

Sociedad Puig Adam



boletín num. 34
Julio de 1993

de profesores
de Matemáticas

Sociedad Puig Adam



boletín num. 34
Julio de 1993

de profesores
de Matemáticas

BOLETIN DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM"
DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Julio de 1993

n^o 34 (1992-93)

	INDICE	Pág
- Toda la correspondencia deberá dirigirse al	NUESTRA ASAMBLEA GENERAL	3
	NOTICIAS	5
	XI CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS	9
	XXIX OLIMPIADA MATEMATICA ESPANOLA (Fase final)	17
	ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CUBICAS CIRCULARES, por Julio Fernández Biarge	21
	DESARROLLO DE FUNCIONES PARA POLINOMIOS EN DERIVE, por E. Roanes Macías y E, Roanes Lozano	39
	HISTORIA DE LA CARTOGRAFIA ESPANOLA, por Concepción Romo Santos	47
	DEMOSTRACION AUTOMATICA DE UN TEOREMA SOBRE 3 CIRCUNFERENCIAS, por E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías	55
	PROBLEMAS PROPUESTOS	71
	PROBLEMAS RESUELTOS	75

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.
NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Apartado n^o 9479
28.080 -- MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de J. Fernández Biarge

- La figura que aparece en la portada es una carta del año 1606 que ilustra el artículo de Concepción Romo Santos que aparece en este número.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

Jose Vicente García Sestafe

Vicepresidente por Madrid:

Jose Manel Martínez Sánchez

Vicepresidente por Castilla - La Mancha:

Salvador Herrero Pallardo

Vicepresidente por Castilla - León:

Juan Bosco Romero Márquez

Vocal de actividades y concursos:

Juan Ochoa Mérida

Vocal de relaciones institucionales:

Eugenio Roanes Macías

Vocal de gestión de publicaciones:

Carmen García-Miguel Fernández

Vocal de redacción de publicaciones:

Julio Fernández Biarge

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Enrique Rubiales Camino

Tesorero:

Alberto Aizpún López

Bibliotecario:

Jesus Begoña Aina

- - - - -

ASAMBLEA GENERAL

Nuestra *Asamblea General Ordinaria* correspondiente a 1993 se celebró el día 29 de abril, en los locales de la Escuela de Formación del Profesorado de E.G.B. "*Pablo Montesino*" de la Universidad Complutense de Madrid.

Presidida por don José Vicente García Sestafe, dió comienzo a las 11h. 30m., y se desarrolló con arreglo al siguiente Orden del Día:

Punto primero: Se leyó el acta de la Asamblea anterior, que fué aprobada por unanimidad.

Punto segundo: El Presidente expuso las dificultades que se encuentran para que algunos miembros de la Junta Directiva de la Sociedad lleven a buen término las misiones cuya responsabilidad les está encomendada. Los asistentes le encomendaron que se ponga en contacto con ellos para aclarar la situación.

Punto tercero: El Presidente informó sobre las actividades habituales de la Sociedad, realizadas con normalidad: La publicación del Boletín y el Concurso de Resolución de Problemas. Manifestó que el Boletín ha alcanzado ya el número 33 y que nuestro **XI Concurso**, ya convocado, se celebrará en la E. U. "*Pablo Montesino*", por dificultades habidas para utilizar el local habitual del I. B. "*Beatriz Galindo*", al celebrarse en Sábado y no disponerse del personal subalterno necesario. Señaló que se habían modificado levemente las bases de la convocatoria, admitiendo seis alumnos, elegidos arbitrariamente por cada Centro, y ampliando a toda España el ámbito geográfico, e informó que ya había 41 centros preinscritos.

El socio don Eugenio Roanes Macías señaló que tanto la Fase de Distrito de Madrid como la Fase Final de la Olimpiada Matemática Española, han sido organizadas y desarrolladas por miembros de la Sociedad. La Asamblea cree oportuno que conste en Acta este hecho.

Punto cuarto: Nuestro Tesorero, don Alberto Aizpún, distribuyó entre los asistentes unas hojas con las incidencias económicas del ejercicio anterior, detallando los ingresos y gastos de la Sociedad, que explicó detenidamente. Se refirió después a los casos de los socios recién admitidos y de los recibos devueltos, que ocasionan importantes gastos. Informó de las gestiones realizadas con Caja Madrid, para conseguir que estos gastos se reduzcan y, por sugerencia del señor Roanes Macías, la Asamblea se pronunció a favor del cambio a dicha entidad.

Punto quinto: El Presidente planteó la posibilidad de que la Sociedad inicie nuevas actividades relacionadas con la educación matemática, además de las consideradas en el punto tercero. Don Eugenio Roanes Macías informa de la idea surgida entre los profesores que forman la sección departamental de Álgebra de la E. U. "Pablo Montesino", sobre la posibilidad de organizar una reunión científica (congreso, ciclo de conferencias, etc.), conjuntamente o con la posible colaboración de la Real Sociedad Matemática Española. El Presidente solicitó la presentación de propuestas de adhesión o colaboración. El señor don Víctor Manuel Sánchez ofreció la infraestructura del Colegio de Licenciados para lo que hiciese falta. Inicialmente, se consideró que la fecha adecuada para un encuentro de este tipo sería la del próximo mes de Marzo.

Punto sexto: En el turno de Ruegos y Preguntas, la Señora doña María Dolores de Prada sugirió que la Sociedad diese salida a documentos institucionales relativos a las diferentes realidades de la Educación Matemática. El Presidente apuntó que un grupo de socios podría plantear y preparar una moción para que se convoque la Asamblea Extraordinaria correspondiente que emita los comunicados institucionales oportunos. El señor don Juan Bosco Romero y la señora doña María Dolores de Prada coinciden en la necesidad urgente de acciones en Enseñanzas Medias. El señor don Eugenio Roanes Macías apunta a que el Congreso antes citado podría ser el marco adecuado para tratar de esos temas. La Asamblea acordó la formación de una Comisión que prepare la ponencia oportuna: la componen inicialmente doña Carolina Cuartero, doña María Dolores de Prada, don José Ramón Vizmanos, don Juan Bosco Romero y don Víctor Manuel Sánchez.

Se planteó también la oportunidad de reeditar los números atrasados del Boletín ya agotados, de modo que estén disponibles para el futuro Congreso.

La sesión se levantó a las 13h. 15m.

NUESTRAS RELACIONES CON LA FEDERACION ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS

Como ya se informó en el Boletín número 31, la cuota total de asociado para este curso, fué incrementada en 1500 pesetas, cantidad que representa la contribución personal al sostenimiento de la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*, en la que nuestra "*Puig Adam*" se integró.

Esa cuota concede una rebaja sustancial en el coste de la inscripción de los Encuentros, Congresos, Jornadas, etc. que la Federación organiza y el derecho a recibir sus publicaciones.

Nuestra Sociedad ha formalizado ya el traspaso de las mencionadas cuotas a la Tesorería federativa, en nombre de sus asociados, por lo que éstos recibirán en sus domicilios los números de la Revista **SUMA** correspondientes al presente curso. En ella aparecerán noticias sobre cuantas actividades se vayan anunciando en el ámbito de la Enseñanza de las Matemáticas, tanto en nuestro país como en el resto del mundo.

Con la incorporación de la Sociedad de Tarragona, actualmente en trámite, serán ya doce las Sociedades de Profesores de Matemáticas integradas en la Federación.

8º ICME

Como anunciamos en nuestro anterior Boletín, el 8º Congreso de la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICME), se celebrará en Sevilla. La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, a la que pertenecemos, está encargada de la preparación de este Congreso y nos pide, como a las restantes Sociedades integradas en ella, nuestra colaboración en su organización. Antes del 30 de Septiembre, cada Sociedad debe designar a la persona que la represente en el Comité Nacional de dicho Congreso. Por nuestra parte debemos ir preparando la lista de socios que hayan de participar como conferenciantes, coordinadores, expositores, etc. o que piensen presentar comunicaciones.

Aún no se han fijado las cuotas de inscripción, pero se ha acordado que para los socios de la Federación quedarán reducidas a los 2/3, si se formalizan antes de Junio de 1995. En el mes de Noviembre de 1993 se constituirá el Comité Local y en Diciembre, el Nacional.

Es importante que los socios que estén interesados en participar en este Congreso o quieran hacernos llegar alguna sugerencia acerca de nuestra presencia en él, se pongan en contacto con los miembros de nuestra Junta Directiva, a la mayor brevedad.

LIBROS

La Editorial MIR ha anunciado la inminente publicación de la versión española de la ENCICLOPEDIA DE LAS MATEMATICAS de la Academia de Ciencias de Moscú, revisada y puesta al día en 1993. Esta obra, dirigida por el profesor VINOGRADOV, consta de 10 volúmenes (de 20 X 26,5 cm), con más de 4.300 páginas y de 6.300 artículos, ordenados alfabéticamente. Aparecerán dos tomos al año, comenzando en Octubre próximo.

XIII C.E.D.Y.A III Congreso MATEMATICA APLICADA

Este Congreso se celebrará los días 13, 14 y 15 de Septiembre de 1993. Tendrá su sede en la E.T.S. de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid.

Además de las sesiones ordinarias en las que los participantes presentarán oralmente sus comunicaciones, se tiene previsto un amplio programa de conferencias sobre Matemática Aplicada, del que damos noticia a continuación:

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| S.N. Antonev
<i>Mathematical Models of Multiphase Filtration</i> | Univ. de Novossibirsk |
| A. Bermúdez de Castro
Tema pendiente de confirmación | Univ. de Santiago |
| R. de la Llave
<i>Trends in Experimental Mathematics</i> | Univ. of Texas at Austin |
| J.L. Vázquez
<i>Asymptotic Behavior of Nonlinear Parabolic PDE's: A survey</i> | Univ. Autónoma de Madrid |
| J.M. Vega de Prada
<i>Dinámica débilmente no lineal de puentes líquidos en ingravidez</i> | Univ. Politécnica de Madrid |
| J. Whiteman
<i>Finite Element Methods with Recovery and Superconvergence</i> | Brunel University |

El Secretario del Comité Organizador es D. Julián Herranz, del Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos de la E.T.S. de Ingenieros de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid (c/ Ríos Rosas, 21 28003-Madrid. FAX (91) 336 70 51).

OLIMPIADAS INTERNACIONALES

La Olimpiada Matemática Internacional se va a celebrar este año en Turquía, en este mes de Julio y la Iberoamericana de Matemáticas en Méjico, entre los meses de Septiembre y Octubre. En ambas estarán presentes los españoles seleccionados a través de nuestra Olimpiada nacional, a los que deseamos unos brillantes resultados. Daremos noticias de su desarrollo en el próximo número de este Boletín.

EL ULTIMO TEOREMA DE FERMAT

La prensa del mes de Junio nos trajo de nuevo la noticia de que el llamado "*Ultimo teorema de Fermat*" había sido demostrado. Ya en Marzo de 1988 se publicó en todo el mundo que el matemático japonés **Yoichi Miyayoka** lo había conseguido; un mes más tarde se supo que se habían encontrado lagunas en la pretendida demostración, que la hacían inválida y que los esfuerzos de los matemáticos por subsanar los fallos encontrados no dieron fruto. Véase, en relación con ésto el artículo de "**Juan Lobo**" publicado en el número 18 de nuestro *Boletín*.

Como todos saben, se trata de la afirmación de que la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no admite soluciones enteras positivas, si n es mayor que 2. La demostración, que había resistido los esfuerzos de los matemáticos hasta el presente, afirma haberla encontrado **Andrew Wiles**, profesor de 40 años de la Universidad de Princeton, tras siete años de trabajo centrado en el tema, aunque afirma que toda su vida, desde los 10 años, ha estado obsesionado por el problema.

El anuncio hecho por el profesor **Wiles** ha causado gran conmoción en el mundo matemático, y su demostración está siendo minuciosamente examinada por los especialistas. Celebraríamos que esta vez no se encuentren fallos y la conocida afirmación de Fermat pueda ya llamarse Teorema con toda propiedad.

XI CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

El *XI Concurso de Resolución de Problemas*, convocado por nuestra Sociedad y por el *Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras*, se celebró, como estaba anunciado, el sábado, 26 de Junio de 1993, en los locales de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E. G. B. "*Pablo Montesino*", de la Universidad Complutense de Madrid, que nos fueron amablemente cedidos por su dirección para ese acto.

Este año, cada centro podía enviar hasta un total de seis participantes, para los tres cursos. El número de centros preinscritos fué de 43, y el total de alumnos seleccionados que concurrieron a las pruebas fué de 121, número parecido al de años anteriores. Por cursos, 35 de Primero, 38 de Segundo y 48 de Tercero. Señalaremos que este año han concursado alumnos de un Centro de Orense y de otro de Alicante, además de los procedentes de las provincias de nuestro ámbito geografico.

A los alumnos de cada curso se les propusieron cuatro problemas, para resolverlos en dos tandas de dos horas cada una. Damos los enunciados al final de esta crónica.

La entrega de premios y diplomas se realizó en la tarde del mismo día de las pruebas. En ese acto, que estuvo muy concurrido, nuestro Presidente pronunció unas palabras de felicitación a los ganadores y de agradecimiento a todos los participantes y colaboradores, con especial mención a la firma "*Coca-Cola*" de España que, como en años anteriores, ha costeado los premios entregados a los ganadores.

Damos a continuación la lista de alumnos premiados, con indicación del Centro que lo presentó y la puntuación alcanzada. Debe notarse que la máxima que podía alcanzarse era de 40 puntos.

PRIMER CURSO:

- 1° - Alfredo NUERO SICILIA, del Colegio de los HH. Maristas San José del Parque (Madrid) 15 puntos
- 2° - Juan Manuel VAZQUEZ VAZQUEZ, del I.B. Eduardo Blanco Amor (Orense) 15 puntos
- 3° - Irene DONAIRE VILLA, del Colegio JOYFE (Madrid) 10 puntos
- 4° - Alejandro PASCUAL GARCIA AJOFRIN, del Colegio Retamar (Pozuelo - Madrid) 10 puntos
- 5° - Guillermo ABIZURI ACHUCARRO, del Colegio El Prado (Madrid) 10 puntos

SEGUNDO CURSO:

- 1° - Fernando KEY MARTIN, del I. B. "Joaquin Turina" (Madrid) 17 puntos
- 2° - Felix SALCEDO URESTE, del Colegio Retamar (Pozuelo - Madrid) 14 puntos
- 3° - Juan Francisco MARTIN GARCIA, del I. B. "Caro Baroja" (Fuenlabrada - Madrid) 13 puntos
- 4° - Pedro CASATEJADA HERRERA, del Colegio San Viator (Madrid) 13 puntos
- 5° - Gorka BRIONES ARALUCE, del Colegio Berriz (Las Rozas - Madrid) 13 puntos

TERCER CURSO:

- 1° - David SEVILLA GONZALEZ, del I. B. "Luis Buñuel" (Alcorcón - Madrid) 35 puntos
- 2° - Gonzalo RUEDA RODRIGUEZ, del I. B. "Ramiro de Maeztu" (Madrid) 22 puntos
- 3° - Eduardo FULLEA CARRERA, del Colegio Menesiano (Madrid) 20 puntos
- 4° - Jose Tomás BAEZA OLIVA, del I. B. "Avenida de los Toreros" (Madrid) 19 puntos
- 5° - Maria Dolores JADO GARCIA-CALBELO, del Colegio Orvalle (Las Rozas - Madrid) 17 puntos

Señalaremos que David SEVILLA GONZALEZ, fué también premiado en 1992 como alumno de Segundo y en 1991 como alumno de Primero, se clasificó en segundo lugar del distrito de Madrid en la Olimpiada Matemática Española y en cuarto en la Fase Final (siendo alumno de 3° de B.U.P.), por lo que podrá participar en las próximas competiciones internacionales.

Igualmente, José Tomás BAEZA OLIVA, premiado ahora como alumno de Tercero, lo fué como alumno de Segundo en 1992.

Para que nuestros lectores puedan juzgar sobre la dificultad que la resolución de cada problema propuesto ha supuesto para los concursantes, damos, tras cada enunciado, la media de las puntuaciones obtenidas en ese problema por todos los participantes y de las alcanzadas por los premiados.

Del simple examen de los resultados se desprende que el nivel medio de los participantes ha sido bajo, ya que la mayor parte de los problemas propuestos no eran demasiado difíciles y, si bien la naturaleza de algunos no era semejante a la de los que se utilizan habitualmente en el Bachillerato, tampoco era extraña a la de los más sencillos que se proponen en las

Olimpiadas Matemáticas, para las que este Concurso viene siendo una eficaz preparación.

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos:

PRIMER CURSO

PROBLEMA 1º: Verificar que la suma

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{20}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9965} + \sqrt{9970}}$$

es igual a una fracción cuyo denominador es $\sqrt{5} + \sqrt{9970}$ ¿ Cual es su numerador ?

- Media de puntuaciones: Todos, 1,5 ; Premiados, 9,6

PROBLEMA 2º: Calcular el perímetro de un rectángulo del que se sabe que, mediante segmentos paralelos a los lados, es descomponible en diez cuadrados de lados 3 , 5 , 6 , 11 , 17 , 19 , 22 , 23 , 24 y 25 unidades de longitud.

Dibújese un rectángulo como el mencionado, señalando la colocación de los cuadrados, aunque no se haga el dibujo a escala.

- Media de puntuaciones: Todos, 2,3 ; Premiados, 3,4

PROBLEMA 3º: Razonar que los números $3m + 1$, $4m - 5$, $17m - 15$ y $30m - 15$ no son cuadrados perfectos para el mismo valor de m , entero positivo.

