árbol hacia arriba:

```
procedure AgrandArbol(var arbol_dato : tipoArbol;
                      var discr_dato : rangoNumeros;
                      nuevoNumero    : rangoNumeros);
    var
      arbolAux : tipoArbol;
      mitadNum : rangoNumeros;
    begin
      mitadNum := (numNuevo + 1) div 2;
      while discr_dato < mitadNum do
         begin
          if discr_dato = 0
             then discr_dato := 1
             else discr_dato := discr_dato * 2;
          if (arbol_dato^.cuantos <> 0) then
             begin
               new(arbolAux);
               with arbolAux^ do
                  begin
                    cuantos := arbol_dato^.cuantos;
                    izdo    := arbol_dato;
                    dcho    := nil
                  end;
               arbol_Dato := arbolAux
             end
         end
    end;
```

Y ahora podemos alargar la rama de la derecha como antes:



Tales operaciones mantienen el árbol lo más reducido posible, haciéndolo crecer únicamente cuando es preciso.

Si deseamos ahora buscar un entero n de ese árbol o colocar en él uno, supuesto que quepa en él, la primera acción es compararlo con 8 (a tal cantidad la llamamos discriminante de ese árbol), y según sea $(n < 8)$ ó $(n \geq 8)$ seguimos por la rama izquierda o por la derecha. Esta operación equivale a clasificar según el primer bit de la clave asociada al entero. Tras esta acción podemos prescindir de esta información (operación análoga a la decapitación), bien asignando

```
n := n mod 8,
```

o bien directamente haciendo

```
if n >= 8 then n:= n - 8
          else hacer_nada.
```

Esto funciona bien supuesto que el entero cabe en el árbol. En otro caso, basta con ampliar el mismo por arriba hasta que el discriminante sea igual a la mayor potencia de dos menor o igual que el número en cuestión.

Para facilitar una explicación más general del algoritmo, llamemos mediana de un número entero positivo a la mayor potencia de 2 que no lo supera, y consideremos etiquetados los nodos no terminales con los respectivos discriminantes.

Colocar ahora un entero en el árbol consiste en lo siguiente:

- Si la mediana del número es mayor que el discriminante del árbol, el número no cabe en él. En tal caso, colocamos el número en el árbol una vez ampliado por arriba (cada una de tales ampliaciones duplica el rango de valores que admite) las veces que sea necesario.

- Ahora la mediana (*) del número es menor o igual que la del árbol, y en tal caso puede ocurrir:

  1. Que el número sea menor que el discriminante, en cuyo caso el problema consiste en colocar el mismo número en el subárbol izquierdo.

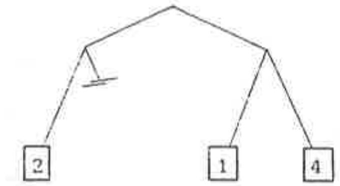
  2. Que el número mayor o igual que el discriminante. Entonces, su mediana será igual al discriminante, y no mayor, porque, puesto que debe caber en el árbol (que ha sido ampliado lo necesario), el número debe ser menor que el doble del discriminante. Entonces basta colocar el número menos el discriminante (igual a la mediana) en el subárbol derecho.

(*) En la práctica, no será preciso hallar medianas, puesto que para averiguar si un número n cabe en un árbol basta con conocer el discriminante del mismo y el número que deseamos insertar:

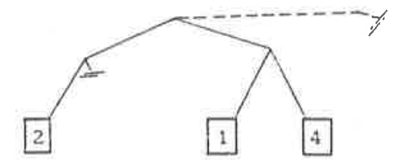
$$n \text{ cabe en } A \iff 2 \cdot \text{discr}(A) - 1 \geq n$$

El siguiente es ejemplo de inserción del número 5 en un árbol de partida conteniendo los elementos de <0,0,2,3,3,3,3>:

Arbol de partida, representando los elementos de <0,0,2,3,3,3,3>

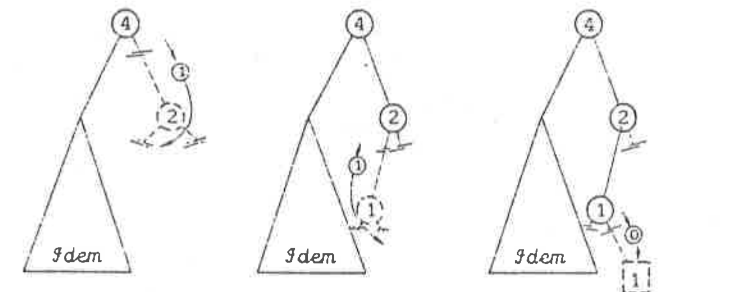


Deseamos insertar n = 5, siendo med(n) = 4. Como discr < med(n), ampliamos el árbol por arriba.



Ha bastado una sola ampliación. Ahora es discr ≥ med (n) y, por tanto, n cabe en el árbol.

Como med(n) = discr < n < 2*discr - 1, colocamos n-discr = 1 en el subárbol derecho, ampliando las ramas precisas. Paso a paso:



Por ser $1 < \text{discr} = 2$ *Por ser* $1 \geq \text{discr} = 1$ *Contador inicial*

7. **Claves compartidas por distintos ítems.**

Por el momento, los nodos que son hojas en el árbol de base están provistos de contadores donde ir totalizando el número de elementos correspondientes a esas hojas. Tales contadores bastan en un modelo de ordenación donde los ítems se identifican con sus claves y donde, consecuentemente, las repeticiones de claves suponen las de los ítems respectivos en su totalidad.

Sin embargo, en situaciones en que varios elementos pueden eventualmente compartir una clave, el contador de cada hoja no basta para representar tales elementos. En su lugar, puede colocarse una estructura (o una variable de tipo apuntador señalando la misma) apropiada para albergar los diversos ítems, ya sin la clave (que viene determinada por la posición de la hoja en el árbol de base).

Como ejemplo de lo anterior, considérese qué modificaciones serían precisas para que la estructura representada pudiera contener números con parte entera y parte decimal (limitando la precisión), considerando que la parte entera es la clave del ítem.

8. Estadísticos de orden.

En el modelo que presenta este trabajo, cada nodo del árbol tiene la siguiente estructura:

```
tipoNodo = record
                 cuantos : integer;
                 izdo,
                 dcho    : tipoArbol
           end
```

Se observa entonces que en los nodos intermedios (aquéllos que no son hojas del árbol) la variable entera cuántos no desempeña función alguna. Puesto que un árbol binario con K nodos tiene 2*K apuntadores, de los que K+1 están a nil, hay un máximo de (K+1) div 2 hojas. Por tanto, al menos (K-1) div 2 nodos no terminales. Es decir, en el mejor caso, se desperdicia casi la mitad de las variables de tipo **cuántos**.

