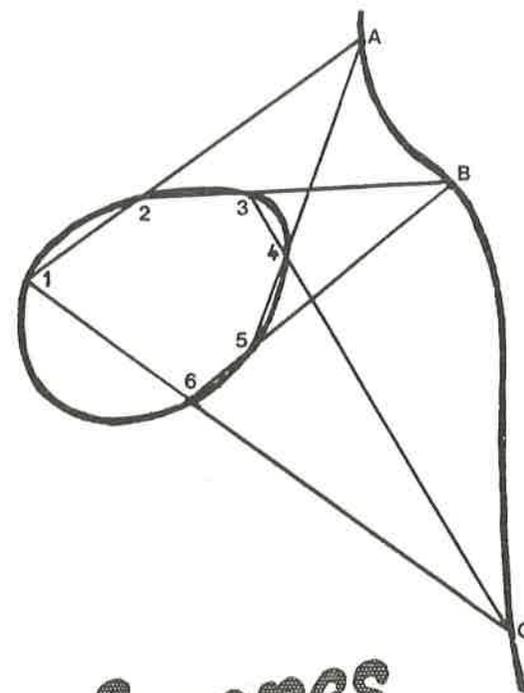


Sociedad
PUIG ADAM



de profesores
de matemáticas

boletín num. 33
febrero de 1993

BOLETIN DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM"
DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Febrero de 1993

nº 33 (1992-93)

	INDICE	Pág
- Toda la correspondencia deberá dirigirse al:		
Apartado nº 9479 28080 - MADRID		
(se recomienda no certificarla)		
- La confección de este número ha estado a cargo de:		
J. Fernández Biarge		
- La figura que aparece en la portada está tomada del artículo sobre las cúbicas que se incluye en este mismo número.		
- La rotulación de la portada está realizada con el conocido programa "BANNER" del Pixellite Group.		
- Vea y difunda la convocatoria de nuestro XI Concurso de Resolución de Problemas que aparece en este Boletín.		
	XI CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEM ^S ...	3
	XXIX OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA. Primera Fase ...	5
	7º I.C.M.E.	9
	NOTICIAS ..	13
	ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CUBICAS por Julio Fernández Biarge ...	21
	EVALUACION DE SIMPLICIDAD Y EXACTITUD DE DOS CONSTRUCCIONES DE CADENAS DE STEINER, por E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano ...	37
	MOSAICOS Y OTROS ENTRETENIMIENTOS EN CLASE DE MATEMATICAS, por Juan Bosco Romero Márquez ...	55
	PROBLEMAS PROPUESTOS...	71
	PROBLEMAS RESUELTOS ...	75
	- - - - -	
ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS. NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.		

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

Jose Vicente García Sestafe

Vicepresidente por Madrid:

Jose Manel Martínez Sánchez

Vicepresidente por Castilla - La Mancha:

Salvador Herrero Pallardo

Vicepresidente por Castilla - León:

Juan Bosco Romero Márquez

Vocal de actividades y concursos:

Juan Ochoa Mérida

Vocal de relaciones institucionales:

Eugenio Roanes Macías

Vocal de gestión de publicaciones:

Carmen García-Miguel Fernández

Vocal de redacción de publicaciones:

Julio Fernández Biarge

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Enrique Rubiales Camino

Tesorero:

Alberto Aizpún López

Bibliotecario:

Jesus Begoña Aina

- - - - -

XI CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:

*Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio
de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras*

BASES

PRIMERA

Podrán participar en el Concurso los alumnos de B.U.P. y F.P. Los de F.P. I lo harán concurriendo con los de 1º de B.U.P. ; los de primer curso de F.P. II , con los de 2º de B.U.P. y los de segundo y tercero de F.P.II, con los de 3º de B.U.P.

SEGUNDA

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo día de la segunda quincena del mes de junio.

TERCERA

Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

CUARTA

Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de **seis**) deberán realizar la preinscripción antes del día **30 de Abril de 1993**, dirigiéndose por carta sin certificar a esta Sociedad, Apartado de correos nº **9.479**, 28080 - MADRID. En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

QUINTA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, **credenciales individuales** en las que se haga constar el curso en que están matriculados en el año académico 1992-93 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

Enero de 1993

Este Concurso cuenta con la colaboración de *Coca-Cola España*

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS
Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

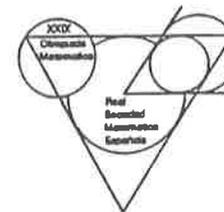
Concurso de Resolucion de Problemas de nuestra Sociedad		
n° (año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I (1983)	1	2 , pág. 11
II (1984)	3	4 , pág. 7
III (1985)	5	7 , pág. 3
IV (1986)	9	10 , pág. 5
V (1987)	13	15 , pág. 3
VI (1988)	17	19 , pág. 17
VII (1989)	20	22 , pág. 9
VIII (1990)	24	26 , pág. 3
IX (1991)	27	29 , pág. 3
X (1992)	30	32 , pág. 3
XI (1993)	33	

Olimpiada Matemática Española		
n° (año)	1ª fase (distritos)	2ª fase (final)
XX (1984)	- -	3, pág. 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI (1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII (1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII (1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX (1992-93)	33, págs. 5 y 71	

Olimpiada Iberoamericana de Matematicas		
n° (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín n°	
I (1986) Colombia	8 ,	págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12 ,	págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18 ,	págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21 ,	págs. 11 y 63
V (1990) España(Valladolid)	26 ,	págs. 13 y 73
VI (1991) Argentina	30 ,	págs. 15 y 65
VII (1992) Venezuela	32 ,	págs. 11 y 71

Olimpiada Matematica Internacional		
n° (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín n°	
XXIV (1983) París	2 ,	pág. 15
XXV (1984) Praga	4 ,	pág. 67
XXVI (1985) Helsinski	7 ,	págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10 ,	pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15 ,	págs. 9 y 73
XXIX (1988) Australia	19 ,	págs. 23 y 77
XXX (1989) Alemania (R.F.A.)	22 ,	págs. 15 y 73
XXXI (1990) China	26 ,	págs. 11 y 71
XXXII (1991) Suecia	29 ,	págs. 11 y 79
XXXIII (1992) Rusia	32 ,	págs. 9 y 69

XXIX OLIMPIADA
MATEMÁTICA
ESPAÑOLA



PRIMERA FASE

Las pruebas de la Primera Fase de la "XXIX Olimpiada Matemática Española", correspondientes al curso 1992-93 se han celebrado, en la mayor parte de los distritos y en Madrid, en particular, los días 27 y 28 de Noviembre de 1992.

Esta Olimpiada, cuya convocatoria apareció, con involuntario retraso, en el anterior número de este Boletín, está organizada por la Real Sociedad Matemática Española, bajo el patrocinio de la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio. A ella podían concurrir los alumnos matriculados en C.O.U., en el último curso de F.P.2, 2º curso del segundo ciclo del Bachillerato Experimental, 3º de B.U.P. o en primer curso del Bachillerato L.O.G.S.E.

La primera Fase de esta Olimpiada se desarrolla en distintos Distritos Universitarios. Los alumnos correspondientes a las universidades de la Comunidad Autónoma de Madrid realizaron conjuntamente las pruebas de esta fase en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense, los días citados, en dos sesiones; en cada una de ellas, de cuatro horas de duración, se propusieron cuatro problemas, cuyos enunciados pueden verse en nuestra sección de Problemas Propuestos, en este Boletín.

Este año, los ganadores de cada distrito, además de poder participar en la Segunda Fase de la Olimpiada, recibirán premios en metálico, en lugar de ser propues-

tos para la concesión de una Beca, como ocurría en años anteriores. Los participantes en las pruebas realizadas en Madrid, se han considerados como procedentes de dos distritos, por lo que han sido clasificados para la segunda fase seis alumnos, concediéndoseles dos primeros premios, dos segundos y dos terceros.

El número de participantes en las pruebas celebradas en Madrid ha sido de 127, muy por encima del alcanzado en los años anteriores. Como en éstos, gran parte de los aspirantes han concurrido sin mostrar la menor preparación olímpica: 69 alumnos no han pasado de 8 puntos, o sea de un solo punto por problema; en cambio, un reducido grupo ha tenido una actuación sobresaliente, que augura futuros éxitos en las próximas pruebas olímpicas. El jurado seleccionó los seis ganadores cuyos datos damos a continuación:

- D. Miguel CARRIÓN ÁLVAREZ, del C.O.U. del I.B. de la Estrella (Madrid) 64 puntos - 1^{er} premio
- D. David SEVILLA GONZÁLEZ, de 3^o de B.U.P., I.B. Luis Buñuel (Alcorcón) 62 puntos - 1^{er} premio
- D. Tomás PRIETO RUMEAU, del C.O.U. del Liceo Francés (Madrid) 61 puntos - 2^o premio
- D. Juan Manuel de LAIGLESIA LORENZO, del C.O.U. del Liceo Francés (Madrid) 56 puntos - 2^o premio
- D. Carlos BENITO SÁNCHEZ, del C.O.U. del Colegio de San Agustín (Madrid) 50 puntos - 3^{er} premio
- D. Raul BLÁZQUEZ FERNÁNDEZ, del C.O.U. del Colegio "El Parque" (Alcobendas) 46 puntos - 3^{er} premio

Por debajo de los premiados, han obtenido meritorias puntuaciones los siguientes participantes:

- D. José Tomás Baeza Oliva, de 3^o de B.U.P. del I.B. Avda. de los Toreros (Madrid) 45 puntos
- D. Angel de Castro Martín, de C.O.U. del Colegio Claret (Madrid) 42 puntos
- D. Ramón Gordillo Gutierrez, de C.O.U. del Colegio San Viator (Madrid) 39 puntos
- D. Alvaro Gómez-Rey Romero, de C.O.U. del I.B. "Gran Capitán" (Madrid) 36 puntos
- D. Juan Enrique Pradas Simón, de C.O.U. del Colegio JOYFE (Madrid) 36 puntos
- D. Pablo Vila Rodriguez, del C.O.U. del Colegio del Sagrado Corazón (Madrid) 35 puntos
- D. Juan Carlos de Miguel Pérez-Herce, del C.O.U. del Col. Maristas de Chamberí (Madrid) 35 puntos

Debe destacarse que uno de los primeros premios ha sido ganado por un alumno de tercer curso de B.U.P. y otro alumno de este curso ha quedado a punto de ser premiado también.

Una vez más, nos complace señalar que varios de los clasificados en esta Olimpiada fueron galardonados en años anteriores en los Concursos de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad: David SEVILLA GONZÁLEZ, primer premio, que es alumno de tercer curso de B.U.P., quedó en tercer lugar como alumno de 2^o en nuestro Concurso de este año y en primer lugar como alumno de 1^o en 1991. Carlos BENITO SÁNCHEZ, tercer premio, fué el tercero de 3^o de B.U.P. en este año. Tomás BAEZA OLIVA, que ha obtenido 45 puntos, siendo alumno de 3^o de B.U.P., fué el 2^o de 2^o curso en 1992. Ramón GORDILLO GUTIERREZ, que ha obtenido 39 puntos fué el 4^o de 3^{er} curso este año y el 2^o de 2^o en 1991. Alvaro GÓ-

MEZ REY, que ha alcanzado 36 puntos, fué el 2º de 3º en 1992, el 4º de 2º en 1991 y el primero de 1º en 1990.

Para que nuestros lectores puedan valorar la dificultad relativa de los problemas propuestos, damos a continuación una tabla con las medias de las puntuaciones alcanzadas por la totalidad de los presentados y por los seis premiados en cada uno de esos problemas:

Problema	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Punt. media:								
de todos	2,6	1,7	2,8	0,8	0,5	2,2	1,4	0,6
de los 6 prem.	9,7	7,5	9,7	6,0	6,7	7,7	5,8	3,5

La segunda fase de esta XXIX Olimpiada Matemática Española tendrá lugar en Madrid y en La Laguna, los días 26 y 27 de Febrero de 1993.

7º ICME

En nuestro último número comunicábamos la pasada celebración del 7º Congreso Internacional del ICME (*Comisión Internacional de la Enseñanza de las matemáticas*), institución que preside nuestro compatriota el Prof. Miguel de Guzmán, como informamos en su día. El Congreso tuvo lugar en los edificios del campus de la Universidad Laval de Qubec (Canadá), los días 17 al 23 de Agosto pasado.

Se celebraron cuatro conferencias plenarios: la inaugural, a cargo del Prof. **Geoffrey Howson** (Gran Bretaña) sobre "*Los docentes de Matemáticas*", una segunda, pronunciada por la profesora **Colette Laborde** con el título de "*Enseñar la Geometría: Lo que cambia y lo que permanece*", la tercera, dada por el prof. **María Klawe** (Canadá), y la de clausura, por **Benoit Mandelbrot** (USA), sobre "*Geometría experimental y fractales; un tema al alcance de cualquiera*".

Además tuvieron lugar otras 40 conferencias de una hora, más de la mitad de las cuales fueron dadas por el profesorado de USA o de Canadá. Entre ellas destacamos las pronunciadas por el Presidente del ICME, prof. **Miguel de Guzmán**, sobre "*El origen y la evolución de las teorías matemáticas; consecuencias para la enseñanza*" y por el prof. **Joaquín Giménez**, de la Universidad Autónoma de Barcelona, que tituló: "*De los repartos a las fracciones*".

Pero, fundamentalmente, y a los efectos de la participación directa de los asistentes, el Congreso estuvo organizado en 23 grupos de trabajo (con subgrpos en algunos de ellos) y 17 grupos temáticos. Sin dar la lista total, sí diremos que de los primeros, el más concurrido, de lejos, fué el dedicado a la formación del profesorado, que necesitó de 12 subgrupos, si bien 11 de ellos estuvieron presididos por congresistas de Estados Unidos; y si la participación era internacional, se dejó notar el sesgo. Otros de los grupos de trabajo analizaron la formación de los conceptos en Matemáticas, el aprendizaje del cálculo, enseñanza en poblaciones multiculturales o multilingües, enseñanza de la Geo-

metría (con 7 subgrupos), construcción de modelos matemáticos y aplicaciones de los mismos (con subgrupos dedicados a las enseñanzas primaria, secundaria y universitaria), resolución de problemas, la función de la tecnología en la Enseñanza, etc. Algunos de los temas de interés más general entre los grupos temáticos, fueron: Las competiciones de Matemáticas; enseñanzas para la Formación Profesional; El contexto social de la educación matemática; Juegos matemáticos; La enseñanza de las matemáticas por proyectos; Las Matemáticas en el contexto del curriculum total; Arte y Matemáticas; Formación de investigadores en Didáctica de las Matemáticas; La utilización de la televisión en el aula; Filosofía de la educación matemática.

En relación con todo ello se presentaron hasta 440 comunicaciones breves que fueron exhibidas en forma de carteles, o de vídeo o de software. Como es natural, su grado de interés ofrecía una gran dispersión.

Aparte de la participación directa y como muy interesantes informaciones, se pudieron contemplar y examinar 17 Proyectos Institucionales (Open University, Instituto Freudenthal de Utrech, los IREMs, la SMP de Southampton, el Shell Centre for Mathematical Education de Nottingham, el Harvard Calculos Projecto, de Cambridge, el grupo internacional Cabri-geometría, el King's College, de Londres; etc.).

También fué posible asistir a los grupos de estudios de la CIEM (o ICMI para los anglosajones): uno sobre: "*La influencia de los ordenadores y de la informática sobre las Matemáticas y su enseñanza*", otro sobre "*La popularización de las Matemáticas*" y un tercero sobre "*La evaluación de la educación matemática y sus efectos*". Este último fué organizado por nuestro compatriota el profesor **Claudi Alsina** de la Universidad Politécnica de Barcelona y representante de España en el Comité internacional del programa del ICME-7.

Como exposición de actividad que no de resultados y con el nombre de "*Talleres*", se mostró el trabajo de algunos grupos, como "Matemáticas en vaqueros" (Francia), "Juegos para el aula

de matemáticas" (Gran Bretaña), "Desarrollo del pensamiento matemático con la ayuda de juegos basados en historias" (Polonia), "Matemáticas y caos" (Gran Bretaña) y el taller de la ATM (Asociación de Profesores de Matemáticas) de la Gran Bretaña.

Incluido en las actividades del Congreso se celebró un tanto aparte un mini-congreso (así fué llamado) sobre las calculadoras y los ordenadores; sus trabajos se dividieron en cinco sesiones, dedicadas a los alumnos de 5 a 11 años, de 11 a 16, de 16 a 18, estudiantes de Matemáticas en la Universidad y el quinto sobre la formación del profesorado específico.

Fueron muchas las reuniones que pudieron celebrarse entre profesores dedicados a una misma parcela. Por ejemplo, la de los responsables de competiciones matemáticas internacionales, a la que acudió nuestro colega **Juan Manuel Conde** (Alicante) o la de representantes de Asociaciones de Profesores de Matemáticas, en la que, en verdad, poco se dijo aparte de la vaga promesa de intercambio de publicaciones.

Emotivamente, el Congreso rindió homenaje al desaparecido **Caleb Gattegno**. Sus trabajos y su figura fueron glosados por el profesor **Dawson** (Canadá) y se pasaron los filmes "*Números en color*" y "*Trigonometría*".

Para los asistentes españoles resultaron particularmente afectivos los actos que se organizaron como anuncio del próximo **8 - ICME**, que se celebrará en Sevilla. La reunión especial para el profesorado de lenguas ibéricas (español y portugués), durante la que se exhibió un muy bello reportaje en vídeo sobre la Sevilla actual y posteriormente el acto plenario en el magnífico campus. A pesar de la masiva asistencia hubo tapas y vino fino andaluz para todos y cuanto se quiso. Eso no queda en un hecho folklórico porque en Canadá existe monopolio de alcoholes y la organización del acto exigió trabajos previos de altura diplomática. Después de coseguir llevar hasta Quebec centenares de botellas de fino no puede haber obstáculo organizativo que se resista para el ICME-8 de Sevilla.

No faltó la consabida exposición de material didáctico comercializado, en la que participaron hasta 34 firmas.

En el acto de clausura, al que acudieron las autoridades gubernativas de Quebec, el Presidente del ICME, **Miguel de Guzmán**, intervino para resaltar la impecable organización de los actos por parte de la Universidad Laval y su esperanza de que en Sevilla se volvieran a encontrar sus asistentes. Por su parte, el Presidente de la *Federación Española* **Gonzalo Sánchez Vazquez**, con la emotividad que le caracteriza, prometió a todos cálida acogida y buena organización. Aquí sabemos que ambas cosas son seguras.

Estos fueron, en resumen, los actos. Sobre los resultados que se obtienen en este tipo de Congresos masivos en relación con las expectativas de los asistentes, habría que organizar algún debate. Pero en este caso particular no hay duda de que la belleza de Quebec, la de su travesía por el impresionante río San Lorenzo y la del paisaje todo no defraudan. En cambio, no espere nadie ver a la Policía montada; solamente existe en las novelas de Zane Grey o en las de James O. Coorwood.

*Agradecemos a nuestro tesorero, el profesor **Alberto Aizpún**, que participó en el ICME-7, la redacción de esta crónica, que brindamos a nuestros socios.*

CURSO DE CONFERENCIAS DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Continuando con los cursos de conferencias sobre la Historia de las Matemáticas impartidos en los años anteriores, la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* va a desarrollar, en las fechas que se indican, a las siete y media de la tarde, en su sede de la calle de Valverde, 22, un curso sobre:

"HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XIX (2ª parte)"

El programa es el siguiente:

- | | |
|---------------|--|
| 16 de febrero | Las construcciones de los números reales
Manuel López Pellicer
Académico Correspondiente. Catedrático de la Universidad Politécnica de Valencia. |
| 18 de febrero | Orígenes del Análisis funcional
Fernando Bombal
Académico Correspondiente. Catedrático de la Universidad Complutense. |
| 23 de febrero | Evolución de la integral en el siglo XIX
Pedro Jiménez Guerra
Académico Numerario. Catedrático de la U.N.E.D. |
| 25 de febrero | Cauchy
Baltasar Rodríguez-Salinas y José Leandro de María
Académico Numerario Profesor Titular de
Catedrático de la la U.N.E.D.
Universidad Complutense. |
| 2 de marzo | La probabilidad de Pascal a Laplace
Francisco J. Girón
Académico Numerario. Catedrático de la Universidad de Málaga. |
| 4 de marzo | La revolución probabilística
Sixto Ríos
Académico Numerario. Catedrático de la Universidad Complutense. |
| 9 de marzo | De la Geometría Numerativa a la Geometría Algebraica
José Manuel Aroca
Catedrático de la Universidad de Valladolid. |
| 11 de marzo | Las bases de la Geometría Diferencial
José J. Etayo
Académico Numerario. Catedrático de la Universidad Complutense. |

**XXV ANIVERSARIO DE LA FUNDACION DEL INSTITUTO
"MATEMATICO PUIG ADAM"
DE GETAFE (MADRID)**

El Instituto de Bachillerato "Matemático Puig Adam", de Getafe, va a conmemorar el XXV aniversario de su fundación con diversos actos, entre los que figura un homenaje a la figura de don Pedro Puig Adam, que da nombre a ese Instituto.