- Media de puntuaciones: Todos, 0,3 ; Premiados 0,-

PROBLEMA 4º: El área de un triángulo equilátero es conocida e igual a S . Se dibuja su círculo inscrito y se van dibujando sucesivamente, en el interior del triángulo, nuevos círculos, cada uno tangente a dos de los lados y a alguno de los círculos ya dibujados. Calcular el valor al que puede irse acercando, tanto como se desee, la suma de las áreas de los círculos que se van dibujando de esa manera.

- Media de puntuaciones: Todos, 0,8 ; Premiados 0,8

SEGUNDO CURSO

PROBLEMA 1º: El conjunto de los números naturales menores que 10^n se descompone en dos subconjuntos A y B . Pertenecen a A todos los números que se escriben sin utilizar la cifra 5 y a B todos en los que figura, al menos una vez, dicha cifra. Deducir razonadamente quien es mayor, si el cardinal de A o el cardinal de B , según el valor de n .

NOTA: Puede ayudar a la resolución saber que:

$$\log 2 = 0,3010\dots \text{ y } \log 3 = 0,4771\dots,$$

donde \log es el logaritmo decimal.

- Media de puntuaciones: Todos, 1,7 ; Premiados 4,6

PROBLEMA 2º: Se da una pirámide regular cuya base es un cuadrado $ABCD$. Siendo V el vértice de la pirámide, se traza un plano que pasa por la arista AB y por el punto M , que es el punto medio de la arista VC . Hallar la razón de los volúmenes de los dos cuerpos en que dicho plano divide a la pirámide.

- Media de puntuaciones: Todos, 0,9 ; Premiados 1,4

PROBLEMA 3º: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x^2y + 2xy^2 = 21,489 \\ x^2 + y^2 + xy = 7,41 \end{cases}$$

- Media de puntuaciones: Todos, 1,7 ; Premiados, 4,6

PROBLEMA 4º: Se da el cuadrado $ABCD$ de lado a . En la recta que contiene al lado BC , se toma el punto M , tal que BM es triple de MC . En la recta que contiene al lado CD se toma el punto N , tal que CN es la mitad de ND . Hallar el lado del cuadrado equivalente al triángulo AMN en los casos siguientes:

1º) M y N están sobre los lados AB y CD , repectivamente.

2º) M y N están sobre las prolongaciones de los lados correspondientes.

3º) M está en la prolongación de BC y N entre C y D .

- Media de puntuaciones: Todos, 0,6 ; Premiados, 3,4

TERCER CURSO

PROBLEMA 1º: Se da un cuadrado ABCD de lado a . Sobre sus lados AB , BC , CD , DA , se toman, respectivamente, los puntos M, N, P, Q, de modo que los segmentos AM , BN , CP , DQ sean iguales, de longitud h (h < a).

Se trazan los segmentos AN , BP , CQ y DM , con lo que el cuadrado queda descompuesto en nueve polígonos.

Razonar que uno de esos polígonos es un paralelogramo y hallar su área.

- Media de puntuaciones: Todos, 4,1 ; Premiados, 8,8

PROBLEMA 2º: Se da la función que asocia a cada número real x , el valor

$$f(x) = \begin{cases} x , & \text{si es } x \leq 0 . \\ 2^n , & \text{si } 2^{n-2} < x \leq 2^{n+1} \end{cases} \quad (n \text{ entero}).$$

Calcular el valor de la integral $\int_0^{2^n} f(x)dx$ y compararla con el de la $\int_0^{2^n} x dx$.

- Media de puntuaciones: Todos, 0,6 ; Premiados, 2,6

PROBLEMA 3º: Sean α y β dos circunferencias de centros A y B , no coincidentes, y radios a y b , tales que β sea interior a α . Es claro que existen en el plano circunferencias tangentes exteriormente a β y tangentes interiormente a α . Determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que verifican esas dos condiciones (es decir, estudiar donde se encuentran los centros de dichas circunferencias).

- Media de puntuaciones: Todos, 0,7 ; Premiados, 3,2

PROBLEMA 4º: Una casa tiene 8 pisos incluido el bajo; se suben en el ascensor 5 personas en el piso bajo. Admitiendo que la probabilidad de apearse cada persona cada piso es la misma e independiente de donde se apeen las restantes, se pide:

1º) Probabilidad de que las cinco personas se apeen en pisos distintos.

2º) Probabilidad de que tres personas se apeen en el mismo piso y las otras dos en otro distinto del anterior.

- Media de puntuaciones: Todos, 1,4 ; Premiados, 8,0

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMATICAS
Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

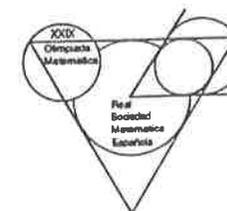
Concurso de Resolucion de Problemas de nuestra Sociedad		
n° (año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I (1983)	1	2 , pág. 11
II (1984)	3	4 , pág. 7
III (1985)	5	7 , pág. 3
IV (1986)	9	10 , pág. 5
V (1987)	13	15 , pág. 3
VI (1988)	17	19 , pág. 17
VII (1989)	20	22 , pág. 9
VIII (1990)	24	26 , pág. 3
IX (1991)	27	29 , pág. 3
X (1992)	30	32 , pág. 3
XI (1993)	33	34 , pág.

Olimpiada Matemática Española		
n° (año)	1ª fase (distritos)	2ª fase (final)
XX (1984)	--	3, pág. 77
XXI (1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII (1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII (1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV (1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV (1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI (1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII (1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII (1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX (1992-93)	33, págs. 5 y 71	34, págs. 17 y 71

Olimpiada Iberoamericana de Matematicas		
n° (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín n°	
I (1986) Colombia	8	págs. 11 y 83
II (1987) Paraguay	12	págs. 3 y 75
III (1988) Perú	18	págs. 5 y 73
IV (1989) Cuba	21	págs. 11 y 63
V (1990) España(Valladolid)	26	págs. 13 y 73
VI (1991) Argentina	30	págs. 15 y 65
VII (1992) Venezuela	32	págs. 11 y 71

Olimpiada Matematica Internacional		
n° (año) lugar	Crónica y enunciados en boletín n°	
XXIV (1983) París	2	pág. 15
XXV (1984) Praga	4	pág. 67
XXVI (1985) Helsinski	7	págs. 9 y 89
XXVII (1986) Varsovia	10, pág. 11 y 11,	pág. 89
XXVIII (1987) Cuba	15,	págs. 9 y 73
XXIX (1988) Australia	19,	págs. 23 y 77
XXX (1989) Alemania (R.F.A.)	22,	págs. 15 y 73
XXXI (1990) China	26,	págs. 11 y 71
XXXII (1991) Suecia	29,	págs. 11 y 79
XXXIII (1992) Rusia	32,	págs. 9 y 69

XXIX OLIMPIADA
MATEMATICA
ESPAÑOLA



FASE FINAL

Como estaba anunciado, las pruebas de la Segunda Fase de la "XXIX Olimpiada Matemática Española", correspondientes al curso 1992-93 se celebraron en Madrid y en las Canarias, los días 26 y 27 de Febrero de 1993.

Recordaremos que esta Olimpiada está organizada por la Real Sociedad Matemática Española, bajo el patrocinio de la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.

En esta Fase Final participaron 65 de los 67 alumnos clasificados en la Primera Fase en los distintos distritos de toda España. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, en dos sesiones; en cada una de ellas, de cuatro horas de duración, se propusieron tres problemas, cuyos enunciados pueden verse en nuestra sección de Problemas Propuestos, en este Boletín. Como cada problema se calificó entre 0 y 10, se podían alcanzar hasta 60 puntos.

El jurado seleccionó los seis ganadores cuyos datos damos a continuación:

- 1º: Alvaro BEGUÉ AGUADO, primer seleccionado de Valladolid, 55 puntos
2º: Miguel CARRIÓN ÁLVAREZ, primer seleccionado de Madrid (A) 49 puntos

- 3º: Antonio ROJAS LEON, primer seleccionado de Sevilla 44 puntos
- 4º: David SEVILLA GONZÁLEZ, de 3º de B.U.P, primer seleccionado de Madrid (B) 43 puntos
- 5º: Antonio SÁNCHEZ ESGUEVILLAS, segundo seleccionado de Valladolid 41 puntos
- 6º: David CASTELL BURGALETA, primer seleccionado de Castellón 40 puntos

Obtuvieron puntuaciones próximas a las de los anteriores, estos otros tres participantes:

- 7º: Alfonso GRACIA SAZ, tercer seleccionado de Zaragoza 39 puntos
- 8º: Nicolàs Hatcher Andrès, primer seleccionado de Logroño 38 puntos
- 9º: Carlos Bento Sánchez, tercer seleccionado de Madrid (A) 37 puntos

Siguen a éstos, Roberto FERNÁNDEZ GONZÁLEZ (León), Juan Jesús GARCÍA DE SORIA LUCENA (Cádiz), Tomás PRIETO RUMEAU (Madrid-A) y Carlos UNGIL GUTIÉRREZ-RAVE (Zaragoza), todos ellos con 35 puntos, y Luis FUENTES GARCIA (Galicia) y Eduardo VILLOSLADA DE LA TORRE (Valladolid), con 34.

Recordamos que el campeón, Carlos BEGUÉ AGUADO, lo fué también el año pasado, en el que participaba como alumno de 3º de B.U.P., y tras una actuación digna en la XXXIII Olimpiada Matemática Internacional (Moscú), obtuvo medalla de plata en la VII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Ver nuestro Boletín 32). Esperamos que este año supere los éxitos alcanzados en esas competiciones internacionales.

Señalaremos también que el cuarto clasificado, David SEVILLA GONZÁLEZ, cursa este año 3º de B.U.P., y obtuvo el tercer premio, como alumno de 2º, en nuestro Concurso de Resolución de Problemas de 1992 y el primer premio, como alumno de 1º, en el de 1991. También Carlos BENTO SÁNCHEZ, situado en 9º lugar, fué el tercero, como alumno de 3º de B.U.P., en ese Concurso de 1992.

Para que nuestros lectores puedan valorar la dificultad relativa de los problemas propuestos, damos a continuación una tabla con las medias de las puntuaciones alcanzadas por la totalidad de los presentados y por los seis premiados en cada uno de esos problemas:

Problema	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Puntuación media:						
de todos	6,0	7,9	1,5	2,3	3,8	3,8
de los 6 mejores	8,2	9,5	5,0	7,8	6,7	8,2

Damos la enhorabuena a los ganadores y a los Centros que se han esforzado en su preparación, y deseamos que en las próximas competiciones internacionales, consigan para España los galardones que sin duda merecen.

- - - - -

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS
CÚBICAS CIRCULARES
por Julio Fernández Biarge

8. LAS CUBICAS CIRCULARES.

Este artículo es continuación del titulado "Algunas propiedades de las cúbicas", al que nos referiremos frecuentemente, por lo que hemos numerado los párrafos, teoremas y figuras de éste como consecutivos a los de de aquel.

Trabajaremos en el plano euclídeo obtenido a partir de un plano proyectivo complejo, en el que se ha fijado un absoluto, constituido por una recta impropia o del infinito y, sobre ella, un par de puntos imaginarios conjugados, denominados puntos cíclicos. Las rectas propias imaginarias que pasan por uno de los puntos cíclicos, se denominan, como es sabido, rectas isotropas. Adoptaremos un sistema de coordenadas cartesianas homogéneas $\{ x_0, x_1, x_2 \}$, de tal modo que la recta impropia sea la $x_0 = 0$, y que los puntos cíclicos satisfagan a $\{ x_0 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 0 \}$. A los puntos cíclicos los representaremos a veces con los símbolos C, \bar{C} (emplearemos la raya encima para representar el conjugado complejo).

Denominaremos cúbicas circulares a aquellas cuya ecuación, $\Gamma = 0$ (cúbica de coeficientes reales), se satisfaga para los puntos cíclicos. La ecuación general de las cúbicas circulares será, en consecuencia,

$$(x_1^2 + x_2^2)h + x_0f = 0, \quad [2]$$

donde h es una forma lineal en x_1, x_2 y f una forma cuadrática en x_0, x_1, x_2 (arbitrarias, con coeficientes reales). Las cúbicas circulares pueden

degenerar en una recta propia y una circunferencia (quizás de radio nulo, o sea constituida por dos rectas isotropas) o en la recta impropia y una cónica cualquiera (quizás degenerada).

9. LAS CUBICAS CIRCULARES, SUS ASINTOTAS Y SU FOCO

Toda cúbica circular Γ , de ecuación [2], no degenerada, tiene una asíntota real, que es su tangente en el punto impropio definido por $\{x_0 = 0, h = 0\}$. En todo lo que sigue, representaremos ese punto con la notación A_∞ y la asíntota con el símbolo α ; con este mismo símbolo representaremos también una forma lineal que permite escribir la ecuación de esa asíntota como $\alpha = 0$, empleando también el símbolo α para denominar dicha asíntota. De acuerdo con la notación establecida en el punto 2., la intersección de Γ con su asíntota α se denominaría A_∞^* , pero simplificaremos su notación a A^* y lo llamaremos punto asíntótico de Γ . Si A_∞ es de inflexión, A^* coincide con A_∞ y no existe punto asíntótico propio.

La cúbica circular Γ (si no forma parte de ella la recta impropia), tiene además otras dos asíntotas imaginarias, tangentes a ella en los puntos cíclicos. Son dos rectas isotropas, imaginarias conjugadas, que se cortarán en un punto real. Representaremos este punto con la letra F y lo llamaremos foco de la cúbica circular. Los puntos de intersección con Γ de las dos asíntotas isotropas, son dos puntos imaginarios conjugados C^* y \bar{C}^* . Como C, \bar{C} y A_∞ están alineados en $x_0 = 0$, los puntos C^* y \bar{C}^* , según el Teorema 6^o, estarán alineados con A^* . La recta (real) que pasa por ellos la representaremos con el símbolo β y la llamaremos directriz de Γ . Con β representaremos también una forma lineal que permite escribir su ecuación como $\beta = 0$. Si las coordenadas

del foco son (f_0, f_1, f_2) , el par de asíntotas isotropas vendrá representado por $\phi = 0$, donde ϕ es la forma cuadrática:

$$\phi = (f_0x_1 - f_1x_0)^2 + (f_0x_2 - f_2x_0)^2.$$

En consecuencia, las cúbicas degeneradas $\beta x_0^2 = 0$ y $\phi\alpha = 0$ cortan a Γ en los mismos nueve puntos, con lo que la ecuación de la cúbica se puede escribir en la forma

$$\phi\alpha + \lambda\beta x_0^2 = 0 \tag{3}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

La interpretación métrica de la ecuación [3], escrita en coordenadas no homogéneas, es muy simple. Los valores de α y β son las distancias de (x_1, x_2) a la asíntota y a la directriz, multiplicadas por constantes y el valor de ϕ es el cuadrado de su distancia al foco por otra constante. En consecuencia podemos enunciar el

Teorema 13^o: Una cúbica circular no degenerada es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a dos rectas dadas (directriz β y asíntota α) es proporcional al cuadrado de la distancia a un punto dado (foco F). (El punto de intersección A^* de las rectas dadas pertenece a la cúbica y es, por tanto, su punto asíntótico).

Como corolario de este teorema se obtiene el:

Teorema 14^o: Dos puntos de una cúbica circular Γ están alineados con su punto asíntótico A^* si y solo si equidistan del foco F de Γ .

En efecto (Figura 10^a), el punto A^* es la in-

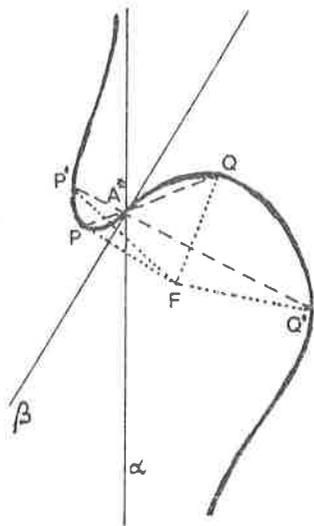


Figura 10^o

dentes), resulta el:

Teorema 15^o: Los pies de las normales trazadas desde el foco a la cúbica Γ son los puntos N de ella (propios) tales que N^* coincide con A^* .

10. CUBICAS CIRCULARES, CIRCUNFERENCIAS E INVERSIONES.

Una cúbica circular Γ y una circunferencia γ (de ecuación $\gamma = 0$) tienen 6 puntos de intersección, dos de los cuales son los cíclicos C y \bar{C} . Sean los otros cuatro M_1, M_2, N_1, N_2 y sean $m = 0, n = 0$ las ecuaciones de las rectas M_1M_2 y N_1N_2 (Figura 11^a). Llamemos M_0 y N_0 a los

tersección de α y β y el que dos puntos P y Q (o P' y Q') estén alineados con A^* significa que sus razones de distancias a esas dos rectas es la misma, por lo que también deben ser iguales sus distancias al foco F . Con la notación establecida al final del punto 4., el Teorema 14^o se puede enunciar diciendo que para cada $P \in \Gamma$, P y $f_{A^*}(P)$ equidistan de F .