Este derroche de memoria podría haberse evitado implementando los nodos mediante registros con variantes:

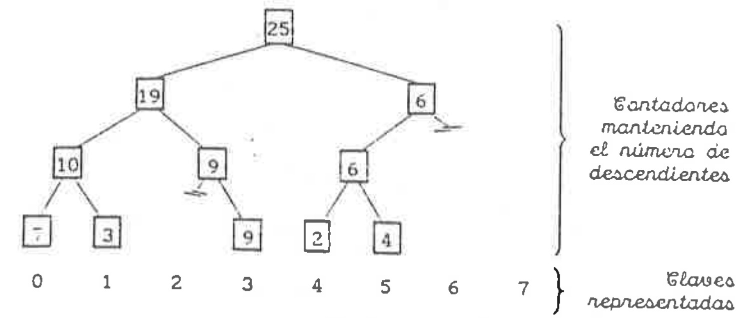
```
tipoNodo = record
                 izdo,
                 dcho      : tipoArbol;
                 case es_terminal of
                       true  (cuantos: integer);
                       false: ()
           end
```

De este modo, se ahorra la memoria de todos y cada uno de los nodos no terminales a cambio de la insignificante cantidad de 1 bit por cada nodo (ya sea hoja o no).

Sin embargo, puede ser interesante mantener esos contadores, asignándoles alguna otra tarea útil, tal como facilitar el *cálculo de estadísticos de orden*, problema íntimamente relacionado con los de ordenación y búsqueda.

Dada una serie de n registros, supuestamente ordenados, el problema de los estadísticos de orden consiste en hallar la clave del k-ésimo ítem. Cuando k = 1 (respectivamente k = n) el problema consiste en encontrar el mínimo (respectivamente máximo), y cuando es n impar y k = (n + 1) / 2 se trata de hallar la mediana.

En la implementación que se da, se mantienen los contadores de los nodos intermedios, y en ellos se lleva cuenta del total de elementos descendientes, modificándose los necesarios en cada nueva inserción. Así nos lo muestra el árbol de la siguiente figura. El problema de los estadísticos de orden se vuelve entonces trivial.



9. Análisis del algoritmo.

Como es sabido, para clasificar **n** elementos mediante comparaciones, sin suponer nada acerca de las claves, son necesarios **$\Omega(n \cdot \log(n))$** pasos. Sin embargo, es posible abreviar el tiempo necesario si se conoce alguna circunstancia sobre las claves. A continuación se muestra que el algoritmo presentado requiere tan solo un tiempo **O(n)**, a base de suponer que las claves son naturales de un cierto rango de valores. Por último se considera la complejidad sin hacer suposición alguna.

En el apartado 2 hemos supuesto que es L la longitud máxima de una clave; es decir, que los elementos objeto de nuestra clasificación son del conjunto **$\{0,\dots,2^L-1\}$**. Bajo ese supuesto, incluir un nuevo elemento en nuestro árbol de base requiere dos operaciones: extender el árbol hacia arriba cuanto sea preciso, e insertar el ítem en el árbol extendido.

Pero se observa que el número total de operaciones precisas para extender el árbol hacia arriba no superará a L, <u>durante todo el proceso</u>, sea cual fuere el número n de claves por ordenar.

Por otra parte, insertar un elemento en el árbol no requerirá nunca más de L operaciones, cada una de las cuales consiste en obtener un bit de la clave (o, equivalentemente, la potencia de 2 correspondiente al discriminante del árbol), restar en su caso ese discriminante, y descender por el árbol un paso. Cada una de esas operaciones lleva un tiempo **t** acotado, independiente de n y L.

Por tanto, la inserción de un elemento en el árbol requiere un tiempo **$T(1) \le L * t$ = constante**. Y entonces, el tiempo total consumido por la clasificación de **n** elementos es

$$T(n) \le n \cdot T(1) + T(\text{extensiones}) \le n \cdot c_1 + c_2 = O(n)$$

El tiempo requerido es del mismo orden cuando las claves se mantienen en un conjunto independiente del número de elementos. En otro caso, nuestro problema es el de ordenar elementos del conjunto **$\{0,\dots,M(n)\}$**, con posibles repeticiones, siendo **M(n)** el máximo de ellos, y dependiente éste del total **n** de elementos. Entonces, no está acotado el número de tales pasos por una constante, sino por **$\log_2 M(n)$**, y si en la inserción de un elemento, cada descenso en el árbol requiere un tiempo $t \le k_1$, tenemos:

$$T(1) \le k_1 \cdot \log_2 M(n)$$

El número total de extensiones es justamente $\log_2 M(n)$. Y si cada una de ellas precisa un tiempo $t \le k_2$, se tiene

$$T(\text{extensiones}) \le k_2 \cdot \log_2 M(n),$$

Y entonces, el tiempo total necesario es

$$\begin{aligned} T(n) &\le n \cdot T(1) + T(\text{extensiones}) \le \\ &\le n \cdot k_1 \cdot \log_2 M(n) + k_2 \cdot \log_2 M(n) = \\ &= (k_1 \cdot n + k_2) \cdot \log_2 M(n) = \\ &= O(n \cdot \log M(n)) \end{aligned}$$

que será igual a los métodos $O(n \cdot \log(n))$ cuando el máximo sea del orden de una potencia constante de n.

10. Comparación con otros métodos.

Sería inútil la comparación exhaustiva con todos y cada uno de los múltiples métodos de ordenación que se conocen. Algunos de ellos poco o nada tienen que ver con el nuestro. Ademas del conocido Quick Sort, vale la pena sin embargo considerar aquéllos que, como el que aquí presentamos, se apoyan en las mismas características esenciales que el nuestro. En base a estos principios opera un grupo de algoritmos conocido comúnmente como métodos de ordenación y búsqueda DIGITAL.

Los algoritmos con arrays (el QUICK SORT, por ejemplo), precisan por lo general conocer a priori el número total de elementos que se desea ordenar (para dimensionar el array), e incluso los mismos elementos (sus claves). Y sólo entonces pueden iniciar el trabajo.

El conocimiento previo de los items objeto de la ordenación es un requerimiento que no sólo afecta a los métodos basados en arrays. El método de los residuos (también conocido como DE LAS URNAS GENERALIZADO, o RADIX) es un ejemplo de ello.

Por el contrario, nuestro algoritmo permite ir situando elemento a elemento en su lugar definitivo, independientemente del resto del conjunto; de este modo, los procesos de lectura de elementos (o su obtención en algunos problemas) e inserción, pueden paralelizarse con facilidad.

Y por añadidura, una vez terminado el trabajo, la llegada de nuevos elementos no altera lo ya construido, y sigue siendo válida la misma estrategia.

En esta misma línea trabajan los algoritmos basados en TRIES. Como ellos, nuestro sistema no compara claves completas entre sí, sino que, consideradas las mismas como secuencias de campos, compara tales fragmentos como estrategia de ordenación (y búsqueda).

Tales estructuras se han usado frecuentemente para albergar conjuntos de claves de longitud variable formadas por caracteres, tales como diccionarios. Por ello, ajustan sus claves por la izquierda, esto es, aunando las claves con prefijos comunes. Entonces, ninguna clave puede ser un prefijo de otra. Para evitar esto todas las claves se alargan con una marca especial para indicar el final.