Estos actos tendrán lugar los días 4 y 6 de Marzo de 1993, en los locales del mencionado Instituto. Nuestra Sociedad, que comparte con él el honor de llevar el nombre de "Puig Adam", ha ofrecido su colaboración para honrar la memoria del ilustre Maestro.

El Profesor Carlos M^a Rodríguez Calderón, que fué Director del mencionado Instituto, en su primera etapa, pronunciará en dicho acto, una conferencia sobre "El Matemático Puig Adam".

I OLIMPIADA MATEMATICA DE ALUCHE

La Junta Municipal del Distrito de Latina de Madrid y el Club Codaste han organizado, con la colaboración del Seminario de Matemáticas del Colegio de Doctores y licenciados de Madrid, la *I Olimpiada Matemática de Aluche*. Las pruebas, consistentes en la resolución de problemas, han tenido lugar en el Centro Cultural Fernando de los Rios, del Ayuntamiento de Madrid, los sábados 21 y 28 de Noviembre y 12 de Diciembre. La relación de alumnos ganadores fué la siguiente:

PRIMERO DE BUP

1. Jaime Guerrero Ramón
2. Ernesto Pérez Alonso
3. Elena Baeza Oliva

SEGUNDO DE BUP

1. Félix Salcedo Ureste
2. Pilar Sebastián Benito
3. Jesús Dorado Manzanares

TERCERO DE BUP

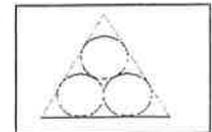
1. José Tomás Baeza Oliva
2. Raúl Molina Gil
3. David Muñoz Polo

Los enunciados de los problemas propuestos fueron los siguientes:

PRIMERO DE BUP

1.-a) Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 30 grados, y el cateto menor, r centímetros. ¿Cuánto miden la hipotenusa y el otro cateto?

b) En un triángulo equilátero se inscriben tres círculos iguales de la forma que se indica en la figura. Halla el lado l del triángulo en función del radio r de los círculos.



2.-¿En cuántos ceros termina el producto $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 1992$? Justifica la respuesta.

3.-Doscientos soldados están formados en cuadro con 10 en cada línea y 20 en cada fila. De cada línea se escoge el soldado más bajo, y de entre estos 20 soldados el más alto es Juan. También de cada fila del mismo cuadro de 200 soldados se escoge el soldado más alto, y de entre éstos, el soldado más bajo es Pedro. ¿Quién es más alto, Juan o Pedro?. Justifica la respuesta.

4. -Cuando dos pastores se disponían a comer, apareció un cazador que había perdido la merienda. Los pastores le invitaron a comer con ellos; uno sacó 3 quesos y el otro 5. Cuando terminaron, el cazador les dio 8 monedas de oro. El que puso 3 quesos se quedó con 3 monedas y le dio al otro las 5 restantes. ¿Es justo este reparto? ¿Cuántas monedas debe llevarse cada pastor?

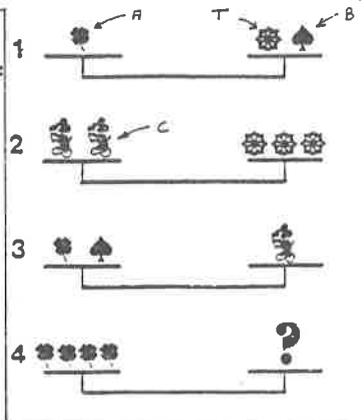
5. -Preguntado un hombre por su edad, contesta: si al duplo de mi edad se quitan 17 años, se obtiene lo que me falta para llegar a 100. ¿Cuál es la edad de dicha persona?

6. -Resuelve el ejercicio de la MALIGNA BALANZA

Maligna balanza

Usted, para conservar el equilibrio... ¿cuántos TIMONES necesita?

(De la revista de MUFACE)



7. -Al ser preguntado un pastor por el número de sus ovejas respondió: Cuando las cuento de 2 en 2, sobra 1; si lo hago de 3 en 3, también sobra 1; y lo mismo sucede cuando las agrupo de 4 en 4, de 5 en 5, y de 6 en 6; pero si las cuento de 7 en 7, no sobra ninguna. Curiosamente, a mi vecino, que tiene más ovejas que yo, aunque aun no ha llegado a las mil, le ocurre lo mismo. ¿Cuántas ovejas tiene cada uno de los pastores?

8. -Dado un triángulo ABC, halla el conjunto de los puntos M tales que el área de cada uno de los triángulos AMB, BMC y CMA sea menor que el área del triángulo ABC.

9. -¿Cómo se puede unir, sin levantar el lápiz y no utilizando más de 4 segmentos, los 9 asteriscos de la figura?

* * *
* * *
* * *

SEGUNDO DE BUP

1. -Problema 1 de primero de BUP.

2. -Simplifica la siguiente expresión hasta obtener la raíz de un número entero:

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

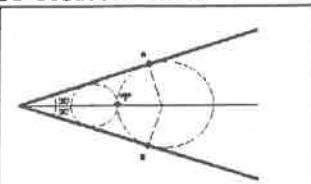
3. -a) Una vez un hombre entró en una posada. No tenía dinero, pero tenía una cadena de plata de siete eslabones. Se llegó al acuerdo que por cada día de hospedaje daría al posadero un eslabón de la cadena. ¿Cual es el menor número de eslabones de la cadena que hay que cortar para que el hombre pueda pagar al posadero siete días, pagando día a día? (Si es preciso, el hombre puede tomar en vuelta del posadero algunos eslabones contra un trozo de cadena)

b) Una cadena tiene 2000 eslabones. ¿Cual es el menor número de eslabones de la cadena que hay que abrir para que sea posible tomar cualquier número de eslabones del 1 al 2000 cogiendo trozos de la cadena que ha sido cortada?

4. -Dos amigos practican el siguiente juego: el que comienza dice un número menor que 10; luego, alternativamente, van diciendo un número mayor que el anterior pero sin rebasarlo más de 10 unidades y gana el primero que llega a 100. Escribe los números que tiene que ir eligiendo el que empieza para tener la seguridad de ganar y una regla nemotécnica que le permita actuar con rapidez.

5. -a) La ecuación $a\sqrt{2} - b\sqrt{3} = c$ tiene, evidentemente, la solución $a=0, b=0$ y $c=0$. ¿Tiene alguna otra solución entera? Justifica la respuesta.

b) Idem para la ecuación $a\sqrt{2} - b\sqrt{18} = c$

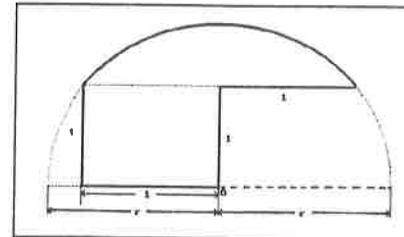


6. -Halla la relación existente entre las longitudes de la circunferencia pequeña y del arco ATB que aparecen en la figura. Expresa ambas longitudes en función del radio r de la circun-

7. -Para construir una caja sin tapa cortamos un cuadrado en cada uno de los 4 vértices de una cartulina rectangular de 50 cm. x 30 cm. y hacemos las dobleces pertinentes. Halla la longitud del lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea de 4 decímetros cúbicos.

8. -Dos hermanos tienen un rebaño de ovejas. Venden las ovejas y reciben por cada una de ellas tantos doblones como ovejas tiene el rebaño. Para repartir el montón de monedas, cada hermano va tomando alternativamente diez doblones, empezando por el hermano mayor. Así lo hacen hasta que al tocarle una vez su turno al hermano menor, éste se encuentra con que quedan menos de diez doblones. Toma los que hay y, para igualar la cuenta, el hermano mayor da al menor su precioso cuchillo de caza. ¿Cuántos doblones vale el cuchillo?

9. -¿Cómo hay que hacer dos cortes rectilíneos en la figura de línea continua para que quede dividida en dos partes de igual forma y tamaño?



TERCERO DE BUP

1. -Problema 1 de primero de BUP.

2. -Dada la sucesión $-1'8, -1'9, -1'10, -1'11, -1'12, -1'13, -1'14, \dots$, halla los extremos superior e inferior y el límite. Si alguno de estos números no existe, escribe el porqué.

3. -Resuelve el sistema: $2^x - 4^y = 7$
 $\log(7+x) - \log(y+1) = 1$

¿Puede haber más de una solución? ¿Por qué?

4. -Halla todas las soluciones enteras positivas de la ecuación $1!+2!+3!+4!+5!+\dots+x!=y^2$.

5. -Problema 3 de segundo de BUP.

6. -Dada la sucesión $0, 4, 3, 7, 6, 10, 9, 13, \dots$, escribe los términos noveno y décimo y la fórmula del término general. Sugerencia: Para escribir esta fórmula, usando sólo una igualdad, conviene usar expresiones del tipo $(-1)^n$.

7. -Problema 1 de segundo de BUP.

8. -Al unir los vértices A y D de un hexágono regular, aparecen dos trapecios iguales. ¿Qué hay que hacer para dividir uno de estos trapecios en 4 partes de igual forma y tamaño? Explica por qué son iguales.

9. -De un polinomio se sabe que es múltiplo de $x+1$ y que al dividirlo por $x-2$ el resto es 15. ¿Qué resto se obtendrá al dividirlo por el producto $(x+1)(x-2)$?

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(senalar con una X los que interesen)

3	4	25	26	27	28
<input type="checkbox"/>					
29	30	31	32		
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		

Envío adjuntos sellos para el franqueo (48 pta por número para Madrid - capital y 73 pta por número para el resto de España).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Aptdo. 9479 - 28.080 -MADRID.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CUBICAS

por Julio Fernández Biarge

0. LOS MODOS DE RAZONAR EN GEOMETRIA

Los matemáticos de varias generaciones estuvieron fascinados por la belleza de los razonamientos geométricos. El recurso a la Geometría Analítica se hacía imprescindible en ocasiones, pero solía conducir a farragosos cálculos, a lo largo de los cuales se perdía el significado geométrico, aunque al final se alcanzase el resultado deseado. La acertada elección del sistema de referencia simplificaba a veces los cálculos, pero entonces era difícil saber si una conclusión determinada era independiente de esa elección o no. La introducción de notaciones vectoriales o tensoriales, permitió que se pudiese seguir el significado de los símbolos a lo largo de los cálculos intermedios y que éstos fuesen en cierta medida independientes del sistema de referencia, con lo cual los métodos analíticos se despojaron de los atributos de farragosos, crípticos y antiestéticos que habían merecido.

En este artículo divulgativo, queremos mostrar varios ejemplos de un modo de razonar, que siendo esencialmente analítico - ya que el propio objeto del razonamiento, las cúbicas, están definidas por ecuaciones - apenas necesita escribir explícitamente coordenadas, ni se apoya en una elección determinada del sistema de referencia, salvo ocasionalmente. Más que el interés de las conclusiones que alcanzamos, queremos resaltar cómo se recupera de este modo la belleza del modo de razonar tradicional de la Geometría.

1. ALGUNAS PROPIEDADES PROYECTIVAS DE LAS CUBICAS PLANAS

En todo lo que sigue, emplearemos coordenadas homogéneas en el plano proyectivo, que representaremos con x_0, x_1, x_2 . Razonaremos en el plano complejo, aunque con especial atención a los elementos geométricos reales.

Una cubica será la curva representada por una ecuación de la forma

$$\Gamma = 0 \quad [1]$$

donde Γ es una forma cúbica, con coeficientes reales, en las variables x_0, x_1, x_2 . Designaremos con la misma letra Γ a la cúbica representada por [1]. Una cúbica puede ocasionalmente "degenerar" en una recta y una cónica no singular o en tres rectas (algunas eventualmente coincidentes y dos posiblemente imaginarias conjugadas).

La ecuación homogénea [1] tiene 10 coeficientes; por lo que bastarán 9 condiciones lineales entre ellos (tales como la de que Γ pase por un punto), linealmente independientes, para determinarla. No obstante, dos cúbicas Γ_1 y Γ_2 (salvo que tengan infinitos puntos comunes), se cortan en 9 puntos (algunos posiblemente coincidentes, contados entonces con su debida multiplicidad), reales o imaginarios (por pares de conjugados), por los que pasan todas las cúbicas del haz $\lambda\Gamma_1 + \mu\Gamma_2 = 0$. De este hecho resulta que el sistema de las 9 ecuaciones lineales homogéneas entre los coeficientes de [1] que expresan que la cúbica Γ pasa por esos 9 puntos de intersección, al tener soluciones distintas, debe ser de rango no superior a 8, lo que indica que una de las 9 ecuaciones es consecuencia de las otras 8.

Esto nos permite enunciar el siguiente:

Teorema 1: *Todas las cubicas que pasan por ocho puntos dados, tienen un noveno punto comun.*

Los citados puntos pueden ser reales o imaginarios (por pares) e incluso "coincidentes" en el sentido habitual, para expresar condiciones de contacto en un punto, que por expresarse como ecuaciones lineales en los coeficientes de [1], se comportan como pares, ternas, ... de puntos, a efectos de este teorema.

Es especialmente interesante el caso de que algunas de las cúbicas que pasan por ocho puntos sean degeneradas.

Consideremos, por ejemplo el exágono formado por las rectas de ecuaciones $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0$

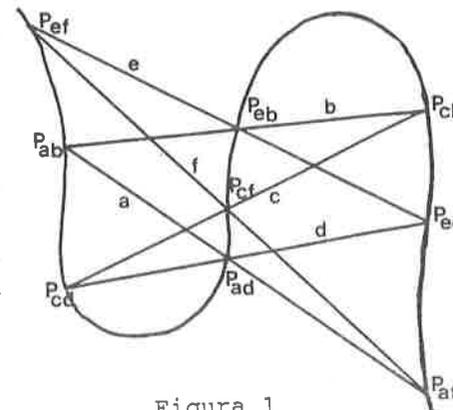


Figura 1

(con cada una de estas letras representamos una forma lineal en las x_i y también la recta que define la ecuación que resulta de igualarla a cero). Las cúbicas degeneradas $ace = 0$ y $bdf = 0$ pasan por los 9 puntos P_{ab}, P_{cd}, \dots (Figura 1). Por el teorema anterior, toda cúbica que pase por ocho de ellos pasará por el noveno. Podemos enunciar así el:

Teorema 2 (de Pascal generalizado): *Si un exágono está inscrito en una cúbica, y los puntos de intersección de dos pares de lados opuestos pertenecen a la esa cúbica, el punto de intersección del tercer par también pertenece a ella.*

Basta considerar las dos cúbicas formadas por los pares de lados opuestos (Figura 2^a) y la cúbica dada que, al pasar por 8 puntos de intersección de las anteriores, pasará también por el noveno.

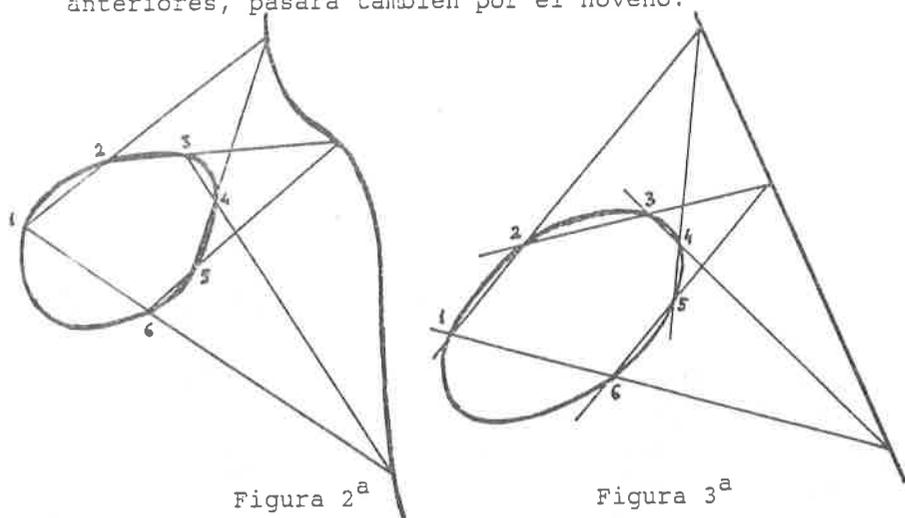


Figura 2^a

Figura 3^a

Cuando la cúbica dada degenera en una cónica y una recta (Figura 3^a) se obtiene el conocido

Teorema 3^o (de Pascal) : Si un exágono está incrito en una cónica no singular, los pares de lados opuestos se cortan en tres puntos alineados.

Si la cónica a su vez degenera en un par de rectas reales, se obtiene igualmente el

Teorema 4^o (de Pappus): Si un exágono tiene sus vertices situados alternativamente en dos rectas, los pares de lados opuestos se cortan en tres puntos alineados.

Un punto de inflexión de una cúbica es un punto no singular cuya tangente tiene 3 intersecciones confundidas con ella.

Sean I, J dos puntos de inflexión de una cúbica Γ (Figura 4^a) y $u = 0$ la recta que los une. Sean $i = 0$ y $j = 0$ las tangentes de inflexión en I y J y sea K el tercer punto de intersección de la recta u con la cúbica (que será forzosamente punto no singular) y $k = 0$ la tangente en él. Consideremos las cúbicas degeneradas $u^3 = 0$ y $ijk = 0$. Sus puntos de intersección son I, J y K , triples. La cúbica Γ tiene comunes con $u^3 = 0$, tres puntos confundidos en I , tres en J y otros 3 en K . Los que tiene en común con $ijk = 0$ son también tres confundidos en I , tres confundidos en J y al menos dos confundidos en K ; en virtud del Teorema 1^o, el noveno punto común estará también confundido con K ; es decir $k = 0$ tiene triple su intersección en K con Γ , con lo que K es también punto de inflexión de Γ . Resulta así el

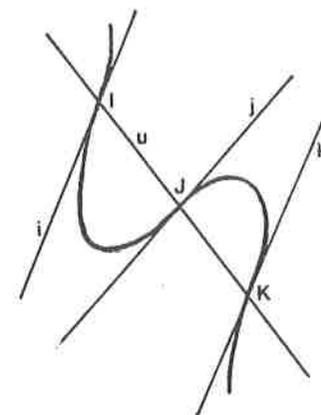


Figura 4^a

Teorema 5^o : La recta que une dos puntos de inflexión de una cubica, la vuelve a cortar en un tercer punto de inflexión.

Teorema 5^o : La recta que une dos puntos de inflexión de una cubica, la vuelve a cortar en un tercer punto de inflexión.

3. TIPOS DE CUBICAS

En el plano proyectivo, las cúbicas no degeneradas pueden carecer de puntos singulares, o tener un único punto doble. Si tienen un punto doble, éste puede ser ordinario (con dos tangentes distintas) o de retroceso. Un punto doble ordinario puede a su vez ser un nodo (con dos tangentes reales) o un punto aislado (con tangentes imaginarias conjugadas). Si una cúbica tiene

dos puntos dobles, la recta que los une tiene al menos cuatro intersecciones con ella, por lo que forma parte de la cúbica y ésta es degenerada. Si tiene un punto triple, las tangentes en él tienen cuatro intersecciones confundidas al menos con la cúbica y por tanto forman parte de ella: entonces la cúbica es degenerada, formada por tres rectas que pasan por el punto (distintas o no).

En algunos de los razonamientos posteriores convendrá tener en cuenta los resultados que dan para las cúbicas las conocidas **formulas de Plücker**. Sabemos que se llama **clase** de una curva al número de tangentes (reales o imaginarias) que se le pueden trazar desde un punto genérico. La primera de las citadas fórmulas nos dice que la clase de una cúbica no degenerada sin puntos dobles es $3(3-1) = 6$; si tiene un punto doble ordinario, la clase es 4 y si lo tiene de retroceso se reduce a 3. La tercera nos da el número de puntos de inflexión (reales o imaginarios), que para las cúbicas que no posean puntos dobles, es 9, para las que tienen uno ordinario, 3, y para las que lo tienen de retroceso, 1.

4. CORRESPONDENCIAS ENTRE LOS PUNTOS DE UNA CUBICA

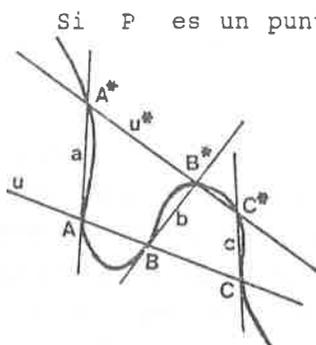


Figura 5^a

Si P es un punto ordinario de una cúbica Γ no degenerada, la tangente en P cortará de nuevo a Γ en un punto P*. Si P fuese un punto doble, pondríamos P* = P (lo que resulta también, según la definición anterior, cuando P es un punto de inflexión de Γ). Se establece así una correspondencia $P \rightarrow P^*$ entre los puntos de Γ; esta

correspondencia es unívoca, pero no biunívoca; cada P* procede de m-2 puntos P (reales o imaginarios), donde m es la clase de Γ. Esta correspondencia tiene propiedades interesantes, como la dada por el

Teorema 6^o: Si tres puntos A, B, C de una cúbica no degenerada están alineados, sus correspondientes A*, B*, C*, también lo están.

En efecto (Figura 5^a), si la cúbica es $\Gamma = 0$, la recta en la que están A, B y C es $u = 0$, las tangentes en esos puntos son $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ y la recta A^*B^* es $u^* = 0$, basta aplicar el Teorema 1^o a las cúbicas $\Gamma = 0$, $u^2u^* = 0$, $abc = 0$ para obtener el resultado de que $u^* = 0$ pasa por C*.