Como caso límite del Teorema 14^o (cuando los puntos P y Q se hacen coincidentes),

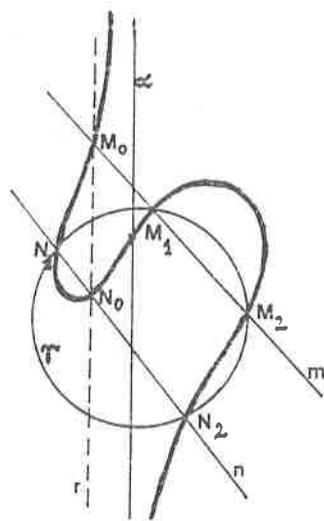


Figura 11^a

terceros puntos de intersección con Γ de m y n , respectivamente, y sea $r = 0$ la ecuación de la recta M_0N_0 . La cúbica $mnx_0 = 0$ corta a Γ en los puntos $M_0, M_1, M_2, N_0, N_1, N_2, C, \bar{C}, A_\infty$; la cúbica $\gamma r = 0$ corta a Γ en los ocho primeros, con lo que según el Teorema 1^o, pasará también por el noveno, A_∞ . Dicho de otro modo, la recta M_0N_0 es paralela a la asíntota, o con la notación del punto 4., $N_0 = f_{A^*}(M_0)$. Resulta así el:

Teorema 16^o: Si dos rectas m y n cortan a la cúbica circular no degenerada Γ , respectivamente en los puntos M_0, M_1, M_2 y N_0, N_1, N_2 , la condición necesaria y suficiente para que cuatro de ellos M_1, M_2, N_1, N_2 sean concíclicos es que la recta M_0N_0 , que une los otros dos, sea paralela a la asíntota.

Este teorema tiene un caso límite importante: aquel en el que M_0 y N_0 coinciden en un punto O , con lo que la recta r pasa a ser tangente a Γ en O , paralela a la asíntota (Figura 12). Al ser concíclicos M_1, M_2, N_1, N_2 , resulta $\frac{OM_1 \cdot OM_2}{ON_1 \cdot ON_2} = \text{constante}$. Fijada la recta m y al ser n arbitraria por O , se deduce que este producto es constante. Resulta así el:

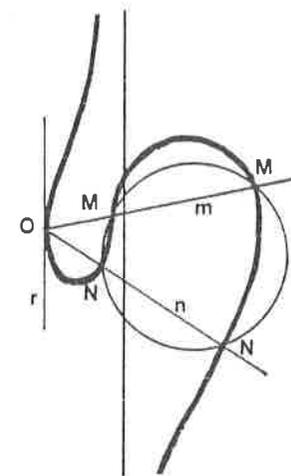


Figura 12^a

Teorema 17^o: Si la tangente a una cúbica circular Γ en su punto O es paralela a su asíntota, existe una inversión de polo en O que transforma Γ en sí misma. Es decir, las cúbicas circulares con una tangente paralela a su asíntota son analgmáticas.

Este teorema es muy conocido, pero suele darse una demostración mucho más penosa que la mostrada aquí.

A los puntos (tales como el O) con tangente paralela a la asíntota de una cúbica circular Γ (es decir, a aquellos tales que $O^* = A_\infty$), los llamaremos polos de la cúbica Γ . De otro modo: Si O es un polo de Γ , la correspondencia $X \rightarrow f_O(X)$ es la restricción a Γ de una inversión del plano que deja invariante a Γ .

Si el punto impropio A_∞ es de inflexión de Γ (con lo que $A_\infty^* = A_\infty$), diremos que A_∞ es un "polo impropio" de Γ . Naturalmente que A_∞ no es polo de una inversión, pero sí el punto impropio doble de una simetría que dej invariante a Γ (ver Teorema 9^o), que puede considerarse como límite de una inversión (nótese que, al transformarse en sí mismo el par de puntos cíclicos, y por tanto las circunferencias en circunferencias, se trata de una simetría ortogonal).

Una cúbica sin puntos dobles, al ser de clase 6, tendrá 4 tangentes paralelas a su asíntota (dos podrían ser imaginarias), que se reducirán a 3 si la asíntota es de inflexión. En consecuencia, tendrá 4 o 2 polos reales (posiblemente uno de ellos impropio). Si una cúbica tiene un punto doble ordinario (nodal o aislado) o de retroceso, al ser de clase 4 o 3, sólo tendrá dos polos o uno (posiblemente uno impropio).

Como caso límite del Teorema 16^o, obtenido cuando las rectas m y n se confunden, resulta el

Teorema 18^o: La recta que une los puntos de tangencia con una cúbica circular Γ de una circunferencia dos veces tangente a ella, pasa por uno de sus polos (eventualmente impropio).

11. VERTICES DE UNA CUBICA CIRCULAR.

Diremos que un punto V de una cúbica circular es un vértice de ella, si existe una circunferencia que tiene cuatro intersecciones con Γ confundidas en V , es decir, una circunferencia hiperosculatriz a Γ en V . Como caso límite del Teorema 16^o, cuando las rectas confundidas m y n pasan a ser tangentes a Γ en V , resulta el

Teorema 19^o: La condición necesaria y suficiente para que un punto V de una cúbica circular Γ sea uno de sus vértices es que V^* sea uno de sus polos (eventualmente impropio).

En la figura 13 se muestra una cúbica circular con 4 polos reales, O_1, O_2, O_3, O_4 y 8 vértices reales $V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{21}, V_{22}, V_{23}, V_{24}$. Se cumple que $V_{ij}^* = O_i$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$). El teorema 17^o nos asegura que existirán cuatro inversiones que transforman Γ en sí misma, estableciendo en ellas las correspondencias f_{O_i} . Para cada i , los puntos V_{ij} tales que $V_{ij}^* = O_i$, serán invariantes en la inversión de polo O_i , por lo que estarán sobre su circunferencia de puntos dobles y, en consecuencia, a la misma distancia de O_i ; es decir,

$$O_1V_{11} = O_1V_{12} = O_1V_{13} = O_1V_{14}; O_2V_{21} = O_2V_{22} = O_2V_{23} = O_2V_{24}$$

Por otra parte, una inversión que deja invariante a Γ , debe transformar un vértice en un vértice, por lo que la recta O_iV_{jk} , con $j \neq i$, debe volver a cortar a Γ en otro vértice. Véase en la Figura 13^a que están alineadas las ternas de puntos: $O_1V_{21}V_{24}, O_1V_{22}V_{23}, O_2V_{11}V_{12}, O_2V_{13}V_{14}, O_3V_{11}V_{13}, O_3V_{21}V_{23}, O_3V_{22}V_{24}, O_3V_{12}V_{14}, O_4V_{11}V_{14}, O_4V_{12}V_{13}, O_4V_{21}V_{22}, O_4V_{23}V_{24}$.

el punto de intersección con la directriz β , se cumple

$$\overline{TR} \cdot \overline{TS} = \overline{TF}^2 .$$

En particular, si O es un polo de Γ y B el punto de intersección de la tangente a Γ en O (que es paralela a la asíntota) con la directriz β , ese punto B equidista de F y de O .

La última afirmación se deduce de que, al coincidir R y S en O , será $\overline{BO}^2 = \overline{BF}^2$, con lo que $\overline{BO} = \overline{BF}$.

13. TRANSFORMADA DE UNA CUBICA CIRCULAR POR INVERSION

Una inversión de polo en el origen $(1,0,0)$ puede expresarse en coordenadas homogéneas mediante la transformación

$$x_0 = K(x_1^2 + x_2^2) \quad , \quad x_1 = X_1 X_0 \quad , \quad x_2 = X_2 X_0 \quad . \quad [4]$$

Si Γ es una cúbica circular que pasa por $(1,0,0)$, su ecuación puede escribirse en la forma

$$(x_1^2 + x_2^2)a(x_1, x_2) + x_0[\phi(x_1, x_2) + x_0 t(x_1, x_2)] = 0 \quad [5]$$

donde $a(x_1, x_2)$ y $t(x_1, x_2)$ son formas lineales y $\phi(x_1, x_2)$ una forma cuadrática, todas en x_1 y x_2 . La transformada de [5] mediante [4] es:

$$(X_1^2 + X_2^2)X_0^2 a(X_1, X_2)X_0 + K(X_1^2 + X_2^2)[\phi(X_1, X_2)X_0^2 + K(X_1^2 + X_2^2)t(X_1, X_2)X_0] = 0$$

que, tras la supresión de los factores X_0 y $(X_1^2 + X_2^2)$, queda en la forma

$$a(X_1, X_2)X_0^2 + K\phi(X_1, X_2)X_0 + K^2(X_1^2 + X_2^2)t(X_1, X_2) = 0 \quad [6]$$

lo que nos permite enunciar el:

Teorema 21^o: La transformada de una cúbica circular Γ en una inversión cuyo polo es un punto P cualquiera de Γ , es otra cúbica circular Γ' que también pasa por P ; la asíntota de Γ' es paralela a la tangente a Γ en P y la tangente a Γ' en P es paralela a la asíntota de Γ .

Si la tangente en P es paralela a la asíntota de Γ , la cúbica Γ' es homotética de la Γ (con centro en P) y para una potencia de inversión conveniente, Γ' coincide con Γ (según el Teorema 17^o).

14. CUBICAS CIRCULARES CON UN PUNTO DOBLE

Un caso interesante es aquel en el que $(1,0,0)$ es un punto doble de Γ , lo que ocurre si y solo si en la ecuación [5], la forma $t(x_1, x_2)$ es idénticamente nula. Entonces, [6] representa una cúbica degenerada en la recta $x_0 = 0$ y la cónica de ecuación

$$a(X_1, X_2)X_0 + K\phi(X_1, X_2) = 0 \quad , \quad [7]$$

lo que conduce al

Teorema 22^o: Una cúbica circular Γ con punto doble D , se transforma, mediante una inversión de polo D , en una cónica que pasa por D . La tangente en D a esa cónica es paralela a la asíntota de Γ . La cónica es hipérbola, parábola o elipse, según que el punto doble sea nodal, de retroceso o aislado.

En la Figura 15^a puede verse la cúbica Γ inversa de la hipérbola Φ en la inversión de polo en D y circunferencia de puntos dobles γ . Las asíntotas α_1 , α_2 de Φ , son paralelas a las tangentes t_1 , t_2 a Γ en D .

Como caso límite del teorema 14^o, que establece que el foco de una cúbica circular está sobre las mediatrices de las cuerdas de Γ que vuelven a cortar a Γ en A^* , resulta que si Γ tiene un punto doble D , el foco F está sobre la perpendicular a DA^* en D , o sea que $FDA^* = \pi/2$. Recordando también el Teorema 15^o, resulta el:

Teorema 23^o: Si una cúbica circular Γ (de foco F y punto asintótico A^*) tiene un punto doble D , la circunferencia de diámetro FA^* pasa por D y por los pies de las normales trazadas desde F a Γ .

Además, en la inversión que transforma Γ en ϕ , la asíntota de Γ se transforma en la circunferencia osculatrix en D a ϕ , y el punto A^* , en el punto (de la recta DA^*) en que esa circunferencia vuelve a cortar a ϕ . En virtud de una conocida propiedad de las circunferencias osculatrix a las cónicas, la recta DA^* y la tangente a ϕ en D (que es paralela a la asíntota α) tienen sus bisectrices paralelas a los ejes de la cónica ϕ . Como estos ejes son paralelos a las bisectrices de las tangentes t_1 y t_2 a Γ en D , resulta (ver Figura 15^a) el:

Teorema 24^o: Si una cúbica circular tiene un punto doble nodal D y las tangentes en el son t_1 y t_2 , el ángulo que forma la recta DA^* con t_1 es igual al que forma la asíntota α con t_2 ; también el ángulo que forma la recta DF con t_1 es igual al que forma la perpendicular a α trazada por D con t_2 .

La última afirmación se obtiene teniendo en cuenta lo anterior y el Teorema 23^o.

Por otra parte, según el Teorema 17^o, si O_1 es un polo de Γ , existe una inversión de polo en O_1 que transforma a Γ en sí misma; esta inversión transformará el punto doble D en sí mismo y las tangentes deberán formar ángulos iguales (de sentidos contrarios) con la recta O_1D , lo que permite enunciar (ver Figura 15^a) el:

Teorema 25^o: Si D es el punto doble de una cúbica

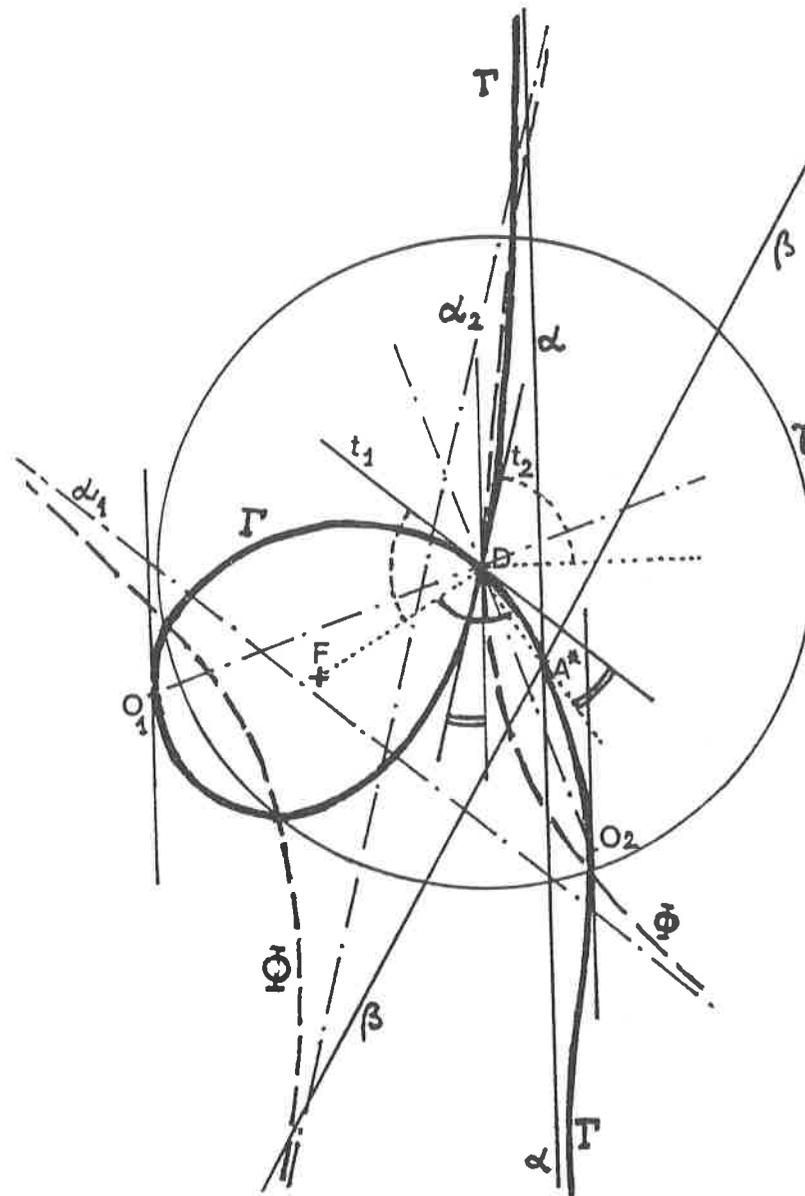


Figura 15^a

circular Γ , los polos O_i de ésta están situados sobre los ejes del punto doble D (es decir, sobre las bisectrices del par de tangentes en D).

Nótese que si el punto D no es de retroceso, la cúbica será de clase 4, por lo que tendrá precisamente dos polos, uno sobre cada bisectriz, como se ve en la Figura 15^a.

Veamos ahora en que condiciones resultan ser perpendiculares las dos tangentes en un punto doble de una cúbica circular. En coordenadas no homogéneas, la ecuación de una cúbica circular Γ con foco $F(f_1, f_2)$, puede escribirse en la forma

$$[(x_1 - f_1)^2 + (x_2 - f_2)^2](a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0) + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0 = 0 \quad [8]$$

donde $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0$ es la ecuación de la asíntota α y $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0 = 0$, la de la directriz β .

Si la cúbica Γ tiene su punto doble en el origen de coordenadas, habrán de ser nulos los términos independientes y los coeficientes de x_1 y de x_2 , o sea que (poniendo $f_1^2 + f_2^2 = r^2$, por brevedad):

$$r^2 a_0 + b_0 = 0; \quad -2f_1 a_0 + r^2 a_1 + b_1 = 0; \quad -2f_2 a_0 + r^2 a_2 + b_2 = 0 \quad [9]$$

Los términos de segundo grado de [8] son:

$$(a_0 - 2f_1 a_1) x_1^2 - 2(f_1 a_2 + f_2 a_1) x_1 x_2 + (a_0 - 2f_2 a_2) x_2^2;$$

la condición para que el par de rectas que representa esta forma cuadrática igualada a cero, sea un par de rectas perpendiculares es que su invariante I ($I = a_{11} + a_{22}$) se anule, o sea que

$$a_0 - a_1 f_1 - a_2 f_2 = 0 \quad [10]$$

Si se cumplen las condiciones [9], la ecuación de la directriz queda en la forma

$$-r^2 a_0 + (2f_1 a_0 - r^2 a_1) x_1 + (2f_2 a_0 - r^2 a_2) x_2 = 0,$$

y la condición para que esta directriz pase por F es (como se comprueba inmediatamente) la misma [10]. Por otra parte, de [8] resulta que el que β pase por F equivale a que Γ pase por F , por lo que:

Teorema 26^o: Si la cúbica circular Γ tiene un punto doble nodal D , la condición necesaria y suficiente para que las tangentes en él sean perpendiculares es que el foco F esté sobre Γ . Si las tangentes citadas son perpendiculares, el foco estará también sobre la directriz β , que será tangente a Γ en F y asimismo sobre la perpendicular a DA^* por D y sobre la recta α' , simétrica de la asíntota α respecto al punto D . (Figura 16^a).

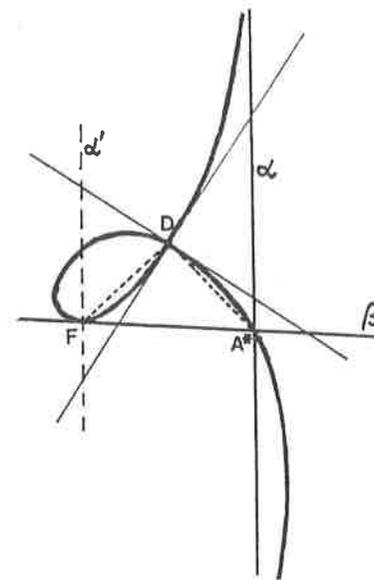


Figura 16^a

Las últimas afirmaciones resultan de observar la ecuación [3], que muestra que si la recta $\beta = 0$ pasa por F , tiene dos intersecciones con Γ confundidas en F ; del Teorema 23 y de la interpretación inmediata de la condición [10] como la de incidencia de F con la recta α' , simétrica de α respecto al origen D , se deduce el resto.