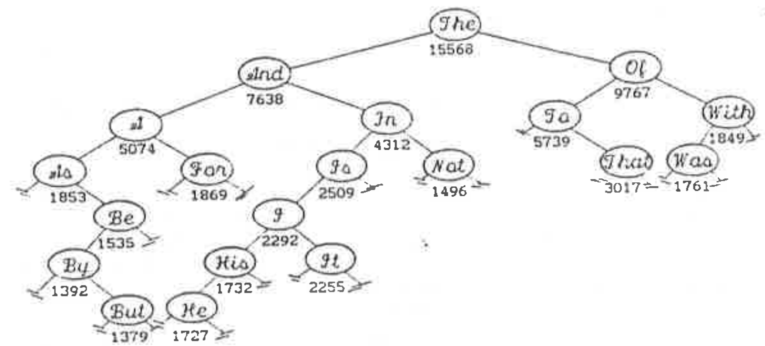
Nuestro algoritmo ajusta sus claves desde la menos significativa. Por ello, las hojas están al mismo nivel. No es preciso marca alguna, puesto que la profundidad del árbol de base es función únicamente de su discriminante:

$$\textbf{prof} = 1 + \log_2(\textbf{discr}).$$

Por otra parte, las agrupaciones resultantes en los subárboles comparten la información de mayor peso: el valor representado por las cifras de mayor orden. Y el tamaño del árbol se ajusta al orden de las claves que se están manejando.

La ordenación mediante TRIES ha dado lugar a dos métodos: el que Knuth ha llamado DIGITAL TREE SEARCH (DTS en adelante), y el método conocido como PATRICIA (Practical Algorithm To Retrieve Information Coded In Alphanumeric).

El algoritmo DTS almacena claves completas en cada nodo, ya sea una hoja o un nodo intermedio. Permite representar un mismo conjunto mediante diversos árboles de una forma muy flexible; e inversamente, árboles con la misma forma podrían representar diferentes conjuntos. Por ello, la ordenación puede obedecer a diferentes criterios. En el ejemplo siguiente, las 20 palabras más comunes en inglés se han insertado conforme a dos criterios: el preorden alfabético, y para las frecuencias, el orden (inverso) introducido por las condiciones de HEAPSORT (también conocido como método de los montículos).



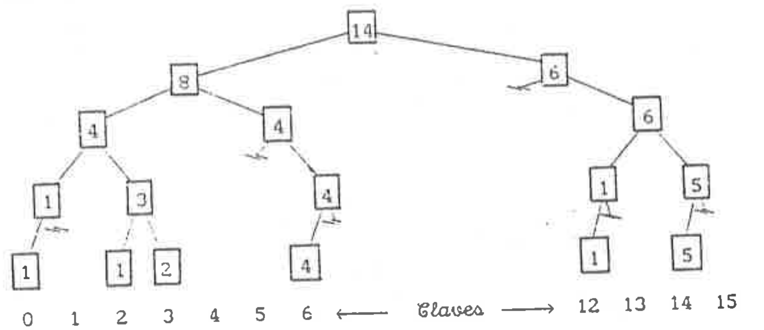
Por último, en las inserciones o búsquedas mediante árboles PATRICIA, las decisiones tomadas en cada nodo de optar por uno u otro descendiente se basan en un campo arbitrario de la clave.

Este algoritmo, pensado para representar información alfanumérica, consigue clasificar muy eficientemente conjuntos de claves formadas por un número variable (frecuentemente largo) de campos, mediante un árbol poco ramificado, y que permite un rápido acceso a las mismas. Sin embargo, la recuperación ha de seguir las claves empleadas durante la inserción, las cuales no obedecerán en general a un criterio global de ordenación, que dé a las diversas claves diferentes prioridades. Por otra parte, un mismo conjunto de claves insertadas en diversos órdenes no produce en general árboles iguales, puesto que en cada nodo no terminal el discriminante se ha elegido con el criterio de diferenciar las claves que se insertaron en el momento de su creación. Y entonces, los nodos deben mantener adicionalmente información sobre la componente discriminante de la clave.

11. Implementación.

Los datos se tomarán del fichero CLAVES.IN, y el resultado de la ordenación se archivará en CLAVES.OUT. Mediante el procedimiento MostrArbol se dan los resultados por pantalla. Además, puede visualizarse la forma del árbol resultante dando a la constante TrazarArbol el valor TRUE.

En el siguiente ejemplo de ejecución se muestra cómo se acomodan los elementos de **<14,0,6,14,14,3,6,6,14,12,3,14,6,2>** y de qué forma nuestra particular implementación describe el árbol resultante. Los elementos redondeados designan los contadores de las estadísticas de orden, y los de las hojas llevan el tanteo de los elementos. Junto a los nodos se dan los discriminantes.




```
Descendientes: 14
   bajada   /
Descendientes:  8
   bajada   /
Descendientes:  4
   bajada   /
Descendientes:  1
   bajada   /
Clave:  0.  total: 1
   subida   /
   subida   /
   bajada   \
Descendientes:  3
   bajada   /
Clave:  2.  total: 1
   subida   /
   bajada   \
```

```
Clave:  3.  total: 2
   subida   \
   subida   \
   subida   /
   bajada   \
Descendientes:  4
   bajada   \
Descendientes:  4
   bajada   /
Clave:  6.  total: 4
   subida   /
   subida   \
   subida   \
   subida   /
   bajada   \
Descendientes:  6
   bajada   \
```

```
Descendientes:  6
   bajada   /
Descendientes:  1
   bajada   /
Clave: 12.  total: 1
   subida   /
   subida   /
   bajada   \
Descendientes:  5
   bajada   /
Clave: 14.  total: 5
   subida   /
   subida   \
   subida   \
   subida   \
```