Nótese que también queda establecida así una correspondencia entre las rectas del plano, $u \rightarrow u^*$. En particular, si u es tangente a Γ, en A (y corta a Γ en A*), u* es la recta A^*A^{**} .

Supongamos que una cúbica no degenerada Γ y una cónica γ tienen 6 intersecciones confundidas en un punto A. Sea $a = 0$ la tangente común en A (que cortará a Γ en A*) y $a^* = 0$, la tangente en A* (Figura 6^a). La cúbica $a^3 = 0$ corta a Γ seis veces en A y tres veces en A*. La cúbica $\gamma a^* = 0$ corta a las anteriores, seis veces en A y al menos dos veces en A*. Según el Teorema 1^o, el noveno punto de intersección coincidirá también con A* y en consecuencia, A* será punto de inflexión de Γ. Es inmediata una proposición recíproca.

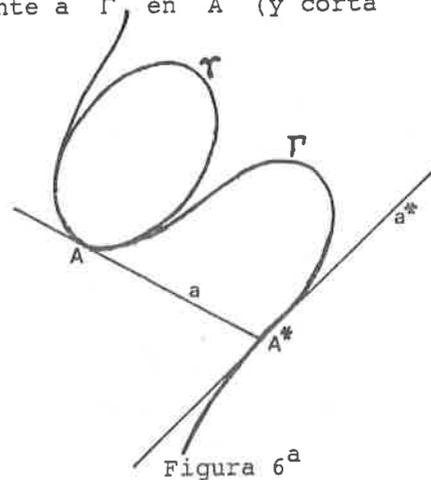


Figura 6^a

Podemos enunciar así el
Teorema 7^o: La condición necesaria y suficiente para que exista una cónica que tenga sus seis intersecciones con Γ confundidas en uno de sus puntos A es que el punto A^* sea de inflexión.

Debe observarse que si A es ya de inflexión y por tanto A^* coincide con A , la cónica que tiene 6 intersecciones confundidas es la recta tangente en A contada dos veces.

También es fácil deducir el
Teorema 8^o: Si I es punto de inflexión de Γ y A y B son puntos distintos de Γ tales que $A^* = B^* = I$, el punto C en que la recta AB vuelve a cortar a Γ cumple también $C^* = I$.

En efecto, siendo $a = 0$ la recta AA^* , $b = 0$ la BB^* y $c = 0$ la CC^* (Figura 7^a) y siendo $e = 0$ la recta que pasa por A , B y C y $t = 0$ la tangente en I , basta aplicar el Teorema 1^o a las tres cúbicas $\Gamma = 0$, $e^2t = 0$ y $abc = 0$; las dos primeras tienen las intersecciones A , B y C , dobles y la I triple. La primera y la tercera tienen las intersecciones A , B , C e I , dobles y la C^* ; en virtud del teorema 1^o, la novena, C^* , coincidirá también con I , como deseábamos probar.

Nótese que este teorema es aplicable tan sólo a las cúbicas sin punto doble. En las que lo tienen ordinario, que son de clase 4, hay un solo punto $A \neq I$

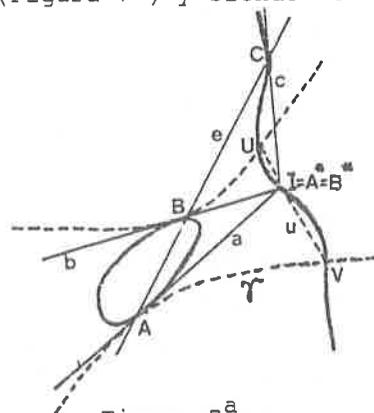


Figura 7^a

con $A^* = I$ y en las que poseen uno de retroceso, que son de clase 3, no hay tal punto A (téngase en cuenta que, entre las tangentes trazadas a Γ desde I , la t cuenta tres veces).

Consideremos ahora una cónica $\gamma = 0$ que sea tangente a Γ en A y en B (Figura 7^a); sean U y V los otros dos puntos de intersección, y sea $u = 0$ la recta UV que los une. Las cúbicas $\Gamma = 0$ y $\gamma c = 0$ se cortan en los puntos A , B y C , dobles y en los U , V e I . La cúbica $e^2u = 0$ corta a Γ en los ocho primeros de esos, por lo que pasará también por el noveno, I , lo que exige que U , V e I estén alineados.

Al ser e la polar de I respecto a la cónica γ , si E es la intersección de u con e , los puntos U y V serán conjugados armónicos respecto a I y E . Como para determinar la cónica γ , el punto U se puede elegir arbitrariamente en Γ , se obtiene en consecuencia (para las cúbicas sin punto doble), el siguiente

Teorema 9^o: Toda cúbica Γ con un punto de inflexión en I , se transforma en sí misma mediante una homología involutiva con centro en I y cuyo eje pasa por los puntos de tangencia (distintos de I) de las tangentes trazadas a Γ desde I .

Para las cúbicas con un punto doble D , el teorema es también válido, pero emplearemos otro tipo de demostración.

Si D es de retroceso, hay una única homología que deja invariante a Γ , con centro en su único punto de inflexión, I , y cuyo eje es la tangente de retroceso. Si la recta ID es $d = 0$, la tangente en I , $t = 0$, y la tangente de retroceso, $e = 0$, Γ pertenece al haz de cúbicas definido por $d^3 = 0$ y $e^2t = 0$, o sea $\Gamma \equiv \lambda d^3 + \mu e^2t$; un cambio de

coordenadas $z_0 = e$, $z_1 = t$, $z_2 = d$, deja la ecuación de Γ como $\lambda z_2^3 + \mu z_0^2 z_1 = 0$, que permanece invariante en la homología de ecuaciones: $Z_1 = -z_1$, $Z_2 = -z_2$, $Z_0 = z_0$.

Si D es doble ordinario, I una inflexión con tangente $t = 0$, A un punto tal que $A^* = I$, $e = 0$ la ecuación de AD y $a = 0$ la de AI y $d = 0$ la de DI, la demostración es análoga, con $\Gamma \equiv \lambda ad^2 + \mu e^2 t$ y poniendo $z_0 = e$, $z_1 = t$, $z_2 = a$, $d \equiv \alpha t + \beta a = \alpha z_1 + \beta z_2$, con lo que la ecuación queda:

$$\Gamma \equiv \lambda z_2 (\alpha z_1 + \beta z_2)^2 + \mu z_0^2 z_1 = 0$$

que permanece invariante en la homología $Z_1 = -z_1$, $Z_2 = -z_2$, $Z_0 = z_0$. El centro de la homología es la inflexión I y el eje es la recta DA. Como consecuencia, las tangentes en D son conjugadas armónicas respecto a las DA y DI.

Sean ahora I_1, I_2, I_3 tres puntos de inflexión de Γ y sean t_1, t_2, t_3 las tangentes a Γ en ellos. Habrá tres homologías involutivas que dejan invariante a Γ con centros en los citados puntos. Sean e_1, e_2, e_3 los ejes respectivos y T_1, T_2, T_3 los vértices del triángulo formado por las tres tangentes citadas (Figura 8^a). Llamaremos h_1, h_2, h_3 a estas tres homologías.

La homología h_1 debe transformar t_2 en t_3 , por lo que el eje e_1 será la recta que une T_1 con el conjugado armónico E_1 de I_1 res-

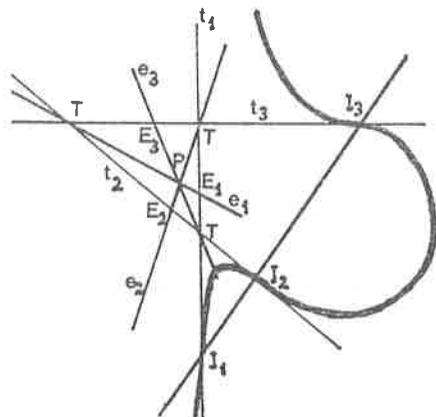


Figura 8^a

pecto a T_2 y T_3 . Conclusiones análogas se obtienen para las otras dos homologías. Al estar alineados I_1, I_2, I_3 , las rectas T_1E_1, T_2E_2, T_3E_3 , serán concurrentes (en el punto P, llamado "polo" de la recta $I_1I_2I_3$ "respecto al triángulo" $T_1T_2T_3$). Además, están alineados los puntos de las ternas $E_2E_3I_1, E_3E_1I_2$ y $E_1E_2I_3$. Queda así probado el

Teorema 10^o: Si I_1, I_2 e I_3 son tres puntos de inflexión alineados de Γ , las tres homologías que transforman Γ en sí misma, con centros en esos puntos, tienen sus ejes concurrentes en el polo de la recta $I_1I_2I_3$ respecto al triángulo formado por las tres tangentes a Γ en esos puntos de inflexión.

La proyectividad $h_3h_2h_1$, que resulta de aplicar sucesivamente las homologías h_1, h_2, h_3 , transforma Γ en sí misma y las tangentes t_1, t_2, t_3 , respectivamente en las t_2, t_1, t_3 , haciendo corresponder sus puntos de tangencia. El mismo efecto produce la homología h_2 , por lo que se trata de la misma proyectividad. tenemos así que $h_3h_2h_1 = h_2$ y como $h_1^{-1} = h_1, h_3h_2 = h_2h_1$. Resulta así el

Teorema 11^o: Las homologías h_1, h_2, h_3 , satisfacen a las relaciones $h_i h_j = h_j h_k$ (siendo i, j, k distintos).

Así (figura 9^a), si A es un punto de Γ , I_1A corta a Γ en B y I_2A la corta en C, las rectas I_2B y I_3C se cortan en un punto D de Γ .

Se pueden establecer otras correspondencias entre los puntos de Γ . Por ejemplo, si

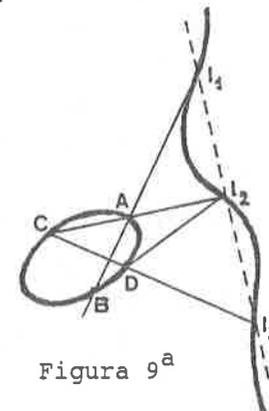


Figura 9^a

P es un punto cualquiera escogido en Γ , las rectas que pasan por P cortan de nuevo a Γ en dos puntos X, X' . Queda así establecida, para cada elección del punto P una correspondencia involutiva entre los puntos de Γ , que designaremos con f_P , poniendo $f_P(X) = X'$. Ya hemos visto que si P es una inflexión de Γ , f_P es la restricción a Γ de una homología del plano. Cuando se estudian propiedades métricas, hay otras elecciones de P para las que esta correspondencia tiene interesantes propiedades.

5. POLARIDAD EN LAS CUBICAS CON PUNTO DE RETROCESO

Si una cúbica Γ tiene un punto de retroceso, es de clase 3 y posee un único punto de inflexión. Llamaremos R al punto de retroceso, r a la tangente en él, I a su punto de inflexión e i a la tangente en I . Al ser Γ de clase 3, y teniendo en cuenta que los puntos de retroceso son duales de las tangentes de inflexión, podemos enunciar el

Teorema 12^o: Si Γ es una cúbica con punto de retroceso, una polaridad respecto a una cónica γ , transforma a Γ en una cúbica Γ' , también de clase 3. Los puntos de cada una se transforman en las tangentes a la otra. La cúbica Γ' tendrá un punto de retroceso que será el polo I' de la tangente de inflexión i de Γ ; la tangente en él será la polar i' del punto de inflexión I de Γ ; su punto de inflexión R' será el polo de la tangente de retroceso r de Γ y la tangente de inflexión r' será la polar del punto de retroceso R .

En el caso de que la cónica γ sea dos veces tangente a Γ , en los puntos U y V , la cúbica Γ' será también tangente a γ y a Γ en esos mismos puntos.

La última afirmación, que es casi trivial, tiene interés en un caso particular, al estudiar las propiedades métricas de algunas cúbicas.

6. PROPIEDADES AFINES Y METRICAS DE LAS CUBICAS

De los teoremas anteriores se deducen algunas propiedades de las cúbicas $\Gamma = 0$ del plano afín, con solo considerar que $x_0 = 0$ es la recta impropia o del infinito. Las tangentes en los puntos de intersección de Γ con esa recta impropia son las asíntotas de Γ , salvo que alguna de ellas sea la propia recta del infinito, en cuyo caso se dice que Γ tiene una rama parabolica. Si una asíntota corta a la cúbica en un punto propio, éste recibe el nombre de punto asíntotico.

Si el punto impropio de una asíntota es de inflexión (asíntota de inflexión), no hay en ella punto asíntotico. En virtud del teorema 6^o, si una cúbica tiene tres asíntotas y ninguna es de inflexión, los tres puntos asíntóticos están alineados; si sólo una es de inflexión, los dos puntos asíntóticos están sobre una paralela a la asíntota de inflexión. En virtud del teorema 5^o, si dos asíntotas son de inflexión, la tercera también lo es. Por el teorema 6^o, si una cúbica tiene tres asíntotas, la tangente en uno de sus puntos, A es paralela a una de ellas, y la tangente en otro, B es paralela a una segunda, la recta AB vuelve a cortar a la cúbica en un punto C cuya tangente es paralela a la tercera asíntota.

El teorema 9^o nos dice que si una cúbica tiene una asíntota de inflexión, es invariante en una simetría con la dirección de esa asíntota y con eje que corta a la cúbica en los puntos en los que la tangente es paralela a aquella y en los dobles, si los tiene. Si

dos asintotas de una cúbica, la cortan en uno de sus puntos de inflexión, I , la tercera asíntota también pasa por I , y la cúbica tiene centro de simetría en ese punto.

De los teoremas anteriores se deducen muchas propiedades métricas de las cúbicas $\Gamma = 0$ del plano euclídeo, con solo suponer que las coordenadas homogéneas x_0, x_1, x_2 son cartesianas rectangulares, o sea que, además de ser $x_0 = 0$ la recta impropia (del plano euclídeo ampliado), los puntos cíclicos sean los de coordenadas $(0, 1, i)$, $(0, 1, -i)$, es decir, que satisfagan a las ecuaciones $x_1^2 + x_2^2 = 0$ y $x_0 = 0$.

Son particularmente interesantes las propiedades de las llamadas *cúbicas circulares* que son las que pasan por los puntos cíclicos. A ellas dedicaremos un próximo artículo.

7. OBSERVACIONES

El brillante modo de razonar mostrado en este artículo, en el que abundan consideraciones sobre multiplicidades de intersecciones de curvas algebraicas, requiere una fundamentación rigurosa que hemos pasado por alto. En el fondo de todo él subyacen los teoremas de Bezout y de Noether. Es sabido que el primero establece que dadas dos curvas algebraicas planas del plano proyectivo complejo, de grados m y n , sin componentes comunes, la suma de las multiplicidades de todas sus intersecciones es exactamente mn . Pero la introducción rigurosa del concepto de multiplicidad de intersección es delicada y trabajosa, y el llegar a las conclusiones del teorema de Noether lo es más. Los libros elementales sobre Geometría Algebraica lo hacen en forma satisfactoria y en ellos suelen aparecer como

corolarios o ejercicios algunos de los teoremas que hemos expuesto en este artículo.

A pesar de las dificultades de dar bases rigurosas a la teoría aplicada, es notable la seguridad con que se razona en la forma que lo hemos hecho en lo que precede, alcanzando resultados cuya deducción por otros métodos sería muy penosa. En aquellos casos en que las intersecciones de las curvas o rectas consideradas son simples, el razonamiento no ofrece dificultad alguna. En los casos en que aparecen intersecciones múltiples, suele ayudar mucho el considerarlos como casos límites de otros variables con intersecciones simples; este modo de proceder llevó a muchos a hablar, desde luego que impropriamente, de "puntos infinitamente próximos". Supone ello echar mano de propiedades topológicas sencillas de las ecuaciones manejadas, en ayuda de las puramente algebraicas que corresponden a la naturaleza del problema estudiado.

Otros prefieren someter los casos de intersecciones múltiples a pequeñas "perturbaciones", es decir, imaginar modificaciones, tan pequeñas como se desee, de los coeficientes de las ecuaciones que deshagan las singularidades de esas intersecciones y razonar sobre el resultado.

BIBLIOGRAFIA

- P. Abellanas. Geometría Básica. Ed. Romo, Madrid.
William Fulton. Curvas Algebraicas. Ed. Reverté, S.A.
F. Severi. Trattato di Geometria Algebraica. (I) Bologna.

EVALUACION DE LA SIMPLICIDAD Y EXACTITUD DE DOS CONSTRUCCIONES DE CADENAS DE STEINER

E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano
Sección Deptal. de Álgebra
Univ. Complutense de Madrid
Santísima Trinidad, 37 MADRID-28010

El problema geométrico denominado *Alternativa de Steiner* es bien conocido: dadas dos circunferencias, α y β , tales que β sea interior a α , se trata de construir una cadena cíclica de circunferencias tangentes, que sean tangentes interiormente a α y tangentes exteriormente a β .

Como es sabido, este bello problema, o bien no tiene solución, o bien posee infinitas soluciones (de ahí su denominación de "*alternativa*") y está de actualidad con motivo de haber sido escogido como logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española.

En la solución habitual, los centros de las circunferencias de la cadena son vértices de una poligonal cerrada y convexa, pero, el prof. Fernández Biarge generalizó el problema, de modo que dicha poligonal también pueda ser estrellada, según puede verse en el núm. 30 de este boletín [Bia].

Todo ello nos indujo a desarrollar una simulación del problema, que presentamos como comunicación (junto con el prof. Biarge) en el III Encuentro de Geometría Computacional celebrado en la Univ. de Zaragoza del 1 al 3 de julio de 1992.

Posteriormente, hemos seguido trabajando en el problema, llegando a nuevos resultados, que resumimos en este artículo, cuyos objetivos son:

- a) describir un *método* original y directo de construcción de cadenas de Steiner, que no requiere reducir al caso de circunferencias concéntricas
- b) compararlo con la solución clásica, evaluando su simplicidad y exactitud con los coeficientes de Lemoine
- c) mostrar la implementación efectuada de estas construcciones geométricas

CADENAS DE STEINER. CONSTRUCCION CLASICA.

1. **Definición.**- Dadas dos circunferencias, α y β , tales que β sea interior a α , se denomina "n-cadena de Steiner" para α y β , a una sucesión de n circunferencias, $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, que verifiquen:

- a) γ_i es tangente interiormente a α y exteriormente a β ; $i=1,2,\dots,n$
- b) γ_{i+1} es tangente exteriormente a γ_i ; $i=1,2,\dots,n-1$
- c) γ_{i+1} es distinta de γ_{i-1} ; $i=2,\dots,n-1$

La n-cadena se dice "cerrada", si además se verifican:

- c') $\gamma_i \neq \gamma_j$, si $i \neq j$ ($i,j=1,2,\dots,n$)
- d) γ_n es tangente exteriormente a γ_1

donde obviamente la condición c') implica c).

El problema clásico de Steiner es el de construir una n-cadena cerrada. La dificultad de este problema es muy distinta, según que α y β , sean, o no, concéntricas. Si lo son (fig.1), entonces la existencia de solución sólo depende de α y β , y no de la posición de la circunferencia inicial γ_1 (ya que cualquier rotación alrededor del centro común de α y β , deja invariantes estas dos circunferencias). En consecuencia, o bien el problema no posee solución, o bien posee infinitas soluciones.

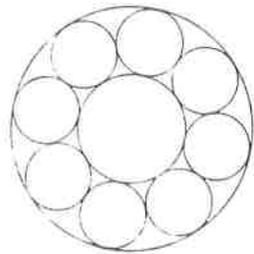


Figura 1

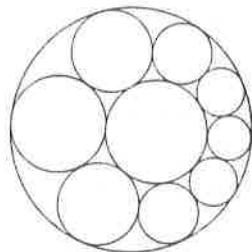


Figura 2

Si, por el contrario, α y β no son concéntricas entonces puede reducirse al caso anterior, mediante una inversión apropiada (fig.2). En efecto, siendo O y L los puntos límite del haz de circunferencias $H(\alpha, \beta)$, determinado por α y β , las circunferencias que pasan por O y L forman el haz, $\Omega(\alpha, \beta)$, de circunferencias ortogonales a las de $H(\alpha, \beta)$. Considerando

una inversión, I, de polo O, el inverso de $\Omega(\alpha, \beta)$ es el haz de rectas $I(\Omega(\alpha, \beta))$, que pasan por el punto I(L), y el inverso de $H(\alpha, \beta)$ es el haz de circunferencias, $I(H(\alpha, \beta))$, ortogonales a las rectas de $I(\Omega(\alpha, \beta))$. Por tanto, las circunferencias $I(\alpha)$ e $I(\beta)$ han de tener el mismo centro.

CONSTRUCCION DIRECTA

El objetivo de este apartado es describir un método directo (que creemos original) de construcción de cadenas de Steiner, que no precisa reducción al caso de circunferencias concéntricas.