15. CUBICAS CIRCULARES CON PUNTO DE RETROCESO

Si la cúbica circular Γ posee un punto de retroceso R , como caso límite del Teorema 24^o cuando t_1 y t_2 se hacen coincidentes, podemos enunciar el:

Teorema 27^o: Si una cúbica circular (con punto asintótico A^*) tiene un punto de retroceso R , la tangente t en él es la bisectriz del ángulo formado por las rectas RA^* y la paralela a la asíntota por R (Figura 17^a).

También, como caso límite del Teorema 25^o, podemos enunciar el:

Teorema 27^o: Si R es un punto de retroceso de una cúbica circular Γ , su polo C estará situado sobre la perpendicular trazada por R a la tangente en ese punto doble.

Nótese que como las cúbicas con punto de retroceso son de clase 3, tienen un solo polo O (posiblemente impropio).

Teniendo en cuenta el Teorema 12^o, si Γ es una cúbica con punto de retroceso, su transformada en la polaridad respecto a una cónica γ , es otra cúbica. En el caso particular de que γ sea una circunferencia con centro en el foco F de Γ , que es tangente a Γ en los dos puntos cíclicos (es decir, si los puntos C

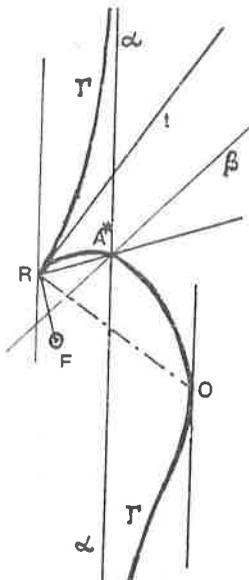


Figura 17^a

y \bar{C} son los U y V citados en el Teorema), la transformada Γ' de Γ en la polaridad será una cúbica que también será tangente a Γ (y por tanto a γ) en esos puntos, lo que nos permite enunciar el:

Teorema 28^o: La transformada de una cúbica circular Γ con punto de retroceso en una polaridad respecto a una circunferencia de centro en su foco F , es otra cúbica circular con el mismo foco. Si R e I son los puntos retroceso e inflexión de Γ y r e i las tangentes en ellos, la cubica Γ' tiene un punto de retroceso en el polo I' de i y un punto de inflexión en el polo R' de r , siendo R' el punto de inflexión de Γ' cuando las tangentes en esos puntos las polares i' y r' de I y R .

En la Figura 18^a puede verse un ejemplo de las cúbicas circulares Γ y Γ' , transformadas una de otra en la polaridad respecto a la circunferencia γ de centro en el foco F (que lo es de ambas).

Las asíntotas α y α' de Γ y Γ' son las polares respecto a γ de los puntos de tangencia S' y S de las tangentes trazadas a Γ' y Γ desde el foco F .

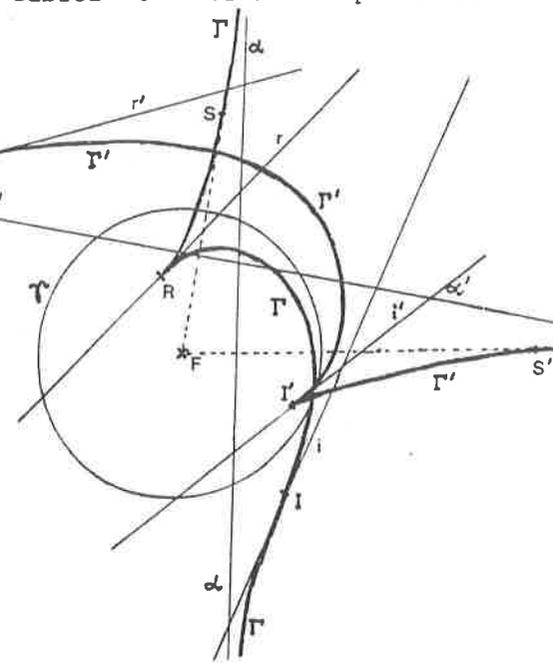


Figura 18^o

16. OBSERVACIONES FINALES

Podríamos repetir aquí todo lo que dijimos en el punto 7. del artículo sobre "*Algunas Propiedades de las Cúbicas*", del que éste es continuación, en relación con la justificación rigurosa del método de razonamiento utilizado.

Muchas de las conclusiones presentadas en este artículo fueron expuestas en el de título "*Cúbicas Circulares*", que se cita en la Bibliografía, aunque allí se trataba fundamentalmente de presentar los resultados obtenidos, mientras que aquí se pretende más bien mostrar el método de razonamiento geométrico seguido.

BIBLIOGRAFIA

- P. Abellanas. Geometría Básica. Ed. Romo, Madrid.
William Fulton. Curvas Algebraicas. Ed. Reverté, S.A.
J. Fernandez Biarge. Cúbicas Circulares. Gaceta Matemática. 1ª serie. Tomo IV, num 7 y 8 . 1952.

DESARROLLO DE ALGUNAS FUNCIONES PARA POLINOMIOS EN DERIVE

Eugenio Roanes Macías
Eugenio Roanes Lozano
Sec. Deptal. Algebra
(Univ. Complutense)

1. INTRODUCCION.

DERIVE es un Sistema de Cómputo Algebraico muy particular. Por un lado no es multiplataforma (sólo existe versión para PC), pero sus requerimientos son mínimos (se puede trabajar desde un único disquete de baja densidad y basta que el ordenador tenga 512K de memoria).

Esta última característica ha hecho que sea adoptado muy frecuentemente como auxiliar de la clase de Matemáticas en Enseñanza Secundaria, así como en los primeros cursos de Universidad.

No obstante, su orientación es más la de una calculadora algebraica (trabaja en aritmética exacta) con posibilidades gráficas (permite representar funciones reales de variable real y de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}).

Las versiones 2.xx no incluyen propiamente lo que sería un lenguaje de programación pero sí permiten definir nuevas funciones y contienen algunos comandos para esta programación funcional (ITERATE, IF,...).

Entendemos que, por la propia orientación que le han dado sus autores, presenta algunas lagunas, en especial en lo que se refiere al manejo de polinomios, por lo que intentamos mostrar como se podrían tratar de evitar algunas de ellas. Como ejemplo, funciones que a veces hemos necesitado realizarían lo siguiente:

- Devolver los coeficientes y el grado de un polinomio (en el archivo MISC.MTH se suministra una implementación, pero ¡usa diferenciación!)
- Devolver el cociente y el resto de la división entera de polinomios (existe una división de polinomios, que devuelve la expresión racional correspondiente)

...

Somos conscientes de que, sin poder entrar a utilizar la representación interna de los polinomios, por ejemplo la obtención de un coeficiente será muy poco rápida. No

obstante, hay veces que hemos necesitado ineludiblemente estas funciones. Por ello trataremos en los apartados siguientes de comentar unas posibles implementaciones.

2. ALGUNAS NUEVAS FUNCIONES PARA NATURALES.

2.1 DIVISION ENTERA.

Derive presenta una división en aritmética exacta, pero no trae implementada la división entera. Una posibilidad sería utilizar el siguiente:

Algoritmo:

$$\text{RESTO}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{si } a < b \\ \text{RESTO}(a-b,b), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que, evidentemente, reitera el sustraer el divisor al dividendo hasta que este último sea menor. En Derive podría escribirse así:

$$\text{RESTO}(a,b) := \text{IF}(a < b, a, \text{RESTO}(a-b, b))$$

La versión 2.03 no tiene una función "parte entera", pero la v. 2.52 ya sí la incorpora (FLOOR(número)). En tal caso, sería más rápido definir:

$$\text{RESTO}(a,b) := a - b * \text{FLOOR}(a/b)$$

2.2 MAXIMO COMUN DIVISOR.

Ya podemos definir una función m.c.d. en \mathbb{N} usando el algoritmo de Euclides. Lo hemos hecho así.

Algoritmo: MCD(a,b) decide cuál de las dos entradas es mayor y envía a:

$$\text{MCD_AUX}(\text{mayor}\{a,b\}, \text{menor}\{a,b\})$$

MCD_AUX(a,b) es el "Algoritmo de Euclides": realizamos reiteradamente la división entera y el divisor pasa a dividendo y el resto a divisor. Cuando lleguemos a resto 0, devolvemos el resto anterior.

En Derive:

$$\text{MCD_AUX}(c,d) := \text{IF}(d=0, c, \text{MCD_AUX}(d, \text{RESTO}(c,d)))$$

$$\text{MCD}(a,b) := \text{IF}(a > b, \text{MCD_AUX}(a,b), \text{MCD_AUX}(b,a))$$

3. ALGUNAS NUEVAS FUNCIONES PARA POLINOMIOS UNIVARIABLES.

3.1 OBSERVACION.

Desafortunadamente, Derive no permite sustituir en una función de un polinomio la

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION (CENTROS)

D. ...
como ... del Centro ...
domiciliado en ...
ciudad ... Codº Post. ... Telfº...

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR.
Con esta fecha autorizo al Banco ...
Sucursal o Agencia ... en ...
Dirección de la misma ...
para que cargue en nuestra cuenta nº ...
abierta al nombre: ...
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93
y siguientes. Fecha ... de ... de 1991

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas
(incluida la cuota federativa de 1.500 pts).
Remítanse ambas partes a Sociedad "Puig Adam" de Profesores
de Matemáticas. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... BANCO: ...
Sucursal o Agencia... en ...
Dirección de esta ...
RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... nº ...
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam" de
Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:
Firmado:

Nombre y Apellidos ...
Nombre de la cuenta...

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ... Telef.(...)
Direccion particular ...
Ciudad ... Codº Postal ...
Centro de trabajo ...

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.
Con esta fecha autorizo al Banco ...
Sucursal o Agencia ... en ...
Direccion de la misma ...
para que cargue en mi cuenta nº ...
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1992-93
y siguientes. Fecha ... de ... de 1992

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 4.500 pesetas
(incluida la cuota federativa de 1.500 pts).
Remítanse ambas partes a Sociedad "Puig Adam" de Profesores
de Matemáticas. Apartado 9479. 28080-MADRID.

Fecha ... BANCO: ...
Sucursal o Agencia... en ...
Dirección de esta ...

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta ... nº ...
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam" de
Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:
Firmado:

Nombre y Apellidos ...
Direccion ...

variable por un valor concreto más que en el modo interactivo. Por ello, no encontramos otra posibilidad que definir la función: SUB(polynomio,variable,valor) como el límite de la función "polynomio" cuando "variable" tiende a "valor" (no presenta inconveniente pues un polinomio es siempre una función continua):

$$\text{SUB}(p,v,a):=\text{LIM}(p,v,a)$$

3.2 OBTENCION DEL GRADO DE UN POLINOMIO.

El término independiente de un polinomio $p(x)$ es $p(0)$. Por tanto, $p(x)-p(0)$ es divisible por x . El número de veces que se pueda repetir este proceso, hasta llegar al polinomio nulo, dará el grado del polinomio de partida.

Podemos pues utilizar un algoritmo recursivo:

Algoritmo:

$$\delta(p(x)) = \begin{cases} -1, & \text{si } p(x)=0 \\ 1+\delta((p(x)-p(0))/x), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hemos implementado en Derive la función GRADO(polynomio,variable) así:

$$\text{POL_AUX}(p,v):=(p-\text{SUB}(p,v,0))/v$$

$$\text{GRADO}(p,v):=\text{IF}(p=0,-1,1+\text{GRADO}(\text{POL_AUX}(p,v),v),1+\text{GRADO}(\text{POL_AUX}(p,v),v))$$

3.3 OBTENCION DEL COEFICIENTE DEL TERMINO DE GRADO N DE UN POLINOMIO.

Pensemos que en el proceso anterior, si llamamos $p_0(x)=p(x)$, $p_0(0)$ es el término independiente.

Llamando $p_1(x)=(p_0(x)-p_0(0))/x$, $p_1(0)$ es el coeficiente del término de grado 1 de $p(x)$.

Llamando $p_2(x)=(p_1(x)-p_1(0))/x$, $p_2(0)$ es el coeficiente del término de grado 2 de $p(x)$,...

Algoritmo: $p_0(x)=p(x)$

$$p_n(x)=(p_{n-1}(x)-p_{n-1}(0))/x$$

$$\text{COEF}(p(x),n)=p_n(0)$$

Se puede implementar en Derive una función COEF(polynomio,variable,natural), así:

POLI_AUX(p,v,n):=IF(n=0,p,(POLI_AUX(p,v,n-1)-SUB(POLI_AUX(p,v,n-1),v,0))/v)
 COEF(p,v,n):=SUB(POLI_AUX(p,v,n),v,0)

En consecuencia, para pedir el coeficiente líder de un polinomio, bastará pedir el coeficiente correspondiente al término de grado el grado del polinomio:

LCOEF(p,v):=COEF(p,v,GRADO(p,v))

Ejemplo: LCOEF(3x⁷-x⁵+3x⁴-x²-2,x) devuelve: 3

Compute Time: 2.7 segundos.

Nota: Los tiempos de cómputo se han obtenido con un 486 a 33 MHz.

3.4 COCIENTE Y RESTO DE LA DIVISION DE UN POLINOMIO ENTRE x-a

Este caso está separado para poder utilizar la Regla de Ruffini y el Teorema del Resto.

El resto de dividir p(x) entre x-a es p(a), luego podemos escribir la función RESTO_RUF(polynomio.valor,variable) así:

RESTO_RUF(p,a,v):=SUB(p,v,a)

El cociente del proceso de la regla de Ruffini responde al siguiente algoritmo:

Algoritmo: (RUF_AUX va obteniendo el coeficiente del término de grado n al dividir entre x-a)

RUF_AUX(p(x),a,δ(p(x))-1)=coeficiente líder de p(x)

y si n<δ(p(x))-1:

RUF_AUX(p(x),a,n)=a·RUF_AUX(p(x),a,n+1)+coeficiente del término de grado (n+1) de p(x)

COC_RUF(p(x),a)=sumatoria de los coeficientes por la variable elevada al grado correspondiente.

Hemos implementado: COC_RUF(polynomio,valor,variable) así:

RUF_AUX(p,a,v,n):=IF(n<GRADO(p,v)-1,a·RUF_AUX(p,a,v,n+1)+COEF(p,v,n+1),~COEF(p,v,n+1))

COC_RUF(p,a,v):=SUM(RUF_AUX(p,a,v,n)*v^n,n,0,GRADO(p,v)-1)

Nota: En la notación de Derive, ~ significa que no ha acabado la línea.

3.5 COCIENTE Y RESTO DE LA DIVISION ENTERA DE DOS POLINOMIOS. SEUDORESTO.

El resto lo calcula:

RESTO_POL(polynomio_dividendo,polinomio_divisor,variable)

que utiliza el siguiente:

Algoritmo: Si δ(dividendo)<δ(divisor) , devolver el dividendo.

En otro caso: nuevo dividendo =

$$= \text{dividendo} - \left[\frac{\text{coef. líder dividendo}}{\text{coef. líder divisor}} \right] \cdot \text{variable}^{\text{dif. grados}} \cdot \text{divisor}$$

Lo hemos implementado del modo siguiente:

RESTO_POL(ddo,dor,v):=IF(GRADO(ddo,v)<GRADO(dor,v),ddo,~RESTO_POL(ddo-dor*(LCOEF(ddo,v)/LCOEF(dor,v))*v^(GRADO(ddo,v)-GRADO(dor,v)),dor,v))

Si lo que interesa es el cociente, podemos aprovechar la división de polinomios que proporciona Derive. El dividendo menos el resto será divisible entre el divisor, luego, usando el anterior RESTO_POL, definimos: COC_POL(polynomio_dividendo,polinomio_divisor,variable) , así:

COC_POL(p,q,v):=(p-RESTO_POL(p,q,v))/q

Si, en lugar de obtener el resto, queremos obtener el seudorestos, antes de comenzar el proceso, multiplicaremos el dividendo por el coeficiente líder del divisor elevado a la diferencia de grados más uno, de modo que nos aseguremos de no introducir coeficientes no enteros (si ambos polinomios son de Z[x]).

SRESTO_POL(p,q,v):=RESTO_POL(LCOEF(q,v)^(1+GRADO(p,v)-GRADO(q,v))*p,q,v)

Ejemplo: Si realizamos la división entera de 3x⁷-x⁵+3x⁴-x²-2 entre: 4x³-3x²+x+1

con COC_POL, obtenemos: $\frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{16}x^3 - \frac{1}{64}x^2 - \frac{105}{256}x + \frac{175}{1024}$ (Compute Time: 10.1 segundos)

y RESTO_POL devuelve: $-\frac{903}{1024}x^2 - \frac{595}{1024}x - \frac{2223}{1024}$ (Compute Time: 9.9 segundos).

Por último, SRESTO_POL obtiene, en este caso: -903x²-595x-2223 (Compute Time: 11.0 segundos)

3.6 MAXIMO COMUN DIVISOR DE POLINOMIOS.

El Algoritmo de Euclides es válido también para calcular el m.c.d. de polinomios. Los únicos cambios que hay que realizar son:

- Ordenar los polinomios en el primer paso según su grado.
- Sustituir el resto de la división entera por el resto de la división de polinomios.