El programa, escrito en Pascal, es el siguiente:

```
Program Ordenac_en_arbol_binario (output,fich_datos,fich_resul);

const
    MaxEntero   =  4095;      { 2 ** K - 1 ,        para K = 12 }

type
    rangoNumeros=  0 .. MaxEntero;
    tipoArbol   = ^tipoNodo;
    tipoNodo    =  record
                       cuantos : integer;
                       izdo,
                       dcho    : tipoArbol
                   end;

var
    arbol_base  :  tipoArbol;
    discr_arbol,
    num_dato    :  rangoNumeros;
    fich_datos,
    fich_resul  :  text;

procedure Preparar_ficheros;

   begin
     assign  (fich_datos,'claves.IN');
     reset   (fich_datos);
     assign  (fich_resul,'claves.OUT');
     rewrite (fich_resul)
   end; { Preparar ficheros }

procedure Cerrar_ficheros;

   begin
     close  (fich_datos);
     close  (fich_resul)
   end; { Cerrar ficheros }

procedure LeeNum (var num_nuevo: rangoNumeros);

   { Los números proporcionador por el fichero
     de datos deben ser de [0 .. MaxEntero] }

   begin
     read (fich_datos,num_nuevo)
   end; { Lee num }

procedure IniciArbol (var arbol_dato : tipoArbol);

   begin
     new (arbol_dato);
     with arbol_dato^ do begin
                             cuantos := 0  ;
                             izdo    := nil;
                             dcho    := nil
                         end
   end; { iniciar el árbol de base }
```

```
procedure AgrandArbol (var arbol_dato : tipoArbol;
                       var discr_dato : rangoNumeros;
                       nuevoNumero    : rangoNumeros);
  var
    arbolAux : tipoArbol;
    mitadNum : rangoNumeros;
  begin { AgrandArbol }
    mitadNum := (numNuevo + 1) div 2;
    while discr_dato < mitadNum do
         begin
              if discr_dato = 0
                   then discr_dato := 1
                   else discr_dato := discr_dato * 2;
              if (arbol_dato^.cuantos <> 0) then
                begin
                   new (arbolAux);
                   with arbolAux^ do
                        begin
                             cuantos  := arbol_dato^.cuantos;
                             izdo     := arbol_dato;
                             dcho     := nil
                        end;
                   arbol_dato := arbolAux
                end
         end
   end; { AgrandArbol }

 procedure Insertar (var ArbolDato         : tipoArbol;
                     NuevoNum, discr_arbol : rangoNumeros);

         { suponemos que el nuevo número por insertar cabe en el
           árbol. Puede asegurarse esto, ya que únicamente se
           llamará   a   este procedimiento desde el programa
          principal, tras agrandar el árbol lo necesario. }

    begin { Insertar }
      if ArbolDato = nil then IniciArbol (ArbolDato);
      with ArbolDato^ do cuantos := cuantos + 1;
      if discr_arbol > 0
           then if NuevoNum < discr_arbol
                     then Insertar (ArbolDato^.izdo,
                                    NuevoNum,
                                    discr_arbol div 2)
                     else Insertar (ArbolDato^.dcho,
                                    NuevoNum - discr_arbol,
                                    discr_arbol div 2)
    end;  { Insertar }

  procedure MostrArbol (total: rangoNumeros;
                        este_arbol: tipoArbol;
                        su_disc: rangoNumeros);
    const TrazarArbol = false; {si es TRUE se muestra el árbol}
    var cont : integer;
    begin { mostrar el árbol }
      with este_arbol^ do if (izdo = nil) and (dcho = nil)
           then begin
                  writeln  ('Clave: ',total:3,
                            '. Total:',cuantos:2);
```



```
                    for cont := 1 to cuantos do
                           write (fich_resul,total:5)
                  end
             else begin
                    if TrazarArbol then
                       writeln (' Descendientes: ',cuantos:3);
                    if not (izdo = nil) then
                       begin
                         if TrazarArbol then writeln ('  bajada /');
                         MostrArbol (total,izdo,su_disc div 2);
                         if TrazarArbol then writeln ('  subida /');
                       end;
                    if not (dcho = nil) then
                       begin
                         if TrazarArbol then writeln ('  bajada \');
                         MostrArbol (total + su_disc,
                                     dcho, su_disc div 2);
                         if TrazarArbol then writeln ('  subida \');
                       end
                  end
    end; { mostrar el árbol }

begin { Programa Principal }
     IniciArbol (arbol_base); discr_arbol := 0;
     Preparar_ficheros;
       while not eof (fich_datos) do
          begin
            while not eoln(fich_datos) do
               begin
                   LeeNum (num_dato);
                   AgrandArbol (arbol_base,discr_arbol,num_dato);
                        { Se agrandará las veces que sea preciso.
                          Entonces num_dato cabrá en arbol_base }
                   Insertar (arbol_base,num_dato,discr_arbol);
               end;
            readln (fich_datos)
          end;
      MostrArbol(0,arbol_base,discr_arbol);
     Cerrar_ficheros
end.  { Programa Principal }
```

12. Bibliografía.

1. Aho, Hopcroft & Ullman: "Estructuras de datos y Algoritmos". Addison Wesley Iberoamericana. México, 1.988.

2. Knuth, Donald E.: "The art of computer programming". (Volume 3. Sorting and Searching). Addison Wesley Publishing Company. Philippines, 1.973.

3. Sedgewick: "Algorithms". Addison Wesley Publishing Company. USA, 1.984.

4. Wirth, Niklaus: "Algoritmos + estructuras de datos = programas". Ediciones del Castillo. Madrid, 1.986.

Como socio de la Sociedad Castellana Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín (señalar con unas aspas los que interesen):

3	4	5	9	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (20 pts. por número para Madrid y 30 pts. por número para provincias).

Hagan el envío utilizando como dirección la que consigno en este recuadro:

Los números 1, 2, 6, 7, 8 y 12 están agotados. De los números 9 y 19 quedan sólo unos pocos ejemplares.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la Sociedad, Apartado 9479 - 28080-MADRID.

RESEÑAS DE LIBROS

TRADUCTOR AUTOMATICO LOGO INGLÉS ↔ LOGO ESPAÑOL, por Cristóbal Pareja Flores y Eugenio Roanes Lozano. Publicaciones "Pablo Monesino". Escuela Universitaria Pablo Montesino de la Universidad Complutense. Madrid, 1989. 68 páginas y un disquete.

Como el lenguaje LOGO está especialmente diseñado para acercar a los niños a los ordenadores, es muy conveniente utilizarlo en su idioma materno; no obstante, la mayor parte de los programas disponibles están escritos en la versión inglesa LCSI, por lo que es deseable contar con un medio para traducirlos al ACTI-LOGO en castellano, que, además, es el oficial del Proyecto Atenea.

Bajo la dirección del Profesor Eugenio Roanes Macías, los autores han desarrollado un programa para efectuar automáticamente esa traducción y también su inversa, en forma cómoda y rápida: su trabajo ha merecido la concesión de una Ayuda a la Investigación *"Pablo Monesino; 150 Aniversario"*. El librito que comentamos describe el citado programa y la forma de utilizarlo.

Esta publicación proporciona los programas fuentes, desarrollados en PASCAL, para llevar a cabo la traducción y va acompañada de un disquete flexible de 5.25" que contiene esos programas compilados, dispuestos para su utilización inmediata.

Esperamos que el programa sea de gran utilidad para los usuarios del lenguaje LOGO en nuestras aulas, por fortuna cada vez más numerosos.

J.F.B.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTROS BOLETINES Y DE AQUELLOS PARA LOS QUE TODAVIA NO SE HAN RECIBIDO SOLUCIONES (INDICADOS CON XX)

propuestos en el nº	procedentes de:	Números de los Boletines en los que aparecen las soluciones de los números										obs.
		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83 (París)	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	C
3	CME-f2 1984	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	C
4	OMI-84 (Praga)	5	5	6	5	6	13y14	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85 (Finl[a])	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	C
8	OIM-85(Bogotá)	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	C
9	OME-f2 1986	18	19	20	18	19	19	-	-	-	-	C
	Varios	-	-	-	-	-	-	17	17	11	17	C
10	China y Aust[a]	20	15	21	20	15	{20, 21}	20	XX	21	-	
11	CME-f1 1986	13	14	14	14	14	XX	20	15/	20	12	
	OMI-86(Varso[a])	XX	20	12	21	-	-	-	-	-	-	
12	OIM-87(Urug.)	16	14	14	17	15	17	-	-	-	-	C
	OME-f1-Extrem[a]	-	-	-	-	-	-	15	15	15	21	C
13	CME-f2 1987	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	C
14	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87 (Cuba)	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	C
16	OME-f1 1987	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	C
17	OME-f2 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
18	OIM-Perú 1988	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
19	OMI-88(Australia)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	
20	OME-f1 (1988)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
21	OME-f2 (1989)/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	OIM-89 (Cuba)	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	
22	OMI-89 (RFA)/	XX	XX	XX	XX	XX	XX /	XX	XX	XX	XX	
	oposiciones	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	

CLAVES: OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
OIM = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
CME = Olimpiada Matemática Española - fase 1ª o 2ª.