2. **Lema.**- Sean α y β dos circunferencias de centros respectivos A y B, tales que β sea interior a α . El centro, F, de la homotecia de razón negativa (en la que β es imagen de α) coincide con A y B si α y β son concéntricas; si, por el contrario, α y β no son concéntricas, entonces F es el punto de intersección de la recta de centros AB con la recta determinada por dos puntos, V y W (fig.3), que verifiquen las tres condiciones:

- i) $V \in \alpha$ y $W \notin AB$
- ii) $W \in \beta$ y $BW \parallel AV$
- iii) V y W pertenecen a distinto semiplano respecto de AB

En ambos casos, el punto F está en el segmento \overline{AB} y es punto interior de β .

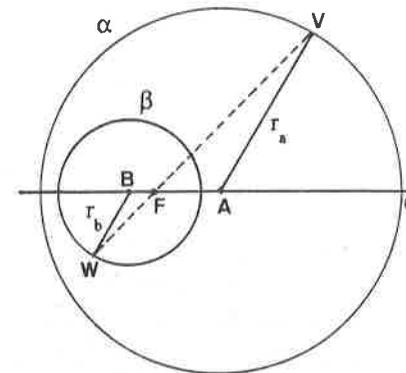


Figura 3

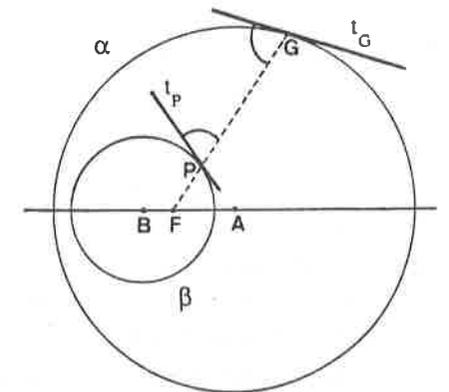


Figura 4

Demostración.- Nos limitaremos a probar que F es punto interior a β , en caso de ser $B \neq A$ (el resto del enunciado es bien conocido y fácil de probar). En efecto, por ser FAV y FBW triángulos semejantes, se tiene: $\overline{BF} = (\overline{FA}/r_a)r_b$, siendo r_a y r_b los radios de α y β . Pero $\overline{FA} < \overline{BA}$ (por ser F punto interior de \overline{AB}) y $\overline{BA} < r_a$ (por ser β interior a α), luego $\overline{FA} < r_a$ y en consecuencia $\overline{FA}/r_a < 1$, lo que implica: $\overline{BF} < r_b$, luego F es punto interior a β .

3. Lema.- Respecto de la inversión, I^* , de polo F y potencia positiva en que α y β son homólogas, dos puntos, $G \in \alpha$ y $P \in \beta$, son inversos, syss están en la misma semirrecta de origen F. En caso afirmativo, la recta PG forma ángulos iguales con las rectas, t_G y t_P , tangentes a α y β en G y P (fig.4).

Demostración.- Sigue de ser I^* una transformación isogonal.

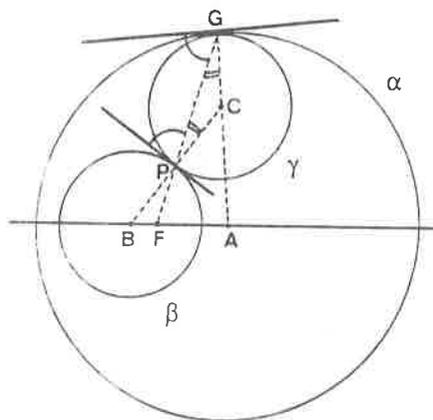


Figura 5

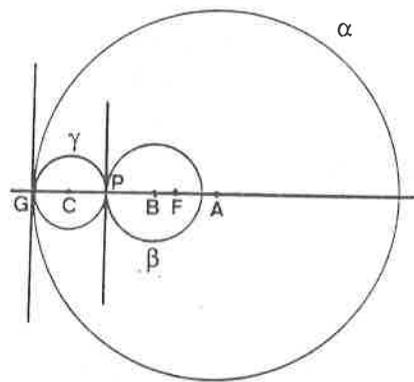


Figura 6

4. Proposición.- Fijado un punto $G \in \alpha$, existe una única circunferencia, γ , tangente a α en G y tangente exteriormente a β . El punto común, P, de γ y β está en la semirrecta F_G (de origen F y que pasa por G). Si G no está en la recta de centros AB (fig.5), entonces el centro, C, de γ es el punto de intersección de las rectas AG y BP; y si $G \in AB$ (fig.6), entonces C es el punto medio del segmento \overline{PG} .

Demostración.- En el haz de circunferencias tangentes a la recta t_G en el punto G, es claro que existe una y sólo una, γ , tangente exteriormente a β . Por otra parte, de acuerdo con el lema precedente, $I^*(G)$ será el punto $P \in \beta$ que está en la semirrecta F_G y además la recta FG forma ángulos iguales con las respectivas tangentes t_G y t_P .

Si G no está en la recta AB (caso de la fig.5), entonces la recta GP forma ángulos iguales con las rectas AG y BP. Por ser estos dos ángulos iguales al ángulo agudo BPF, las rectas AG y BP son secantes. Su punto común, C, permite considerar el triángulo PGC, que es isósceles, siendo pues iguales los lados \overline{CP} y \overline{CG} . En consecuencia, la circunferencia de centro C y que pasa por G también pasa por P y es tangente a α y a β . Luego esta es (en el caso $G \notin AB$) la circunferencia γ , cuya existencia se indicó anteriormente.

Si, por el contrario, G está en la recta AB (caso de la fig.6), entonces los ángulos de la recta GP con las tangentes t_G y t_P son ambos rectos, luego la circunferencia cuyo centro es el punto medio, C, de \overline{PG} es tangente a α y a β . Luego esta es (en el caso $G \in AB$) la circunferencia γ . ■

En el resultado anterior, pueden permutarse los papeles de los puntos inversos G y P, según se comprueba fácilmente.

5. Corolario.- Sea T el punto de contacto de la circunferencia γ (citada en la proposición anterior) con una de las dos rectas tangentes a γ trazadas desde el punto F. El punto T pertenece a la circunferencia, Π , de puntos invariantes en la inversión I^* , siendo además Π ortogonal a γ (fig.7).

Demostración.- La potencia de la inversión I^* coincide con la potencia geométrica de F respecto de γ , luego $\overline{FP} \cdot \overline{FG} = \overline{FT}^2$, y en consecuencia T es doble en I^* . Al ser FT tangente a γ , es recto el ángulo FTC, luego γ y Π son circunferencias ortogonales.

6. Proposición.- Sean γ una circunferencia tangente a α y a β (fig.8), C su centro, T un punto de intersección de γ con la circunferencia Π (de puntos invariantes en I^*) y S el punto de la semirrecta T_C tal que \overline{ST} sea el radio de β . Entonces la mediatriz de \overline{SB} es secante con la recta CT y su punto de intersección, D, es centro de una circunferencia, δ , tangente exteriormente a γ en T y tangente interiormente a α y exteriormente a β .

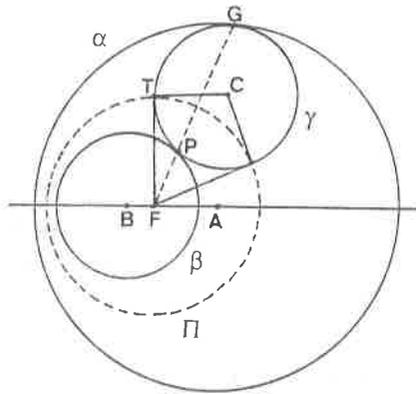


Figura 7

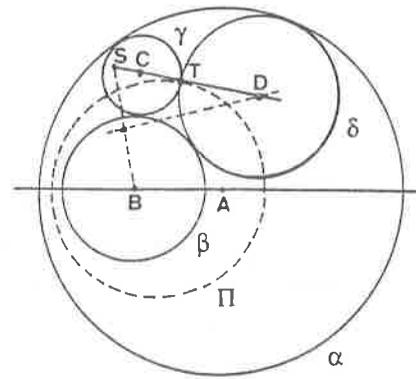


Figura 8

Demostración.- Por ser γ y Π ortogonales, son perpendiculares las rectas CT y FT , luego la distancia de S a la recta FT es: $\text{dist}(S, FT) = \overline{ST} = r_b$, pero, de acuerdo con el lema 1: $\text{dist}(B, FT) \leq \overline{BF} < r_b$, luego las rectas BS y FT son secantes. En consecuencia, sus respectivas perpendiculares, CT y la mediatriz de \overline{BS} también son secantes. El punto de intersección, D , de estas dos rectas está en la recta CT , la cual es exterior a β (por ser tangente a Π), luego D es exterior a β . Por tanto \overline{DB} es mayor que el radio, r_b , de β , y en consecuencia $\overline{DS} = \overline{DB} > r_b$, luego $\overline{DS} > \overline{TS} = r_b$. De esta desigualdad se sigue que T está entre D y C . En consecuencia, la circunferencia, δ , de centro D y que pasa por T es tangente exteriormente a γ en el punto T . Por otra parte, δ es tangente a β , ya que $\overline{DB} = \overline{DS} = \overline{DT} + \overline{TS}$, que es la suma de los radios de δ y β . Finalmente, por ser FT la recta tangente común a γ y δ , es δ ortogonal a Π , y en consecuencia $I^*(\delta) = \delta$. lo que, por ser I^* transformación isogonal, implica que δ sea tangente a $I^*(\beta) = \alpha$. ■

De todo lo indicado anteriormente, se desprende el siguiente:

7. **Método de construcción directa de cadenas de Steiner.**- Siendo α y β dos circunferencias de centros A y B , tales que β sea interior a α , para construir una n -cadena de Steiner para α y β , basta efectuar lo siguiente:

i) determinar el centro de homotecia negativa, F , de α y β , siguiendo el lema 2 (fig.3)

ii) elegir el punto de contacto, $G \in \alpha$ (o $P \in \beta$), de la primera circunferencia de la cadena, γ_1 , con α (respect. con β) y determinar γ_1 , siguiendo la proposición 4 (figs. 5 ó 6)

iii) trazar la circunferencia, Π , de centro F y ortogonal a γ_1 , siguiendo el corolario 5 (fig.7)

iv) elegir un sentido de recorrido (alrededor de β) para la poligonal cuyos vértices son los centros de las circunferencias de la n -cadena y trazar las sucesivas circunferencias γ_i ($i > 1$), siguiendo la proposición 6 (fig.8)

8. **Nota.**- La parte i) de la construcción anterior se abrevia algo tomando equilátero el triángulo ACV (fig.3), como se sugiere en [Lem].

SIMPLICIDAD Y EXACTITUD DE AMBAS CONSTRUCCIONES

Emile Lemoine elaboró una teoría general de la simplicidad y exactitud del trazado de construcciones geométricas [Lem], que vamos a aplicar a comparar las dos construcciones, la clásica y nuestra construcción directa.

Siguiendo a Lemoine, comencemos enumerando las operaciones elementales admisibles con regla y compás (desde el punto de vista del trazado gráfico):

- R_1) hacer pasar el borde de la regla por un punto dado
- R_2) trazar la línea que sigue el borde de la regla
- C_1) colocar una punta del compás en un punto dado
- C_2) colocar una punta del compás en un punto indeterminado de una recta previamente trazada
- C_3) trazar una circunferencia

Puesto que el trazado gráfico de una construcción geométrica es una sucesión finita de estas cinco operaciones elementales admisibles, a cada construcción, K , podemos asignarle un complejo, denotado $c(K)$, de la forma

$$c(K) = m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3$$

donde los números enteros m_1, m_2, n_1, n_2 y n_3 indican el número de veces que se realiza cada una de las cinco operaciones elementales a lo largo del trazado gráfico de la construcción K .

Es claro que una construcción será tanto "más simple", cuanto menor sea el número total de operaciones elementales admisibles a realizar, al efectuar el trazado gráfico. Pero la fidelidad del trazado dependerá de la precisión con que se hayan efectuado las operaciones elementales R_1 , C_1 y C_2 , luego el trazado probablemente será "más exacto", cuanto menor sea el número de veces que hayan de efectuarse estas tres operaciones elementales. Ello justifica:

9. Definición (Lemoine).- Siendo K una construcción de complejo asociado

$$c(K) = m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3$$

se llama "coeficiente de simplicidad", o más brevemente "simplicidad", de K al número natural

$$s(K) = m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$$

y se llama "coeficiente de exactitud", o más brevemente "exactitud", de K al número natural

$$e(K) = m_1 + n_1 + n_2$$

He aquí la lista de las construcciones auxiliares que van a ser utilizadas en una u otra de las dos construcciones de cadenas de Steiner consideradas anteriormente, con indicación de sus correspondientes complejos asociados:

Construcción auxiliar	Complejo asociado
Trazar una recta cualquiera, que pase por un punto dado	$1R_1 + 1R_2$
Trazar una recta que pase por dos puntos dados	$2R_1 + 1R_2$
Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios	$1C_3$
Trazar una circunferencia de centro dado y que pase por un punto dado	$2C_1 + 1C_3$
Trazar una circunferencia de centro dado y radio igual a un segmento dado (ninguno de cuyos extremos sea el centro)	$3C_1 + 1C_3$
Transportar un segmento dado sobre una semirrecta, a partir del origen de esta	$3C_1 + 1C_3$

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCIÓN (CENTROS)

D. ...
como ... del Centro ...
domiciliado en ...
ciudad ... Codº Post. ... Telfº...

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.

Con esta fecha autorizo al Banco ...
Sucursal o Agencia ... en ...
Direccion de la misma ...
para que cargue en nuestra cuenta ... nº ...
abierta al nombre: ...
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93
y siguientes. Fecha ... de ... de 1991

Fdo.:

La cuota anual esta actualmente establecida en 4.500 pesetas
(incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores
de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... BANCO: ...
Sucursal o Agencia... en ...
Direccion de esta ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... nº ...
los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de
Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ...
Nombre de la cuenta...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCIÓN

D. ... Telef.(...)
Direccion particular ...
Ciudad ... Codº Postal ...
Centro de trabajo ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ...
Sucursal o Agencia ... en ...
Direccion de la misma ...
para que cargue en mi cuenta ... nº ...
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93
y siguientes. Fecha ... de ... de 1992

Fdo.:

La cuota anual esta actualmente establecida en 4.500 pesetas
(incluida la cuota federativa de 1.500 pta).

Remítanse ambas partes a *Sociedad "Puig Adam" de Profesores
de Matemáticas*. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... BANCO: ...
Sucursal o Agencia... en ...
Direccion de ésta ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... nº ...
los recibos de mi cuota anual de la *Sociedad "Puig Adam" de
Profesores de Matemáticas*, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ...
Direccion ...

Transportar un ángulo convexo dado a partir de una semirrecta dada (como lado) y contenido en uno de los semiplanos (de lo dos que determina la recta que contiene a dicha semirrecta)	$2R_1+1R_2+5C_1+3C_3$
Trazar una circunf. que pase por tres puntos	$4R_1+2R_2+5C_1+4C_3$
Trazar la mediatriz de un segmento dado	$2R_1+1R_2+2C_1+2C_3$
Trazar la perpendicular a una recta por un punto	$2R_1+1R_2+3C_1+3C_3$
Determinar los puntos de contacto de las tangentes a una circunferencia dada, trazadas desde un punto exterior dado (*)	$1R_1+1R_2+7C_1+3C_3$
Determinar el centro de homotecia de razón negativa de dos circunferencias dadas (**)	$4R_1+2R_2+4C_1+2C_3$
Determinar la inversa de una circunferencia, que no pase por el polo de inversión (***)	$12R_1+6R_2+14C_1+9C_3$

El complejo (*), asociado a la construcción auxiliar que determina los puntos de contacto de las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, está calculado sobre una construcción debida a Lemoine (algo más simple que la usual, aunque menos cómoda), que se describe a continuación: dadas la circunferencia γ de centro O y el punto exterior H, trazar

- i) una recta cualquiera que pase por O, que cortará a γ en dos puntos, que denotamos M y N (complejo: $1R_1+1R_2$)
- ii) dos circunferencias de radio \overline{HO} y centros respectivos M y N, para determinar uno de sus dos puntos de intersección, que denotamos E (complejo: $4C_1+2C_3$)
- iii) la circunferencia de centro H y radio \overline{EO} , que cortará en los dos puntos de tangencia buscados (complejo: $3C_1+1C_3$)

El complejo (**), asociado a la construcción auxiliar que determina el centro de homotecia de razón negativa de dos circunferencias, también está calculado teniendo en cuenta la abreviación indicada en la nota 8.

Finalmente, el complejo (***), asociado a la construcción auxiliar que determina la inversa de una circunferencia que no pasa por el polo de

inversión, se ha calculado determinando los inversos de ciertos puntos por "antiparalelismo", lo que resulta ser "menos costoso", en cuanto a simplicidad, que su determinación por la condición de ser "concíclicos", según puede comprobarse.

10. **Proposición.**- A la construcción directa de una n-cadena de Steiner, construcción que denotamos **Steiner** D_n , se asocia el complejo:

$$c(\text{Steiner } D_n) = (10R_1 + 6R_2 + 15C_1 + 7C_3) + (n-1)(4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 4C_3)$$

siendo su coeficiente de simplicidad

$$s(\text{Steiner } D_n) = 17n + 21$$

y su coeficiente de exactitud

$$e(\text{Steiner } D_n) = 11n + 14$$

Demostración.- Dadas las circunferencias α y β (β interior a α), de centros A y B, las construcciones auxiliares a realizar, siguiendo el proceso de construcción descrito en 7, se indican en el siguiente cuadro:

Construcción auxiliar	Complejo	Notación
Determinar el centro de homotecia negativa de α y β	$4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_3$	Sea F dicho centro de homotecia
Trazar una semirrecta arbitraria de origen F	$1R_1 + 1R_2$ (*)	Sean G y P los puntos en que tal semirrecta corta a α y β
Trazar las rectas AG y BP	$2(2R_1 + 1R_2)$ (*)	Sea $C_1 = AG \cap BP$
Trazar la circunf. de centro C, que pasa por G	$2C_1 + 1C_3$	Notaremos a esa circunf. por γ_1
Determinar los puntos de contacto de las rectas tangentes a γ_1 desde F	$1R_1 + 1R_2 + 7C_1 + 3C_3$	De entre esos dos puntos, sea T_1 aquel tal que el ángulo convexo CFT_1 sea del sentido elegido
Trazar la circunf. de centro F que pasa por T_1	$2C_1 + 1C_3$	Sea Π esa circunf. (de puntos invariantes)

Trazar la recta C_1T_1	$2R_1 + 1R_2$	Sea σ_1 la semirrecta de origen T_1 que pasa por C_1
Transportar el radio de β sobre la semirrecta σ_1	$3C_1 + 1C_3$	Sea S el otro extremo del segmento transportado ($\overline{T_1S}$ = radio de β)
Trazar la mediatriz de \overline{SB}	$2R_1 + 1R_2 + 2C_1 + 2C_3$	Sea C_2 el punto en que la mediatriz corta a C_1T_1
Trazar la circunferencia de centro C_2 y que pasa por el punto T_1	$2C_1 + 1C_3$	A esta circunf. la notamos γ_2 , y T_2 al otro punto de intersección de C_1T_1 y γ_2

Reiterando los cuatro últimos pasos (desde la línea discontinua en adelante), se van obteniendo las sucesivas circunferencias de la cadena (γ_3 a partir de γ_2 y T_2 , γ_4 a partir de γ_3 y T_3 ,...), de modo que para una cadena de n circunferencias habrán de sumarse los seis complejos que preceden a la línea discontinua de la tabla anterior a n-1 veces la suma de los cuatro complejos que siguen a dicha línea discontinua, obteniéndose así el valor indicado en el enunciado de la proposición para $c(\text{Steiner } D_n)$. A partir de este complejo, se obtienen los coeficientes de simplicidad y exactitud, de acuerdo con la definición 9.

11. **Nota.**- Si la semirrecta de origen F, considerada en el segundo paso de la tabla anterior, estuviera contenida en la recta AB, entonces los pasos segundo y tercero de dicha tabla habrían de sustituirse por la determinación del punto medio, C_1 , de G y P, lo que supone un costo de $2R_1 + 1R_2 + 2C_1 + 2C_3$ y, por tanto, un coeficiente de simplicidad: $2+1+2+2=7$, que es menor que el coeficiente de simplicidad que correspondería a la suma de los complejos de los pasos segundo y tercero (señalados en la tabla con un asterisco): $1+1+2(2+1)=8$. Ello asegura que este caso singular no suponga mayor coeficiente de simplicidad.