El inconveniente que tiene este algoritmo es que los coeficientes de los polinomios pueden crecer mucho. Nuestra implementación ha quedado así:

$$\text{MCD_POL_AUX}(c,d,v):=\text{IF}(d=0,c,\text{MCD_POL_AUX}(d,\text{RESTO_POL}(c,d,v),v),\sim \\ \text{MCD_POL_AUX}(d,\text{RESTO_POL}(c,d,v),v))$$

$$\text{MCD_POL}(a,b,v):=\text{IF}(\text{GRADO}(a,v)>\text{GRADO}(b,v),\text{MCD_POL_AUX}(a,b,v),\sim \\ \text{MCD_POL_AUX}(b,a,v))$$

Ejemplo: $\text{MCD_POL}(x^4-7x^3+18x^2-22x+12, 3x^3-13x^2+8x+12, x)$

devuelve: $\frac{34}{9}x^2 - \frac{170}{9}x + \frac{68}{3}$

(que es $\frac{34}{9}$ por x^2-5x+6). Compute Time: 2.9 segundos.

Ejemplo: $\text{MCD_POL}(x^5-5x^4+4x^3+x^2-5x+4, x^4-5x^3+5x^2-5x+4, x)$

devuelve: $2x^2-10x+8$. Compute Time: 4.8 segundos.

Ejemplo: $\text{MCD_POL}(x^3-8x^2+21x-18, x^3+9x^2+27x+27, x)$

devuelve: $\frac{144500}{3249}$

(el primer polinomio es $(x-2)(x-3)^2$ y el segundo $(x+3)^3$, luego son primos entre sí).

Compute Time: 2.7 segundos.

Para polinomios de $\mathbb{Z}[x]$ se podría utilizar el seudorestos en lugar del resto. Así todos los polinomios de todos los pasos del algoritmo serían de coeficientes enteros:

$$\text{MCD_POL_AUX_Z}(c,d,v):=\text{IF}(d=0,c,\text{MCD_POL_AUX_Z}(d,\text{SRESTO_POL}(c,d,v),v),\sim \\ \text{MCD_POL_AUX_Z}(d,\text{SRESTO_POL}(c,d,v),v))$$

$$\text{MCD_POL_Z}(a,b,v):=\text{IF}(\text{GRADO}(a,v)>\text{GRADO}(b,v),\text{MCD_POL_AUX_Z}(a,b,v),\sim \\ \text{MCD_POL_AUX_Z}(b,a,v))$$

Ejemplo: $\text{MCD_POL_Z}(x^4-7x^3+18x^2-22x+12, 3x^3-13x^2+8x+12, x)$

devuelve: $34x^2-170x+204$

(que es 34 por x^2-5x+6). Compute Time: 4.0 segundos.

Ejemplo: $\text{MCD_POL_Z}(x^3-8x^2+21x-18, x^3+9x^2+27x+27, x)$

devuelve: 1685448000. Compute Time: 3.4 segundos.

BIBLIOGRAFIA:

J. Johnson, B. Evans: *Discovering Calculus with DERIVE*. John Wiley & Sons, 1992.

J.L. Llorens: *Introducción al uso de DERIVE*. Universidad Politécnica de Valencia (Servicio de Publicaciones), 1993.

A. Rich, J. Rich, D. Stoutemyer: *DERIVE User's Manual*. Soft Warehouse, 1990.

-: *The Bulletin of the DERIVE User's Group* (Revista).

HISTORIA DE LA CARTOGRAFIA ESPAÑOLA

por Concepción Romo Santos

Catedrática de Álgebra. Univ. Complutense de Madrid

INTRODUCCION

A finales del año 1992 los madrileños hemos podido disfrutar de una magnífica exposición "La imagen del mundo. 500 años de cartografía". La Fundación Santillana no podía estar ausente en la celebración de las efemérides del Quinto Centenario y ha organizado dicha exposición en la Biblioteca Nacional de Madrid.

Generalmente entendemos por cartografía el arte, ciencia y tecnología de hacer mapas y el estudio de éstos como documentos científicos y artísticos. A su vez, mapa es todo tipo de representación, a escala, de la tierra o de cualquier cuerpo celeste. Dentro de esta denominación se incluyen toda clase de mapas, planos, cartas náuticas, dibujos arquitectónicos y secciones de edificios, modelos tridimensionales y globos. El objetivo de este trabajo es el estudio de la historia de la cartografía española realizado a través de los mapas de dicha exposición.

1.- LA CARTOGRAFIA MALLORQUINA

La cartografía mediterránea española en los siglos XIV al XVI está representada por la escuela mallorquina, núcleo cartográfico que nació, creció y se desarrolló en la isla de Mallorca.

La isla de Mallorca era, en los siglos XIV y XV, un cruce de diversas culturas árabe, judía, catalana e italiana, y un centro del comercio mediterráneo de primer orden. El sustrato científico y matemático de esta cartografía lo había proporcionado a finales del siglo XII las obras de Ramón Llull y Alfonso X el Sabio.

La primera carta mallorquina que nos encontramos es la de Angelino Dulcert de 1339, tras la que seguirán otras, siendo la más conocida y justamente alabada el Atlas catalán, debido a Abraham y Jafuda Cresques (1375) que introduce como innovación un calendario perpetuo y la aparición de las rosas de los vientos, además de una magnífica ornamentación. Este atlas se encuentra en la Biblioteca Nacional de París. Los autores pintaban sobre la piel de un cordero o ternero extendida.

Más tarde, los talleres cartográficos mallorquines se desplazaron a otros centros del Mediterráneo, gobernados también por la corona española; en Mallorca permanecieron Salvat de Pilestrina y la familia Prunes, mientras que los Oliva se trasladaron a Italia.

2.- EL NACIMIENTO DE LA CARTOGRAFIA MODERNA

El siglo XVI se inició con una acumulación de acontecimientos debido a la serie de descubrimientos geográficos protagonizados por los pueblos atlánticos de la península Ibérica. En efecto, portugueses y españoles, en el cortísimo período temporal transcurrido entre 1488 y 1522, lograron descubrir y transitar los confines del orbe, por primera vez en la historia.

Cuatro factores destacan entre los que hicieron posible conocer de forma operativa la realidad de los casi inabarcables horizontes de océanos y lejanas tierras sumadas al Viejo Mundo:

- La disponibilidad de una tecnología naval y una experiencia marinera capaz de afrontar el reto de las navegaciones oceánicas.
- La feliz conversión de la astrología medieval en la técnica de la navegación astronómica, que posibilita estimar la situación del barco en cualquier punto del planeta. *
- La rápida extensión por Europa de la imprenta, con su enorme capacidad de difusión de conocimientos y novedades, en contraste con la trabajosa y limitadísima reproducción manual de textos e imágenes vigente hasta entonces.

Fué España la nación que primero supo crear eficientes instituciones para el estudio de los conocimientos geográficos. Así en 1503 se fundó la Casa de Contratación de las Indias.

La organización científica de esta institución descansa en un primer momento sobre el piloto mayor, fueron pilotos mayores Américo Vespucio, Juan Díaz de Solís, Sebastián Caboto.

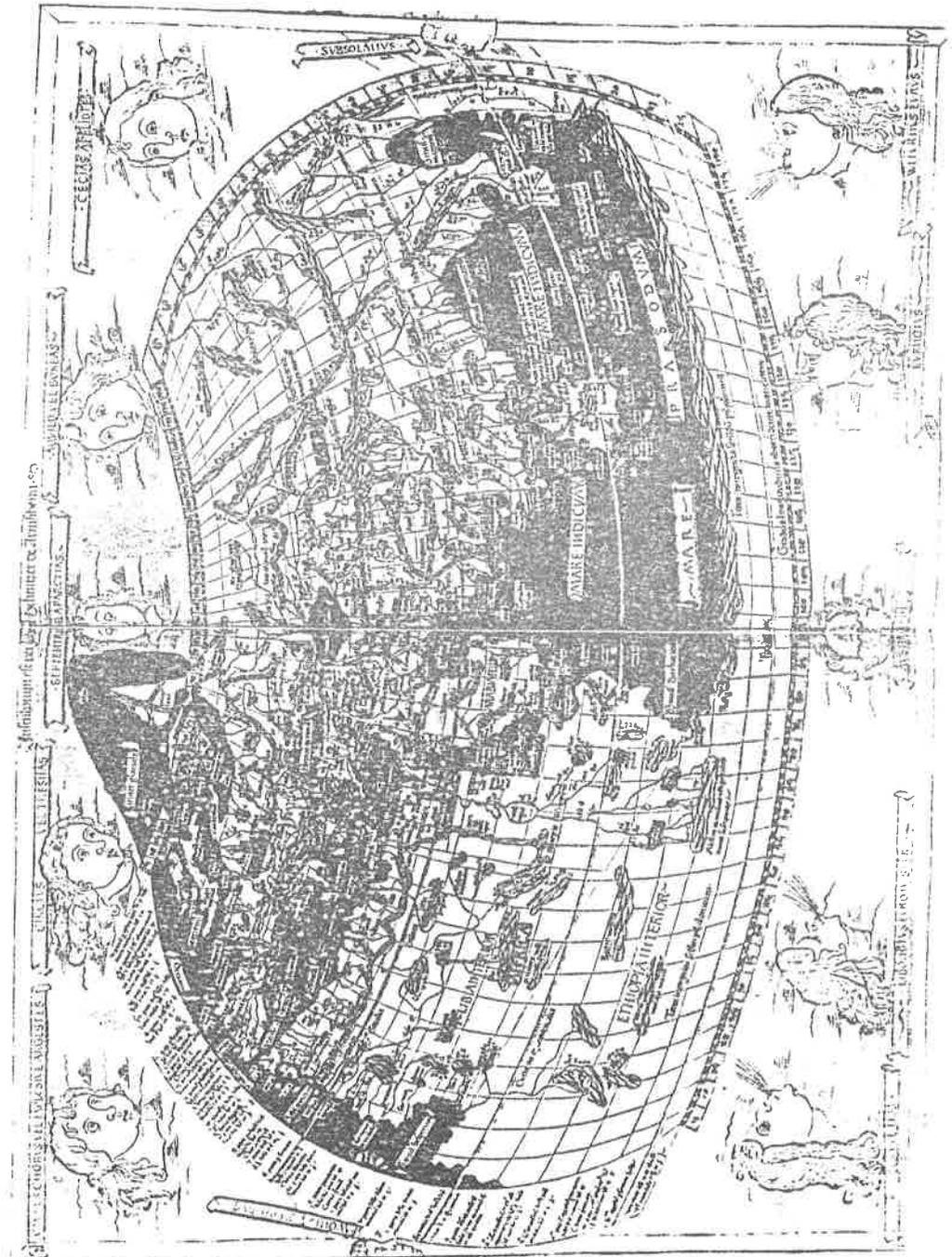
En 1508 se mandó por Real Cédula a Américo Vespucio que se hiciera un padrón real que sería el patrón o modelo de carta de navegar al que solo los cosmógrafos oficiales tendrían acceso y quedaría en la Casa de Contratación.

Este documento se renovaba y corregía cada cierto tiempo con las novedades que traían los pilotos que, una vez contrastadas en juntas de pilotos, se incorporaban al padrón oficial. Para más comodidad y detalle geográfico, el padrón real estaba dividido en seis partes, llamadas también padrones o cuarterones.

Como ya hemos señalado, el padrón real empieza siendo una carta portulana mallorquina a la que se le incorporan las nuevas tierras descubiertas, una escala de latitudes, la representación de los círculos mayores y un ecuador grabado. Era lógico que a la hora de describir otro continente se apoyasen en la única cartografía científica existente. Una buena muestra de esto lo encontramos en el que podíamos llamar el primer padrón real; la carta de Juan de la Cosa, de 1500, que se encuentra en el Museo Naval de Madrid.

La recuperación ferviente de la obra de Ptolomeo con su propuesta de incipiente formulación matemática del hecho geográfico.

Tolomeo. Cosmografía. Um. 1482.



Mientras en España y Portugal la producción primaria de cartografía siguió siendo realizada de forma manual, para garantizar el control más estricto, en los países del Rhin y en el norte de Italia el lucrativo negocio de la imprenta difundía la obra de Ptolomeo (siglo II) y mapas del mundo conocido, a la vez que iba incorporando lo que trascendía de lo descubierto, mientras abría nuevos caminos a la cartografía regional y local a gran escala, anunciando los futuros mapas topográficos. En los focos de producción alemanes (Nuremberg, Estrasburgo, Viena, Basilea...), el procedimiento empleado era el del grabado en madera, progresivamente perfeccionado, mientras en el ámbito italiano (Venecia, Roma, Milán, Bolonia...) menudearon los más diáfanos mapas impresos con planchas de cobre.

Como ya hemos indicado, los países que proporcionaron la mayor parte del conocimiento geográfico y la producción cartográfica primaria, España y Portugal, fueron muy pocos en la edición de mapas. La gran cantidad de levantamientos locales que se hicieron de sus extensos dominios, preciosos atlas e incluso obras sistemáticas de la importancia del *Islario* de Alonso de Sta Cruz, el *Itinerario* de las tierras y mares occidentales y la *Información geográfica* de Juan Escalante de Mendoza o el gran mapa de España en 21 hojas conservado en El Escorial, han permanecido inéditos hasta nuestros días.

No obstante hubo una considerable producción cartográfica. Por su influencia cabe citar la carta del Atlántico incluida por Pedro de Medina en su *Arte de Navegar* (1545), los abundantes mapas que ilustran la *Descripción de las Indias* (1601-1615) de Antonio Herrera o el espléndido mapa de Aragón (1615) de Juan Bautista Labaña.

Los flamencos emprendieron la realización de los primeros atlas propiamente dichos. El primero de todos ellos fue el *Theatrum Orbis Terrarum* de Abraham Ortelius (1527-1598) editado en Amberes con privilegio de Felipe II en 1570. Se componía de 70 mapas. Hasta 1724 se hicieron 76 ediciones del *Theatrum*. Gerard Jode (1506-1591) en competencia con Ortelius, publicó su *Speculum Orbis Terrarum* en Amsterdam el año 1578.

El siglo XVII fue una época de renovación en astronomía y geodesia. La nueva instrumentación permitió el descubrimiento de aspectos insospechados del Universo, confirmando las audaces predicciones de Copérnico (1473-1543).

A la vez que Kepler (1571-1630) extendía sus descubrimientos (las leyes del movimiento planetario), un modesto fabricante de lentes de Middelburg construye el anteojo.

Hacia 1635 publicó de Witt el primer plano conocido de Madrid. Con anterioridad, JoãoBautista de Lavanha hizo un mapa de Aragón en 1615 y Pedro Sierra

en 1620, hizo un mapa de Galicia y de varias regiones más.

Se empezaron en el segundo tercio del siglo XVII a usar anteojos astronómicos con micrómetros y aparatos físicos destinados al análisis de la atmósfera para corregir la medición obtenida mediante la observación astronómica. El termómetro, usado ya en 1641 en Italia, el barómetro, descubierto por Torricelli en 1644, el higrómetro. También destacan los descubrimientos en el campo de la medición del tiempo. La relojería debe su progreso a la aplicación del péndulo a los relojes que hizo Huygens (1629-1695) en 1656.

También a mediados del siglo XVII se suscitó la polémica de determinar la forma y dimensiones de la Tierra. Picard (1620-1682) realizó en 1670 una medición del arco de meridiano de París, utilizando un telescopio. Obtuvo un valor del radio de la esfera terrestre con un error de 0,01% y permitió que Newton verificase la ley de gravitación universal que había formulado con anterioridad. Newton (1643-1727), Huygens y Richer desarrollaron modelos terrestres, sobre fundamentos físicos, con los polos achatados. Aparecieron escuelas: la inglesa de Newton, defendiendo el modelo naranja, es decir, la figura elipsoide achatada por los polos, y la francesa de Jaques Cassini (1677-1756), que propugnaba un elipsoide achatado por el ecuador.

Mientras, la cartografía tradicional continuaba su remodelación hacia una expresión más académica, fundamentada en mediciones cada vez más exactas. En el último tercio del siglo XVII se extendió el uso de los mapas ingleses, destacando el trabajo publicado en 1683 por Halley (1656-1742), consistente en una carta magnética. También destacamos en esta época los globos terraqueos de hasta cinco metros de diámetro, construidos por el cartógrafo Vicente Coronelli.

En España hay que destacar el plano de Madrid realizado por Pedro Texeira en 1656 y el mapa general de España realizado por Francisco Ferrer en 1696.

3.- LA CARTOGRAFIA GEOMETRICA. EL DESARROLLO DE LOS SISTEMAS DE PROYECCION

Con la llegada del siglo XVIII se incrementó el rigor científico, fomentado por el perfeccionamiento de los medios técnicos lográndose una representación cartográfica más perfecta.

La cartografía se aprovecho de los logros de la geodesia, aunque progresó más lentamente. Desde entonces, los mapas de detalle se apoyaron en observaciones astronómicas serias y en triangulaciones cada vez más densas.

Hasta la segunda mitad del siglo XVIII no se inició el primer gran mapa geométrico de un país, utilizando una metodología sistemática.

La carta de Cassini, confeccionada a escala 1/86.400 es el ejemplo más ilus-

trativo. Ya en 1740 la malla estaba constituida por 400 triángulos y sirvió de soporte para confeccionar un mapa de Francia a escala 1/870.000 con un total de 18 hojas. El mapa geométrico de Francia, en cuya confección participaron tres Cassini (Jacques, César-François y Jaques-Dominique) tenían ya 165 hojas el año en que comenzó la Revolución Francesa (1789).

La últimas hojas del mapa se entregaron en 1793 y representaron la culminación de un proyecto de medida y descripción exacta de un territorio. Fue ejemplo y referencia obligada para el resto de los mapas topográficos nacionales.