Obs. C = Completada la publicación de soluciones

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA XXX OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS CELEBRADA EN LA R.F.A.

PROBLEMA Nº 1 :

Demuestre que el conjunto $\{1,2,\ldots,1989\}$ puede expresarse como la unión de subconjuntos disjuntos A_i, $(i=1,2,\ldots,117)$ tales que:

i) cada A_i tiene 17 elementos

ii) la suma de los elementos de cada A_i es la misma, para $i=1,2,\ldots,117$.

PROBLEMA Nº 2 :

Sea ABC un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo A corta al circuncírculo de ABC en A_1. Se definen los puntos B_1 y C_1 de forma análoga. Sea A_0 el punto de intersección de AA_1 con las bisectrices de los ángulos exteriores en B y C. Se definen B_0 y C_0 de forma análoga. Demuestre que :

a) área del triángulo $A_0B_0C_0 = 2 \times$ área del hexágono $AC_1BA_1CB_1$

b) área del triángulo $A_0B_0C_0 \geqslant 4 \times$ área del triángulo ABC.

PROBLEMA Nº 3 :

Sean n y k enteros estrictamente positivos. Sea S un conjunto con n puntos de un plano, tal que :

i) no hay tres puntos en S que estén en una misma recta

ii) para todo punto P de S existen al menos k puntos en S los cuales están a la misma distancia de P.

Demuestre que :

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

PROBLEMA Nº 4 :

Sea ABCD un cuadrilátero convexo, tal que :

i) los lados AB, AD y BC verifican AB = AD + BC

ii) existe un punto P en el interior de ABCD a distancia h de la recta CD , tal que AP = h + AD y BP = h + BC.

Demuestre que:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

PROBLEMA Nº 5 :

Demuestre que para cada entero estrictamente positivo n existen n enteros estrictamente positivos y consecutivos, tales que ninguno de ellos es potencia entera de un número primo.

PROBLEMA Nº 6 :

Una permutación $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ del conjunto $\{1,2, \ldots ,2n\}$, con n entero positivo, tiene la propiedad P si $|x_i - x_{i+1}| = n$ para al menos un i en $\{1,2, \ldots ,2n-1\}$ Demuestre que para cada n, hay más permutaciones con la propiedad P que sin ella.

INTERNATIONALE MATHEMATIK OLYMPIADE

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LAS OPOSICIONES AL CUERPO DE PROFESORES AGREGADOS DE BACHILLERATO POR EL TRIBUNAL Nº 3 DE MATEMATICAS

PROBLEMA Nº 7 :

Si E es el punto medio del lado CA de un triángulo cualquiera ABC, y si S es el área de dicho triángulo, probar:

$$\text{cotg } AEB = (BC^2 - BA^2)/(4S)$$

PROBLEMA Nº 8 :

Hallar los números de seis cifras que sean el cuadrado del número formado por sus tres últimas cifras.

PROBLEMA Nº 9 :

Estudiar el crecimiento y los extremos relativos (basta determinar sus abscisas) de la función:

$$f(x) = \int_0^{(x-1)^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^t}\, dt$$

PROBLEMA Nº 10 :

Sabiendo que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos t$, $z \in \mathbb{C}$,

hallar el valor de $z^n + \frac{1}{z^n}$, lo más simplificado posible.

PROBLEMA Nº 11 :

Sea $R_n[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n (n>1) en una indeterminada **x** .

Estudiar si forman o no subespacio vectorial de $R_n[x]$ y en su caso obtener una base y la dimensión, los siguientes conjuntos:

a) **L** , conjunto de los polinomios de $R_n[x]$ con la raiz real dada **c** .

b) L_k , $(1 \leq k \leq n)$, conjunto de todos los polinomios de $R_n[x]$ que tienen **k** raices reales distintas (con cualquier orden de multiplicidad) c_1 , c_2 , ... , c_k dadas.

c) **S** , conjunto de los polinomios de $R_n[x]$ con una raiz SIMPLE, **c** , dada.

PROBLEMA Nº 12 :

Disponemos de dos urnas A y B . A contiene los n primeros números impares y B los n primeros pares (a partir del 2). Se extrae simultáneamente una bola de cada urna y, sin devolución, repetimos esta operación hasta vaciar las urnas.

a) Hallar la probabilidad de que en ninguna extracción los números sean consecutivos.

b) Hallar el limite de esa probabilidad al aumentar **n** indefinidamente.

PROBLEMA Nº 13 :

Se considera la parábola $y^2 = 4ax$ y se trazan las tangentes a la misma por los extremos de una cuerda cualquiera que pase por el foco.

a) Demostrar que las tangentes forman un ángulo recto (entre si).

b) Estudiar la veracidad del recíproco (si las tangentes son perpendiculares, la cuerda que une sus puntos de contacto pasa por el foco).

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 (Boletín nº 16)

Expresar 1987 como suma de cuadrados de números primos distintos, de todas las formas posibles. Proceder razonadamente.

Solución

La raíz cuadrada entera de 1987 es 44, luego los únicos números primos a considerar son:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 y 43

en total 15 números distintos.

Como $(2n)^2 = 4n^2 = \dot{4}$ y $(2n+1)^2 = 4n(n+1 + 1 = \dot{8} + 1$, resulta que el cuadrado de todo número par es múltiplo de 4 y el de todo impar es $\dot{8} + 1$. A partir de este resultado, calculemos el número de cuadrados de números primos distintos que pueden dar como suma 1987. Distingamos dos casos:

a) Supongamos que todos son impares; como $1987 = \dot{8} + 3$, si k es el número de cuadrados buscado, se debe verificar:

$$k(\dot{8} + 1) = \dot{8} + 3; \quad k = \dot{8} + 3$$

o sea, k = 3 ó k = 11.

b) Si uno de los cuadrados es $2^2 = 4$, se cumplirá

$$4 + k(\dot{8} + 1) = \dot{8} + 3 \quad k = \dot{8} - 1$$

esto es, k = 7.

Así pues, las posibles descomposiciones estarán formadas por

- 3 cuadrados de primos impares.

- 11 cuadrados de primos impares.
- 2^2 más siete cuadrados impares (de números primos).

$1^{\underline{er}}$ caso

Los cuadrados de los números primos impares terminan en 1 ó 9 y en 5 (exepcionalmente $25 = 5^2$). Las posibles "terminaciones" de las sumas serían

$1+1+1$, $1+1+5$, $1+1+9$, $1+5+9$, $9+9+5$, $9+9+1$ y $9+9+9$

de las cuales sólo terminan en 7 (unidades de 1987) $1+1+5$ y $9+9+9$, esto es, dos cuadrados terminados en 1 más 25 ó tres cuadrados terminados en 9.