12. **Proposición.**- A la construcción clásica de una n-cadena de Steiner, construcción que denotamos **Steiner** C_n , se asocia el complejo:

$$c(\text{Steiner } C_n) = (22R_1 + 13R_2 + 40C_1 + 25C_3) + n(12R_1 + 6R_2 + 19C_1 + 11C_3)$$

siendo su coeficiente de simplicidad

$$s(\text{Steiner } C_n) = 100n + 48$$

y su coeficiente de exactitud

$$e(\text{Steiner } C_n) = 62n + 31$$

Demostración.- Dadas las circunferencias α y β (β interior a α , pero no concéntricas), de centros A y B, las construcciones auxiliares a realizar, se indican en el siguiente cuadro:

Construcción auxiliar	Complejo	Notación
Trazar la recta que pasa por los centros de α y β	$2R_1 + 1R_2$	Sea AB esa recta
Trazar una circunferencia secante con α y β	$1C_3$	Sea ξ esta circunferencia
Trazar la rectas que pasa por los puntos de inters. de ξ y α , y la que pasa por los puntos de inters. de ξ y β	$2(2R_1 + 1R_2)$	Sea E el punto de inters. de esas dos rectas
Trazar la perpendicular a AB por el punto E	$2R_1 + 1R_2 + 3C_1 + 3C_3$	Sea M el punto de intersección de esa perpendicular con AB
Determinar los puntos de contacto de las rectas tangentes a α desde M	$1R_1 + 1R_2 + 7C_1 + 3C_3$	Sea T uno de esos dos puntos de tangencia
Trazar la circunferencia de centro M y que pasa por el punto T	$2C_1 + 1C_3$	Sean O y L los puntos en que esta circunferencia corta a la recta AB
Trazar desde el punto O una semirrecta tangente a α y otra a β (ambas en el mismo semiplano respecto de la recta AB)	$2(R_1 + R_2 + 7C_1 + 3C_3) + 2(2R_1 + 1R_2)$	Sean O_α y O_β esas dos semirrectas

Trazar desde el punto M semirrectas perpendic. a las semirrectas O_α y O_β	$2(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$	Sean S_α y S_β esas dos semirrectas y sean $A^* = S_\alpha \cap O_\alpha$ y $B^* = S_\beta \cap O_\beta$
Trazar las circunf. de centro M que pasan por A^* y B^* respectivamente	$2(2C_1 + 1C_3)$	Sean α' y β' esas dos circunf. y sean A'' y B'' los puntos de intersec. de AB con α' y β' tales que $M \in \overline{A''B''}$
Determinar el punto medio de $A''B''$	$2R_1 + 1R_2 + 2C_1 + 2C_3$	Sea H este punto medio
Trazar la circunf. de centro M que pase por H	$2C_1 + 1C_3$	Sea μ esta circunferencia
Trazar una semirrecta cualquiera de origen M	$1R_1 + 1R_2$	El punto común con μ de esa semirrecta es T_1

Trazar la circunf. de centro T_1 y radio $\overline{HA''}$, para determinar los puntos en que corta a μ	$3C_1 + 1C_3$	De entre esos dos puntos intersec., sea C_1 aquel tal que el ángulo convexo $\overline{T_1MC_1}$ sea del sentido elegido para la cadena
Trazar la circunferencia de centro C_1 y que pasa por el punto T_1	$2C_1 + 1C_3$	Sea γ_1 esta circunf. y sea T_{i+1} su otro punto común con μ (distinto del T_1)
Determinar la circunf. imagen de γ_1 , en la inversión de polo O en que M y L son homólogos	$12R_1 + 6R_2 + 14C_1 + 9C_3$	Sea γ'_1 la inversa de γ_1

Reiterando los tres últimos pasos (desde la línea discontinua en adelante), se van obteniendo las sucesivas circunferencias (γ_2 y su inversa γ'_2 , γ_3 y su inversa γ'_3 ,...), de modo que, para una cadena de n circunferencias, habrán de sumarse los doce complejos que preceden a la línea discontinua de la tabla anterior, a n veces la suma de los tres complejos que siguen a dicha línea discontinua, obteniéndose así el valor indicado en el enunciado

de la proposición para $c(\text{Steiner } C_n)$. A partir de este complejo, se obtienen los coeficientes de simplicidad y exactitud, de acuerdo con la definición 9.

13. Nota.- Si la potencia de inversión se eligiera de modo que α fuera invariante, entonces sería $\alpha'=\alpha$, lo que implicaría el ahorro de las siguientes construcciones auxiliares:

Construcción auxiliar	Complejo
Semirrecta O_α	$(R_1+R_2+7C_1+3C_3)+(2R_1+R_2)$
Semirrecta S_α	$2R_1+1R_2+3C_1+3C_3$
Circunferencia α'	$2C_1+1C_3$

siendo la suma de estos complejos:

$$5R_1+3R_2+12C_1+7C_3 (*)$$

con lo cual la construcción simplificada así obtenida, que denotamos $\text{Steiner } C'_n$, se asociaría el complejo resultante de restar (*) al complejo obtenido en 12, es decir,

$$c(\text{Steiner } C'_n) = (17R_1+10R_2+28C_1+18C_3) + n(12R_1+6R_2+19C_1+11C_3)$$

siendo su coeficiente de simplicidad

$$s(\text{Steiner } C'_n) = 48n + 73$$

y su coeficiente de exactitud

$$e(\text{Steiner } C'_n) = 31n + 45$$

Observemos que, con esta potencia de inversión, el centro de β' es el mismo centro, A, de $\alpha'=\alpha$ y que en la determinación de las circunferencias γ'_i , inversas de las γ_i , los puntos M y L han de sustituirse, por ejemplo, por dos puntos inversos pertenecientes a β y β' situados en la recta AB.

Finalmente, observemos que aunque los coeficientes de simplicidad y exactitud de esta construcción simplificada sean ventajosos frente a los de la construcción clásica, calculados en 12, esta construcción simplificada es, en la práctica, más incómoda que aquella, debido a la superposición parcial de las circunferencias γ_i y γ'_i .

14. Conclusión.- La simplicidad y exactitud de nuestra construcción directa ($\text{Steiner } D_n$) es muy ventajosa frente a las construcciones $\text{Steiner } C_n$ y $\text{Steiner } C'_n$. Sin embargo, la obtención de una demostración cómoda del dilema de "alternativa" (dadas dos circunferencias, α y β , una interior a la otra, o bien no existe para ellas una cadena cerrada de Steiner, o bien existen infinitas), requiere acudir a la construcción $\text{Steiner } C_n$ o a la $\text{Steiner } C'_n$.

IMPLEMENTACION

Hemos implantado las construcciones anteriores en Turbo Pascal 6.0, sobre nuestra unidad gráfica Turtgeom [R-R2]. El programa elaborado ofrece cuatro posibles tipos de construcciones:

- 1) cadenas de Steiner (método clásico)
- 2) n-cadenas cerradas de un sólo ciclo
- 3) n-cadenas cerradas de varios ciclos
- 4) método directo de construcción de n-cadenas

pidiendo como datos:

- razón de radios: $k = r_b/r_a$ (caso de tipos de construcción 1 y 4)
- excentricidad: $\epsilon = \overline{AB}/r_a$ (en todos los tipos de construcción)
- número n, de circunferencias (tipos de construcción 2,3,4)
- número v, de ciclos (caso de tipo de construcción 3)
- posición del punto G, mediante la medida del ángulo AFG (tipo 4)

y devolviendo:

- representación de las circunferencias α y β
- representación de las circunferencias γ_i (una a una, o de una vez)
- aviso de "éxito" o "fracaso" en el problema clásico de Steiner

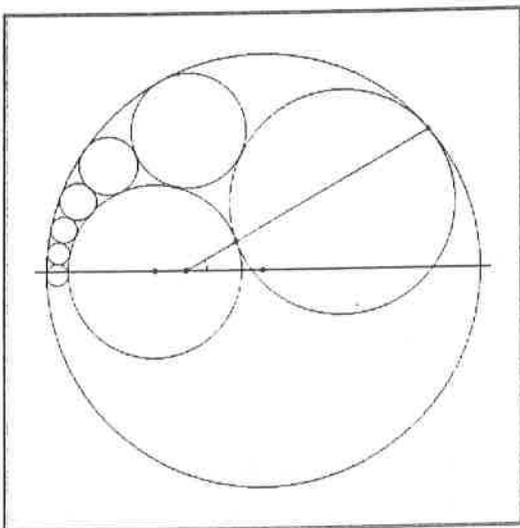
ofreciendo como opciones:

- visualizar paso a paso la construcción clásica
- visualizar paso a paso la construcción directa
- visualizar otras propiedades de las cadenas de Steiner

Terminamos mostrando unos ejemplos de ejecución de algunos de los tipos de construcción y opciones anteriormente indicados.

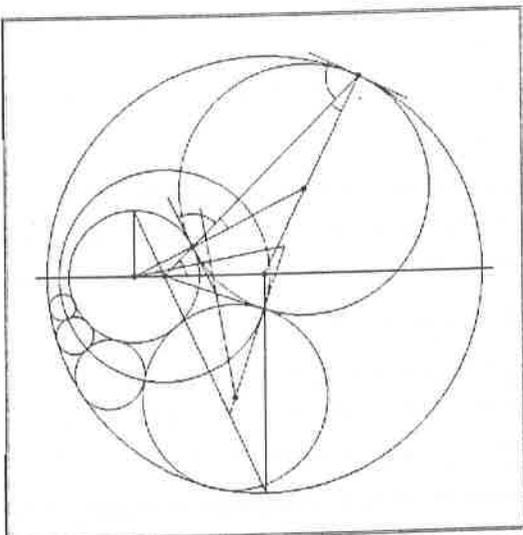
ALTERNATIVA STEINER
 Posibilidades:
 1-cadena de Steiner
 2-cadena cerrada
 3-varios ciclos
 4-otro método

¿Opción núm.: 4
 R = radio mayor
 r = radio menor
 razón r/R=0.40
 D = dist centros
 excentr D/R=0.50
 circunf iniciales
 centros de circ
 recta de centros
 Paso a paso(s/n):n
 polo inversión
 Inclin.inicial:30
 puntos tangencia
 1ª circunf
 sentido(1,-1): 1
 Núm. circunf: 7
 ¿Una a una(s/n):s



ALTERNATIVA STEINER
 Posibilidades:
 1-cadena de Steiner
 2-cadena cerrada
 3-varios ciclos
 4-otro método

prolongándolo...
 ángulos iguales
 triáng isósceles
 centro 1ª circunf
 1ª circunf
 sentido(1,-1): -1
 Núm. circunf: 5
 tang a 1ª circ
 circ puntos dobles
 tang. en ese punto
 prolongar...
 long. radio menor
 unir con centro
 de circ. menor
 su mediatriz
 centro 2ª circ
 2ª circ
 ¿Repetir(s/n):



BIBLIOGRAFIA

- [Ber] Berger: *Geometry*; Springer-Verlag, 1987.
- [Bia] Fernández Biarge: *En torno al logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española*; Bol. de la Soc. Puig Adam, núm. 30 (págs. 23-30), 1992.
- [B-R-R] Fernandez Biarge - Roanes Macías - Roanes Lozano: *Simulación del Problema Geométrico "Alternativa de Steiner"*; III Encuentro de Geometría Computacional. Univ. de Zaragoza, 1-3 julio 1992.
- [Lem] Lemoine: *Théorie générale de la Simplicité et de l'Exactitude dans les constructions géométriques*; Nouvelles Annales Mathematiques (págs. 454-462) 1892.
- [Ogi] Ogilvy: *Excursions in Geometry*; Dover, 1969.
- [R-R1] E. Roanes Macías - E. Roanes Lozano: *Simulación informática de la transformación geométrica "Inversión"*; Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad. Rectorado de la Univ.Politécnica de Madrid, 1992
- [R-R2] Roanes Macías - Roanes Lozano: *Desarrollo de una implementación mejorada y flexible de la "Turtle Geometry"*; III Encuentro de Geometría Computacional. Univ. de Zaragoza, 1-3 julio 1992.
- [Var] Varios: *Manuales de Turbo-Pascal 6.0*; Borland, 1991.

MOSAICOS Y OTROS ENTRETENIMIENTOS EN CLASE DE MATEMÁTICAS

Por Juan Bosco Romero Márquez
Catedrático del I.B. "Isabel de Castilla"
Prof. Asociado de la Univ. de Salamanca.
Deptº de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales.

1.- Un día cualquiera, en la clase de matemáticas, en el incógnito y desvalido primero de BUP.

Los alumnos como siempre, inquietos, algo desconcertados, porque no saben como se les va a dar la clase de matemáticas en ese día. Tienen, casi todos, una gran prevención contra la asignatura y el profesor, debida a experiencias pasadas, muchas veces negativas. Piensan que las matemáticas son aburridas, ininteligibles, difíciles, abstractas, pasivas, tediosas, sin utilidad para la vida cotidiana. En fin, que los alumnos creen que la matemática no es una asignatura normal en su enseñanza y aprendizaje, porque les cuesta un enorme trabajo aprenderla, entenderla y asimilarla. Y esta tendencia generalizada de desánimo y de cierre hacia la matemática y la ciencia hay que romperla por parte de los educadores, con nuevas o antiguas ideas llenas de inspiración, imaginación y creación en la función docente.

¿Quién tiene la culpa del fracaso escolar masivo que se da en esta disciplina en la enseñanza elemental?

Las estructuras educativas, que la mayoría de las veces siguen la ley de la inercia.

Los profesores, que nos dejamos llevar por este caminar, sin querer dejar huella perenne de nuestra vocación docente; no sabiendo entusiasmar a los alumnos con nuestra materia.

Los alumnos, quizás mínima culpa, porque se les enseña más a obedecer por el miedo, que a aprender con respeto hacia el profesor.

Hay que intentar buscar la luz y nuevos horizontes, teniendo como brújula la libertad, que haga que el acto de enseñar, aprender y educar en el aula, sea iniciador de una nueva enseñanza y educación en todas las escuelas e institutos de nuestro país. Por eso, hoy revivimos en el aula un taller de matemáticas, con una metodología activa de participación plena, por parte de mis alumnos de 1º de BUP y una actividad divertida, entretenida y creadora: " Taller de construcción y coloración de mosaicos" como pretexto para el descubrimiento de las estructuras geométricas y de belleza que subyacen en ellos. Un viaje

lúdico al mundo de la geometría y sus transformaciones: el orden, la simetría, el giro, la traslación, la semejanza, etc..

El taller de mosaicos se efectuaba una vez por semana en el aula de dibujo, durante casi un mes. Los alumnos completaban sus trabajos en sus casas.

Yo me lo pasé muy bien, haciendo mosaicos, entre otras cosas sobre geometría, en la alta y verde montaña cántabra sobre un fondo azul infinito que la acariciaba, en las primeras jornadas sectoriales sobre matemáticas, vividas, según se nos dijo, por los profesores de vanguardia de EGB y Medias y organizadas por el Ministerio. Espero, deseo y anhelo que mis alumnos también lo pasen bien y sean felices descubriendo parte de la geometría, con todas las preguntas y respuestas que se les susciten sobre ella con relación a sus mosaicos.

NOTAS.- Círculos y polígonos son las entidades primarias en secciones cruzadas en dos dimensiones de estructuras naturales.

Un círculo se define como el lugar geométrico de puntos en un plano, que tienen la propiedad de equidistar de un punto fijo de ese plano llamado centro.

Un polígono es una figura plana acotada por aristas y vértices. El polígono es simple cuando sus aristas pueden ser deformadas continuamente en un círculo sin cambiar en él sus propiedades topológicas. Un polígono puede ser cóncavo o convexo: cóncavo si, en al menos un vértice, el ángulo β es $> \pi$; convexo cuando β es $< \pi$. Cuando cada β es congruente el polígono es equilátero; cuando cada arista es congruente el polígono es equilátero. Si ambas condiciones, equiláteros y equiángulos, se verifican, el polígono es regular, y él tiene el símbolo $\{p\}$. La suma de los ángulos de los vértices de un polígono es $\pi(p-2)$. El ángulo en el vértice, β , de un polígono regular es $\pi(p-2)/p$ y su ángulo central, A , es $2\pi/p$.

TESELACIONES PLANAS Y REDES

Una teselación es un ensamblaje de polígonos que cubren el plano sin solaparse y sin intersección.

Consideremos las condiciones límite siguientes:

- (1) Todos los polígonos en una teselación son congruentes;
- (2) Todos los polígonos en una teselación son regulares;
- (3) Todos los vértices en una teselación son congruentes (es decir, todos los vértices son n-conexos y hacen una red n-conexa).

Todas las teselaciones regulares se escriben con los símbolos de Schläfli $\{p,q\}$ significa: p-gonos, q en un vértice).

Una condición necesaria y suficiente para que exista una teselación de polígonos regulares congruentes es que la suma de los ángulos en cada vértice deberá ser un entero submúltiplo de 2π . Los únicos polígonos que satisfacen estas condiciones son $\{3\}$, $\{4\}$ y $\{6\}$. Y por ello no es posible empaquetar más que seis polígonos regulares en un vértice en el plano, teniendo la acotación estricta $2 < p < 7$.

2.- Los mosaicos son unas estructuras geométricas que ponen de manifiesto el orden y la regularidad. la esencia geométrica que subyace en el mosaico es la repetición de un modelo o celda, mediante algún tipo de movimiento geométrico: traslación, semejanza, giro, etc..

Se pueden construir muchos modelos de mosaicos, tantos como su creador quiera y se imagine. El color les da belleza, varios significados e interpretaciones y visiones distintas. En él se resume la personalidad psicológica y pedagógica de su creador.

El círculo (figura perfectamente simétrica), los polígonos regulares e irregulares y otras celdas o células geométricas básicas, pueden inspirar la creación en un taller matemático activo, relajado y vivo.

Para ello, vamos a proceder a resolver determinados problemas geométricos sencillos que se nos van a presentar en la construcción y creación de un mosaico.

PROBLEMA 1.- Supuesto construido con "regla y compás" (instrumentos básicos desde los griegos hasta hoy) un polígono de n lados, ¿cuál será el valor de cada ángulo del polígono? Es decir, dado el polígono de n lados ¿ el valor de cada ángulo es ?

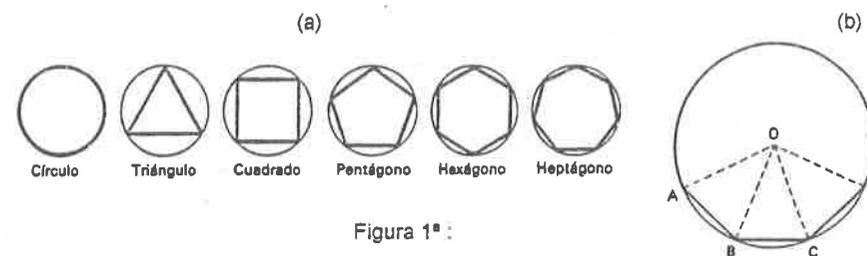


Figura 1ª :

(a) Algunos polígonos básicos para la construcción de mosaicos. (b) Cálculo del ángulo central y ángulo de un polígono.

Sean A,B,C,D,..., los vértices de un polígono de n lados y O el centro del círculo. Es claro que cada uno de los ángulos AOB, BOC, COD,..., que son iguales, valen $360^\circ/n$. Además, como los radios OA, OB, OC,..., son iguales, los triángulos AOB, BOC, COD,..., son isósceles (figuras (a) y (b)).

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - 360^\circ/n}{2} = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{2n} = \frac{90^\circ n - 180^\circ}{n}$$

Y como todos los ángulos del polígono son iguales, por ser regular, cada uno de ellos es la suma de dos de estos ángulos

$$\angle ABC = \angle OBA + \angle OBC = 2 \cdot \frac{90^\circ n - 180^\circ}{n} = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ \quad [2]$$

PROBLEMA.- ¿ Existe un polígono regular de ángulo 127° ?

Si así fuera, $127^\circ = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$; $127^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$;

$360^\circ = 53^\circ n$; $n = 360^\circ/53^\circ$, que no es natural, luego es imposible.

Mediante la unión de figuras simples de forma ordenada, se pueden construir diagramas más complicados. En la vida real los encontramos con colorido armónico y bello, decorando suelos, paredes, techos y otros objetos; desde la suntuosidad de unos, edificios y monumentos, a la simpleza de otros, cosas, vasos, etc.. En todos se busca la estética como fin supremo. Normalmente se presentan formando mosaicos. Un mosaico es por lo tanto, una forma de cubrir una forma plana utilizando polígonos. En la figura (2) se dan los tres más sencillos que se pueden construir.

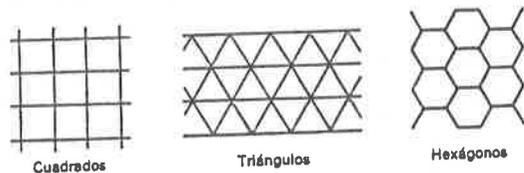


Figura 2ª: Retículos y redes planas.

¿ Son estos los únicos polígonos que pueden cubrir el plano formando mosaicos ? Veamos que sí. En efecto, si P es un punto común a varios polígonos regulares y si m es el número de polígonos que coinciden en este punto, se tendrá, para los ángulos que tienen como vértice P, que

$$\frac{m(n-2)}{n} \cdot 180^\circ = 360^\circ; m(n-2) = 2n \quad [3]$$

llegamos a una ecuación con dos incógnitas m y n, que además han de ser

satisfechas o tienen soluciones que han de ser necesariamente, números naturales, porque m expresa el número de ángulos que concurren en el punto P y n es el número de lados del polígono que cubre el plano (ecuación diofántica).

Para intentar resolverla, conviene emplear algunos trucos algebraicos que nos preparen la ecuación, para obtener así sus soluciones.

De $m(n-2) = 2n \iff mn - 2m - 2n = 0 \iff mn - 2m - 2n + 4 = 4 \iff$

$\iff m(n-2) - 2(n-2) = 4 \iff (m-2)(n-2) = 4$

($m-2 \leq 4$ y $n-2 \leq 4$ por ser naturales y su producto dar 4).