En la segunda mitad del siglo XVIII, una gran parte de Europa está ya cubierta por la cartografía nacional. Se crean los modernos departamentos hidrográficos a cargo del gobierno, que producen detalladas cartas de navegación, mapas batimétricos y mapas oceánicos de diverso sentido.

Durante el siglo XIX los esfuerzos de los matemáticos se centraron en el cálculo de los ejes de diferentes modelos de elipsoides de revolución, superficie de referencia geométrica que más se aproxima a la figura de la Tierra. Los más importantes fueron los de Clarke para Inglaterra (1866), y Struve (1860), que fue empleado para el cálculo de la Red Geodésica de España y tiene unos valores para el semieje polar de 6.378,298 Km. y para el ecuatorial de 6.356,637 Km.

Una vez determinado el elipsoide de revolución, el problema que se plantea es pasar las coordenadas desde esta figura al plano o mapa. Esta transformación o proyección, se define matemáticamente y se caracteriza por sus deformaciones. Puesto que el elipsoide, como la esfera, no puede ser desarrollable en una superficie plana, se producirán deformaciones lineales (de distancias), superficiales (de áreas) o angulares. En función de estas deformaciones se distinguen: Proyecciones equivalentes. Tienen la propiedad de conservar las áreas. Al respetar las superficies, son adecuadas para la cartografía catastral. Proyecciones conformes. Conservan los ángulos, por lo que se emplean en las cartas de navegación y mapas militares a gran escala.

4.- LA INCORPORACION DE LA INFORMATICA A LA CARTOGRAFIA

Los avances tecnológicos a lo largo de la historia se han visto reflejados inmediatamente en la edición y reproducción de mapas, que se ha beneficiado de los progresos en la mecánica, la óptica, la química, la metalurgia, el electromagnetismo, la electrónica y la informática.

El siglo XX comienza utilizando en la elaboración de mapas las tecnologías óptico-mecánicas y la fotoquímica; es a mediados del siglo, en la década de los cincuenta, cuando la tecnología electrónica se desarrolla y pronto afecta a la cartografía. Los avances y desarrollos informáticos durante los años sesenta ya



Mercator - Hondius - Atlas. 1606.

hacen concebir a determinados grupos de trabajo un nuevo concepto de mapa, en el que la imagen gráfica sea sustituida por un archivo o fichero digital en el que se hallan codificados todos los hechos y localizaciones.

La producción cartográfica en este siglo comenzó en los países más desarrollados dando fin a las series nacionales que se habían iniciado en la centuria anterior. A lo largo del siglo, nuevos Estados comienzan sus series nacionales. Las escalas más utilizadas han sido:

1:1.000.000 para mapas nacionales, 1:500.000 para regionales, 1:200.000 y 1:100.000 para provinciales 1:50.000 y 1: 25.000 para nacionales en hojas.

Desde mediados de siglo, multitud de instituciones, tanto públicas como privadas, aprovechando la rapidez, comodidad y disminución de costo que suponía las metodologías fotogramétricas, comenzaron a realizar cartografía a escala 1:10.000, 1:5.000, 1:2.000, 1:1.000, en el ámbito de la provincia, municipio o zona urbana.

Paralelamente se han ido confeccionando, tanto por las Administraciones como por editoriales, distintos tipos de atlas mundiales, nacionales, comarcales etc, en los que aparte de una rigurosa información geográfica, se añadían datos sobre diversos temas: comunicación, agricultura, pesca, industria, población, recursos, etc.

Por último diremos que los Institutos Geográficos del mundo occidental están actualmente comprometidos en el proyecto de confeccionar Bases Cartográficas Numéricas a distintas escalas.

BIBLIOGRAFIA

En la confección de este trabajo hemos utilizado el catálogo de la exposición además de los libros que citamos a continuación:

- Aguilar, J.: Historia de la cartografía. Buenos Aires. Codex 1967.
- Colomer, I.M.: Cartografía Peninsular (s. VIII-XIX). Barcelona. I.C.C. 1992.
- Chuvieco, E.: "Fundamentos de la teledetección espacial". Madrid. Rialp S.A. 1990.
- Joly, F.: La cartografía. Barcelona. Ariel 1979.
- Kupcik, I.: "Cartes géographiques anciennes". París. Gründ.1981.
- Laguardia Trías, R.: "La aportación científica de mallorquines y portugueses a la cartografía náutica en los siglos XIV al XVI". Madrid. C.S.I.C.1964.
- Martín Asín, F.: "Geodesia y cartografía matemática".Madrid. Paraninfo.1963.
- Quirós, F.: "Las ciudades españolas del siglo XIX". Valladolid. Ambito 1991.
- Vazquez Maure, F. y Martín-López J.: "Lectura de mapas". Madrid. I.G.N. 1986.

DEMOSTRACION AUTOMATICA DE UN TEOREMA SOBRE TRES CIRCUNFERENCIAS CONCURRENTES

E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías
Sección Departamental de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid
c/. Santísima Trinidad, 37 MADRID-28010

Resumen: Se trata de un problema sobre tres circunferencias concurrentes, de apariencia inofensiva, pero que presenta dificultades insospechadas. Hemos encontrado dos soluciones por métodos elementales, una de ellas basada en el concepto de arco capaz y otra basada en el método de inversión, pero ambas requieren considerar numerosos casos. Por otra parte, al plantear el problema en coordenadas, pronto se llega a expresiones extremadamente largas. Ello nos ha llevado a abordar el problema aplicando métodos algebraicos de demostración automática, pero al verificarlos directamente en la forma usual se llega a producir una saturación de la memoria del ordenador, por lo que se han de realizar ciertas adaptaciones del problema geométrico, que permitan llevar a buen término el tratamiento automático del problema y su discusión.

1. Introducción

El siguiente problema, que suponemos original por no haber encontrado referencias a él en tratados de Geometría Métrica, ni en colecciones de Olimpiadas Matemáticas, surgió colateralmente al profesor Fernández Biarge de la UPM en un trabajo sobre cúbicas circulares de próxima publicación y nos fue comunicado por los profesores Fernández Biarge y García Sestafe.

Problema: Sean c_1 , c_2 y c_3 tres circunferencias con un punto común (a las tres), O , tales que sean secantes dos a dos, y denotemos A , B y C a los otros puntos de intersección de c_1 y c_2 , de c_2 y c_3 , y de c_3 y c_1 respectivamente (figura 1). Eligiendo en la circunferencia c_1 , un punto arbitrario M , trazando la recta MA (que denotamos l_1) hasta cortar a c_2 en otro punto, N , trazando luego la recta NB (que denotamos l_2) hasta cortar a c_3 en otro punto, P , se pueden plantear las siguientes cuestiones:

- i) ¿son colineales los puntos P, C y M (es decir, está el punto P en la recta MC, que denotamos l_3)?
- ii) en caso afirmativo, ¿qué restricciones existen para elegir $M \in c_1$?
- iii) ¿pueden ser elegidos arbitrariamente los puntos O, A, B y C (que determinan c_1, c_2 y c_3), de modo que sea afirmativa la respuesta a i)?

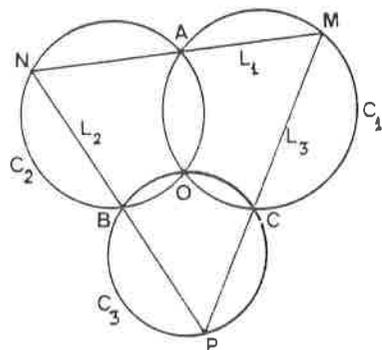


Figura 1

Hemos encontrado dos soluciones por métodos elementales. Una basada en el concepto de arco capaz, que requiere tratar separadamente numerosos casos posibles. Y la otra, basada en el método de inversión, tampoco es breve. Por otra parte, al plantear el problema en coordenadas, pronto se llega a expresiones tan largas que resultan inmanejables. Ello nos ha llevado a abordar el problema aplicando métodos algebraicos de demostración automática, pero tampoco es inmediato aplicar directamente tales métodos a nuestro problema, por lo que se han de realizar ciertas adaptaciones del problema geométrico, que permitan llevar a buen término el tratamiento automático del problema y su discusión.

2. Estudio del problema basado en el concepto de arco capaz

El razonamiento varía, según sean las posiciones relativas de los puntos M, N y P, respecto de O, A, B y C, lo que lleva a considerar diversos casos:

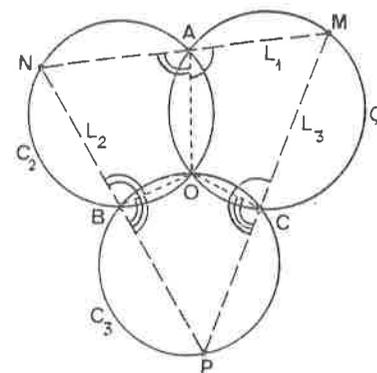


Figura 2

Primer caso: Si se supone que (de acuerdo con la figura 2)

- M está en el arco de extremos C y A que no contiene a O
- N está en el arco de extremos A y B que no contiene a O
- P está en el arco de extremos B y C que no contiene a O

entonces estas condiciones y las de la hipótesis implican:

$$\begin{aligned}
 M, A, O, C \text{ concíclicos} &\Rightarrow OCM + OAM = 2 \text{ rectos} \\
 N, A, M \text{ alineados} &\Rightarrow 2 \text{ rectos} = OAM + OAN \\
 N, A, O, B \text{ concíclicos} &\Rightarrow OAN + OBN = 2 \text{ rectos} \\
 N, B, P \text{ alineados} &\Rightarrow 2 \text{ rectos} = OBN + OBP \\
 P, B, O, C \text{ concíclicos} &\Rightarrow OBP + OCP = 2 \text{ rectos}
 \end{aligned}$$

(sumando y simplificando)

$$P, C \text{ y } M \text{ colineales} \Leftrightarrow OCM + OCP = 2 \text{ rectos}$$

Segundo caso: Si se supone que (de acuerdo con la figura 3)

- M está en el arco de extremos O y C que no contiene a A
- N está en el arco de extremos O y A que no contiene a B
- P está en el arco de extremos O y B que no contiene a C

entonces estas condiciones y las de la hipótesis implican:

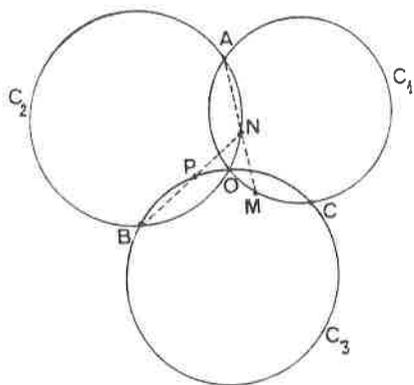


Figura 3

- M, A, O, C concíclicos \Rightarrow OCM = OAM
- N, A, M alineados \Rightarrow OAM = OAN
- N, B, O, A concíclicos \Rightarrow OAN = OBN
- N, B, P alineados \Rightarrow OBN = OBP
- P, C, O, B concíclicos \Rightarrow OBP = OCP

(sumando y simplificando)

$$P, C, M \text{ colineales} \Leftrightarrow OCM = OCP$$

Nota: Observemos que los casos posibles a considerar son numerosos, ya que

- M puede estar en el arco: AC, CO, OA (que no contiene al tercer punto)
- N puede estar en el arco: BA, AO, OB (que no contiene al tercer punto)
- P puede estar en el arco: CB, BO, OC (que no contiene al tercer punto)
- M puede coincidir con O, o con C
- A, B o C pueden ser interiores a la circunferencia a la que no pertenecen

Omitimos por brevedad la demostración de los restantes casos.

3. Estudio del problema basado en la transformación inversión

También esta técnica conduce a considerar numerosos casos posibles. Vamos a tratar el primer caso citado en el apartado 2.

Siendo (de acuerdo con la figura 4):

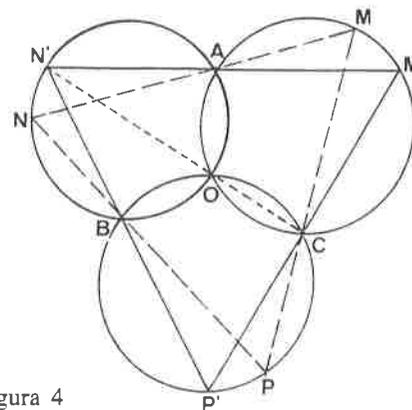


Figura 4

- $N' \in \text{recta}(O,C) \cap \text{circunferencia}(O,A,B)$, $N' \neq O$
- $M' \in \text{recta}(N',A) \cap \text{circunferencia}(O,C,A)$, $M' \neq A$
- $P' \in \text{recta}(N',B) \cap \text{circunferencia}(O,B,C)$, $P' \neq B$
- $I = \text{inversión de polo } N' \text{ tal que } I(O)=C$

se verifica

$$I(A)=M' ; I(B)=P' ; I(\text{circunferencia}(A,O,B))=\text{recta}(M',C,P')$$

luego M', C y P' son colineales. Ahora, siendo

M un punto arbitrario del arco AC (que no contiene a O)

$$N \in \text{recta}(M,A) \cap \text{circunferencia}(O,A,B), N \neq A$$

$$P \in \text{recta}(M,C) \cap \text{recta}(N,B)$$

se tiene

$$CMA = CM'A ; CPB = CP'B$$

$$BPC = NPM = 2 \text{ rectos} - (BNA + AMC) = 2 \text{ rectos} - (BN'A + AM'C) = BP'C$$

P y P' están en el mismo semiplano de borde la recta (B,C)

luego $P \in \text{circunferencia}(O,B,C)$ ■

El estudio por métodos de Geometría Sintética de este tipo de problemas requiere, no sólo una buena dosis de ingenio y dominio de técnicas clásicas de demostración, sino también laboriosidad para tratar los posibles casos a considerar. Además, raramente conducen a explicitar las situaciones en las que el problema degenera. Por otra parte, al intentar resolver el problema con técnicas de geometría analítica elemental, pronto se llega a expresiones extremadamente largas.

Las consideraciones que acaban de indicarse y la naturaleza del problema (en él sólo intervienen figuras que pueden determinarse mediante ecuaciones algebraicas) justifican la conveniencia de acudir a métodos algebraicos de demostración automática: los basados en bases de Groebner y el método de Wu.

4. Primer planteamiento del problema en coordenadas

Identificando el plano euclídeo con \mathbb{R}^2 , elegimos un sistema de referencia que abrevia cálculos, tomando:

- i) el punto O, común a c_1 , c_2 y c_3 , como origen del sistema de referencia
- ii) el otro punto de intersección de c_1 y c_2 , A, en el eje de ordenadas
- iii) el otro punto de intersección de c_1 y c_3 , C, con abscisa unidad

De este modo, las coordenadas de los puntos a considerar pueden tomarse así:

$$O(0,0), A(0,a), B(b,d), C(1,c), M(m,m_2), N(n_1,n_2), P(p_1,p_2)$$

siendo, de acuerdo con el enunciado, $\{a,b,c,d,m\}$ el conjunto de variables libres o independientes y $\{m_2,n_1,n_2,p_1,p_2\}$ el conjunto de variables ligadas o dependientes (ya que, por pertenecer M a c_2 , una de las dos coordenadas de este punto ha de ser ligada). Ello permite expresar la hipótesis del teorema anterior mediante las cinco condiciones siguientes:

- h_1) $M \in c_1$ mediante $H_1=0$, siendo $H_1 := m^2 + m_2^2 - mc^2 + mca - m - am_2$
- h_2) $N \in c_2$ mediante $H_2=0$, siendo $H_2 := bn_1^2 + bn_2^2 + adn_1 - b^2n_1 - d^2n_1 - abn_2$
- h_3) $N \in MA$ mediante $H_3=0$, siendo $H_3 := an_1 - am + n_2m - m_2n_1$
- h_4) $P \in NB$ mediante $H_4=0$, siendo $H_4 := n_2p_1 - dp_1 + bp_2 - n_1p_2 + dn_1 - bn_2$
- h_5) $P \in c_3$ mediante $H_5=0$, siendo $H_5 := p_1^2bc - p_1^2d + p_2^2bc - p_2^2d - p_1d^2c + p_1dc^2 - p_1b^2c - p_2b - p_2bc^2 + p_2b^2 + p_2d^2$

La tesis del problema se expresa del siguiente modo:

- t) $P \in MC$ mediante $H_5=0$, siendo $H_5 := m_2p_1 - cp_1 + p_2 - mp_2 + cm - m_2$

5 Primeros intentos (fallidos) de demostración automática.

Citaremos sólo dos, de entre los muchos intentos fallidos efectuados. En un primer intento, tratamos de calcular la siguiente base de Groebner (GB)

$$GB\left(\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, 1-zT\}, \{m_2, n_2, n_1, p_2, p_1, z\}\right)$$

esperando obtener (1) (lo que significaría que el apartado i del problema planteado en el §1 es cierto, en general, según se explicará más adelante), pero con cualquiera de los tres sistemas Maple, Mathematica o REDUCE se produce una saturación de la memoria del ordenador (8MB en un 486).

En un segundo intento, aplicamos otro método de demostración automática, el de Wu, cuya complejidad es sólo exponencial (en lugar de doble exponencial como son los métodos basados en bases de Groebner). Siendo $K=\mathbb{R}(a,b,c,d,m)$, comenzamos efectuando un proceso de triangulación, que permite determinar los siguientes polinomios F_i :

$$F_1 := H_4 \in K[p_1, p_2, n_1, n_2, m_2]; F_2 := \text{sresto}(H_5, F_1, p_1) \in K[p_2, n_1, n_2, m_2]$$

$$F_3 := H_3 \in K[n_1, n_2, m_2]; F_4 := \text{sresto}(H_2, F_3, n_1) \in K[n_2, m_2]; F_5 := H_1 \in K[m_2]$$

y a partir de estos se calculan los sucesivos seudorestos (sresto):

$$R_1 = \text{sresto}(T, F_1, p_1); R_2 = \text{sresto}(R_1, F_2, p_2); R_3 = \text{sresto}(R_2, F_3, n_1)$$

$$R_4 = \text{sresto}(R_3, F_4, n_2); R_5 = \text{sresto}(R_4, F_5, m_2)$$

esperando obtener $R_5=0$ (lo que significaría que el apartado i del problema planteado en el §1 es cierto, en general, según se explicará más adelante), pero efectuado el cálculo con ayuda del sistema Maple, resulta $R_5 \neq 0$.