Además, como $1987 = = \dot{9}+7$, los cuadrados candidatos deberán sumar $\dot{9}+7$; los terminados en 1 son congruentes con 1, 4 ó 7, módulo 9 y como $25 = \dot{9}+7$ se llega a la conclusión de que no hay descomposición en tres sumandos impares, siendo 25 uno de ellos.

Análogamente, los restos módulo 9 de los cuadrados terminados en 9 son, también, 1, 4 y 7 (además de 0 correspondiente a 3^2), no habiendo tres que proporcionen la suma $\dot{9}+7$.

Se concluye así, que no hay ninguna descomposición en suma de tres cuadrados de primos impares.

$2^{\underline{a}}$ caso

La menor suma de 11 cuadrados de primos impares es:

$$1 + 9 + 25 + 49 + 121 + 169 + 289 + 361 + 529 + 841 + 961 = 3355$$

que al ser mayor que 1987 , indica que tampoco existe descomposición en 11 cuadrados de primos impares.

$3^{\underline{er}}$ caso

Los siete sumandos impares deberán sumar 1987 - 4 =

= 1983. Consideramos dos subcasos:

b') Si $5^2 = 25$ no es uno de los siete sumandos, y como las posibles terminaciones son únicamente 1 y 9, se tendrán las sumas

0.1+7.9 $\underline{t}$ 3;	1.1+6.9 $\underline{t}$;	2.1+5.9 $\underline{t}$ 7;	3.1+4.9 $\underline{t}$ 9
4.1+3.9 $\underline{t}$ 1;	5.1+2.9 $\underline{t}$ 3;	6.1+1.9 $\underline{t}$ 5;	7.1+0.9 $\underline{t}$ 7

(donde con $\underline{t}$ se simboliza "la suma termina en") la única combinación posible, esto es, que termina en 3, es la formada por cinco cuadrados terminados en 1, más dos cuadrados terminados en 9. Como la menor suma de cinco cuadrados terminados en 1, es

$$1 + 125 + 361 + 841 + 961 = 2285 > 1983$$

no existe ninguna solución en este subcaso.

b") Si $5^2 = 25$ forma parte de la suma, los otros seis cuadrados deberán sumar $1983 - 25 = 1958$.

Como en el subcaso anterior las posibles terminaciones son:

0.1+6.9 $\underline{t}$ 4:	1.1+5.9 $\underline{t}$ 6;	2.1+4.9 $\underline{t}$ 8;	3.1+3.9 $\underline{t}$ 0
4.1+2.9 $\underline{t}$ 2;	5.1+1.9 $\underline{t}$ 4;	6.1+0.9 $\underline{t}$ 6	

(donde $\underline{t}$ tiene el mismo significado anterior), luego la única composición admisible es la formada por dos cuadrados terminados en 1 y 4 terminados en 9.

Las sumas posibles de dos cuadrados de números primos terminados en 1, menores que 1958 son

$1^2 + 11^2 = 122; \quad 1958 - 122 = 1836$

$11^2 + 19^2 = 482; \quad 1958 - 482 = 1476$

$1^2 + 19^2 = 362; \quad 1958 - 362 = 1596$

$1^2 + 29^2 = 842; \quad 1958 - 842 = 1116$

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 + 31^3 = 962 \\ 11^2 + 29^2 = 962 \end{array}\right\} 1958 - 962 = 996$$

$11^2 + 31^2 = 1082; \quad 1958 - 1082 = 876$

$19^2 + 29^2 = 1202; \quad 1958 - 1202 = 756$

$19^2 + 31^2 = 1322; \quad 1958 - 1322 = 636$

$$\left.\begin{array}{l} 11^2 + 41^2 = 1802 \\ 29^2 + 31^2 = 1802 \end{array}\right\} 1958 - 1802 = 156$$

$1^2 + 41^2 = 1682; \quad 1958 - 1682 = 276$

Las únicas sumas de cuatro cuadrados de primos impares terminados en 9 y menores que 1958 son:

$3^2 + 7^2 + 13^2 + 17^2 = 516; \quad 3^2 + 7^2 + 13^2 + 23^2 = 756$

$3^2 + 7^2 + 13^2 + 37^2 = 1596; \quad 3^2 + 7^2 + 17^2 + 23^2 = 876$

$3^2 + 7^2 + 17^2 + 37^2 = 1716; \quad 3^2 + 7^2 + 23^2 + 37^2 = 1956$

$3^2 + 13^2 + 17^2 + 23^2 = 996; \quad 3^2 + 13^2 + 17^2 + 37^2 = 1836$

$7^2 + 13^2 + 17^2 + 23^2 = 1036; \quad 7^2 + 13^2 + 17^2 + 23^2 = 1876$

Las únicas sumas posibles son las seis siguientes:

$2^2 + 2^2 + 11^2 + 3^2 + 13^2 + 17^2 + 37^2 + 5^2$

$2^2 + 1^2 + 19^2 + 3^2 + 7^2 + 13^2 + 37^2 + 5^2$

$2^2 + 1^2 + 31^2 + 3^2 + 13^2 + 17^2 + 23^2 + 5^2$

$2^2 + 11^2 + 29^2 + 3^2 + 13^2 + 17^2 + 23^2 + 5^2$

$2^2 + 11^2 + 31^2 + 3^2 + 7^2 + 17^2 + 23^2 + 5^2$

$2^2 + 19^2 + 29^2 + 3^2 + 7^2 + 13^2 + 23^2 + 5^2$

que son las únicas descomposiciones de 1987 en suma de cuadrados de números primos diferentes.

José V. García Sestafe.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 2ª (Boletín nº 16)

Probar que cualquiera que sea el polinomio p(x), existe un valor del número k tal que uno de los polinomios $p(x) + k$ y $x\,p(x) + k$ carece de raíces reales y el otro se anula al menos para un valor (real) de x.

Solución

a) Supongamos que p(x) es un polinomio de grado par; entonces $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} p(x)$, esto es, ambos límites son $+\infty$ ó $-\infty$; admitamos para fijar ideas que $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$, existiendo, por tanto dos números A y B, tales que $p(x) > 0$ para todo valor de $x > A$ y que $p(x) > 0$ para $x < B$. En el intervalo cerrado $[A, B]$, la función continua p(x) admite su mínimo absoluto M; eligiendo $k > -M$, la función $f(x) = p(x) + k$ no admite ningún valor real de x, tal que $f(x) = 0$. Análogo razonamiento valdría si $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$.

Pero, siendo p(x) de grado par, $x\,p(x) + k$ es un polinomio de grado impar y por tanto, como $x\,p(x) + k$ es continua y sus límites para $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ son de signo contrario, $x\,p(x) + k$ se anula, al menos una vez, en el intervalo real.

b) Sea p(x) un polinomio de grado impar; entonces $x\,p(x)$ será de grado par y elegido k de forma similar a como se ha hecho en a), $x\,p(x) + k$ carecerá de raíces reales y por ser $p(x) + k$ un polinomio de grado impar, existirá al menos un valor de x (real) para el que $p(x) + k = 0$.

Jose V. García Sestafe, (Madrid).

Recibida otra solución de Carlos José Pérez Jiménez

Problema 5 (Boletín 16)

Dada la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4}}$$

a) Representar gráficamente f(x).