Comencemos ensayando,

si $m=1$ $(1-2)(n-2) = 4 \implies n = -2$ lo cual es imposible

si $m=2$ $(2-2)(n-2) = 4$ no tiene solución

si $m=3$ $(3-2)(n-2) = 4 \implies n = 6$. Esta solución da un mosaico compuesto por hexágonos. Es decir, polígonos de seis lados que coinciden tres en cada vértice ($m=3$).

si $m=4$ $(4-2)(n-2) = 4 \implies n = 4$. Esta solución corresponde al mosaico formado por cuadrados [$m=4, n=4$].

si $m=5$ $(5-2)(n-2) = 4 \implies n = 3 \frac{1}{2}$ imposible, n ha de ser natural.

si $m=6$ $(6-2)(n-2) = 4 \implies n = 3$. Esta solución corresponde al mosaico formado por triángulos equiláteros [$n=3, m=6$].

Con lo cual, hemos probado lo que nos habíamos propuesto, la existencia de los tres únicos mosaicos regulares anteriormente citados, ya que si $m > 6$, n es fraccionario y viceversa.

PROBLEMA.- Si $n > 3$ natural, entonces, $360^\circ/n$ es natural, si y sólo si, $[(n-2)/n] \cdot 180^\circ$ es natural.

Demostración:

(\implies) Si $360^\circ/n$ es natural $\implies 360^\circ = nk \implies n \mid 360$ y es par.

luego $180^\circ(n-2)/n = (n-2)nk/2n = k(n-2)/2$ con lo cual

n=par y por tanto $n-2$ es par, $(n-2)/2$ es natural, luego $k(n-2)/2$ es natural ó

n=par entonces $k/2$ es natural, luego $k(n-2)/2$ es natural.

(\impliedby) Si $180^\circ(n-2)/n$ es natural, $180^\circ(n-2)/n = h$ natural y como $n \geq 3$ entonces

$0 < (n-2)/n < 1$, luego n ha de ser par, por tanto $(n-2)180^\circ = kn$, $180^\circ n - 360^\circ = kn$, $n(180^\circ - k) = 360^\circ \implies 180^\circ - k = 360^\circ/n$ que es natural.



Figura 3ª: (a) Mosaico cuadrado en el que los vértices se apoyan en los lados.

(b) Mosaico triangular en el que los vértices se apoyan en los lados.

En los tres tipos de mosaicos de la demostración anterior, los polígonos están unidos vértice a vértice. Pero ¿existen mosaicos en los que un vértice de un polígono se apoye en un lado de otro? (fig 3). Para resolver este problema procederemos como antes. Sea m el número de polígonos que se apoyan en un lado de otro polígono (en el caso anterior $m=2$); entonces si se trata de polígonos de n lados tendremos

$$180^\circ m(n-2)/n = 180^\circ \iff m(n-2)=n \iff mn-2m=n \iff mn-2m-n=0 \iff$$

$$\iff mn-2m-n+2=2 \iff m(n-2)-(n-2)=2 \iff (m-1)(n-2)=2 \quad [4].$$

(de aquí, por la factorización en \mathbb{N} , $m-1 \leq 2$ ó $n-2 \leq 2$).

No es necesario considerar el caso $m=1$ (¿por qué?), es imposible la ecuación y por tanto empezamos suponiendo que $m=2$:

$$(2-1)(n-2)=2 \implies n=4 \text{ corresponde a la fig. 3a, ya que}$$

$$180^\circ(4-2)/4=180^\circ/2=90^\circ.$$

De otra parte, cuando $m=3$: $(3-1)(n-2)=2 \implies n=3$ (3,3), cuyos ángulos de polígonos es $180^\circ(3-2)/3=180^\circ/3=60^\circ$, que corresponde a la figura 3b.

De la factorización $(m-1)(n-2)=2 \iff 1 \leq m-1 \leq 2$ y $1 \leq n-2 \leq 2 \iff 2 \leq m \leq 3$ y $3 \leq n \leq 4$. Es decir, no existen mosaicos en estas condiciones con $m > 4$.

Los mosaicos primeros son obtenidos por traslación o rotación, y los segundos por traslación.

Veamos cómo es posible construir e imaginar mosaicos distintos de los ya estudiados (con un solo polígono) que tengan dos o más polígonos regulares. El más simple que se puede formar está determinado por octógonos y cuadrados, fig 4a.

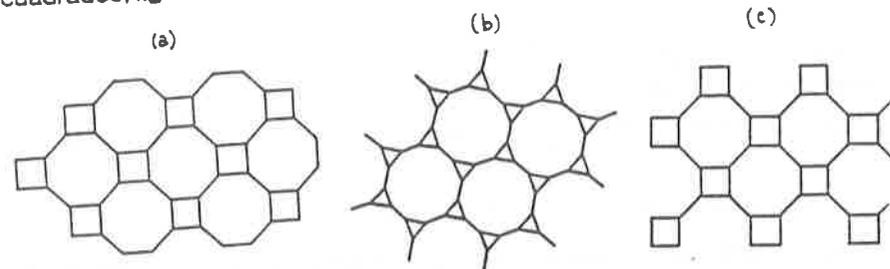


Figura 4ª : [Los mosaicos (a) y (c) son iguales]

Analicemos el problema en su forma general: Se trata de construir todos los mosaicos posibles en los que intervienen dos polígonos.

Hipótesis primera:

(a) Supuesto que los polígonos están unidos vértice a vértice. En cada

vértice P del mosaico concurren m polígonos de n lados y k polígonos de h lados. Entonces,

$$180^\circ m(n-2)/n + 180^\circ k(h-2)/h = 360^\circ \iff m(n-2)/n + k(h-2)/h = 2 \iff$$

$\iff mh(n-2) + kn(h-2) = 2nh$ [5] donde m, n, k, h son naturales, resultando una ecuación diofántica en varias variables, difícil de resolver. Por ello, la resolución elemental se hace, a título de ensayo, con los valores más pequeños posibles.

Así, si $m=1$ y $k=1$ entonces

$$h(n-2) + n(h-2) = 2nh \iff hn - 2h + nh - 2n = 2nh \iff -2h - 2n = 0 \iff$$

$$n + h = 0, \text{ lo cual es imposible, ya que por definición } h > 0 \text{ y } n > 0$$

Consideremos ahora dos polígonos de un mismo tipo y otro distinto. Esto da lugar a las posibilidades de soluciones simétricas (ecuación simétrica en todas las variables) siguen

(a) $m=1$ y $k=2$

$$h(n-2) + 2n(h-2) = 2nh; \quad hn - 2h + 2nh - 4n = 2nh; \quad hn - 2h - 4n = 0$$

(b) $m=2$ y $k=1$

$$2h(n-2) + n(h-2) = 2nh; \quad 2hn - 4k + nh - 2n = 2nh; \quad nh - 2n - 4h = 0$$

Debido a la simetría, ambas ecuaciones son básicamente la misma. Por tanto, basta sólo estudiar una de ellas. Para resolverlas lo haremos por ensayo dando valores a n . Como n y h representan el mismo número de lados de los polígonos, sólo es necesario estudiarla para valores por encima de 2.

Sea $n=3$ $3h - 2h - 12 = 0$, $h=12$ que es equivalente a la solución $n=12$ y $h=3$. Este mosaico se tiene en la fig. 4a.

Si tomamos $n=4$: $4h - 2h - 16 = 0$; $h=8$, fig. 4c.

Es evidente que este proceso no puede continuar indefinidamente. En realidad, podría parecer que existe un gran número de soluciones. Sin embargo sólo existen ocho. Todos se dan en la figura siguiente para los valores correspondientes de n, m, k, h .

En alguno de estos mosaicos no se indican estos valores, ya que están formados por más de dos tipos distintos de polígonos. Es interesante destacar el hecho de que no se puede construir ningún mosaico con más de tres tipos de polígonos.

Aunque el número de mosaicos que pueden construirse con polígonos regulares es limitado, no sucede lo mismo si consideramos polígonos irregulares. También es posible adaptar otras formas regulares para conseguir un mayor efecto artístico. (fig.5)

Se pueden dar diferentes combinaciones de colores para todos los mosaicos y a menudo esto es tan importante como dibujarlos. En ocasiones, el

color tiene el efecto de realzar las propiedades geométricas del diseño y algunas combinaciones ponen de manifiesto diferentes aspectos del mismo.

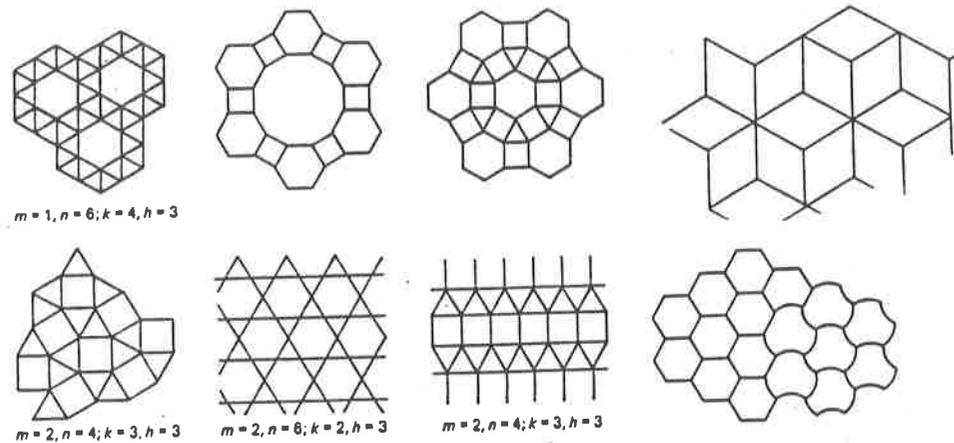


Figura 5ª

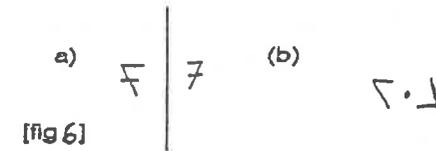
Otros mosaicos, frisos, cenefas, teselaciones y la simetría

Tanto en el mundo mineral como viviente se describen y se clasifican los objetos y seres para su estudio. Por ejemplo una de las clasificaciones más útiles e importantes está basada en la simetría. Como dice H.Weyl: La simetría establece un extraño y maravilloso parentesco entre objetos, fenómenos y teorías, por lo demás totalmente diferentes: magnetismo terrestre, empalizadas luz polarizada, selección natural, teoría de grupos, invariantes y transformaciones, hábitos laborales de las abejas en la colmena, estructura del espacio, diseño de búcaros y jarrones, física cuántica, escarabajos, pétalos de las flores, patrones de interferencia de rayos X, división celular en los erizos de mar, posiciones de equilibrio en los cristales, catedrales románicas, copos de nieve, música, teoría de la relatividad.

El universo en forma global parece manifestarse de forma asimétrica, pero, localmente, los mamíferos en su forma y tamaño externa, parecen ser simétricos. De otra parte, los seres microscópicos presentan en su forma una simetría de tipo central (respecto de un punto); los seres superiores protozoos presentan simetría axial o especular en su forma externa, aunque no así en su forma y función interna.

En fin, la simetría representa un orden y un equilibrio como base de la economía de su funcionamiento y de su belleza y estética. En el sentido geométrico de la simetría, podemos tener, un eje de simetría, un centro de

simetría o un plano de simetría, que definen respectivamente, la línea, punto o plano respecto de los cuales es simétrica una figura o un cuerpo. La presencia de estos elementos de simetría, casi siempre combinados, da lugar a la formación de un gran número de composiciones y la reproducción de un motivo por aplicación de operaciones de simetría puede dar lugar a un cuadro o disposición geométrica agradable a los sentidos.



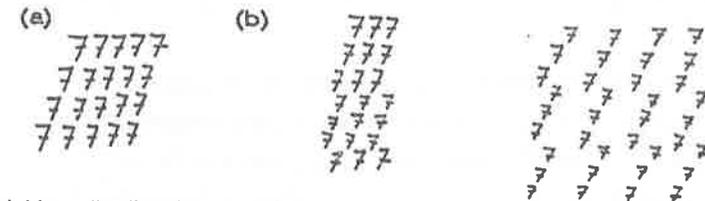
En la fig. 6 aparecen los tipos más frecuentes de simetría (a) Un plano de simetría, cada 7 es la imagen especular del otro. Esta es la simetría de la izquierda y de la derecha o bilátera. (b) Un eje de simetría, que se puede visualizar mediante una línea perpendicular al plano del papel y que pasa por el punto.



(a) rotación de 90° alrededor de un eje vertical que pasa por el punto que se indica. La simetría de rotación es la que presenta un polígono regular, una estrella de mar, ..(un eje cuaternario de simetría).(b) Simetría de traslación a lo largo de una línea, en el plano, o en espacio. También girarlo o reflejarlo.

Así obtenemos una ordenación lineal de sietes como se indica en la figura 2b. Esta es la simetría de la traslación o simetría de segmentos equidistantes; se la encuentra en las plantas y animales inferiores, por ejemplo, en los segmentos de un gusano o en las patas de un ciempiés.

Vamos a describir a continuación dos tipos más de simetría. [fig. 8]



(a) Una distribución lineal mediante una traslación hacia arriba. (b) Una nueva traslación en una tercera dirección, la dirección normal al plano, y esta traslación repite el plano entero a intervalos iguales. Esto da lugar a una colección de puntos o red espacial que permitiría introducir la estructura cristalina.

Un poco más de geometría plana podemos construir diversos ornamentos como los que se exponen en la fig. 9. Son catorce bandas ornamentales, cada una de las cuales es engendrada por una figura sencilla, periódicamente repetida a lo largo de una línea recta (horizontal).

A cada banda le llamamos friso. Están emparejados cada friso del lado izquierdo de la figura marcado con un número, con uno del lado derecho marcado con una letra de modo que los dos frisos ordenados de esta forma tengan el mismo tipo de simetría. Un buen ejercicio para el estudiante sería el de analizar todo tipo de simetrías que concurren en un friso dado.

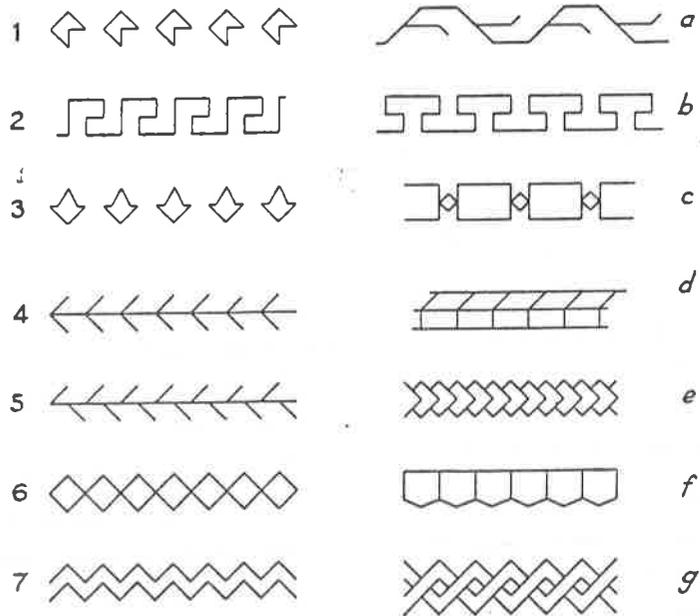


figura 9. Diversas simetrías de frisos.

En las páginas siguientes damos diversos ejemplos de diseños, teselaciones, mosaicos y frisos que pueden servir para despertar la imaginación de los alumnos y como base para el estudio de los distintos tipos de simetría.

Figura 10.- Mosaicos y Teselaciones regulares.

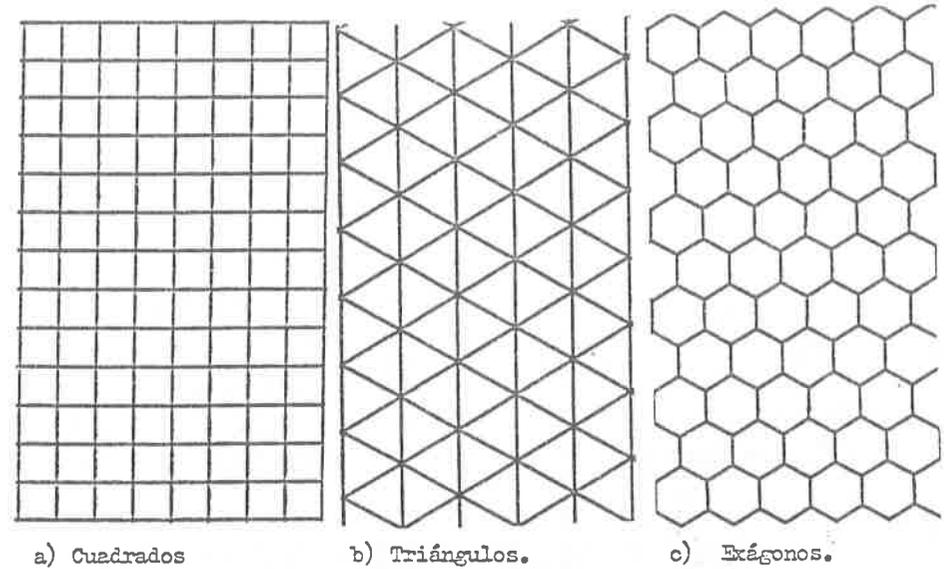
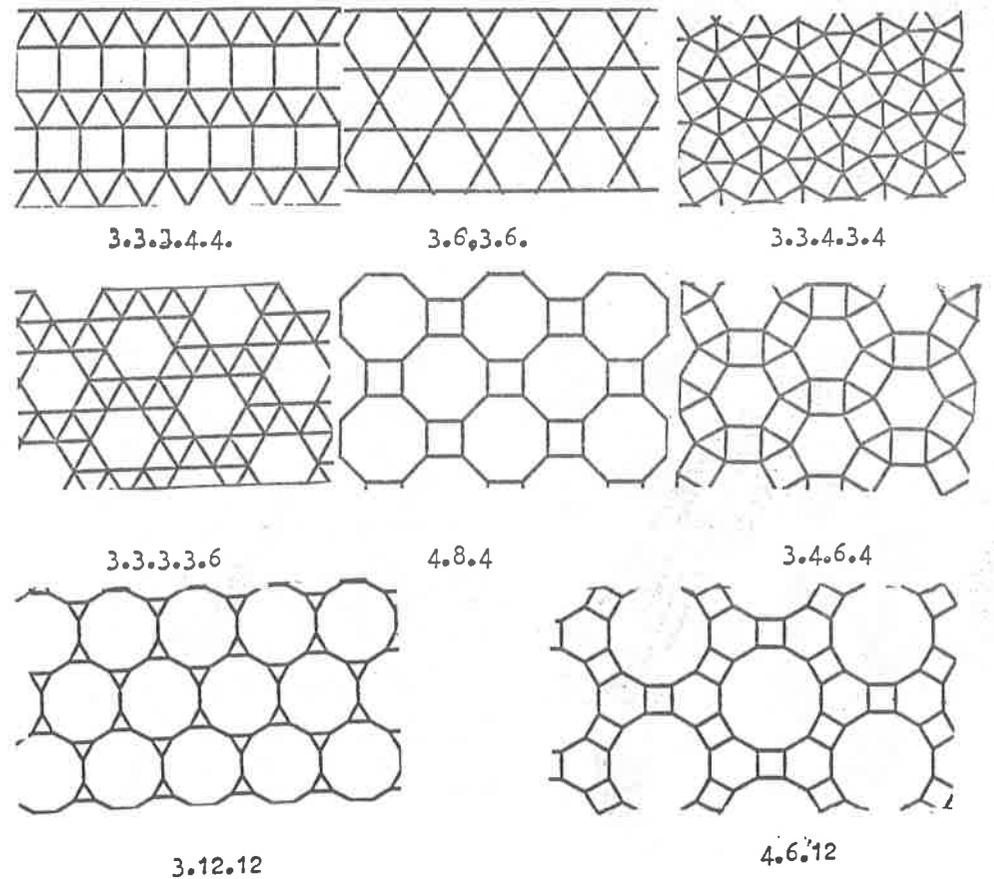
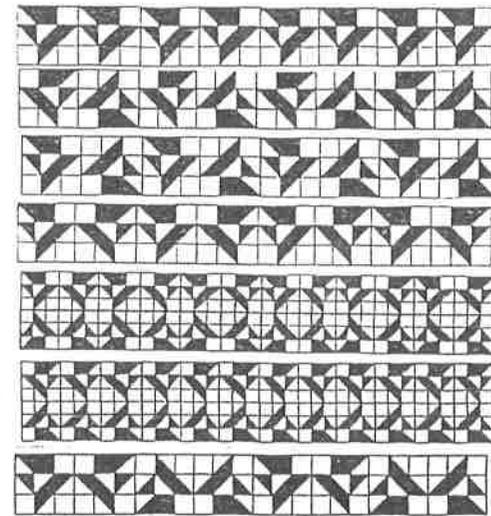
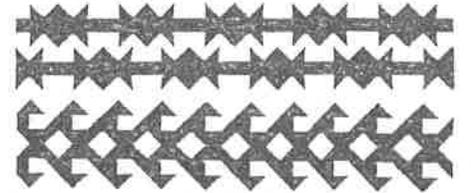
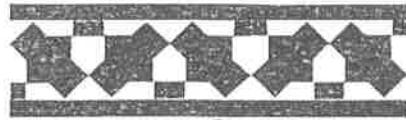
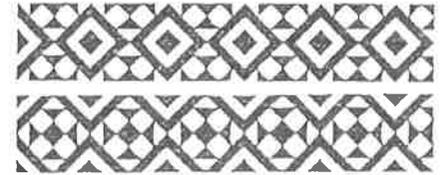
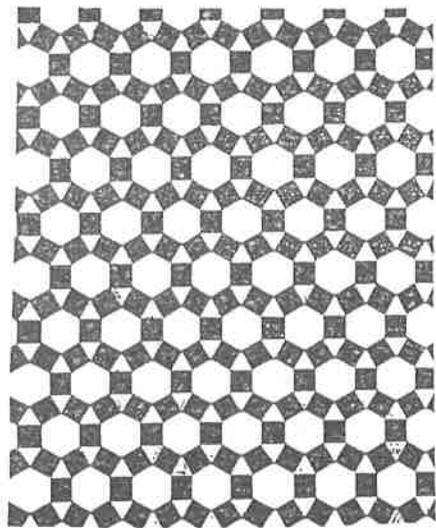
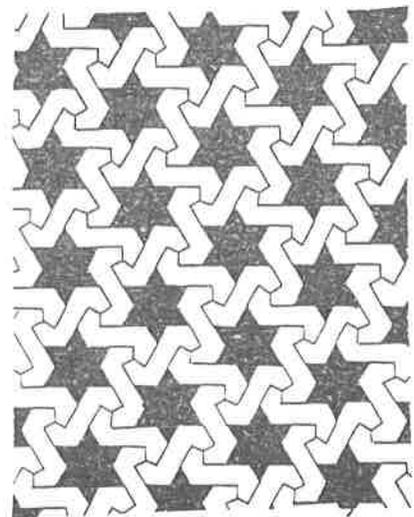
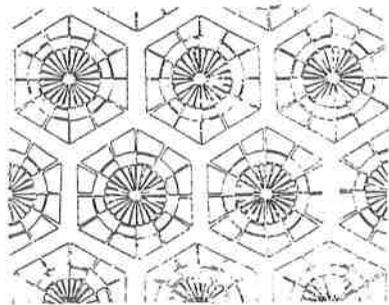
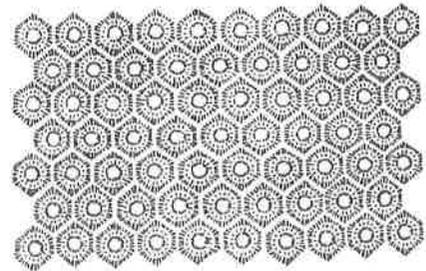
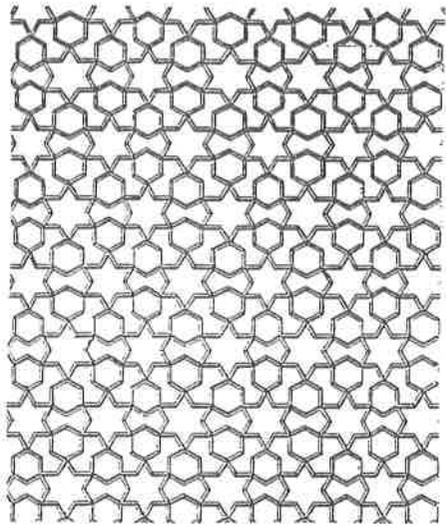