Ello se interpreta observando que las dos condiciones h_2 y h_3 (usadas para determinar el punto N) también son verificadas por el punto A (pero el punto de intersección de AB y MC ya no pertenece a c_3), con lo cual no sería cierto el apartado i del problema planteado en el §1. Este resultado sugiere cambiar el planteamiento algebraico efectuado.

6. Segundo planteamiento del problema en coordenadas

Para evitar estas dificultades, conviene plantear el problema de modo que el número de polinomios considerados y el grado de estos sean lo menor posibles, mediante condiciones algebraicas que, en la medida de lo posible, sólo sean verificadas por los puntos citados en el enunciado.

Comenzamos sustituyendo las dos condiciones de la hipótesis h_2 y h_3 por otras dos condiciones que permitan "separar" el punto N del A. Para ello,

comenzamos determinando la recta AM por la ecuación vectorial $\vec{AX} = s \cdot \vec{AM}$, de la que resultan las ecuaciones paramétricas

$$x = s \cdot m \quad ; \quad y = a + s(m_2 - a)$$

que sustituidas en la ecuación de la circunferencia c_2 dan lugar a una ecuación, consistente en la anulación de un polinomio de segundo grado en el parámetro s , que denotamos POLs. Las raíces de tal ecuación de segundo grado en s son obviamente los valores de dicho parámetro, s_N y s_A , que corresponden a los puntos N y A. Pero, es claro que $s_A = 0$, por lo que POLs es múltiplo de s . En consecuencia, dividiendo entre s al polinomio POLs, se obtendrá un polinomio de grado uno en s , cuya única raíz es s_N . Luego llevando tal valor de s a las citadas ecuaciones paramétricas de la recta AM, se obtienen las coordenadas de N:

$$n_1 = s_N \cdot m \quad ; \quad n_2 = a + s_N(m_2 - a)$$

Efectuando el proceso descrito (con ayuda del sistema Maple), se llegan a precisar dos condiciones algebraicas que determinan al punto N:

$$h_2') H_2' = 0, \text{ siendo } H_2' := n_1 b m^2 + n_1 b m_2^2 - 2n_1 b a m_2 + n_1 b a^2 + m b a m_2 - m b a^2 + m^2 a d - m^2 b^2 - m^2 d^2$$

$$h_3') H_3' = 0, \text{ siendo } H_3' := n_2 b m^2 + n_2 b m_2^2 - 2n_2 b a m_2 + n_2 b a^2 - a b m^2 + m a d m_2 - m a^2 d - m b^2 m_2 + m b^2 a - m d^2 m_2 + m d^2 a$$

Por otra parte, considerando inicialmente a P como punto de intersección de l_2 y l_3 , para después analizar si P está, o no, en c_3 , se reduce el grado del polinomio de una de las condiciones de la hipótesis. Para ello basta permutar los papeles de h_3 y t , es decir, sustituir estas dos condiciones por las respectivas condiciones h_3' y t' siguientes:

$$h_3') P \in MC \text{ mediante } H_3' = 0, \text{ siendo } H_3' := m_2 p_1 - c p_1 + p_2 - m p_2 + c m - m_2$$

$$t') P \in c_3 \text{ mediante } T' = 0, \text{ siendo}$$

$$T' := p_1^2 b c - p_1^2 d + p_2^2 b c - p_2^2 d - p_1 d^2 c + p_1 d + p_1 d c^2 - p_1 b^2 c - p_2 b - p_2 b c^2 + p_2 b^2 + p_2 d^2$$

Las restantes condiciones, h_1 y h_4 , son las mismas que ya se indicaron en el apartado 4.

7. Demostración automática por el método de la base de Groebner = {1}

Se trata de probar la implicación

$$\{H_1=0, H_2=0, H_3=0, H_4=0, H_5=0\} \Rightarrow T'=0$$

para lo que basta que existan los polinomios A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pertenecientes al anillo

$$\mathbb{A} = R(a, b, c, d, m)[m_1, n_2, n_1, p_2, p_1]$$

tales que

$$A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3 + A_4 H_4 + A_5 H_5 = T'$$

para algún $r \in \mathbb{N}$, es decir, que T' pertenezca al radical del ideal

$$\langle H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 \rangle$$

del anillo \mathbb{A} , lo cual (por el criterio del ideal radical) equivale a

$$\langle H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, 1 - z T' \rangle_{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$$

Para verificar con comodidad esta igualdad, se acude a bases de Groebner (GB), con las que basta comprobar que

$$GB \left(\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, 1 - z T'\}, \{m_1, n_2, n_1, p_2, p_1, z\} \right) = \{1\}$$

Con ayuda del sistema Maple, calculamos esta base de Groebner obteniendo {1}, en un tiempo de cómputo de 2 minutos y 13 segundos, sobre un PC 486 a 33Mhz.

Esta comprobación nos confirma que el problema es cierto en general, pero nada nos indica sobre las condiciones de degeneración del problema, para lo cual recurrimos al método de Wu.

8. Demostración automática por el método de Wu

Al aplicar el método de Wu, se observa que se abrevia el tiempo de cómputo utilizando los polinomios H_1, H_2, H_3, H_4, H_5' (es decir, volviendo a usar H_3 , en lugar de H_3') y eligiendo el orden que se indica a continuación para las variables ligadas.

Comenzamos efectuando el proceso de triangulación, que vaya eliminando en cada paso una variable ligada, para generar los polinomios F_i siguientes:

$$\begin{aligned}
 F_1 &:= H'_5 \in K[p_2, p_1, n_2, n_1, m_2] \\
 F_2 &:= \text{sresto}(H_4, F_1, p_2) \in K[p_1, n_2, n_1, m_2] \\
 F_3 &:= H_3 \in K[n_2, n_1, m_2] \\
 F_4 &:= \text{sresto}(H'_2, F_3, n_2) \in K[n_1, m_2] \\
 F_5 &:= H_1 \in K[m_2]
 \end{aligned}$$

siendo claro que

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \in \langle H_1, H'_2, H_3, H_4, H'_5 \rangle_{\mathbb{A}}$$

A partir de estos, calculamos los sucesivos seudorestos, R_i , siguientes, verificándose las igualdades que se indican a la derecha, donde los D_i son los coeficientes líderes de los sucesivos divisores. los e_i son los exponentes a que ha de elevarse cada D_i para multiplicar a los dividendos en el algoritmo de seudodivisión. y los Q_i son los cocientes:

$$\begin{aligned}
 R_1 = \text{sresto}(T', F_1, p_2) & \quad ; \quad D_1^{e_1} T' = F_1 Q_1 + R_1 \\
 R_2 = \text{sresto}(R_1, F_2, p_1) & \quad ; \quad D_2^{e_2} R_1 = F_2 Q_2 + R_2 \\
 R_3 = \text{sresto}(R_2, F_3, n_2) & \quad ; \quad D_3^{e_3} R_2 = F_3 Q_3 + R_3 \\
 R_4 = \text{sresto}(R_3, F_4, n_1) & \quad ; \quad D_4^{e_4} R_3 = F_4 Q_4 + R_4 \\
 R_5 = \text{sresto}(R_4, F_5, m_2) & \quad ; \quad D_5^{e_5} R_4 = F_5 Q_5 + R_5
 \end{aligned}$$

Simplificando se obtienen $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathbb{A}$, tales que

$$D_1^{e_1} D_2^{e_2} D_3^{e_3} D_4^{e_4} D_5^{e_5} T' = A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 + A_4 F_4 + A_5 F_5 + R_5$$

luego existen $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 \in \mathbb{A}$, tales que

$$D_1^{e_1} D_2^{e_2} D_3^{e_3} D_4^{e_4} D_5^{e_5} T' = B_1 H_1 + B_2 H'_2 + B_3 H_3 + B_4 H_4 + B_5 H'_5 + R_5$$

Por tanto, si $R_5=0$, entonces para asegurar que sea $T'=0$, basta que se verifiquen las condiciones:

$$H_1=0, H'_2=0, H_3=0, H_4=0, H'_5=0, D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, D_3 \neq 0, D_4 \neq 0, D_5 \neq 0$$

Los cálculos se han efectuado sobre el sistema Maple, aprovechando

su paquete "Geometry" para determinar con comodidad las ecuaciones de rectas y circunferencias. Algunas de los polinomios de tales ecuaciones se han de multiplicar por elementos de $\mathbb{R}[a,b,c,d,m]$ para trabajar sólo con expresiones enteras. El tiempo de computo ha sido de 19 segundos, sobre un PC 486 a 33Mhz, obteniéndose $R_5=0$, lo que nos confirma que la condición i del problema del §1 es cierta en general (ahora por el método de Wu).

El método permite determinar las condiciones de degeneración del problema, mediante los coeficientes D_i , por los que se multiplica al calcular los seudorestos R_i , que resultan ser:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \text{coef.líder}(F_1, p_2) = 1 - m \\
 D_2 &= \text{coef.líder}(F_2, p_1) = n_2 - d - mn_2 + md - m_2 b + n_1 m_2 + bc - cn_1 \\
 D_3 &= \text{coef.líder}(F_3, n_2) = -m \\
 D_4 &= \text{coef.líder}(F_4, n_1) = m^2 b + bm_2^2 - 2bam_2 + ba^2 \\
 D_5 &= \text{coef.líder}(F_5, m_2) = 1
 \end{aligned}$$

9. Condiciones de degeneración del problema

Como se indicó en el §8, las condiciones $(H_1=0, H'_2=0, H_3=0, H_4=0, H'_5=0)$ implican $T'=0$, supuesto que son no nulas las D_i . Vamos pues a ir analizando el significado geométrico de las condiciones a las que conduce la anulación de cada una de las D_i .

Comencemos por la condición $D_1=0$, es decir, $m=1$. Al sustituir m por 1 en $H_1=0$ se obtiene una ecuación de segundo grado en m_2 cuyas raíces, c y $a-c$, determinan dos puntos M presuntamente conflictivos. Uno de ellos es el punto $C=(1,c)$, lo cual es razonable, ya que si $M=C$ entonces la recta $l_3 = MC$ no está determinada. Pero el otro punto, $M=(1,a-c)$, no presenta dificultades, según puede verificarse, haciendo $m=1$ y $m_2=a-c$, y comprobando que se obtiene la igualdad

$$GB\left[(H'_2, H_3, H_4, H_5, 1-z \cdot T), (n_2, n_1, p_2, p_1, z)\right] = \{1\}$$

(Notemos que este segundo punto ha aparecido por tener su primera coordenada igual que la de C , lo cual es consecuencia del modo en que se ha traducido algebraicamente la condición $M \in c_1$)

Sigamos con la condición $D_3=0$, es decir, $m=0$ (por su similitud con la anterior). Al sustituir m por 0 en $H_1=0$ se obtiene una ecuación de segundo grado en m_2 cuyas raíces, a y 0 , determinan dos puntos M presuntamente conflictivos. Uno de ellos es el punto $A=(0,a)$, lo cual es razonable, ya que si $M=A$ entonces la recta $l_1 = MA$ no está determinada. Pero el otro punto, $M=(0,0)=O$, no presenta dificultades, según puede verificarse, haciendo $m=0$ y $m_2=0$, y comprobando que resulta:

$$GB \left[\{H_2', H_3, H_4, H_5, 1-z, T\}, \{n_2, n_1, p_2, p_1, z\} \right] = (1)$$

(Notemos que este último punto ha aparecido por tener su primera coordenada igual que la de A)

Continuemos con la condición $D_4=0$. Es claro que D_4 puede factorizarse en la forma

$$D_4 = bU \quad ; \quad U = (m_2 - a)^2 + m^2$$

La anulación del primer factor, $b=0$, implica que sean colineales B, O y A . Y la anulación del segundo factor, U , implica $m=0$ y $m_2=a$, con lo cual M sería el punto $A=(0,a)$, que ya ha sido considerado.

La condición $D_2=0$, puede escribirse en la forma

$$(1-m)(n_2-d) + (m_2-c)(n_1-b) = 0$$

pero esta es la condición de paralelismo de las rectas $l_2=NB$ y $l_3=MC$. Para determinar las consecuencias que tal condición determina sobre la elección de las variables libres (a,b,c,d,m) , eliminemos las variables ligadas que en ella aparecen (m_2, n_1, n_2) entre las cuatro condiciones $D_2=0, H_1=0, H_2'=0, H_3=0$, por el método de los seudorestos:

$$H_{33} := \text{sresto}(H_3, D_2, n_2) \in K[n_1, m_2]$$

$$H_{22} := \text{sresto}(H_2', H_{33}, n_1) \in K[m_2]$$

$$H_{222} := \text{sresto}(H_{22}, H_1, m_2) \in K[m_2]$$

$$G := \text{sresto}(H_1, H_{222}, m_2) \in K = \mathbb{R}[a,b,c,d,m]$$

Resulta así un polinomio $G \in \mathbb{R}[a,b,c,d,m]$, que omitimos por brevedad, pero, del modo en que ha sido obtenido se sigue que G pertenece al ideal de $\hat{\mathbb{A}} <D_2, H_1, H_2', H_3>$, y en consecuencia $D_2=0$ implica $G=0$. Factorizando G , resulta

$$G = -m^4 \cdot G_2^2 \cdot (m-1) \cdot G_4 \cdot G_5$$

donde

$$G_2 = bc - d \quad ; \quad G_4 = -2ca + 1 + a^2 + c^2$$

$$G_5 = ba^2 - ma^2 - b^2ca - bad + 2mad + b^2c^2 - mb^2 + b^2 - md^2$$

La anulación de los factores m y $(m-1)$ ha sido considerada anteriormente. Es inmediato verificar que la condición $G_2=0$ es la condición de alineación de los puntos B, O y C .

Notemos que, también "vía Geometría Sintética", es fácil probar que la condición de alineación de B, O y C implica la condición paralelismo de las rectas $l_2=NB$ y $l_3=MC$. En efecto, de acuerdo con la figura 5, se tiene:

$$1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 4 = 2 \text{ rectos} \Rightarrow 1 = 3 \wedge 2 = 4 \Rightarrow 1 + 2 = 2 \text{ rectos}$$

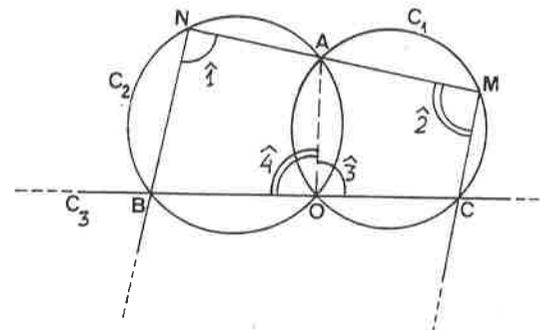


Figura 5

Por otra parte, basta escribir el polinomio G_4 en la forma $G_4 = (a-c)^2 + 1$, para concluir que, cualesquiera que sean los valores de las variables libres, es $G_4 \neq 0$ (en la geometría real que estamos considerando). Finalmente, para interpretar la condición $G_5=0$, tengamos en cuenta que la condición de alineación de los puntos M, A y B puede expresarse en la forma $D=0$, donde

$$D = m(d-a) - b(m_2-a)$$

pero eliminando la variable ligada m_2 entre esta condición y $H_1=0$, resulta

$$R = \text{sresto}(H_1, D, m_2) = m^2b^2 - c^2mb^2 + amb^2c - mb^2 + m^2d^2 - 2m^2ad + a^2m^2 + ambd - mba^2$$

y en consecuencia $R = b^2H_1 - DQ$, siendo el cociente, Q , de tal seudodivisión

$$Q = m(a-d) - m_2b$$

($Q=0$ es la condición de perpendicularidad de MO y BA). Comparando con G_5 se observa que $R = -m \cdot G_5$, luego se tiene

$$-m \cdot G_5 = b^2H_1 - DQ$$

En consecuencia, para cualquier punto $M \in c_1$ ($H_1=0$), se tiene la implicación

$$G_5=0 \Rightarrow DQ=0 \Rightarrow D=0 \vee Q=0$$

Como ya se ha indicado, $D=0$ es la condición de alineación de M , A y B (lo cual es razonable, ya que entonces la recta $l_2 = NB$ no está determinada). Y la condición $Q=0$, lleva a resolver el sistema $\{Q=0, H_1=0\}$ respecto de las variables m y m_2 , que proporciona dos soluciones. Una es $O=(0,0)$ y la otra $L=(bv/w, (a-d)v/w)$, siendo

$$v = bc^2 - abc + b + a^2 - ad \quad ; \quad w = b^2 + (a-d)^2$$

pero ninguno de esos dos puntos es conflictivo, ya que asignando a m y m_2 las respectivas coordenadas de uno u otro punto, se obtiene

$$GB\left[\{H_2', H_3, H_4, H_5, 1-z \cdot T\}, \{n_2, n_1, p_2, p_1, z\}\right] = \{1\}$$

(Notemos que, geoméricamente, para $M=O$ la construcción de las rectas l_1 , l_2 y l_3 no presenta ningún problema, resultando que M , N y P coinciden en O)

10. Conclusión

Resumiendo, según el método de Wu, las condiciones $\{H_1=0, H_2'=0, H_3=0, H_4=0, H_5=0\}$ implican $T'=0$, supuestas no nulas las D_j , es decir, supuesto que se verifican

- 1) B , O y A no son colineales
- 2) B , O y C no son colineales
- 3) C , O y A no son colineales
- 4) M no está en la recta AB
- 5) M es distinto de A
- 6) M es distinto de C

Notemos que la condición 3) va implícita en el hecho de haber elegido 1 como

abscisa de C (distinta de la abscisa nula de O y de A). Además, las tres primeras condiciones pueden expresarse conjuntamente diciendo que " O , A , B y C no sean colineales tres a tres". Por otra parte, es claro que la condición 5) sigue de la anterior. Finalmente, la condición 6) es superflua, ya que si M coincide con C , entonces P , C y M son colineales, cualquiera que sea P .