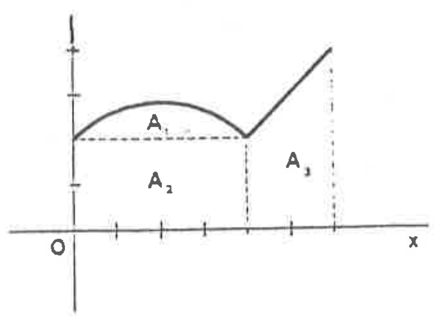
b) Hallar, sin utilizar cálculo integral, el área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$ y por la curva $y = f(x)$.

Nota: Se supone que las raíces cuadradas son mayores o iguales que cero.

Solución

Si $x \leq 4$, como $16x^2 - 8x^3 + x^4 = x^2(4-x)^2$, se tiene $\sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4} = x(4-x)$ y $f(x) = \sqrt{4 + 4x - x^2}$, que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$, de centro (2,0) y radio $2\sqrt{2}$.

Si $x > 4$, $\sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4} = x(x-4)$ y $f(x) = \sqrt{4+x^2-4x} = \sqrt{(x-2)^2} = x - 2$, puesto que, como $x > 4 \rightarrow x > 2$. Luego si $x > 4$, $f(x) = x - 2$. La representación gráfica aparece en la figura.



El área pedida es $A_1 + A_2 + A_3$: $A_1 = 4.2 = 8\ u^2$.

A_2 es un segmento circular de ángulo en el centro $\frac{\pi}{2}$; pero directamente se puede obtener

$$A_2 = \frac{1}{4}\left[\pi(2\sqrt{2})^2 - 4^2\right] = 2(\pi-2)\ u^2$$

$$A_3 = \frac{(2+4)\cdot 2}{2} = 6u^2$$

El área pedida es

$$A = 8 + 2(\pi-2) + 6 = 10 + 2\pi \text{ unidades de superficie}$$

José V. García Sestafe.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Problema 6 (Boletín nº 16)

Un exágono regular de área a se descompone en seis partes trazando por un punto P interior, rectas perpendiculares a los lados del exágono. Numeradas estas partes correlativamente en sentido antihorario y llamando a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 a sus áreas ¿para qué puntos se cumple $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$? ¿Entre qué valores puede variar $a_1 + a_3 + a_5$?

Solución

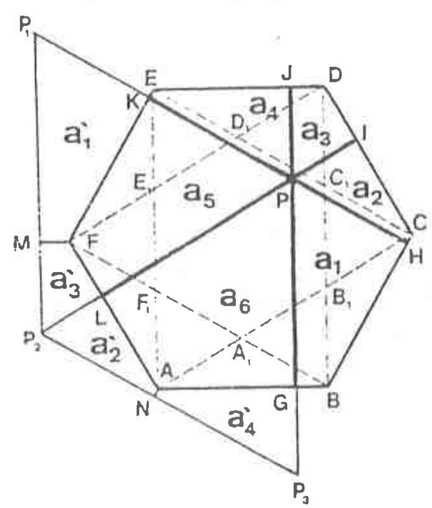


Figura 1

Mediante las traslaciones siguientes:

$\overrightarrow{HK}$: PHBG → P_1KFM, o sea $a_1 \rightarrow a'_1$

$\overrightarrow{IL}$: PIDJ → P_2LFM, o sea $a_3 \rightarrow a'_3$

$\overrightarrow{IL}$: PICH → P_2LAN, o sea $a_2 \rightarrow a'_3$

$\overrightarrow{JG}$: PJEK → P_3GAN, o sea $a_4 \rightarrow a'_4$

Se forman así los dos triángulos equiláteros iguales PP_1P_2 y PP_2P_3, cada uno de ellos de área $\frac{a}{2}$. Por tanto, para todo punto del exágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ se cumple $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6 = \frac{a}{2}$.

Para un punto exterior a dicho exágono, como el P de la figura 2, se forman también los triángulos iguales PP_1P_2 y PP_2P_3: pero al primero le "falta" el triángulo MNF igual al RSB que "sobra del triángulo PP_2P_3, igual al anterior; siendo a' el área de cada uno de estos triángulos se tiene

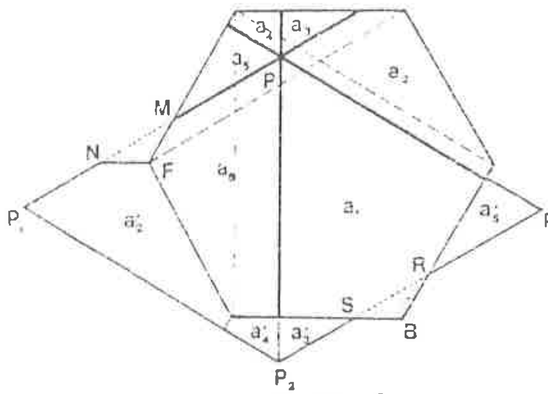


Figura 2

$$a_1 + a_3 + a_5 = a_1 + a_3' + a_5' = a_6 + a_2' + a_4' + 2a'$$

Luego $a_1 + a_2 + a_3 > a_2 + a_4 + a_6$, y tanto mayor cuanto más se acerque P a uno de los vértices, puesto que a' aumenta entonces.

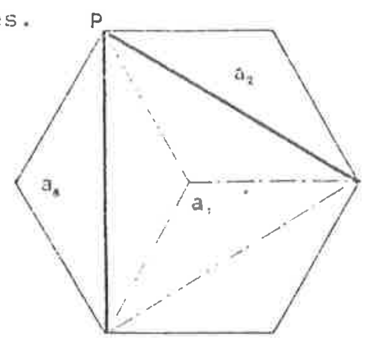


Figura 3

Cuando P coincide con un vértice (figura 3) tres de las áreas se hacen cero (en el caso de la figura $a_3 = a_4 = a_5 = 0$). Como es inmediato apreciar en la figura $a_1 = 2(a_2 + a_6)$, esto es, en general

$$\frac{1}{3} a \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq \frac{2}{3} a$$

Para un punto como el P de la figura 4, también se forman los triángulos PP_1P_2 y PP_2P_3. Designando por a' el área de los triángulos iguales NMF y SRB y por a" la del TUA se tiene que:

$$a_2' + a_4' + a_6 + a' - a'' = a_1 + a_3' + a_5' - a'$$

o sea,

$$(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) = a^4 - 2a'$$

Las áreas $a_2 + a_4 + a_6$ y $a_1 + a_2 + a_5$ serán, en general, distintas, salvo cuando

$$a'' = 2a'$$

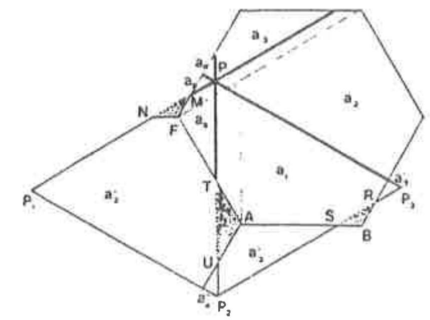


Figura 4

caso en el que ambas áreas serán iguales, lo cual sucede si P, aunque sea exterior al exágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, es incidente con una apotema del exágono dado, como se puede comprobar, directamente, por simetría, en la figura 5.