figura 11.- Mosaicos o Teselaciones irregulares.





Los siete modelos de frisos.

BIBLIOGRAFIA:

- (1) T. J. Fletcher. Didáctica de las Matemáticas. Teide. Barcelona, 1974.
- (2) H. Steinhaus. Instantáneas Matemáticas. Salvat. Barcelona, 1986.
- (3) P. Stevens. Patrones y Pautas en la Naturaleza. Salvat. Barcelona, 1986.
- (4) H. Weyl. Symmetry. Princeton University Press.
- " - Simetría. Ed. Nueva Visión. Buenos Aires, 1958
- (5) J. Rosen. Symmetry Discovered: Concepts and Applications in Nature and Science. Cambridge University Press. London, 1977.
- (6) E. B. Edwards. Pattern and Design with Dynamic Symmetry. Dover, 1932.
- (7) J. Hambidge. Practical Applications of Dynamic Symmetry. Devin - Adair, 1965.
- (8) G. Kempes (editor). Module, Proportion, Symmetry Rhythm. Braziller, 1966
- (9) M. Ghyka. The Geometry of Art and Life. Sheed and Ward, 1946.
- (10) A.V. Shubnikov, N. Belov y otro. Colored Symmetry Pergamon Press, 1946.
- (11) A. L. Loeb. Color and Symmetry. J. Wiley, 1971.
- (12) R. C. Lyndon. Groups and Geometry. Cambridge University Press. London, 1986.
- (13) E. S. Lander. Symmetric Designs. Cambridge University Press. London, 1986.
- (14) M. Gardner. The Ambidextrous Universe. New American Library.
- " - Izquierda y Derecha en el Cosmos. Biblioteca Científica Salvat, Barcelona, 1988, y Alianza Editorial, (L.B.23), 1966.
- (15) V. Fritsch. Left and Right in Science and life. Barrie and Rockliff, 1968
- (16) C. F. Linn. A classroom Guide to Symmetry. Doubleday, 1968.
- (17) A. G. Razzell and K. G. O. Watts. Symmetry. Doubleday, 1968.
- (18) M. and H. Sitomer. What is Symmetry ? . A. and C. Black, 1970.
- (19) P. Stapp y otros. Symmetry. A. Holden.
- (20) A. Bell y T. J. Fletcher. Symmetry Groups. ATME, 1970.
- (21) B. Lewis. Matemáticas Modernas. Aspectos Recreativos. Alhambra, Madrid, 1983.
- (22) R. Williams. The geometrical foundation of natural structure (a source book of design) Dover, 1979.
- (23) D'Arcy Thompson. Sobre el Crecimiento y la Forma. Blume. Madrid, 1980
- (24) L. L. Whyte y otros. Las estructuras jerárquicas. Alianza. Madrid, 1980.

- (25) A. Nussbaum. Teoría de Grupos para químicos, físicos e ingenieros. Reverté, Barna. 1974
- (26) P. C. Casson. Geometry of spatial formas. Wiley, New York, 1983.
- (27) H. S. M. Coxeter. Fundamentos de Geometría. Limusa, Wiley. México, 1971.
- (28) J. B. Romero Marquez. Simetría plana en clase; Grupos y Geometría. Este Boletín, n° 31. págs. 65-74. Madrid, 1992.
- (29) D. Seymour y J. Britton. Introduction to Tessellation. Dale & Seymour, CA, 1989.
- (30) S. M. Bezuska y otros. Designs from Mathematical Patterns. Dale & Seymour, 1978.
- (31) S. M. Bezuska y otros. Tessellations: The Geometry of Patterns. Dale & Seymour, 1977.
- (32) M. Keney y otros. Tessellations using LOGO. Dale & Seymour, 1987.
- (33) D. Seymour. Tessellations Teaching Masters. Dale & Seymour, 1989.
- (34) J. Willson. Mosaic and Tessellated Patterns. Dover, N.Y., 1983.
- (35) B. Grunbaum y C.C. Shephard. Tilings and Patterns Freeman, N.Y., 1987.
- (36) R. G. Brwn. Transformational Geometry. Dale & Seymour. CA, 1973.
- (37) A.S. Posamentier y W. Wernick. Advanced Geometric Constructions. Dale & Seymour, 1988.
- (39) W. L. Schaaf. A bibliography of recreational Mathematics. Vol 1, 2, 3, 4. N.C.T.M., Washigton, 1972 a 1978.

Estos libros tienen una excelente bibliografía sobre muchos tópicos de la Matemática Recreativa y, en particular, sobre la simetría, las teselaciones, mosaicos y ornamentos.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

Pro- pues- tos en el n°	Proceden- tes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										o b s .	
		1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°		
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	-	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86 / Varios	18	19	20	18	19	19/17	17	11	17	-	-	C
10	China / Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	-	-	C
11	OME-f1-86 / OMI-86-Varsovia	13	14	14	14	14	23	20	15/20	12	-	-	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	-	C
13	OME-f2-87	16	14	14	17	15	17/15	15	15	21	-	-	C
14	Varios	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	-	C
15	OMI-87-Cuba	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	-	C
16	OME-f1-87	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	-	C
17	OME-f2-88	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	-	C
18	OI-88-Perú	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	-	C
19	OMI-88-Australia	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	-	C
20	OME-f1-88 / Putnam	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	-	C
21	OME-f2-89 / OI-89-Cuba	24	26	24	25	24	26	24	26/26	24	-	-	C
22	OMI-89-R.F.A. / Oposiciones	24	27	24	27	27	24/27	25	27	26	-	-	C
23	Oposiciones	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
24	OME-f1-90	28	28	XX	28	29	30/30	30	30	31	-	-	C
25	OME-f2 / f1- 90	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	-	C
26	OMI-90-China / OI-90-Valladolid	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	-	C
27	OME-f1-91	30	31	31	30	31	30	30	31	-	-	-	C
28	OME-f2-91	XX	31	29	29	31	32/32	32	32	33	-	-	C
29	OMI-91-Suecia	32	XX	XX	32	XX	XX/XX	32	XX	XX	-	-	C
30	OI-91-Argentina / OME-f1-91	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
31	OME-f2-92 / OME-f1-91 / PNS	33	XX	33	33	XX	XX	XX	XX	-	-	-	C
32	OMI-92-Moscu / OI-92-Venez./ PNS	32	32	XX	XX	33	33	-	-	-	-	-	C
33	OME-f1-92/f1-92(v) /PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación . C = Completo
 OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2).
 OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
 OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
 PNS = Propuestos por nuestros socios.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problemas propuestos en la PRIMERA FASE de la XXIX Olimpiada Matemática Española, en la mayor parte de los distritos, entre ellos el de Madrid.

PROBLEMA 1°:

Demostrar que el producto de 3 números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.

PROBLEMA 2°:

Sea ABCD un cuadrado, de lado $2x$, situado en un plano π_1 . Se considera un semicírculo C de centro O y diámetro el segmento AB , situado en el plano π_2 , perpendicular a π_1 . Un punto M variable describe el segmento AB . Sea N el simétrico de M con respecto a O . En el plano π_2 , la perpendicular en M a AB corta al semicírculo C en E ; y en el plano π_1 , la perpendicular en N a AB corta a la diagonal AC del cuadrado en F .

Llamando $t = \overline{AM}$, determinar \overline{EF}^2 en función de x y de t . Encontrar los valores de t para los que $\overline{EF} = x\sqrt{2}$.

PROBLEMA 3°:

Tres personas juegan al tenis de mesa; después de cada partida, el que pierde deja su lugar a la persona que no juega. Al final, el primer jugador ha jugado 10 partidas, el segundo 15 y el tercero 17. ¿Quién perdió la segunda partida?

PROBLEMA 4°:

Sean a y b números reales tales que $0 < b < a$. Se define por recurrencia la sucesión (x_n) como sigue:

$$x_1 = b; \quad x_{n+1} = 2x_n - \frac{x_n^2}{a} \quad (n \geq 1);$$

Demostrar que (x_n) es monótona y acotada; y calcular su límite.

PROBLEMA 5^o:

Determinar los polinomios P(x), de grado n, que verifican

$$P(1) + P(x) + P(x^2) + \dots + P(x^n) = (1 + x + x^2 + \dots + x^n)P(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 6^o:

Dado el número real x, se consideran: su parte entera [x] (es decir, el mayor número entero que es menor o igual que x); su parte fraccionaria {x} = x - [x]; y el entero más próximo a x, representado por (x) y que se define como

$$(x) = \begin{cases} [x] & \text{si } 0 \leq \{x\} < \frac{1}{2} \\ [x]+1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq \{x\} < 1 \end{cases}$$

Resolver la ecuación

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10}$$

PROBLEMA 7^o:

Sean z_1, z_2, z_3 números complejos distintos dos a dos. Probar que los afijos de esos números son los vértices de un triángulo equilátero si y solo si se verifican las dos igualdades

$$(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)^2,$$

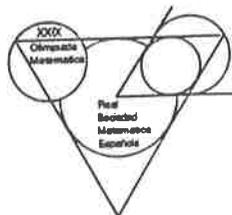
$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_2 - z_3)^2.$$

PROBLEMA 8^o:

Demostrar que si en los triángulos ABC y A'B'C' se verifica

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{y} \quad \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b \cdot c}{b' \cdot c'}$$

entonces esos dos triángulos son semejantes.



Problemas escogidos entre los propuestos en la PRIMERA FASE de la XXIX Olimpiada Matemática Española en algunos distritos en los que no se propusieron los anteriores.

PROBLEMA 9^o:

Supongamos que tomamos una lista arbitraria de 1993 números enteros positivos, todos ellos menores que 3984. Pruébese que tomemos como tomemos tal lista, siempre encontraremos dos números A y B tales que A es múltiplo de B.

Propuesto en el Distrito de Navarra.

PROBLEMA 10^o:

¿ Es posible encontrar un conjunto finito de números primos distintos dos a dos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ tales que la suma de sus recíprocos sea un número natural? Razónese la respuesta (Nota: el 1 no debe considerarse número primo).

Propuesto en el Distrito de Navarra.

PROBLEMA 11^o:

Dados dos números reales positivos x_1 y x_2 , se considera la sucesión $\{x_n\}$, dada por $x_{n+2} = 2/(x_{n+1} + x_n)$, ($n \geq 1$). Demuestra que dicha sucesión es acotada.

Propuesto en el Distrito de León.

PROBLEMA 12^o:

Se consideran nueve puntos del espacio, tales que no hay cuatro en el mismo plano. Cada dos puntos se unen por una arista (es decir, un segmento de recta). Cada arista o bien se colorea de azul o bien de rojo, o

se deja sin colorear Hallar el menor valor de n tal que siempre que se colorean exactamente n aristas, se tiene necesariamente algún triángulo cuyas aristas son del mismo color.

Propuesto en el Distrito de Salamanca.

PROBLEMA 13°:

Sea n un número natural. Demostrar que si para todo número entero positivo $s \leq k$, $sn + 1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ es suma de k cuadrados perfectos.

Propuesto en el Distrito de Salamanca.

PROBLEMA 14°:

El triángulo rectángulo ABC está inscrito en la circunferencia $O(R)$ de centro O y radio R , de la que AB es un diámetro. La circunferencia de centro O_1 y radio r_1 es tangente a los lados CA y CB y además es tangente interiormente a $O(R)$. Sea, finalmente, $O_2(r_2)$ la circunferencia inscrita en ABC . Probar que $r_1 = 2r_2$.

Propuesto en el Distrito de Salamanca.

PROBLEMAS PROPUESTOS POR NUESTROS SOCIOS

PROBLEMA 15°:

En el plano proyectivo complejo, encontrar nueve puntos (tres reales y tres parejas de imaginarios conjugados), y doce rectas (reales o imaginarias, por pares de conjugadas) tales que cada una de ellas pase por tres de los puntos citados y cada uno de esos puntos se encuentre sobre cuatro de esas rectas.

Propuesto por Julio Fernández Biarge.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 10° (Boletín n° 25)

Sean a y b números reales. Determinar los máximos y los mínimos de la función

$$f(x) = |x-a| + |x-b|$$

¿ Qué ocurre si, en vez de dos, son tres los números y

$$f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| \quad ?$$

¿ Y si son n ?

Solución:

Se supone $a < b < c$.

La función $f(x) = |x-a| + |x-b|$ se puede escribir

$$f(x) = \begin{cases} a + b - 2x & , \text{ si } x < a \\ b-a & , \text{ si } a \leq x \leq b \\ 2x - (a + b) & , \text{ si } x > b \end{cases}$$

esto es, es estrictamente decreciente para $x < a$ y estrictamente creciente para $x > b$, siendo constante en el intervalo $[a, b]$; por tanto, alcanza su mínimo en cada punto de dicho intervalo; este mínimo es $b - a$.

Análogamente, la función $f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$ se puede escribir

$$f(x) = \begin{cases} b + c - 3x & , \text{ si } x < a \\ b + c - a - x & , \text{ si } a \leq x < b \\ c - a & , \text{ si } x = b \\ x + c - a - b & , \text{ si } b < x \leq c \\ 3x - (a + b + c) & , \text{ si } x > c \end{cases}$$

o sea, es estrictamente decreciente en $(-\infty, b)$ y estrictamente creciente en $(b, +\infty)$; por tanto alcanza su mínimo en $x = b$, que vale $c - a$.

Sea un número par $2n$ de números

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < a_{2n};$$

la función

$$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_n| + |x-a_{n+1}| + \dots + |x-a_{2n}|$$

es estrictamente decreciente para $x < a_n$, estrictamente creciente para $x > a_{n+1}$ y toma el valor

$x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_n + a_{n+1} - x + \dots + a_{2n-1} - x + a_{2n} - x =$
 $= (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1)$
 en el intervalo $[a_n, a_{n+1}]$, alcanzando el mínimo en cada punto de dicho intervalo.

Si existiese un número impar $2n+1$ de sumandos, siendo $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} < \dots < a_{2n} < a_{2n+1}$, se tiene que la función

$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{n+1}| + \dots + |x - a_{2n+1}|$
 es estrictamente decreciente si $x < a_{n+1}$, es estrictamente creciente si $x > a_{n+1}$ y presenta un mínimo para $x = a_{n+1}$, donde toma el valor

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n+1} - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1).$$

En general, la función considerada no tiene máximo y alcanza un mínimo absoluto en el valor central de los a_i , si éstas están en número impar, y en el intervalo central, si hay un número par de ellas.

José V. García Sestafe (Madrid)

PROBLEMA 1º (Boletín nº 27)

El número de este año, 1991, es un capicúa, producto de dos números primos, que también son capicúas. Desde este año hasta el 9999 ; Cuales serán los años cuyos números gozarán de esta misma propiedad ?

Solución:

Todo número capicúa de 4 cifras es divisible por 11. Al ser $9999 < 10^4$, uno de los factores ha de ser menor que 100 ; luego al ser de dos cifras, primo y capicúa, uno de los factores es 11 . Así pues, $abba = 11 \cdot cdc$.

Como la cifra de las unidades del producto $11.cdc$ es c , se deduce que si $abba = 11 \cdot cdc$, será $a = c$. Luego $abba = 11 \cdot ada$, y si ada es primo, entonces $a = 3$ o $a = 7$. Pero $abba = 10^3a + 10^2b + 10b + a = (10+1)(10^2a + 10d + a) = 10^3a + 10^2a + 10^2d + 10d + a =$

$= 10^3a + 10^2(a + d) + 10(a + d) + a$, es decir, $b = a+d$
 y, por tanto, $b > a$. Luego si $a = 7$, será $b = 8$ o $b = 9$, y los posibles números serán 7887 y 7997 .
 $7887 = 11.717$, no es válido, pues 717 es múltiplo de 3.
 $7997 = 11.727$ es válido.

Si, por el contrario, es $a = 3$, entonces b es uno de los 4, 5, 6, 7, 8 o 9, y como $2a = 6$, se eliminan los años 3663 y 3993 cuyos números serían divisibles por 3 . De los cuatro que quedan, los únicos válidos son:

$$3443 = 11.313 \quad \text{y} \quad 3883 = 11.353 .$$

Así, los años que gozan de la propiedad indicada son:

$$3443 \quad , \quad 3883 \quad \text{y} \quad 7997 .$$

Faltan 1452 años para que se produzca el primero de tales eventos. Pero 1452 es la semisuma de dos primos consecutivos: 1451 y 1453 ; Cuantos años, hasta 9999 gozan de ese propiedad ?

Rodolfo Esteve Arolas (Valencia)

PROBLEMA Nº 3 (Boletín nº 27)

Un triángulo equilátero NMN está limitado por las rectas l, m, n , cada una de las cuales divide en dos partes de áreas iguales a otro triángulo equilátero ABC . Suponiendo que el área del triángulo LMN sea igual a 30 y el área de ABC sea igual a 15000, se pide calcular las áreas de cada una de las partes en que queda dividido ABC por las tres rectas citadas.

Solución:

1º.- Los centros de los dos triángulos coinciden. Tomando el triángulo ABC y la recta l que lo divide en dos partes de áreas iguales, existen dos únicas rectas que formen un ángulo de 60° y que dividan a ABC en dos partes de áreas iguales. Dichas rectas deben de ser m y n y surgen al girar 120° , dos veces, la recta l respecto al centro O de ABC .

Al efectuar estos giros queda formado el triángulo LMN, cuyo centro, por su construcción, es O.

2º.- Por ser O el centro de los dos triángulos, la figura formada por las rectas l, m, n y el triángulo ABC es invariante por los giros de 120º respecto a O.

El triángulo LMN no puede estar inscrito en ABC pues de lo contrario, sus lados no dividirían a LMN en dos partes de áreas iguales; por lo que los vértices de LMN están en el interior de ABC, quedando dividido éste en 7 partes $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ y ABC, de áreas $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ y 30, respectivamente. Por el punto 2º, las figuras T_i con i impar, son iguales, ocurriendo lo mismo con las T_i con i par, por lo que $A_1 = A_3 = A_5$ y $A_2 = A_4 = A_6$.