Estas consideraciones geométricas, junto con las verificaciones de 7, permiten concluir el problema en estudio en el siguiente enunciado, que denominamos "teorema de las tres circunferencias concurrentes".

Teorema de las tres circunferencias concurrentes.-

Sean O , A , B y C cuatro puntos del plano, no alineados tres a tres (excepto A , B y C , que pueden ser colineales), y c_1 , c_2 y c_3 las respectivas circunferencias OCA , OAB y OBC . Sea M un punto arbitrario de c_1 , no perteneciente a la recta AB . Si se determinan sucesivamente:

- i) la recta l_1 que pasa por M y A
- ii) el otro punto, N , de intersección de l_1 y c_2 (además del A)
- iii) la recta l_2 que pasa por N y B
- iv) el otro punto, P , de intersección de l_2 y c_3 (además del B)

entonces los puntos P , C y M son colineales.

Nota.- La expresión "además del A ", que aparece en el apartado ii), pretende incluir el caso en que l_1 sea tangente a c_2 , en el cual N coincide con A . Lo mismo puede decirse respecto de la expresión "además del B " del apartado iv) para incluir el caso en que l_2 sea tangente a c_3 en el cual P y C coinciden.

11. Referencias

- [1] Berger: *Geometry I*; Springer 1987
- [2] Char-Geddes-Gonnet-Leong-Monagan-Wat: *Maple V Library Reference Manual*; Springer 1991
- [3] Chou: *Mechanical Geometry Theorem Proving*; Reidel 1987
- [4] Cox-Little-O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms*; Springer 1991
- [5] Coxeter: *Introduction to Geometry*; Wiley 1969
- [6] Wu: *Some Recent Advances in Mechanical Theorem-Proving of Geometries*; A.M.S., *Contemporary Mathematics* 29 (235-242) 1984

PROBLEMAS PROPUESTOS

*Problemas propuestos en la FASE FINAL de la
XXIX Olimpiada Matemática Española*

PROBLEMA 1º:

En una reunión hay 201 personas de cinco nacionalidades diferentes. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos cinco personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

PROBLEMA 2º:

Escrito el triángulo aritmético

0	1	2	3	4	1991	1992	1993
	1	3	5	7	3983	3985	
		4	8	12		7968	

.....

donde cada número es igual a la suma de los dos que tiene encima (como es evidente, cada fila consta de un número menos que la anterior y por tanto la última fila estará formada por un único número), razonar que el último número es múltiplo de 1993.

PROBLEMA 3º:

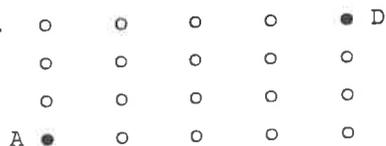
Justificar razonadamente que en cualquier triángulo el diámetro de la circunferencia inscrita no es mayor que el radio de la circunferencia circunscrita.

PROBLEMA 4º:

Demostrar que todo número primo p distinto de 2 y de 5 tiene infinitos múltiplos escritos a base de unos (es decir, del tipo 11111...1).

PROBLEMA 5^o:

Se dan dieciséis puntos formando una cuadrícula como en la figura.



De ellos se han destacado A y D. Se pide fijar de todos los modos posibles otros dos puntos, B y C, con la condición de que las seis distancias determinadas por los cuatro puntos sean distintas. En ese conjunto de cuaternas, estudiar:

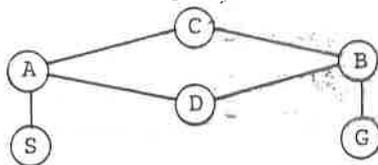
1^o. Cuántas figuras de cuatro puntos existen con la condición del enunciado.

2^o. Cuántas de ellas son geoméricamente distintas, es decir, no deducibles una de otra por una transformación de igualdad.

3^o. Si cada punto se designa por un par de enteros (X_i, Y_i) , razonar que la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$, extendida a los seis pares AB, AC, AD, BC, BD, CD, es constante.

PROBLEMA 6^o:

Una máquina de juego de un casino tiene una pantalla en la que se ofrece un esquema como el de la figura. Para comenzar el juego aparece una bola en el punto S.



A cada impulso que recibe del jugador, esa bola se mueve hasta uno de los círculos inmediatos, con la misma probabilidad para cada uno de ellos. La partida termina al ocurrir el primero de los dos sucesos siguientes:

- 1^o. La bola vuelve a S, y entonces el jugador pierde.
- 2^o. La bola llega a G, y entonces el jugador gana.

Se pide:

- a) Cuál es la probabilidad de que gane el jugador;
- b) Cuál es la duración media de las partidas.

INDICE DE SOLUCIONES PUBLICADAS

Pro- pues- tos en el n ^o	Proceden- tes de	Números de los Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										o b s.				
		1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o	7 ^o	8 ^o	9 ^o	10 ^o					
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	-	-	-	-	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	-	-	-	-	-	-	-	-	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	-	-	-	-	C
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	-	-	-	-	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	-	-	-	-	C
9	OME-f2-86 / Varios	18	19	20	18	19	19/17	17	11	17	-	-	-	-	-	C
10	China / Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	-	-	-	-	-	C
11	OME-f1-86 / OMI-86-Varsovia	13	14	14	14	14	23	20	15/20	12	-	-	-	-	-	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
13	OME-f2-87	16	14	14	17	15	17/15	15	15	21	-	-	-	-	-	C
14	Varios	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	-	-	-	-	C
15	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
16	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	-	-	-	-	C
17	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	-	-	-	-	C
18	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	-	-	-	-	C
19	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	-	-	-	-	C
20	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	-	-	-	-	C
21	OME-f1-88 / Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26/26	24	-	-	-	-	-	C
22	OME-f2-89 / OI-89-Cuba	24	27	24	27	27	24/27	25	27	26	-	-	-	-	-	C
23	OMI-89-R.F.A. / Oposiciones	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
24	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	-	-	-	-	C
25	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	31	-	-	-	-	-	-	-	C
26	OME-f2 / f1- 90	34	31	29	29	31	32/32	32	32	33	-	-	-	-	-	C
27	OMI-90-China / OI-90-Valladolid	32	XX	XX	32	XX	XX/XX	32	XX	34	-	-	-	-	-	C
28	OME-f1-91	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
29	OME-f2-91	33	XX	33	33	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	C
30	OMI-91-Suecia	32	32	XX	XX	33	33	-	-	-	-	-	-	-	-	C
31	OI-91-Argentina / OME-f1-91	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	C
32	OME-f2-92 / OME-f1-91 / PNS	XX	XX	XX	34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	C
33	OMI-92-Moscu / OI-92-Venez./ PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX/XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	C
34	OME-f1-92/f1-92(v) /PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX/XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	C
35	OME-f2-93	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación . C = Completo
 OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2).
 OMI = Olimpiada Matemática Internacional.
 OI = Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
 PNS = Propuestos por nuestros socios.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

3	4	10	26	28	30
<input type="checkbox"/>					
31	32	33			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			

Envío adjuntos sellos para el franqueo (52 pta por número para Madrid - capital y 78 pta por número para el resto de España).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27 y 29 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Aptdo. 9479 - 28.080 -MADRID.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1º (Boletín nº 25)

Sean x e y dos números reales positivos. Probar que la expresión $A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$ se puede escribir en la forma $B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$, y comparar los números $L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}}$ y $M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22}} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}$.

Solución:

El cuadrado de $\sqrt{y} + \sqrt{xy}$ es $y + xy + 2y\sqrt{x}$, de donde resulta inmediatamente que $A = B$.

Como $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$, o sea que $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, poniendo $a = 3$, $b = 5 - \sqrt{22}$, resulta que $M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{3} + \sqrt{5 - \sqrt{22}}$, y teniendo en cuenta que

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{p - \sqrt{q}})^2 = 2p + 2\sqrt{p^2 - q}$$

con $p = 5$ y $q = 22$, resulta

$$M = \sqrt{3} + \sqrt{2.5 + 2\sqrt{5^2 - 22}} = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}} = L$$

Esto es, $M = L$.

Argearge.

PROBLEMA 10º (Boletín nº 26)

Sea C_1 una circunferencia, AB uno de sus diámetros, t su tangente en B y M un punto de C_1 , distinto de A y de B. Se construye una circunferencia C_2 tangente a C_1 en M y a la recta t. a) Determinar el punto P de tangencia de t y C_2 y hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias C_2 al variar M.

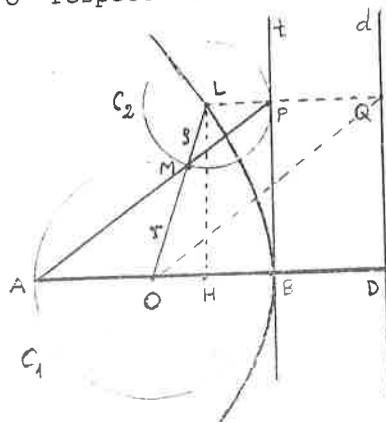
b) Demostrar que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias C_2 .

NOTA: Dos circunferencias son ortogonales si se cortan y las tangentes respectivas en los puntos de intersección son perpendiculares.

Solución:

Sean O el centro de la circunferencia C_1 , r su radio, D el simétrico de O respecto de B y d la paralela a t por D .

a) Sea C_2 la circunferencia tangente a C_1 en M y a t en P ; sea L su centro y ρ su radio. Puesto que L está alineado con O y M , y LP y AO son paralelos, se tiene: $\frac{LP}{AO} = \frac{\rho}{r} = \frac{ML}{MO}$, luego P es la intersección de AM con t .



La distancia LQ de L a d es igual a la distancia de L a O ; por tanto, el lugar geométrico de los centros de las circunferencias C_2 al variar M es la parábola de foco O y directriz d .

b)

$$AP^2 = OQ^2 = OD^2 + DQ^2 = OD^2 + HL^2 = OD^2 + OL^2 - OH^2 = 4r^2 + (r + \rho)^2 - (r - \rho)^2 = 4r(r + \rho) \quad [1]$$

Además, $\frac{AM}{MP} = \frac{r}{\rho}$ lo que implica

$\frac{AM}{AM + MP} = \frac{AM}{AP} = \frac{r}{r + \rho} = \frac{AM \cdot AP}{AP^2}$, de donde, según [1], $AM \cdot AP = 4r^2$, que es independiente de C_2 , lo que prueba que la circunferencia de centro A y radio $AB = 2r$ es ortogonal a todas las C_2 .

Francisco Lorenzo Miranda (Madrid)

PROBLEMA N° 12 (Boletín n° 30)

Se han experimentado dos fármacos A y B en dos hospitales. En ambos se obtuvo mejor resultado con el fármaco A que con el B, pero al juntar los resultados de ambos hospitales se comprobó con estupor que el fármaco B obtenía mejores resultados que el A. ¿Es esto posible o se debe con certeza a un error de cálculo?

Solución:

Supongamos que para conocer la efectividad de los medicamentos en cada hospital se ha comparado las dos proporciones siguientes:
la de enfermos que han tenido una mejoría con A sobre el total de los que han sido tratados con A
y la de enfermos que han tenido una mejoría con B sobre el total de los que han sido tratados con B.

Sea e_{ij} = nº de enfermos que han mejorado con i en el hospital j
y E_{ij} = nº de enfermos tratados con i en el hospital j
con $i = A \text{ ó } B$
 $j = 1, 2$ $0 < e_{ij} < E_{ij}$

Para darse la situación del enunciado deberá ser:

$$\frac{e_{A1}}{E_{A1}} > \frac{e_{B1}}{E_{B1}} \quad \text{y} \quad \frac{e_{A2}}{E_{A2}} > \frac{e_{B2}}{E_{B2}} \quad \text{con} \quad \frac{e_{A1} + e_{A2}}{E_{A1} + E_{A2}} < \frac{e_{B1} + e_{B2}}{E_{B1} + E_{B2}}$$

expresiones que admiten muchas soluciones como por ejemplo:

$$\begin{matrix} e_{A1} = 7 & e_{A2} = 8 & e_{B1} = 3 & e_{B2} = 13 \\ E_{A1} = 10 & E_{A2} = 9 & E_{B1} = 5 & E_{B2} = 15 \end{matrix}$$

o también,

$$\begin{matrix} e_{A1} = 21 & e_{A2} = 16 & e_{B1} = 6 & e_{B2} = 26 \\ E_{A1} = 30 & E_{A2} = 18 & E_{B1} = 10 & E_{B2} = 30 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} e_{A1} = 5 & e_{A2} = 5 & e_{B1} = 1 & e_{B2} = 11 \\ E_{A1} = 9 & E_{A2} = 6 & E_{B1} = 2 & E_{B2} = 14 \end{matrix}$$

Manuel E. Serrano Caballero (Segovia)

PROBLEMA N° 13 (Boletín n° 30)

Sea m un número natural. Pruébese que si $2^m + 1$ es primo y mayor que tres entonces m es par necesariamente.

Solución: Procedamos por reducción al absurdo.

supongamos que m es impar ($m > 1$) $\rightarrow m = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$

$$= 2^m + 1 = 2^{2k+1} + 1 = 2 \cdot 2^{2k} + 1 = 2(2^{2k} - 1) + 3 = 2(2^k + 1)(2^k - 1) + 3 \quad \text{y como}$$

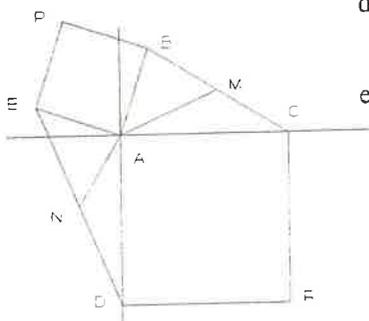
$2^k \neq 3 \rightarrow 2^k + 1 = 3 \text{ ó } 2^k - 1 = 3$ se tiene que $2^m + 1 = 3$ luego no es primo. c.q.d.

Manuel E. Serrano Caballero (Segovia)

PROBLEMA N° 14 (Boletín n° 30)

Sea ABC un triángulo cualquiera. Exteriormente a él se construyen dos cuadrados BAEP y ACRD de lados AC y AB respectivamente. Sean M y N respectivamente los puntos medios de BC y ED. Demostrar que AM es perpendicular a ED y que AN es perpendicular a BC.

Solución:



Según la figura, sean las coordenadas de los vértices del triángulo,

$$A(0, 0) \quad B(b_1, b_2) \quad C(c, 0)$$

entonces se tiene

$$D(0, -c) \quad E(-b_2, b_1)$$

$$M\left(\frac{b_1+c}{2}, \frac{b_2}{2}\right) \quad N\left(\frac{b_2}{2}, \frac{b_1-c}{2}\right)$$

de donde,

$$\vec{DE} \cdot \vec{AM} = (-b_2, b_1+c) \cdot \left(\frac{b_1+c}{2}, \frac{b_2}{2}\right) = 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{AN} = (c-b_1, -b_2) \cdot \left(\frac{b_2}{2}, \frac{b_1-c}{2}\right) = 0$$

con lo cual $\vec{DE} \perp \vec{AM}$ y $\vec{BC} \perp \vec{AN}$. c.q.d.

Manuel E. Serrano Caballero (Segovia)

PROBLEMA N° 15 (Boletín n° 31)

Dar reglas para calcular directamente el valor de la función $b(n)$ definida por:

$$b(0) = -1 \quad \text{y si } n \in \mathbb{N}, \quad b(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{\binom{n}{k}}$$

(propuesto por Juan Bosco Romero Marquez)

Solución:

El problema se comienza calculando cuantos términos de la sucesión de números combinatorios $\binom{n}{k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) son impares y cuántos pares. Esto se consigue con las siguientes consideraciones:

1ª) Si es $n = 2^h - 1$, todos los términos son impares, lo que se ve examinando la expresión general

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

y teniendo en cuenta que si un factor del denominador tiene exactamente p factores 2, es decir, es $2^p q$, con q impar y $p < h$, el factor que tiene encima en el numerador es $2^{h-1} - (2^p q - 1) = 2^p (2^{h-p-q})$, que también tiene exactamente p factores 2.

2ª) A partir de eso, el cálculo para todo n se puede hacer mediante la propiedad fundamental

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

sumar

	+	I	P	
I		P	I	
P		I	P	

(I representa "número impar" y P, "número par")

3ª) Con ello, el número de términos impares para $n = 2^h$ es 2 (los $\binom{n}{0}$ y $\binom{n}{n}$); para $n = 2^{h+1}$, el número de términos impares es 2^2 y en general, para cualquier n , el número de términos impares es 2^p siendo p el número de cifras 1 que aparece en la representación binaria de n .

Por tanto, como el número de términos de la sucesión de números $\binom{n}{k}$ es $n+1$, resulta que el número de términos pares es $n+1-2^p$, y de ahí, sale

$$b(n) = n + 1 - 2^{p+1}$$

(con $p =$ número de cifras 1 en la representación binaria de n).

Por ejemplo, para $n = 37$, como la representación binaria de 37 es 100101, resulta

$$b(37) = 38 - 16 = 22$$

Alberto Aizpún (Madrid)