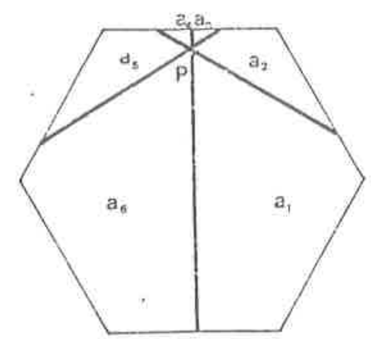


Figura 5

Resumiendo:

a) Para que las áreas $a_1 + a_3 + a_5$ y $a_2 + a_4 + a_6$ sean iguales, el punto P deberá pertenecer al exágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ o ser incidente con una de las seis apotemas del exágono dado.

b) La suma de las áreas $a_1 + a_3 + a_5$ (al igual que $a_2 + a_4 + a_6$) está comprendida entre un tercio y dos tercios del área del exágono.

José V. García Sestafe.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 7 (Boletín nº 16)

Sea la función $f(x) = tg\, x - x$. Probar que $f(x)$ admite una y sólo una raíz real en cada intervalo $I_n = (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$. Siendo c_n la raíz correspondiente al intervalo I_n, calcular

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - n\pi)$$

Solución

La función $f(x) = tg\, x - x$ es estrictamente creciente en todo intervalo I_n, ya que $f'(x) = tg^2 x > 0$ excepto si $x = n\pi$, donde la función pasa por un punto de inflexión con tangente horizontal. Véase Figura 1, donde, para mejor representación se han tomado la unidad sobre OX cuatro veces mayor que la tomada sobre OX.

Figura 1

Para $0 < h < \frac{\pi}{2}$, se tiene $f(n\pi - \frac{\pi}{2} + h) < 0$ y $f(n\pi + \frac{\pi}{2} - h) > 0$ y, por tanto, $f(x)$ se anula una y sólo una vez en cada I_n.

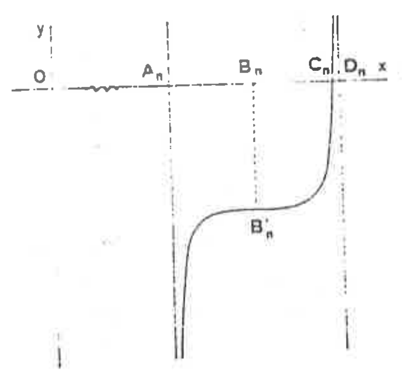


Figura 2

Sea el intervalo I_n (Figura 2), donde $A_n(n\pi - \frac{\pi}{2}, 0)$, $B_n(n\pi, 0)$ y $D_n(n\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$. Como $f(n\pi) = -n\pi$, $C_n < n\pi$. El límite pedido es $\lim_{n\to\infty} B_nC_n$; pero si $n\to\infty$, la ordenada de $B'_n \to -\infty$, y, por tanto $C_n \to D_n$, luego

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - n\pi) = \lim_{n\to\infty} \overline{B_nC_n} = \frac{\pi}{2}$$

José V. García Sestafe.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

PROBLEMA 8 (Boletín 16)

Se considera el conjunto E de los puntos (x,y,z) del espacio que cumplen:

$$x + y \leq 1 \qquad 2x + z = 3$$

Hallar los puntos (x,y,z) de E en los que la expresión $|x| + |y| + |z|$ es mínima. Hallar el valor mínimo e interpretar geométricamente el problema.

Nota: El $|x|$ es el mayor de los números x y $-x$.

Solución

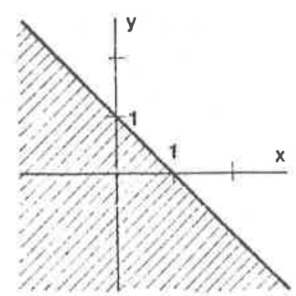


Figura 1

A partir de $y \leq 1 - x$ se tiene (véase Figura 1) el conjunto de valores posibles para y, que es el semiplano rayado.

En la Figura 2 se han obtenido los posibles valores para y, donde se aprecia que el valor mínimo de $|y|$ es, para cada valor de x:

$$|y|_{min} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

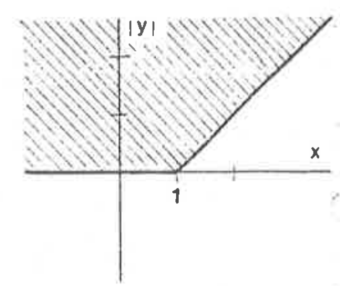


Figura 2

Por otra parte, de $2x + z = 3$ se obtiene

$$z = 3 - 2z; \quad |z| = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x-3 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

El mínimo de $|x| + |y| + |z|$ coincide con el mínimo de

$$s = |x| + |y|_{min} + |z|$$

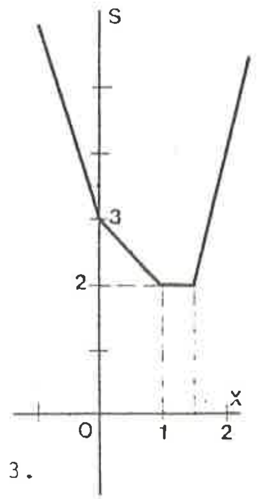
En cada intervalo, se tiene (Figura 3),

$s = -x + 0 + 3 - 2x = 3 - 3x$, si $x \leq 0$

$s = x + 0 + 3 - 2x = 3 - x$, si $0 < x \leq 1$

$s = x + x - 1 + 3 - 2x = 2$, si $1 \leq x < \frac{3}{2}$

$s = x + x - 1 + 2x - 3 = 4 - 4x$, si $x \geq \frac{3}{2}$



El mínimo de s se alca en el intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, como se aprecia en la Figura 3.

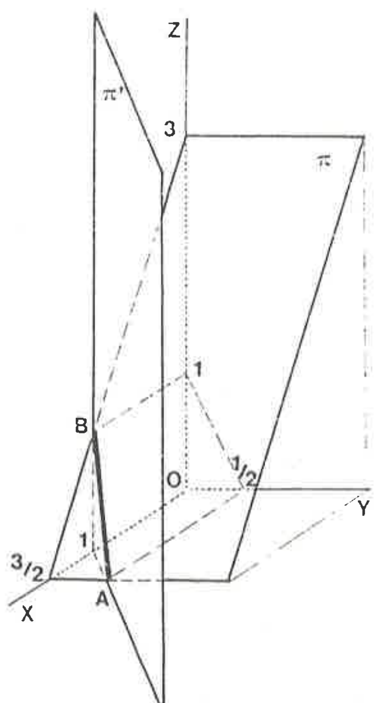


Figura 4

La interpretación gráfica del resultado se ilustra en la Figura 4. Sean los planos

$\pi: z = 3 - 2x$

$\pi': y = x - 1$

La recta intersección de ambos planos interseca en el primer octante el segmento AB, que es el lugar geométrico de los puntos del espacio en que $|x| + |y| + |z|$ es mínima.

José V. García Sestafe.

- ◘ - ◘ - ◘ -