Además $A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6 + 30$, o sea $2A_1 + A_2 = 2A_2 + A_1 + 30$, o bien $A_1 - A_2 = 30$. [1]
También $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + 30 = 15000$, o bien $3A_1 + 3A_2 = 14970$. [2]

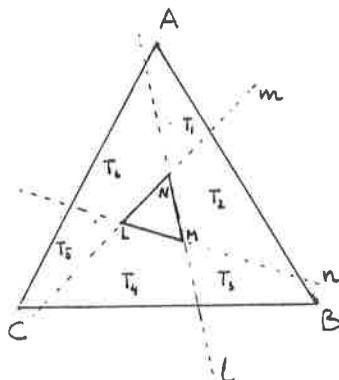
Resolviendo el sistema formado por [1] y [2], se tiene la solución:

$$A_1 = A_3 = A_5 = 2510, \quad A_2 = A_4 = A_6 = 2480.$$

José Miguel Celorrio Laseca (Soria)

PROBLEMA N° 4 (Boletín n° 27)

Si para todo $x > 0$, la función f (no constante) es derivable y goza de la propiedad $f(x) = f(2x)$ se pide:



1. Probar que $f'(x)$ se anula en una infinidad de puntos
2. Probar que si $b > a > 0$, $\int_a^b f(x)dx = 2 \int_{a/2}^{b/2} f(x)dx$.
3. Poner un ejemplo de una función que cumpla las condiciones citadas al principio y hacer un esquema de su gráfica cartesiana.

Solucion:

1. Aplicando indefinidamente la propiedad de f, se tiene: $f(t) = f(2^n t)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Aplicando el teorema de Rolle a cada uno de los intervalos $[2^n t, 2^{n+1} t]$, obtenemos $s_n \in (2^n t, 2^{n+1} t)$, con $f'(s_n) = 0$; luego hay una infinidad de puntos donde $f'(x) = 0$.

2. Realizando el cambio de variable $t = 2s$ se tiene que $dt = 2ds$ y además los nuevos extremos de integración serán $a/2$ y $b/2$, por lo que:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a/2}^{b/2} f(2s)2ds = 2 \int_{a/2}^{b/2} f(s)ds = 2 \int_{a/2}^{b/2} f(t)dt.$$

3. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define, por composición de las funciones derivables $z = 2\pi(2^{-n}x - 1)$, $y = \cos z$, que aplican el intervalo $[2^n, 2^{n+1}]$ en $[0, 2\pi]$ y éste en $[-1, 1]$, se obtiene la función real de variable real $f_n: y = f_n(x) = \cos 2\pi(2^{-n}x - 1)$.

Conjuntando todas las funciones f_n , queda definida una función f, a trozos, con dominio \mathbb{R}^+ . Esta función es continua. Para verlo basta comprobar que para todo $n \in \mathbb{Z}$,

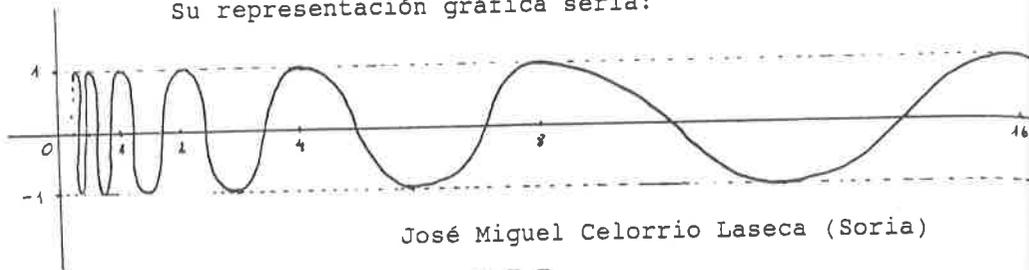
$$f(2^n) = \cos 2\pi(2^n/2^n - 1) = 1 = \lim_{x \rightarrow (2^n)^+} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow (2^n)^-} f(x) = \cos 2\pi(2^n/2^{n-1} - 1) = 1.$$

También es derivable, pues para todo $n \in \mathbb{Z}$, en los puntos de solapamiento $x = 2^n$ es:
cuando $h \rightarrow 0^+$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\cos 2\pi((2^n+h)/2^n - 1) - 1] = 0$
cuando $h \rightarrow 0^-$, $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [\cos 2\pi((2^n+h)/2^{n-1} - 1) - 1] = 0$
o sea $f'(2^n) = 0$.

Además, en la función $f(x) = \cos 2\pi(x/2^p - 1)$, para un cierto valor $p \in \mathbb{Z}$, $x \in [2^p, 2^{p+1})$ implica $2x \in [2^{p+1}, 2^{p+2})$ y por tanto $f(2x) = \cos 2\pi(2x/2^{p+1} - 1) = \cos 2\pi(x/2^p - 1)$ para el mismo p anterior, por lo que $f(x) = f(2x)$.

Su representación gráfica sería:



José Miguel Celorrio Laseca (Soria)

NOTA: Un ejemplo más simple, lo proporciona la función (que no es necesario definir a trozos):
 $f(x) = \cos(2\pi \cdot \log_2 x)$ o sea $f(x) = \cos[(2\pi \cdot \log x) / \log 2]$

PROBLEMA N° 5 (Boletín n° 28)

Dado un número natural n , designamos con $s(n)$ la suma de las cifras del número n , expresado en el sistema binario de numeración (es decir, el número de cifras 1 que tiene). Se pide determinar, para todo número natural k , el número:

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + s(3) + \dots + s(2^{k-1}) + s(2^k).$$

Solución:

Es evidente que cualquier número natural n tal que $2^{r-1} \leq n < 2^r$, en sistema binario, tendrá r cifras empezando siempre por 1, y que habrá un total de $2^r - 2^{r-1} = 2^{r-1}$ de tales números. Considerándolos todos, y excluyendo la primera cifra (que siempre es 1), las restantes son equitativamente ceros y unos. Por tanto, al sumarlas obtendremos

$$\frac{(r-1) \cdot 2^{r-1}}{2} + 2^{r-1} = (r+1) \cdot 2^{r-2}.$$

Ordenemos ahora los sumandos $\sigma(k)$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sigma(k) &= s(1) + [s(2)+s(3)] + [s(2^2)+\dots+s(2^3-1)] + \dots + \\ &\quad + [s(2^{k-1})+\dots+s(2^k-1)] + s(2^k) = \\ &= 1 + (2+1) \cdot 2^{2-2} + (3+1) \cdot 2^{3-2} + \dots + (k+1) \cdot 2^{k-2} + 1 = \\ &= 2 + \sum_0^{k-2} (n+3) \cdot 2^n = 2 + 3 \cdot \frac{2^{k-2} \cdot 2 - 1}{2-1} + \sum_0^{k-2} n \cdot 2^n = \\ &= -1 + 3 \cdot 2^{k-1} + [2 + \dots + 2^{k-2}] + [2^2 + \dots + 2^{k-2}] + \dots + \\ &\quad + [2^{k-3} + 2^{k-2}] + 2^{k-2} = -1 + 3 \cdot 2^{k-1} + (2^{k-1} - 2) + (2^{k-1} - 2^2) + \\ &\quad + \dots + (2^{k-1} - 2^{k-3}) + (2^{k-1} - 2^{k-2}) = -1 + 3 \cdot 2^{k-1} + (k-2) \cdot 2^{k-1} - \\ &\quad - \sum_1^{k-2} 2^r = -1 + 3 \cdot 2^{k-1} + (k-2) \cdot 2^{k-1} - (2^{k-1} - 2) = \boxed{1 + k \cdot 2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Ramón Fraile Peláez (Pamplona)

PROBLEMA N° 6 (Boletín n° 28)

Calcular la parte entera de:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}} + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

Solución:

Por la monotonía de la función $y = 1/\sqrt{x}$ y la interpretación como área de la integral, se verifica $\int_1^{10000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < S < 1 + \int_1^{10000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, o sea: $198 < S < 199$, luego la parte entera de S es 198.

Franisco Lorenzo Miranda (Madrid)

Otra solución (Sin cálculo integral):

Si $S_n = 1 + 1/\sqrt{2} + \dots + 1/\sqrt{n}$, vamos a comprobar que $2\sqrt{n} - 2 < S < 2\sqrt{n} - 1$. Pero antes demosntremos que $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$. En efecto, multiplicando y dividiendo por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, se obtiene $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2 / (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) < 2 / (2\sqrt{n}) = 1 / \sqrt{n}$. Análogamente se obtiene $2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

y en consecuencia, lo que deseabamos probar. Si en las desigualdades probadas tomamos $n = 2, 3, \dots, n$, obtenemos

$$\begin{aligned} n = 2, & \quad 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < 1/\sqrt{2} < 2\sqrt{2} - 2 \\ n = 3, & \quad 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < 1/\sqrt{3} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ & \dots\dots\dots \\ n, & \quad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \end{aligned}$$

sumando miembro a miembro, obtenemos

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < S_n - 1 < 2\sqrt{n} - 1,$$

y sumando 1, resulta $1 + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < S_n < 2\sqrt{n} - 1$ y con mayor motivo, $1 + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{2} < S_n < 2\sqrt{n} - 1$; como $2\sqrt{2} < 3$, $2\sqrt{n} - 2 < S_n < 2\sqrt{n} - 1$. En el problema, es $n = 10000$, o sea $\sqrt{n} = 100$ con lo que resulta $198 < S < 199$, luego la parte entera de S es 198.

Alicia Pedreira Mengotti (La Coruña)

PROBLEMA N° 4 (Boletín n° 30)

Encontrar un número N de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con las cinco cifras de N .

Solucion:

Sea N el número $abcde$ y sea $S = a+b+c+d+e$, puesto que la suma de todos los números de tres cifras que se puede hacer con a, b, c, d, e es $V_{4,2} \cdot (100+10+1) \cdot S$ se tiene que

$$N = abcde = 12 \cdot 111 \cdot S$$

entonces deberá ser

$$N = \dot{3} \quad - \quad S = \dot{3} \quad \text{y al ser } N = 12 \cdot 111 \cdot S \quad - \quad N = \dot{9} \quad - \quad S = \dot{9}$$

$$\text{y por otra parte } 1+2+3+4+5 \leq S \leq 5+6+7+8+9 \quad - \quad 15 \leq S \leq 35$$

así, las únicas posibilidades son $S = 18$ ó $S = 27$.

Para $S = 18$ sería $N = 12 \cdot 111 \cdot 18 = 23976$ número cuyas cifras no suman 18

y para $S = 27$ se tendrá $N = 12 \cdot 111 \cdot 27 = 35964$ solución del problema.

Manuel E. Serrano Caballero (Segovia)

PROBLEMA N° 8 (Boletín n° 30)

Sea S el conjunto de rectas que unen un punto del conjunto

$$A = \left\{ \left(0, \frac{1}{a} \right); a \in \mathbb{N} \right\}$$

y un punto del conjunto

$$B = \{ (b+1, 0); b \in \mathbb{N} \}$$

Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que el número natural m sea compuesto es que el punto $M = (m, -1)$ pertenezca a una recta de S . Determinar el número de rectas de S a las que pertenece el punto M .

Solucion:

Las rectas de S son de la forma $y = \frac{-1}{a(b+1)} \cdot (x-b-1)$ con $a, b \in \mathbb{N}$, entonces

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = (1-ay) \cdot (b+1) \text{ con } a, b \in \mathbb{N} \}$$

Veamos que m es compuesto $\Leftrightarrow M = (m, -1) \in S$

si $M \in S \rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} / m = (a+1) \cdot (b+1)$ luego m es compuesto

y si m es compuesto, $m = p \cdot q$ con $p, q \in \mathbb{N} - \{1\}$ entonces

tomando $a = p-1$ y $b = q-1$ será $m = (a+1) \cdot (b+1)$ siendo $a, b \in \mathbb{N}$, luego $(m, -1) \in S$

De lo anterior el número de rectas a las que pertenece $M = (m, -1)$ será el número posible de formas con que se puede expresar $m = p \cdot q$ con $p, q \in \mathbb{N} - \{1\}$, es decir el número de divisores de m exceptuando 1 y m . Luego si

$$m = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\alpha_n} \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{N} \text{ y } a_i \in \mathbb{N} - \{1\} \quad \text{el número de divisores es } \prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$$

y así el número de rectas será $\prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1) - 2$.

Manuel E. Serrano Caballero (Segovia)

Recibida otra solución de Jesús Izal y Unai Garbisu (alumnos del I.B. "Irrubide" de Pamplona)

PROBLEMA N° 9 (Boletín n° 30)

La abscisa de un punto que se mueve en la parte positiva del eje de las x está dada por

$$x(t) = 5(t+1)^2 + a/(t+1)^5,$$

siendo a una constante positiva, ¿Cuál es el menor valor de a tal que $x(t) \geq 24$ para todo $t > 0$?

Solución:

Primeramente estudiaremos el crecimiento de $x(t)$. Para ello procederemos a hallar su primera derivada y a continuación estudiaremos su signo:

$$x'(t) = 10(t+1) - 5a/(t+1)^6 = [10(t+1)^7 - 5a]/(t+1)^6;$$

el denominador es siempre positivo, y por ello el signo de $x'(t)$ solo depende del numerador:

$$10(t+1)^7 - 5a > 0 \Leftrightarrow 10(t+1)^7 > 5a \Leftrightarrow (t+1)^7 > \frac{a}{2} \Leftrightarrow t > -1 + \sqrt[7]{\frac{a}{2}} \text{ con lo cual}$$

$$x'(t) > 0 \Leftrightarrow t > -1 + \sqrt[7]{\frac{a}{2}},$$

y como $x(t)$ será creciente si $x'(t) > 0$ y decreciente si $x'(t) < 0$, entonces:

$x(t)$ es creciente en el intervalo $(-1 + \sqrt[7]{\frac{a}{2}}, +\infty)$
 $x(t)$ es decreciente en el intervalo $(0, -1 + \sqrt[7]{\frac{a}{2}})$.

Esto implica necesariamente que $a \geq 2$ y también que habrá un mínimo en el punto $t = -1 + \sqrt[7]{\frac{a}{2}}$. Por consiguiente se verificará que $x(t) \geq 24$ para $t \geq 0$, si $x(-1 + \sqrt[7]{\frac{a}{2}}) \geq 24 \Leftrightarrow 5 \sqrt[7]{\frac{a}{2}} + a / \sqrt[7]{\frac{a}{2}} \geq 24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{5a}{2} + a \right] / \sqrt[7]{(a/2)^5} \geq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \frac{a}{2} \sqrt[7]{2^5} / \sqrt[7]{a^5} \geq 24 \Leftrightarrow a \geq 2 \sqrt[7]{(24/7)^7};$$

Por tanto tenemos que el valor buscado es $a = 2 \sqrt[7]{(24/7)^7}$.

Jesús Izal y Unal Garbisu
 (alumnos del I.B. "Irubide" de Pamplona)

PROBLEMA N° 10 (Boletín n° 30)

Se tienen dos semicircunferencias iguales y tangentes S_1 y S_2 de modo que sus diámetros se encuentran en una misma recta. Trazamos una tangente común a ambas r y dibujamos una circunferencia C_1 tangente a r , S_1 y S_2 , luego trazamos otra circunferencia C_2 tangente a C_1 , S_1 y S_2 . Así sucesivamente obtenemos una familia de circunferencias $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$

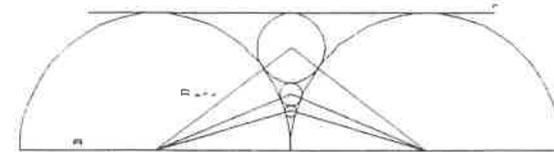
- a) Calcular el radio r_n de la circunferencia C_n en función de n y el radio R de S_1 y S_2 .
- b) Utilizar la construcción del problema para comprobar que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

Solución:

a)



Calculemos r_1 , según la figura adjunta se tiene

$$(R+r_1)^2 - (R-r_1)^2 = R^2 \rightarrow r_1 = \frac{R}{4}$$

análogamente para r_2 , $(R+r_2)^2 - (R-2r_1-r_2)^2 = R^2 \rightarrow (R+r_2)^2 - (R-\frac{R}{2}-r_2)^2 = R^2$

$$\rightarrow 3R r_2 - \frac{R^2}{4} = R^2 \rightarrow r_2 = \frac{R}{3 \cdot 4}$$

Demostremos que en general es $r_n = \frac{R}{2n(n+1)}$ (1)

Supongamos que se verifica (1) para todo $m \leq n$, calculemos el radio r_{n+1}

$$(R+r_{n+1})^2 - (R - \sum_{m=1}^n 2r_m - r_{n+1})^2 = R^2$$

y utilizando (1) $\sum_{m=1}^n 2r_m = \sum_{m=1}^n \frac{R}{m(m+1)} = R \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = R \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = R \frac{n}{n+1}$

entonces $(R+r_{n+1})^2 - (R - \frac{Rn}{n+1} - r_{n+1})^2 = R^2 \Rightarrow (R+r_{n+1})^2 - (\frac{R}{n+1} - r_{n+1})^2 = R^2 \Rightarrow$

$\rightarrow \frac{n+2}{n+1} R \left(\frac{n}{n+1} R + 2r_{n+1} \right) = R^2 \Rightarrow r_{n+1} = \frac{R}{2(n+1)(n+2)} \text{ c.q.d.}$

b) Por construcción debe ser $\sum_{n=1}^{\infty} 2r_n = R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n(n+1)} = R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \text{ c.q.d.}$

Manuel E. Serrano Caballero (Segovia)

PROBLEMA N° 11 (Boletín n° 30)

Para cada número natural n escribimos

$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$

definiéndose así las sucesiones de enteros $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$

a) Demostrar que a_n y b_n son impares para todo n

b) Demostrar que b_n es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos

$\frac{a_n + (-1)^n}{2}$ y $\frac{a_n - (-1)^n}{2}$

Solucion:

a) $(1+\sqrt{2})^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1}\sqrt{2} + \binom{2n+1}{2}2 + \binom{2n+1}{3}2\sqrt{2} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1}2^n\sqrt{2} =$
 $= \left(\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2}2 + \binom{2n+1}{4}2^2 + \binom{2n+1}{6}2^3 + \dots + \binom{2n+1}{2n}2^n \right) +$
 $+ \left(\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{3}2 + \binom{2n+1}{5}2^2 + \binom{2n+1}{7}2^3 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1}2^n \right) \sqrt{2} =$
 $(1+2) + ((2n+1)+2)\sqrt{2} = (1+2) + (1+2)\sqrt{2}$

Como $a_n = 1+2$, a_n es impar. Lo mismo sucede con b_n

b) Hay que demostrar que: $b_n^2 = \frac{(a_n + (-1)^n)^2}{4} + \frac{(a_n - (-1)^n)^2}{4} =$
 $= \frac{a_n^2 + 1 + 2a_n(-1)^n + a_n^2 + 1 - 2a_n(-1)^n}{4} \text{ o sea: } b_n^2 = \frac{a_n^2 + 1}{2} \quad (1)$

Hagamos la demostración por inducción:

Para efectuar esta demostración expresemos primero a_{n+1} y b_{n+1} en función de a_n y b_n :

$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{2(n+1)+1} = (1+\sqrt{2})^{2n+1} (1+\sqrt{2})^2 = (a_n + b_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) =$
 $3a_n + 2a_n\sqrt{2} + 3b_n\sqrt{2} + 4b_n = (3a_n + 4b_n) + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2}$

Por lo tanto,

$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$
 $b_{n+1} = 3b_n + 2a_n$

1) Suponiendo que (1) es cierto para n, veamos si lo es para n+1:

$b_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{2} \Leftrightarrow (3b_n + 2a_n)^2 = \frac{(3a_n + 4b_n)^2 + 1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 18b_n^2 + 8a_n^2 + 24a_nb_n = 9a_n^2 + 16b_n^2 + 24a_nb_n + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2b_n^2 - a_n^2 = 1$

Como estamos suponiendo que (1) es cierto para n, podemos

sustituir b_n por $\frac{a_n^2 + 1}{2}$, resultando:

$\Leftrightarrow 2 \frac{a_n^2 + 1}{2} - a_n^2 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$

Luego si se cumple para n, la propiedad también se cumplirá para n+1. Ahora sólo queda demostrar que se cumple para el primer término.

2) Para n=1 comprobamos que es cierta, ya que:

$a_1 = \binom{3}{0} + 2\binom{3}{2} = 7$
 $b_1 = 2\left(\binom{3}{1} + \binom{3}{3}\right) = 5$
 $5^2 = \frac{7^2 + 1}{2}$

Vemos que para n=0 también se cumple ya que $a_0 = 1, b_0 = 1, 1^2 = \frac{1^2 + 1}{2}$

Por lo tanto queda demostrado por inducción lo pedido en la parte b del enunciado.

José Tomás Baeza Oliva (Alumno de 3° de BUP
 en el I.B. Avda de los Toreros (Madrid)

Recibida otra solución de Manuel E. Serrano Caballero

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.
- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluimos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.
- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.
- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.
- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *