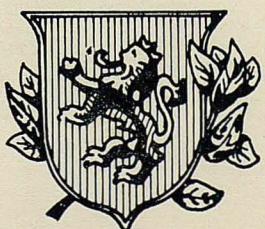


REVISTA
DE LA
**ACADEMIA
DE
CIENCIAS**

Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales

DE
ZARAGOZA



Serie 2^a
Volumen 42

1987

INDICE DE MATERIAS

	<i>Págs.</i>
R. Ayala y A. Quintero. — «A note on contractible open homology manifolds»	5
L. M. Fernández. — «A note on F-sectional curvatures of S-manifolds».	11
I. K. Argyros. — «On the solution by series of some nonlinear equations»	18
I. K. Argyros. — «Survey on the ideals of the space of bounded linear operators on a separable hilbert space»	24
J. M. Franco et M. Palacios. — «Une classe de methodes numeriques pour l'integration directe d'équations differentielles du type $y'' = f(t,y,y')$ »	45
J. M. Franco y M. Palacios. — «Estudio cualitativo e integración de las ecuaciones del movimiento del «main problem» ecuatorial»	69
A. Abad, A. Elipe y M. L. Sein-Echaluce. — «Método estroboscópico en variables de Delaunay. Aplicación a un radial del satélite artificial».	81
R. Cid y M. E. San Saturio. — «Movimiento de un sólido pesado en un conjunto superabundante de variables»	91
J. Badal, V. Corchete y F. Serón. — «Datos de dispersión contaminados por ruido y atenuación anclástica»	105
G. Ochoa. — «A complete description of the outer plethysm in $R(S)$ » ...	119
M. A. Soriano. — «Características de los rafonis y alveolos desarrollados al sur de Zaragoza»	123
A. Aparicio, V. Sánchez Cela y L. E. Cacho. — «Petrological and geochemical considerations on the Cabo Ortegal complex (NW Spain)» ...	131
L. F. Auque, J. Fernández Cascán. — «Métodos isotópicos aplicados a la prospección geométrica»	163
A. Navas y J. Tena. — «Grado de diagénesis de las rocas pelíticas del Paleozoico en las sierras de Vicort y Algairén (Cordillera Ibérica) ...	175

A NOTE ON CONTRACTIBLE OPEN HOMOLOGY MANIFOLDS*

R. AYALA, A. QUINTERO

Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas.
Tarifa, s/n. 41012 SEVILLA (Spain).

We study the homology manifolds which have the proper homotopy type of an euclidean space. It is proved that $M \times R \cong R^{n+1}$ for each contractible open homology n -manifold M .

1. BASIC DEFINITIONS. A homology n -manifold ((HML, n)-manifold) is an euclidean polyhedron $M = |K|$ such that $\tilde{H}_*(lk(x; K))$ is $\tilde{H}_*(S^{n-1})$ or 0, for each $x \in M$. The set of points with the latter property is called the boundary of M and is a (HML, $n-1$)-manifold, ∂M , without boundary which is the underlying space of a subcomplex $\partial K \subseteq K$.

An open HML-manifold is a no compact HML-manifold without boundary. A homological n -space is an open HML-manifold M such that $H_*^{II}(M) \cong H_*^{II}(R^n)$. Here $H_*^{II}(-)$ is the second kind homology for infinite polyhedra.

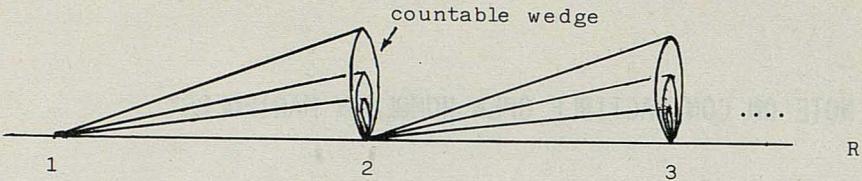
For a general reference of the usual properties of HML-manifolds see Maunder [10].

Given a T_2 -space X , an ∞ -neighbourhood is a subset N such that $X - \overline{N}$ is compact. X is said to be 1-locally connected at ∞ (1-LC at ∞) if for any ∞ -neighbourhood U there exists an ∞ -neighbourhood $W \subseteq U$ such that $\pi_1(W) = 1$.

It is easy to check that the property of being 1-LC at ∞ is invariant under proper homotopy equivalence. Also it is obvious that 1-connected at ∞ implies 1-LC at ∞ . However, the following space

* This work has been supported in part by CAICYT grant 0812-84

shows the failure of the converse:



2. CONTRACTIBLE OPEN HML-MANIFOLDS.

1. Proposition. Let M be a contractible open HML-manifold. Then M is a homological n -space.

Proof. It follows from the duality isomorphisms between the second kind homology and ordinary cohomology for HML-manifolds (see Domínguez [3;8.1] or Lefschetz [8;41.4]).

2. Proposition. Let $M = |K|$ be a contractible open (HML, n) -manifold. If $n \geq 5$, M is proper homotopy equivalent to \mathbb{R}^n if and only if M is 1-LC connected at ∞ .

Proof. If $n \geq 5$, the singular set S where M is not TOP-manifold is a subset of vertices (Cannon [1;3.5]). Taking the second barycentric subdivision of K , if it were necessary, we can assume $st(v_i; K) \cap st(v_j; K) = \emptyset$ for any pair $v_i, v_j \in S$. It is well known (see Galewski-Stern [5;1.6] or Quintero [11;3.2]) that $lk(v; K)$ bounds a contractible HML-manifold, N_v , such that $\text{int } N_v$ is TOP-manifold. Then

$$\tilde{M} = (M - \bigcup \{\overset{\circ}{st}(v; K), v \in S\}) \cup \{N_v, v \in S\}$$

is a TOP-manifold. Identifying N_v to v , for each $v \in S$, we get a map $f: \tilde{M} \longrightarrow M$ which is a proper homotopy equivalence. Then \tilde{M} is contractible and 1-LC at ∞ . Now Siebenmann [12;1.1] implies that \tilde{M} is homeomorphic to \mathbb{R}^n . The converse is immediate.

3. Proposition. Let M be an open (HML, n) -manifold ($n \geq 4$). If M has infinite many TOP-singular points, there no exists any polyhedron P such that $P \times [0, \infty)$ is an ∞ -neighbourhood. In particular, M can not be the interior of a compact $(HML, n+1)$ -manifold with boundary.

Proof. Let S be the TOP-singular set of M . If U is an ∞ -neighbourhood, P a polyhedron and $h: U \longrightarrow P \times [0, \infty)$ a homeomorphism, $V = h^{-1}(P \times [0, \infty))$ will be an open ∞ -neighbourhood. Since the link of $x \in P \times [0, \infty)$ has the same homotopy type as the link of $h^{-1}(x)$ (see Maunder [10;2.4.5]), every link in V is simply connected. So, V is a TOP-manifold. Therefore, $S \cap V = \emptyset$ and $S \subseteq \overline{M-V}$ is finite.

If \hat{M} is a compact HML-manifold and $h: M \longrightarrow \text{int} \hat{M}$ a homeomorphism, given a regular neighbourhood, N , of $\partial \hat{M}$ the subspace $N-N$ is homeomorphic to $\partial \hat{M} \times [0, \infty)$ and is a ∞ -neighbourhood. From the first statement we get that the TOP-singular set of M cannot be infinite.

4. Examples. 1) Let M^3 be the Poincaré homology 3-sphere. From the duality isomorphism $H_q^{II}(M) \cong H^{3-q}(M)$ (see Domínguez [3:8.1] or Lefschetz [8;41.4]) it follows that $M - \{*\}$ is a homological 3-space 1-LC at ∞ but it has not the same proper homotopy type as \mathbb{R}^3 because $\pi_1(M - \{*\}) \neq 1$.

2) The Double Suspension Theorem (Cannon [1;3.7]) states that $\sum^2 M^3$ is homeomorphic to S^5 . Then $\sum^2 M^3 - \{*\}$ is a homological 5-space homeomorphic but not PL-isomorphic to \mathbb{R}^5 .

3) Let G_n be a Glaser contractible manifold ($n > 5$) (see Glaser [6]). Then $Z = G_n - \partial G_n$ is a homological n -space by Proposition 1, but Z is not 1-LC at ∞ because $\pi_1(\partial G_n) \neq 1$. Then, by Proposition 2, Z has not the proper homotopy type of \mathbb{R}^n although both manifold are contractible.

4) If $v \in \sum^1 \partial G_n - \sum^1$, $V = \sum^1 \partial G_n - \{v\}$ is a homological n -space with the same proper homotopy type as \mathbb{R}^n (Proposition 2). Also V is PL-isomorphic to $\text{int}(\sum^1 \partial G_n - \overset{\circ}{\Delta})$, where Δ is an n -simplex with $\Delta \cap \sum^1 = \emptyset$.

5) If $H^n = \sum^1 \partial G_n$, let W the infinite connected sum $W = H^n \# H^n \# \dots$, where W is constructed avoiding \sum^1 in each copy of H^n . It is easy to show that W is a contractible open HML-manifold 1-LC at ∞ . Then, W has the proper homotopy type of \mathbb{R}^n (Proposition 2) but is not the interior of a compact HML-manifold with boundary (Proposition 3).

Now, we are going to prove the following "Proper Suspension

Theorem":

5. Theorem. Let M be a homological n -space ($n \geq 1$). Then $M \times \mathbb{R}$ is homeomorphic to \mathbb{R}^{n+1} if and only if M is contractible.

First we will need some definitions and results from Glaser [7].

Let K be a locally finite simplicial complex. For each infinite subcomplex $L \subset K$ let $c(K-L)$ be the set of connected components of $|K| - |L|$. Then the set of finite subcomplexes, directed by inclusion, gives

us an inverse limit $\Lambda(K) = \varprojlim \{c(K-L)\}$. $\Lambda(K)$ is called the set of Freudenthal's ends of K . $\text{Card}(\Lambda(K))$ is denoted by $e(K)$.

Let $C^*(K)$ be the \mathbb{Z}_2 -cochain complex of K . The subcomplex $C_f^*(K)$ is defined as

$$C_f^*(K) = \{c \in C^*(K); c = 0 \text{ except for a finite number of simplexes of } K\}$$

Then we have the exact sequence

$$0 \longrightarrow C_f^*(K) \longrightarrow C^*(K) \longrightarrow C^*(K)/C_f^*(K) = C_e^*(K) \longrightarrow 0$$

In the usual way we get the exact sequence

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H_c^0(K) \longrightarrow H_e^0(K) \longrightarrow H_e^1(K) \longrightarrow H_c^1(K) \longrightarrow H^1(K) \longrightarrow \dots$$

6. Lemma. a) $e(K) = \dim H_e^0(K)$

b) Let $|K|$ and $|L|$ be 1-connected polyhedra with $e(K) = e(L) = 1$. Then $|K| \times |L|$ is 1-connected at ∞ .

c) If $|K|$ is 1-connected and $e(K) = 1$, $|K| \times \mathbb{R}$ is connected at ∞

Proof. a), b) and c) are respectively 1.9, 1.5 and 1.6 from Glaser [7]

7. Proposition. Let $M = |K|$ be a homological n -space ($n \geq 2$). Then $e(K) = 1$.

Proof. From the duality relations (with coefficients in \mathbb{Z}_2) we get

$H_c^1(M) \simeq H_{n-1}(M) \simeq H^{n-1}(M) \simeq H_1^{II}(M) = 0$. Also $H_c^0(M) = 0$ and using the sequence (*) and 6.a) we obtain $e(K) = 1$.

8. Corollary. Let $M^m = |K|$ and $N^n = |L|$ be open HML-manifolds. Then, if $M \times N$ is contractible and $n + m \geq 3$, $M \times N$ is 1-connected at ∞ .

Proof. If $m, n \geq 2$, $e(K) = e(L) = 1$ and it follows from 6.b). If $m = 1$, $M = \mathbb{R}$ and $n \geq 2$; then $e(L) = 1$ by Proposition 7 and we conclude by 6.c).

Now Theorem 5 is the case $N = \mathbb{R}$ in

9. Theorem. Let $M = |K|$ and $N = |L|$ be open HML-manifolds with $m, n \geq 1$. Then $M \times N$ is homeomorphic to \mathbb{R}^{n+m} if and only if M and N are contractible.

Proof. If $n = m \leq 2$, M and N are homeomorphic to the respective euclidean space \mathbb{R}^n (see Christenson-Voxman [2;16.C.3]). The case $m = 3$, $n = 1$ is Freedman [4;1.2]. If $n + m \geq 5$, $M \times N$ is a TOP-manifold because the links are simply connected (Cannon [1;3.5]). Then we conclude using Siebenmann [12;1.1]. Künneth's formula and Whitehead Theorem show the converse.

10. Remark. $M \times N$ can be homeomorphic to \mathbb{R}^{n+m} although M and N have not the same proper homotopy type as an euclidean space. Actually, $M = N = G_n - \partial G_n$ verify the above condition (see Example 4.3))

REFERENCES

- [1] J.W. CANNON "The recognition problem: What is a topological manifold?". Bull. AMS 84(1978) 832-866.
- [2] C. CRHISTENSON, W. WOXMAN Aspects of Topology. Marcel Dekker, 1977.
- [3] E. DOMINGUEZ "Cobordismo infinito". Preprint. Sem. Mat. García de Galdeano. Ser. II, nº 27. Zaragoza 1985.
- [4] M. FREEDMAN "Topology of four-dimensional manifolds". J. Diff. Geom. 17(1982) 357-453.
- [5] D. GALEWSKI, R. STERN "Classification of simplicial triangulations of topological manifolds". Ann. of Math. 111(1980) 1-34

- |6| L. GLASER "Uncountably many contractible open 4-manifolds
Topology 6(1967) 37-42.
- |7| _____ Combinatorial Topology II. Van Nostrand, 1970.
- |8| S. LEFSCHETZ Algebraic Topology. AMS Coll. Publ., 1942.
- |9| E. LUFT "On contractible topological manifolds". Inv.
Math. 4(1967) 192-201.
- |10| C.R.F. MAUNDER Algebraic Topology. Van Nostrand, 1970.
- |11| A. QUINTERO "Algunos resultados sobre el bordismo de las
variedades de homología". To appear in Rev. Acad. Ciencias Ma-
drid.
- |12| L. SIEBENMANN "On detecting Euclidean Space homotopically
among topological manifolds". Inv. Math. 6(1968) 245-261.

A NOTE ON F-SECTIONAL CURVATURES OF S-MANIFOLDS

L.M. FERNÁNDEZ

Departamento de Algebra, Computación, Geometría y Topología.

Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Tarifa, s/n. 41012 SEVILLA (España).

This paper presents some characterizations of S-manifolds whose invariant f-sectional curvature is constant. The antiinvariant f-sectional curvature, the axiom of invariant f-planes and the axiom of antiinvariant f-planes are used in order to get the results.

0.- INTRODUCTION. For manifolds with an f-structure, David E. Blair (Blair, [1]) has introduced the analogue of Kaehler structure in the almost complex case and of quasi-Sasakian structure in the almost contact case, thus defining S-manifolds. He has also proved that the invariant f-sectional curvature determines the curvature of an S-manifold completely.

In this paper, we shall present some characterizations of S-manifolds whose invariant f-sectional curvature is constant. In section 1, we shall give a brief summary of basic formulas on S-manifolds. In section 2, we shall use the antiinvariant f-sectional curvature to characterize S-manifolds with constant invariant f-sectional curvature. In the last section, we shall prove that if an S-manifold satisfies the axiom of invariant f-planes, then it is of constant invariant f-sectional curvature. The same result is obtained, under certain restrictions on the dimension of the S-manifold, using the axiom of antiinvariant f-planes.

1.- PRELIMINARIES. Let M^{2n+s} be an S-manifold of dimension $2n+s$, with structure tensors $(f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$. Let $T(M)$ be the Lie Algebra of vector fields in M^{2n+s} . Then, the structure tensors satisfy the following equations (Blair, [1]):

$$(1.1) \quad \eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}; \quad f\xi_\alpha = 0; \quad \eta_\alpha(fX) = 0;$$

$$f^2 = -I + \sum_\alpha \xi_\alpha \times \eta_\alpha;$$

$$g(X, Y) = g(fX, fY) + \phi(X, Y), \quad X, Y \in T(M), \quad \alpha, \beta \in \{1, \dots, s\},$$

where $\phi(X, Y) = \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)$. Thus, the tensor f is an f -structure (Yano, [7]) of rank $2n$ and the metric g is compatible with f . Moreover, f is normal and so:

$$(1.2) \quad [f, f] + 2 \sum_\alpha \xi_\alpha \times d\eta_\alpha = 0$$

where $[f, f]$ is the Nijenhuis torsion of f . The covariant differentiation ∇ of M^{2n+s} satisfies (Blair, [1]), if $X, Y \in T(M)$, $\alpha \in \{1, \dots, s\}$:

$$(1.3) \quad \nabla_X \xi_\alpha = -fX.$$

$$(1.4) \quad (\nabla_X f)Y = \sum_\alpha [g(fX, fY)\xi_\alpha + \eta_\alpha(Y)f^2X].$$

Furthermore, on an S-manifold we have $F = d\eta_\alpha, \alpha = 1, \dots, s$, where F is the fundamental 2-form defined by $F(X, Y) = g(X, fY)$, $X, Y \in T(M)$.

Let \mathcal{L} denote the distribution determined by $-f^2$ and \mathcal{M} the complement distribution. \mathcal{M} is determined by $f^2 + I$ and spanned by $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$. If $X \in \mathcal{L}$, then $\eta_\alpha(X) = 0$ for any α and if $X \in \mathcal{M}$, then $fX = 0$.

Examples of S-manifolds are given in (Blair, [1]), (Blair, [2]), (Blair, Ludden and Yano, [3]). Thus, the bundle space of a principal toroidal bundle over a Kähler manifold with certain conditions is an S-manifold. In this way, a generalization of the Hopf Fibration $\pi': S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ is introduced as a canonical example of an S-manifold (playing the role of complex space in Kähler geometry and the odd-dimensional sphere in Sasakian geometry) as follows:

Let Δ denote the diagonal map. We define a principal toroidal bundle over \mathbb{CP}^n by the following diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{2n+s} & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \times \dots \times \pi' \\
 \mathbb{P}\mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n
 \end{array}$$

that is:

$$\begin{aligned}
 H^{2n+s} = & \{(p_1, \dots, p_s) \in S^{2n+1} \times \dots \times S^{2n+1} / \\
 & \pi'(p_1) = \dots = \pi'(p_s)\}.
 \end{aligned}$$

By virtue of Theorem 3.1 in (Blair, [1]), H^{2n+s} is an S-manifold.

For later use, we recall the following (Blair, [1]):

1.1.- Lemma. On an S-manifold M^{2n+s} :

$$(1.5) \quad R(X, Y, fX, fY) = R(X, Y, X, Y) + sP(X, Y, X, fY);$$

$$(1.6) \quad R(X, fY, fX, Y) = -R(X, fY, X, fY) - sP(X, Y, X, fY);$$

$$(1.7) \quad R(X, fY, fZ, W) = R(X, Y, Z, W),$$

for any $X, Y, Z, W \in \mathcal{L}$, where:

$$\begin{aligned}
 P(X, Y, Z, W) = & F(Y, Z)g(X, W) - F(X, Z)g(Y, W) - \\
 & -F(Y, W)g(X, Z) + F(X, W)g(Y, Z).
 \end{aligned}$$

2.- INVARIANT AND ANTIINVARIANT f-SECTIONAL CURVATURES OF AN S-MANIFOLD. Let M^{2n+s} be an S-manifold. By a plane section we mean a 2-dimensional lineal subspace of a tangent space. A plane section π is called an invariant f-section (resp. an antiinvariant f-section) if $f\pi = \pi$ (resp. if $f\pi$ is perpendicular to π). The sectional curvature for an invariant (resp. antiinvariant) f-section is called an invariant (resp. anti-invariant) f-sectional curvature.

An invariant f-section is determined by a unit vector $X \in \mathcal{L}(p)$, $p \in M^{2n+s}$ such that $\{X, fX\}$ is an orthonormal pair spanning the section. On the other hand, it is easy to show that orthonormal vectors $X, Y \in \mathcal{L}(p)$, $p \in M^{2n+s}$, span an anti-invariant f-section if and only if X, Y and fX are orthonormal.

We denote by $K(X, Y)$ the sectional curvature of M^{2n+s} determined by orthonormal vectors $X, Y \in \mathcal{L}(p)$, $p \in M^{2n+s}$ and by $H(X)$ the invariant f-sectional curvature of an invariant f-section spanned by $\{X, fX\}$, that is, $H(X) = K(X, fX)$.

The fact that the invariant f-sectional curvature determines the curvature of an S-manifold completely is well known, (Blair, [1]). Moreover, in (Kobayashi and Tsuchiya, [5]) it is

proved that if an S-manifold has constant invariant f-sectional curvature k , then its curvature tensor has the form:

$$(2.1) \quad R(X, Y, Z, W) = \sum_{\alpha\beta} [g(fX, fW)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(Z) - g(fX, fZ)\eta_\alpha(Y)\eta_\beta(W) + g(fY, fZ)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(W) - g(fY, fW)\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Z)] + \frac{1}{4}(k+3s)[g(X, W)g(fY, fZ) - g(X, Z)g(fY, fW) + g(fY, fW)\phi(X, Z) - g(fY, fZ)\phi(X, W)] + \frac{1}{4}(k-s)[F(X, W)F(Y, Z) - F(X, Z)F(Y, W) - 2F(X, Y)F(Z, W)], \quad X, Y, Z, W \in T(M).$$

Now, we can prove:

2.1.- Theorem. Let M^{2n+s} be an S-manifold with $n \geq 2$. If the invariant f-sectional curvature at any point is independent of the choice of the invariant f-section at the point, then it is constant on the manifold and the curvature tensor is given by formula (2.1), where k is the constant invariant f-sectional curvature.

Proof: By virtue of Theorem 2.6 in (Blair, [1]), it is easy to see that the curvature tensor has the form of (2.1), with k a function on the manifold. Then, the Ricci tensor S and the scalar curvature ρ of M^{2n+s} are given by:

$$(2.2) \quad S(X, Y) = \frac{1}{2}(n(k+3s) + k-s)g(fX, fY) + 2n\sum_{\alpha\beta}\eta_\alpha(X)\eta_\beta(Y), \quad X, Y \in T(M).$$

$$(2.3) \quad \rho = \frac{1}{2}(n(2n+1)(k+3s) + n(k-s)).$$

Now, from the second Bianchi identity:

$$2\nabla_a S_j^a - \nabla_j \rho = 0,$$

where S_j^a are the components of the Ricci tensor of type (1,1).

Making use of (2.2) and (2.3), we have:

$$(n+1)(n-1)\nabla_j k + (n+1)\sum_a \eta_a^j \xi_a^a \nabla_a k = 0,$$

that is:

$$(n-1)dk + \sum_a (\xi_a k) \eta_a = 0.$$

Applying this to ξ_β , $\beta = 1, \dots, s$, we get:

$$(n-1)(dk)\xi_\beta + \xi_\beta k = 0$$

and so, $\xi_\beta k = 0$, $\beta = 1, \dots, s$. Then, $dk = 0$, for $n \neq 1$ and the proof is complete.

As an example, it is well known (Blair, [1]), (Blair, [2]) and (Blair, Ludden and Yano, [3]) that H^{2n+s} has constant invariant f-sectional curvature $1 - 3s/4$. In general, if M^{2n+s}

is the bundle space of a principal toroidal bundle over a Kaehler manifold of constant holomorphic sectional curvature K , which is an S -manifold, then M^{2n+s} has constant invariant f -sectional curvature $K - 3s/4$.

With regard to the antiinvariant f -sectional curvature of an S -manifold, we have:

2.2.- Proposition. Let $M^{2n+s}(k)$ be an S -manifold of constant invariant f -sectional curvature k . Then, $M^{2n+s}(k)$ has constant antiinvariant f -sectional curvature equal to $\frac{1}{4}(k+3s)$.

Proof: By virtue of (2.1), if $X, Y \in \mathcal{L}$ span a 1 antiinvariant f -section, then we have:

$$K(X, Y) = R(X, Y, Y, X) = \frac{1}{4}(k+3s)$$

as desired.

Now, we want to prove the converse. We need the following:

2.3.- Lemma. Let M^{2n+s} be an S -manifold. If $X, Y \in \mathcal{L}$ are orthonormal vectors, then:

$$(2.4) \quad K(X, Y) = K(fX, fY);$$

$$(2.5) \quad K(X, fY) = K(fX, Y).$$

Moreover, if X, Y span an antiinvariant f -section, then:

$$(2.6) \quad R(X, fX, fY, Y) = K(X, Y) + K(X, fY) - 2s.$$

Proof: (2.4) and (2.5) follow from (1.7). Now, if $X, Y \in \mathcal{L}$ span an antiinvariant f -section, from the first Bianchi identity, we get:

$$(2.7) \quad R(X, fX, fY, Y) = -R(X, Y, fX, fY) + R(X, fY, fX, Y)$$

and making use of (1.6), since $g(X, fY) = 0 = g(Y, fX) = g(X, fX) = g(Y, fY)$, we have:

$$\begin{aligned} R(X, Y, fX, fY) &= R(fX, fY, X, Y) = -R(X, Y, Y, X) + s = \\ &= -K(X, Y) + s \end{aligned}$$

and

$$R(X, fY, fX, Y) = -R(X, fY, X, fY) - s = K(X, fY) - s.$$

Then, replacing these into (2.7), we obtain the result.

2.4.- Theorem. Let M^{2n+s} be an S -manifold with $n \geq 3$. If M^{2n+s} has constant antiinvariant f -sectional curvature c , then M^{2n+s} has constant invariant f -sectional curvature equal to $4c - 3s$.

Proof: Let X, Y be orthonormal vectors fields which span an antiinvariant f -section. Then, $(X+Y)/\sqrt{2}$ and $(fX-fY)/\sqrt{2}$ span an antiinvariant f -section too. Then, making use of Lemma 1.1

and Lemma 2.3, we get:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{4}K(X+Y, fX-fY) = \frac{1}{4}R(X+Y, fX-fY, fX-fY, X+Y) = \\ &= \frac{1}{4}[H(X) + H(Y) - 2K(X, Y) - 2K(X, fY) + 6s]. \end{aligned}$$

Since $K(X, Y) = k(X, fY) = c$, we obtain:

$$H(X) + H(Y) = 8c - 6s.$$

Now, let p be an arbitrary point of M^{2n+s} and let X, Y be unit vectors in $\mathcal{L}(p)$. Since $n \geq 3$, we can choose a unit vector $Z \in \mathcal{L}(p)$ orthogonal to the plane sections spanned by $\{X, fX\}$ and $\{Y, fY\}$. It is easy to show that the plane sections spanned by $\{X, Z\}$ and $\{Y, Z\}$ are antiinvariant f -sections. Then we know that $H(X) + H(Z) = 8c - 6s = H(Y) + H(Z)$. Thus, $H(X) = H(Y)$. Since X and Y are arbitrary vectors, the invariant f -sectional curvature does not depend on the choice of the invariant f -section at p . But p is an arbitrary point of M^{2n+s} too. Now, from Theorem 2.1, M^{2n+s} is of constant invariant f -sectional curvature equal to $4c - 3s$, by virtue of (2.8).

These results should be compared with the corresponding results for Kaehler manifolds ($s = 0$), (Chen and Ogiue, [4]).

3.- THE AXIOM OF INVARIANT (ANTIINVARIANT) f -PLANES. An S -manifold M^{2n+s} is said to satisfy the axiom of invariant (resp. antiinvariant) f -planes if for each $p \in M^{2n+s}$ and each invariant (resp. antiinvariant) f -section π at p , there exists a 2-dimensional totally geodesic submanifold N of M^{2n+s} such that $p \in N$ and $T_p(N) = \pi$.

3.1.- Theorem. Let M^{2n+s} be an S -manifold. Then, M^{2n+s} satisfies the axiom of invariant f -planes if and only if M^{2n+s} is of constant invariant f -sectional curvature.

The proof is a very lengthy computation, but similar to that given by Ogiue (Ogiue, [6]), for Sasakian manifolds. Now, we shall prove:

3.2.- Theorem. Let M^{2n+s} be an S -manifold with $n \geq 3$ such that M^{2n+s} satisfies the axiom of antiinvariant f -planes. Then, M^{2n+s} is of constant invariant f -sectional curvature.

Proof: Let p be an arbitrary point of M^{2n+s} and let $X, Y \in \mathcal{L}(p)$ be orthonormal vectors spanning an antiinvariant f -section π . Let N be a 2-dimensional totally geodesic submanifold of M^{2n+s} such that $p \in N$ and $T_p(N) = \pi$. Since π is an antiinvariant f -section, fX is normal to N . Then, from

Weingarten's formula, we get:

$$\begin{aligned} R(X, Y, fX, X) &= g(\nabla_X \nabla_Y fX, X) - g(\nabla_Y \nabla_X fX, X) - \\ &- g(\nabla_{[X, Y]} fX, X) = g(\nabla_X D_Y fX, X) - g(\nabla_Y D_X fX, X) = \\ &= g(D_X D_Y fX, X) - g(D_Y D_X fX, X) = 0, \end{aligned}$$

where we have used the fact that N is totally geodesic and so, $A_V = 0$, for any vector field V normal to N .

Now, since X and Y span an antiinvariant f -section at p , then $X+Y$ and $fX-fY$ span an antiinvariant f -section too. Then:

$$R(X+Y, fX-fY, fX+fY, X+Y) = 0.$$

Using Lemma 1.1 and Lemma 2.3, a direct expansion gives:

$$(3.1) \quad H(X) = H(Y).$$

Now, let X and Y be unit arbitrary vectors in $\mathcal{L}(p)$. If the section $\{X, Y\}$ is an invariant f -section, then $H(X) = H(Y)$. If it is not an invariant f -section, since $n \geq 3$, we can choose a unit vector Z in $\mathcal{L}(p)$, orthogonal to the sections $\{X, fX\}$ and $\{Y, fY\}$. Then, from (3.1), $H(X) = H(Z) = H(Y)$. Since X and Y are arbitrary vectors, the invariant f -sectional curvature does not depend on the choice of the invariant f -section at p . But p is arbitrary too. So, from Theorem 2.1, we complete the proof.

This result should be compared with that in the case of $s = 0$, (Chen and Ogiue, [4]).

REFERENCES.

- [1] Blair, D.E., 1.970. J.Diff. Geom., 4. (155 - 167).
- [2] -----, 1.971. Ann. Stiin. Univ. "Al. I. Cuza". Din Iasi (serie nova). T. XVII, Fasc. 1. (171 - 177).
- [3] Blair, D.E., Ludden, G.D. and Yano, K., 1.973. Trans. Am. Math. Soc., 181. (175 - 184).
- [4] Chen, B.Y. and Ogiue, K., 1.973. Duke Math. J., V. 40, n. 4. (797 - 799).
- [5] Kobayashi, M. and Tsuchiya, S., 1.972. Kodai Math. Sem. Rep., 24. (430 - 450).
- [6] Ogiue, K., 1.964. Kodai Math. Sem. Rep., 16. (223 - 232).
- [7] Yano, K., 1.963. Tensor, 14. (99 - 109).

ON THE SOLUTION BY SERIES OF SOME NONLINEAR EQUATIONS

I.K. ARGYROS

Department of Mathematics. New Mexico State University.
Las Cruces, NM 88003.

A solution by series of nonlinear equation in Banach space is presented. This approach greatly simplifies work already existing in the literature.

Key words and phrases. Quadratic equation, solution by series, Banach space.

A.M.S. classification codes. 46(B15), 65.

Introduction. Consider the quadratic equation

$$x = y + \lambda B(x, x) \quad (1)$$

in a Banach space X , where $y \in X$ is fixed, λ is a real (or complex) number and B is a bounded symmetric bilinear operator on X [5], [7].

The continued fraction approach [4], the solution by series [5], the Newton-Kantorovich theorem [2], [6] and the contraction mapping principle [1] are techniques that have already been applied to find a solution x of (1).

Here we study the convergence of the iteration

$$x_{n+1} = y + \lambda B(x_n, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

for various $x_0 \in X$ to a solution x of (1).

Let $L(X)$ denote the vector space of all linear operators on X .

Case 1. For $x_0 = y$ in (2), we show that if the sequence of linear operators $\{(B(y))^k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ ($B(y)^0 = I$), belong to a certain subspace of $L(X)$ and the following estimate holds

$$4\lambda \|B(y)\| < 1 \quad (\lambda > 0) . \quad (3)$$

Then there exists a solution x of (1) given by,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{1 \cdot 2 \cdots (k+1)} \lambda^k (B(y))^k (y) . \quad (4)$$

Case 2. For $x_0 \neq y$, if the inverse of the linear operator $I - 2B(x_0)$ exists, set

$$\tilde{y} = (I - 2B(x_0))^{-1}(y + \lambda B(x_0, x_0) - x_0)$$

and

$$\tilde{B} = (I - 2B(x_0))^{-1} B .$$

If the rest of the hypotheses of Case 1 are satisfied for \tilde{B} and \tilde{y} , we obtain a solution x of (1) given by

$$x = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{1 \cdot 2 \cdots (k+1)} \lambda^k (\tilde{B})^k (\tilde{y}) . \quad (5)$$

Proposition. Let A denote the set defined by

$$A = \{L \in L(X) / B(L(y)) = B(y)L, \text{ with } B, y \text{ as in (1)}\} .$$

Then A is a vector subspace of $L(X)$.

Proof. Obviously $A \neq \emptyset$ since the identity operator $I \in A$. Let c_1, c_2 be arbitrary numbers in the field of X and assume that L_1 and $L_2 \in A$. Then

$$\begin{aligned} B[(c_1 L_2 + c_2 L_2)(y)] &= B(c_1 L_1(y) + c_2 L_2(y)) \\ &= c_1 B(L_1(y)) + c_2 B(L_2(y)) \\ &= c_2 B(y)L_1 + c_2 B(y)L_2 \\ &= B(y)(c_1 L_1 + c_2 L_2), \end{aligned}$$

so, $c_1 L_1 + c_2 L_2 \in A$ and the proof is complete.

As in [5] we seek a solution expressed as

$$x = z_0 + \lambda z_1 + \dots + \lambda^n z_n + \dots . \quad (6)$$

Formal substitution of (6) into (1) and equation of like powers of λ gives

$$\begin{aligned} z_0 &= y \\ z_1 &= B(z_0, z_0) \\ z_2 &= B(z_0, z_1) + B(z_1, z_0) \\ z_n &= \sum_{j=0}^{n-1} B(z_j, z_{n-j-1}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7)$$

We now state the theorem. The proof can be found in [5].

Theorem 1. The series (6) with coefficients given by (7) converges to a solution x of (1) provided that

$$0 < \lambda < \frac{1}{4\|B\|\cdot\|y\|} . \quad (8)$$

We now state the main result.

Theorem 2. Assume that the sequence $\{(B(y))^k\} \in A$, $k = 0, 1, 2, \dots$ and (3) holds. Then there exists a solution x of (1) given by (4).

Proof. For $x_0 = y$, (2) becomes

$$x_n = z_0 + \lambda z_1 + \lambda^2 z_2 + \dots + \lambda^n z_n \quad (9)$$

where,

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{j=0}^{n-1} B(z_j, z_{n-j-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} B[2^j \frac{1 \cdot 3 \dots (2j-1)}{1 \cdot 2 \dots (j+1)} (B(y))^j(y), 2^{n-j-1} \frac{1 \cdot 3 \dots [2(n-j-1)-1]}{1 \cdot 2 \dots (n-j)} (B(y))^{n-j-1}(y)] \\ &= 2^{n-1} (B(y))^n(y) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (j+1)} \frac{1 \cdot 3 \dots [2(n-j-1)-1]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-j)} \\ &= 2^{n-1} B(y)^n(y) 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \\ &= 2^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} (B(y))^n(y). \end{aligned}$$

Now,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k z_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z_n. \quad (10)$$

The above series converges if the series (dominating)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \lambda^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \|B(y)\|^n \|y\| \quad (11)$$

converges. Applying the ratio test we can easily see that the series given by (11) converges if (3) holds which is true by hypothesis. The proof is now completed if we set

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$

Remark. Under the hypotheses of theorem 2, since

$$\|B(y)\| \leq \|B\| \cdot \|y\|$$

we see that:

- (a) If both (3) and (8) hold then (3) allows a wider range for λ than (8),
- (b) If (8) holds then (3) holds also, but the converse is not necessarily true.

The evaluation of the z_k 's $k = 0, 1, 2, \dots$ in (7) is difficult in practice. See for example [1], [3] and [5]. However, the same evaluation under the hypotheses of theorem 2 becomes much easier.

Note that it will be easy, but pointless to construct a simple example to show that theorem 2 succeeds where theorem 1 fails.

Finally for $x_0 \neq y$, one can set $x = x_0 + h$ in (1) to obtain

$$h = \tilde{y} + \tilde{B}(h, h) ,$$

provided that the linear operator $(I - 2B(x_0))^{-1}$ exists. If the rest of the hypotheses of theorem 2 are satisfied for \tilde{y} and \tilde{B} a solution x of (1) given by (5) is easily obtained.

Note that the hypotheses on x_0 , \tilde{y} and \tilde{B} are similar (but not the same) to the hypotheses of Newton's Kantorovich theorem [2] for the solution of (1).

REFERENCES

- [1] Argyros, I.K. Quadratic equations and applications to Chandrasekhar's and related equations. Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 32, No. 2, (1985), pp. 275-292.
- [2] Kantorovich, L.V. Functional analysis and applied mathematics. Uspeki Mat. Nauk, (1948), pp. 89-185.
- [3] Kelley, C.T. Approximation of solutions of some quadratic integral equations in transport theory. Journal of Integral Equations, 4, (1982), pp. 221-237.
- [4] McFarland, J. An iterative solution of the quadratic equation. Proc. Amer. Math. Soc., 9, (1958), pp. 824-830.
- [5] Rall, L.B. Quadratic equations in Banach space. Rend. Circ. Math. Palermo, 10, (1961), pp. 314-332.
- [6] _____. Solution of abstract polynomial equations by iterative methods. University of Wisconsin, Technical report #892, (1968).
- [7] _____. Nonlinear functional analysis and applications. Academic Press, New York, (1971).

SURVEY ON THE IDEALS OF THE SPACE OF BOUNDED LINEAR OPERATORS ON A SEPARABLE HILBERT SPACE

I.K. ARGYROS

Department of Mathematics. New Mexico State University.
Las Cruces, NM 88003.

We give a survey of the properties of the ideals of the space of bounded linear operators on a separable Hilbert space.

Introduction. Let H be a complex Hilbert space. Throughout, we assume H is separable, that is, $H \cong \mathbb{C}^m$ for some $m \in \mathbb{N}$, or H contains a Hilbert basis $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ such that $H = \overline{\text{span}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}}$, thus $H \cong \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Denote by $B(H)$ the space of bounded linear operators on H , which is thought to be equipped with the usual norm, i.e., if $x \in H$ then $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

We identify the ideals of $B(H)$ and discuss the properties and the relationship between them. Some examples are also provided. Parts of the results presented here can be found in different references, [1], [2], [3], [5].

Finally in this exposition, we tried to simplify the already existing proofs of most of the theorems.

Definition 1. Let $L \in B(H)$, then $\text{ran } L$ is obviously a vector subspace. Define by rank(L) the dimension of the $\text{ran } L$ and set

$$\mathcal{F}(H) = \{L \in B(H) \mid \text{rank}(L) \text{ is finite}\}.$$

For an example, fix $b \in H$, $w \in H$. Then $L : x \rightarrow \langle x, w \rangle b$ is obviously linear and bounded since

$$\|Lx\| = |\langle x, w \rangle| \cdot \|b\| \leq \|x\| \cdot \|w\| \cdot \|b\|, \text{ i.e., } \|L\| \leq \|w\| \cdot \|b\|.$$

Also $\text{ran}(L) = \{0\}$ if $b = 0$, otherwise $\text{ran } L$ is spanned by $\{b\}$. So $\text{rank}(L) = 0$ or 1 and $L \in \mathcal{F}(H)$. Denote this L as $w \otimes b$.

Fact 1. $\|w \otimes b\| = \|w\| \cdot \|b\|$.

Proof. Trivial if $w = 0$, so let $w \neq 0$; $\|w \otimes b\| = \sup_{\|x\|=1} \|\langle x, w \rangle b\| \geq \|\langle \frac{w}{\|w\|}, w \rangle b\| = \|w\| \cdot \|b\| \geq \|w \otimes b\|$.

Theorem 1. $\mathcal{F}(H)$ is an ideal in $B(H)$, proper if $\dim(H) = \infty$.

Proof. Let $L_1, L_2 \in \mathcal{F}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, then $L_1 + \lambda L_2 \in \mathcal{F}(H)$; hence vector subspace. Let $L \in B(H)$;

- (i) $\text{ran}(L_1 L) \subseteq \text{ran}(L_1) < \infty \Rightarrow L_1 L \in \mathcal{F}(H)$;
- (ii) $\dim(\text{ran}(LL_1)) \leq \dim(\text{ran}(L_1)) \Rightarrow LL_1 \in \mathcal{F}(H)$.

Let $\dim(H) \neq \text{finite} \Rightarrow I \in B(H)$ with $\dim(\text{ran}(I)) = \dim H \neq \text{finite} \Rightarrow I \notin \mathcal{F}(H)$, hence $\mathcal{F}(H)$ proper; otherwise $\mathcal{F}(H) = B(H)$.

Let $H \otimes H$ denote the vector subspace generated in $B(H)$ by all operators of form $w \otimes b$ ($w, b \in H$). Thus $L \in H \otimes H$

$$\Leftrightarrow L = \sum_{i=1}^n w_i \otimes b_i \text{ say, } n \in \mathbb{N}, w_i, b_i \in H.$$

Theorem 2. $H \otimes H = \mathcal{F}(H)$.

Proof. We first show $H \otimes H \subseteq \mathcal{F}(H)$. If $L \in H \otimes H \Rightarrow \text{ran}(L) \subseteq \text{ran}(w_1 \otimes b_1) + \dots + \text{ran}(w_n \otimes b_n) \Rightarrow \text{rank}(L) \leq n \Rightarrow L \in \mathcal{F}(H)$. We now show that $\mathcal{F}(H) \subseteq H \otimes H$. Let $L \in \mathcal{F}(H) \Rightarrow \text{ran}(L) = [\text{subspace } \cong \mathbb{C}^n] \Rightarrow \text{ran}(L)$ has a complete orthonormal basis $\{u_1, \dots, u_n\}$, say $\Rightarrow (\forall x \in H)$

$$\begin{aligned} Lx &= \sum_{k=1}^n \xi_k u_k = \sum_{k=1}^n \langle Lx, u_k \rangle u_k = \sum_{k=1}^n \langle x, L^* u_k \rangle u_k \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x, w_k \rangle u_k \text{ (say)} = \sum_{k=1}^n \langle w_k \otimes u_k \rangle x \Rightarrow L = \sum_{k=1}^n w_k \otimes b_k \\ &\in H \otimes H. \end{aligned}$$

Theorem 3. If $J(H)$ is a nonzero ideal in $B(H)$ then $\mathcal{F}(H) \subseteq J(H) \subseteq B(H)$.

Proof. Trivial if $\dim(H) = \text{finite}$ ($\mathcal{F} = B$ then). Let $\dim(H) = \infty$. Take $L \in \mathcal{F}(H) \setminus \{0\}$; then $\exists x \neq 0$ such that $Lx = y \neq 0$. Take any $u, v \in H$ and find some $B \in B(H)$ with

By v , so $B(Lx) = v$. Then $(\forall z \in H) (u \otimes v)z = \langle z, u \rangle v$
 $= \langle z, u \rangle (BLx) = (BL)(\langle z, u \rangle x) = (BL) \circ (u \otimes x)(z) \Rightarrow u \otimes v$
 $= B \circ L \circ (u \otimes x) \Rightarrow u \otimes v \in \mathcal{F}(H)$ (since $L \in \mathcal{F}(H)$). Therefore
every generator $u \otimes v$ of $\mathcal{F}(H)$ lies in $\mathcal{J}(H)$, so
 $\mathcal{F}(H) \subseteq \overline{\mathcal{J}(H)}$.

Corollary 1. $\mathcal{F}(H)$ is the smallest nonzero ideal in $B(H)$.

Theorem 4. If $\dim(H) = \infty$, then $\mathcal{F}(H)$, $\|\cdot\|_{op}$ is not a closed ideal.

Proof. Let $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ be a Hilbert basis for H . Thus
 $\forall x \in H, x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n \iff H = \overline{\text{span}}\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \iff \|x\|^2$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2$: Parseval's formula).

Define operator $L_p = \sum_{n=1}^p \lambda_n u_n \otimes u_n$ ($\lambda_k \in \mathbb{C}$), $\in \mathcal{F}(H)$ so,

$$L_p(x) = \sum_{n=1}^p \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n.$$

$$\|L_p - L_{p+q}\|_{op} = \left\| \sum_{n=p+1}^{p+q} \lambda_n u_n \otimes u_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{p+q} |\lambda_n|.$$

So choose $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that $\sum_n |\lambda_n|$ is convergent; then
 $(L_p)_{p \in \mathbb{N}}$ is Cauchy in complete $B(H)$, $\|\cdot\|_{op}$; hence convergent

to some $L \in B(H)$. We now set

$$L = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^p \lambda_n u_n \otimes u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n \otimes u_n.$$

Now, $L_p \xrightarrow{u} L \Rightarrow L_p \xrightarrow{p \cdot w} L$, i.e., $(\forall x \in H) L_p x = Lx$. But

$$L_p x = \left(\sum_{n=1}^p \lambda_n u_n \otimes u_n \right) x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n u_n \otimes u_n) x = \sum_{n=1}^p \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n.$$

Also, $L_p x \rightarrow Lx = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n \otimes u_n \right] x$ as $p \rightarrow \infty$. This shows that

$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^p [\lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n] \right]$ also exists in H and we can define it to

$$\text{be } \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n] = Lx.$$

Plainly, if infinitely many $\lambda_n \neq 0$, then $\text{ran}(L)$ has infinite dimension so $L \notin \mathcal{F}(H)$. Thus $\mathcal{F}(H) \neq \overline{\mathcal{F}(H)}$ (closure with respect to $\|\cdot\|_{op}$).

What is $\overline{\mathcal{F}(H)}$ in $B(H)$? The ideal $\mathcal{K}(H)$ of compact operators in $B(H)$, $\|\cdot\|_{op}$. Moreover $\mathcal{K}(H)$ is the largest, indeed the only, proper uniformly closed ideal in $B(H)$, $\|\cdot\|_{op}$ (provided H is separable), so $\mathcal{K}(H)$ is the only maximal ideal. We are now going to describe $\mathcal{K}(H)$ and eventually prove that $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{F}(H)}$.

Definition 2. Let $L \in B(H)$, then L is compact (or completely continuous) if and only if for every bounded sequence $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in H , $\{Lx_n\}$ contains a convergent subsequence in H .

Fact 2. $\mathcal{F}(H) \subseteq K(H)$.

Proof. Let $L \in \mathcal{F}(H)$ and $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a bounded sequence in H . Then $\{Lx_n\}$ forms a bounded set in the subspace $\text{ran } L$ which lies in a subspace $\cong \mathbb{C}^m$ (some $m \in \mathbb{N}$) but every bounded set in \mathbb{C}^m contains a convergent subsequence.

Obviously $K(H)$ is a vector subspace $\subseteq B(H)$.

Theorem 4. $K(H)$ is a uniformly closed ideal in $B(H)$. It is proper if $\dim(H) = \infty$.

Proof. (1) Let $L \in K(H)$, $B \in B(H)$ and $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a bounded sequence. Then,

$$LB(x_n) = L(Bx_n) = L(y_n)$$

and $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is a bounded sequence. So $\{Ly_n\}$ contains a convergent subsequence, so LB is compact. Also, $BL(x_n) = B(Lx_n)$ contains a convergent subsequence $\{By_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ (since Lx_n contains a convergent subsequence $\{y_m\}$ say), so BL compact. Hence $LB, BL \in K(H)$.

(2) If $\dim(H) = \infty \Rightarrow I$ is not a compact operator since if $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ is a Hilbert basis for H , then $\|u_n - u_m\|^2 = \langle u_n - u_m, u_n - u_m \rangle = \langle u_n, u_n \rangle + \langle u_m, u_m \rangle - 2\langle u_n, u_m \rangle = 2$, so $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ can contain no convergent subsequence.

(3) $K(H)$ is $\|\cdot\|_{op}$ -closed.

"Diagonal proof". Let $L_n \in K(H)$, ($n \in \mathbb{N}$), and $L \in B(H)$ such that $\|L_n - L\|_{op} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). We show $L \in K(H)$: Let

at most finitely many terms, and relabelling the rest we have
 $\|Lu_m - u\|$, say for all m . Now

$$\begin{aligned} |\langle Lu_m, u_m \rangle - \langle x, u_m \rangle| &= |\langle Lu_m - x, u_m \rangle| \\ &\leq \|Lu_m - x\| \cdot 1 < \delta \quad (\forall m). \end{aligned}$$

Also,

$$|\langle Lu_m, u_m \rangle - \langle x, u_m \rangle| \geq |\langle Lu_m, u_m \rangle| - |\langle x, u_m \rangle|.$$

Rearranging, and using (1), we get

$$|\langle x, u_m \rangle| \geq \delta > 0 \quad (\forall m). \quad (2)$$

But Bessel's inequality implies $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, which contradicts (2).

(b) \Rightarrow (c): Given $k \in \mathbb{N}$, let S be the collection of all sequences \bar{U} in H (including $u = \emptyset$ and finite $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$) such that

$$\langle Lu, u \rangle \geq \frac{1}{4k} \quad (\forall u \in \bar{U}).$$

Condition (b) implies each $u \in S$ must be a finite set. Since the union of a strictly increasing (with respect to \subseteq) sequence of sets in S is again a member of S (and hence a finite set), each such sequence terminates (if not, its union would contain infinitely many elements). Hence, S has a

maximal element, W say. Let M be the finite dimensional vector subspace generated by W ; then $|\langle Lx, x \rangle| < \frac{1}{4k}$ whenever $x \in M^\perp$ and $\|x\| = 1$ (otherwise S would contain $W \cup \{x\}$, contradicting the maximality of W). Hence $|\langle Lx, x \rangle| < \frac{1}{k}$ whenever $x \in M^\perp$ and $\|x\| \leq 2$. Hence, $\forall z, w \in M^\perp$ with $\|z\|, \|w\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |\langle Lz, w \rangle| &\leq \frac{1}{4} |\langle L(z+w), z+w \rangle - \text{etc.}\dots| \\ &\leq \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

(use Gen. Polarization rule, and $\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\| \leq 2$, etc.).

Thus

$$|\langle Lz, w \rangle| \leq \frac{1}{k} \quad (\forall z, w \in M^\perp, \|z\|, \|w\| \leq 1). \quad (3)$$

Now let $P : H \rightarrow M$ be the orthogonal projection onto M , with $I-P$ the orthogonal projection onto M^\perp ; and take $z = (I-P)x$, $w = (I-P)y \quad \forall x, y \in H$ with $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Then by (3),

$$\begin{aligned} |\langle (I-P)L(I-P)x, y \rangle| &= |\langle L(I-P)x, (I-P)y \rangle| \\ &= |\langle Az, w \rangle| \leq \frac{1}{k} \quad (I-P \text{ is Hermitian}). \end{aligned}$$

Hence

$$\|(I-P)L(I-P)\|_{op} \leq \frac{1}{k}.$$

So, put $F_K = PL + LP - PLP$, then $F_K \in \mathcal{F}(H)$, since P has

rank equal to the $\dim(M) < \infty$, so $P \in \mathcal{F}(H)$ and $\mathcal{F}(H)$ is an ideal; and $L - F_K = (I - P)L(I - P)$.

(c) \Rightarrow (a). We know that $\overline{\mathcal{F}(H)} \subseteq K(H)$. Now,

$$\overline{\mathcal{F}(H)} \subseteq \overline{K(H)} = K(H) \quad (\text{by Theorem 4}).$$

Hence $\|L - F_K\| \rightarrow 0$, $L \in \overline{\mathcal{F}(H)}$ so $L \in K(H)$.

Corollary 4. $\overline{\mathcal{F}(H)} = K(H)$. (This is often taken to be the definition of $K(H)$.)

Proof. Given $L \in K(H)$, by (c), $\overline{L} \in \overline{\mathcal{F}(H)}$ so $K(H) \subseteq \overline{\mathcal{F}(H)} \subseteq K(H)$ (by Theorem 4). Hence equality.

Fact 3. $(w \otimes b)^* = b \otimes w$.

Proof. $\langle (w \otimes b)x, y \rangle = \langle (x, w)b, y \rangle = \langle x, w \rangle \langle b, y \rangle = \langle x, \langle b, y \rangle w \rangle = \langle x, \langle y, b \rangle w \rangle = \langle x, (b \otimes w)y \rangle \quad (\forall x, y \in H)$, so $(w \otimes b)^* = b \otimes w$.

Corollary 5. If $F \in \mathcal{F}(H)$ such that $F = \sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i$, then $F^* \in \mathcal{F}(H)$; i.e., $\mathcal{F}(H)$ is a Hermitian (\equiv self-adjoint) ideal in C^* -algebra $B(H)$.

Theorem 6. $K(H)$ is a Hermitian ideal in C^* -algebra $B(H)$.

Proof. Let $L \in K(H) \iff L = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ ($F_n \in \mathcal{F}(H)$), so

$\|L - F_n\| \rightarrow 0$ (as $n \rightarrow \infty$). Hence $\|L^* - F_n^*\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)
 $\Rightarrow L^* \in K(H)$ (since each $F_n^* \in F(H)$), by fact 3.

Lemma 1. Let $L \in B(H)$; let $\{u_n\}, \{v_n\}$ be any Hilbert bases for H .

(1) If any one of the four real series below is convergent, then all are, and all have the same sum:

$$\sum_m \|Lu_n\|^2, \sum_m \|L^*v_m\|^2, \sum_n \sum_m |\langle Lu_n, v_m \rangle|^2, \sum_m \sum_n |\langle Lu_n, v_m \rangle|^2.$$

(2) Then this sum is independent of the choice of bases, i.e., it is an invariant of the operator L , so write it as $\|\|L\|\|$.

$$(3) \|\|L\|\| = \|\|L^*\|\|.$$

Proof. [1]: Use Parseval: $(\forall n \in N) \|Lu_n\|^2 = \sum_m |\langle Lu_n, u_m \rangle|^2 < \infty$ so $\sum_n \|Lu_n\|^2$ and $\sum_m \sum_n |\langle Lu_n, u_m \rangle|^2$ are both

convergent (or not) together, and then their sums are equal.

Similar remarks apply to $\sum_m \|L^*v_m\|^2$ and $\sum_n \sum_m |\langle L^*v_m, u_n \rangle|^2$. Now using the fact that $(\forall n, m) |\langle Lu_n, v_m \rangle|^2 = |\langle L^*v_m, u_n \rangle|^2$, and the fact that for positive real series $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}$,

(1) follows.

(2): Choosing a thiry Hilbert basis $\{w_n\}$ for H we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Lu_n\|^2 = s < \infty \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \|L^*v_m\|^2 = s < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|Lw_n\|^2 = s < \infty.$$

(3): Since choice of Hilbert bases is immaterial, use $\{u_n\}$ in place of $\{v_m\}$ in proof of (2); this gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Lu_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|L^*u_n\|^2 \quad (\text{when } < \infty),$$

i.e., $\|\|A\|\|\|^2 = \|\|A^*\|\|\|^2$.

Definition 3. Define by $S(H)$ the set $S(H) = \{L \in B(H) \mid \|\|L\|\| < \infty\}$, the so-called Hilbert-Schmidt operators.

Note (1): All integral operators L on $H = C[0,1]$, $\ell^2[0,1]$, etc., with ℓ^2 -kernel $k(s,t)$ such that $\|\|A\|\|\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 ds dt < \infty$ are Hilbert-Schmidt operators. Hence their importance.

Note (2): $S(H)$ is Hermitian ($L \in S(H) \iff L^* \in S(H)$) by (3) above.

Examples. (1) Let $H = \ell^2$; $L : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ given by infinite matrix $a = [a_{rk}]$ such that

$$\|a\|^2 = \sum_r \sum_k |a_{rk}|^2 \equiv \sum_r \|a_r\|^2 < \infty$$

$$(a_r \text{ row } r \text{ in } a \in \ell^2)$$

via: $Lx = y \quad x = (x_k) \in \ell^2$

$$y = (y_r) \in \ell^2 \quad (\text{Have to show this!})$$

$$y_r = \sum_{k=1}^{\infty} a_{rk} x_k \equiv \langle a_r, x \rangle \quad (\text{this is well defined since}):$$

$$|y_r| = |\langle a_r, x \rangle| \leq \|a_r\| \cdot \|x\| \leq \|a\| \cdot \|x\| \Rightarrow y_r \in C$$

and

$$\|Lx\|^2 = \|y\|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \|y_r\|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{r=1}^{\infty} \|a_r\|^2 = \|x\|^2 \cdot \|a\|^2.$$

So L is linear and bounded, $\|L\| \leq \|a\|$. This L is Hilbert-Schmidt because if $\{u_n = (0, 0, \dots, 1_n, 0, \dots)\}$ is a standard basis for ℓ^2 , then $\|\|A\|\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_r \sum_k |\langle Lu_r, u_k \rangle|^2$. But

$\langle Lu_r, u_k \rangle = \text{element } a_{rk} \text{ in matrix } a \text{ representation for } L$, so $\|\|L\|\|^2 = \sum_r \sum_k |a_{rk}|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|a\|^2 < \infty$. Thus $\|L\|_{op} \leq \|a\|$

$$= \|\|L\|\|_{H-S}.$$

(2) $w \otimes z$: Rank 0 or 1 operator on H with Hilbert basis $\{u_n\}$.

$$\|w \otimes z\|_{op} = \|w\| \cdot \|z\|.$$

$$\text{Now, } \|w\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle w, u_n \rangle|^2 \quad (\text{Parseval})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|w\|^2 \|z\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, w \rangle|^2 \|z\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, w \rangle z|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(\bar{w} \otimes z) u_n\|^2 = |||w \otimes z|||^2. \end{aligned}$$

$$\text{Hence } \|w \otimes z\|_{op} = |||w \otimes z|||.$$

We now provide a sketch of the proof of the theorem:

Theorem 7. $S(H)$, $|||\cdot|||$, is a Banach space, and $\|L\| \leq |||L||| \quad \forall L \in S(H)$.

Proof. (sketch) (i) $S(H)$ is a vector space. Use Minkowski's inequality and get Δ -inequality for $|||\cdot|||$.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \|L\|^2 &= \sum_n |\langle Lx, u_n \rangle|^2 = \sum_n |\langle x, L^* u_n \rangle|^2 \\ &\leq \|x\|^2 \sum_n \|L^* u_n\|^2 = \|x\|^2 |||L^*|||^2 \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow \|L\| &\leq |||L|||. \end{aligned} \tag{3}$$

(iii) $|||\cdot|||$ is a norm.

Use (3) to get $|||L||| = 0 \iff L = 0$,

(iv) If $|||\cdot|||$ -Cauchy $\stackrel{(3)}{\implies} \|\cdot\|$ -Cauchy in $B(H) \Rightarrow \|\cdot\|$ -lim $L_n = L \in B(H)$. Now show

- (a) $L \in S(H)$;
(b) $\|L - L_n\|^2 \rightarrow 0$.

Theorem 8. $S(H)$ is a Hermitian ideal in $B(H)$.

Proof. (i) $L \in S(H)$, $B \in B(H)$, $\{u_n; n \in N\}$ a Hilbert

basis for H then ($\forall p \in N$) $\sum_{n=1}^p \|BLu_n\|^2 \leq \|B\|^2 \sum_{n=1}^p \|Lu_n\|^2$, let
 $p \rightarrow \infty$ then $\|BL\|^2 \leq \|B\|^2 \|L\|^2 < \infty$, so $BL \in S(H)$ (and
 $\|BL\| \leq \|B\| \cdot \|L\| \leq \|B\| \cdot \|L\|$).

(ii) $B^* \in B(H)$, $L^* \in S(H)$ (by definition 3, note (2)).

Hence, by (i), $B^* L^* \in S(H) \Rightarrow (LB)^* \in S(H) \Rightarrow LB \in S(H)$ and

$$\begin{aligned}\|LB\| &\equiv \|B^* L^*\| \leq \|B^*\| \cdot \|L^*\| = \|B\| \cdot \|L\| \\ &\leq \|L\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

The proof of the following theorem is similar to Theorem 3.

Theorem 9. $F(H) \subseteq S(H)$ proper if $\dim(H) = \infty$.

Theorem 10. The following are true:

(i) $S(H) \subseteq K(H)$.

(ii) $S(H)$ is proper if $\dim(H) = \infty$.

Proof. (i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$, $L \in S(H) \Rightarrow Lx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle (Lu_n)$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \otimes Lu_n)x$, so define " p^{th} -cutoff operators" $L_p = \sum_{n=1}^p u_n$
 $\otimes Lu_n \in F(H)$; observe ($\forall m \in N$)

$$L_p u_m = \begin{cases} Lu_m & (1 \leq m \leq p) \\ 0 & (p > m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|L - L_p\|^2 \leq \|L - L_p\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(L - L_p)u_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Lu_n - L_p u_n\|^2$$

$$= \sum_{n=p+1}^{\infty} \|Lu_n\|^2 \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty) \quad \text{since} \quad \|\cdot\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Lu_n\|^2 \quad \text{is}$$

convergent $\Rightarrow L = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p \quad (\|L\|_{op}) \in \overline{\mathcal{F}}(H) = K(H).$

(ii) Let $H = \ell^2$. Let $L : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ be given by an infinite diagonal matrix

$$a \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1/\sqrt{2} & 0 & & \\ & & 1/\sqrt{3} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix}; \quad a_{rr} = \frac{1}{r^r},$$

$a_{rk} = 0 \quad (r \neq k), \quad L \in B(\ell^2) \quad \{Lx = (x_1, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \dots)\};$
 $\|Ax\|^2 = \sum \frac{1}{n}|x_n|^2 \leq \sum |x_n|^2 = \|x\|^2; \quad \|L\| \leq 1\}. \quad \text{Define "cutoff" } L_p$
 to be given by a with all rows equal, 0 beyond row p , so
 $L_p \in \mathcal{F}(\ell^2)$ and hence $L_p \in S(\ell^2) \subseteq K(\ell^2)$. But, we show
 $L \notin \mathcal{F}(\ell^2)$ whilst $L \in K(\ell^2)$:

$$\begin{aligned} \|Lx - L_p x\|^2 &= \|(0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{p+1}}x_{p+1}, \frac{1}{\sqrt{p+2}}x_{p+2}, \dots)\|^2 \\ &= \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n}|x_n|^2 \leq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{p}\|x\|^2. \end{aligned}$$

$$\text{So, } \|(L - L_p)x\|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \|x\| \quad (\forall p \geq 1, \forall x \in \ell^2)$$

$$\Rightarrow \|L - L_p\|_{op} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow L = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p (\| \cdot \|_{op}) \Rightarrow L \in K(\ell^2).$$

But $\| |L| \| ^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| Lu_n \| ^2 \quad (Lu_n \text{ is } n^{\text{th}} \text{ row of matrix } a)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow L \notin S(\ell^2). \text{ Hence } S(\ell^2) \not\subseteq K(\ell^2).$$

Summary: If H is a separable Hilbert space of dimension ∞ , then the following ideals are all distinct:

$$\{0\} \subset S(H) \subset K(H) \subset B(H).$$

Remarks. (1) It can be shown that the above ideals of operators, correspond as normed Banach spaces to the sequence spaces

$$\{0\} \subset \ell_0 \subset \ell^2 \subset c_0 \subset \ell^\infty.$$

(2) It can also be shown that just as there are other sequence spaces ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, $\ell_0 \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^{p^1} \subset c_0 \subset \ell^\infty$

($1 \leq p < p' < \infty$) so there are other ideals—the von Neumann-Schatten ideals C^p such that

$$\mathcal{F}(H) \subset C^1(H) \subset C^p(H) \subset C^{p'}(H) \subset K(H) \subset B(H)$$
$$(1 < p < p' < \infty).$$

They are constructed via norms

$$|||A|||_p = \left[\sum_r \sum_k |\langle Au_r, u_k \rangle|^p \right]^{1/p}$$

just as Hilbert-Schwartz operators were. The class $C^1(H)$ is thought to be even more important than $C^2(H) = S(H)$; it consists of the so-called Nuclear or Trace-class operators.

REFERENCES

- [1] Akhiezer, N.I. and Glazman, I.M.: Theory of linear operators in Hilbert space, vol. I, New York: Ungar Publ. (1961).
- [2] Halmos, P.R.: A Hilbert space problem book, New York: Springer-Verlag Publ. (1982).
- [3] Hille, E. and Phillips, R.S.: Functional analysis and semigroups, American Math. Soc. Colloquium Publ., vol. XXXI, 2nd ed. (1957).
- [4] Dunford, N. and Schwartz, T.: Linear operators, Vol. I, II and III, New York: Interscience Publ. (1971).

[5] Taylor, A.E.: An introduction to functional analysis, New York: Wiley (1958).

UNE CLASSE DE METHODES NUMERIQUES POUR L'INTEGRATION
DIRECTE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $y'' = f(t, y, y')$

Franco, J. M. et Palacios, M.

Departamento de Matemática Aplicada.

Universidad de Zaragoza. 50009-Zaragoza. ESPAGNE.

1. INTRODUCTION.

Il y a divers problèmes de mouvement dont leurs équations différentielles sont de second ordre où la dérivée première se présente explicitement. Par exemple, dans l'étude du problème du satellite artificiel terrestre il faut résoudre une équation différentielle du type

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{\mu r}{r^3} + P(t, r, r') \quad (1.2)$$

Nous sommes intéressés à leur intégration numérique dans le cas où la vitesse r' est présent ou non. Le procédé classique pour résoudre ces situations est, comme on connaît, de réduire l'équation à un système différentiel du premier ordre équivalent auquel nous pouvons appliquer plusieurs méthodes d'intégration numérique. La généralisation de ces méthodes pour équations d'ordre plus grand que un s'appelle habituellement (Hall & Suleiman (1)) méthodes d'intégration directe. Plusieurs auteurs (Herrick (2)) nous conseillent sur les stéréotypes et malconceptions qui existent quand on intègre numériquement des équations d'ordre supérieur et ils recommandent utiliser l'intégration directe. Il y a avantages clairs de vitesse et stockage (Hall & Suleiman (1)) en les considérant, bien que Gear (3) suggère qu'il peut avoir certain danger quand on fait application d'eux à ce qui concerne leur stabilité.

Dans ce papier nous étudions une généralisation des méthodes de Cowell sous la forme de paires de formules à pas multiple (PFML), en étudiant les propriétés de consistence, stabilité et convergence des deux éléments qui constituent les paires tout

ensemble; nous déduisons aussi d'une façon recurrente les formules de la méthode de Cowell; finalement, nous en faisons application à deux problèmes particuliers, l'un du type orbital et l'autre avec une perturbation proportionnelle à la dérivée; de même, nous avons développé quelques comparaisons avec des méthodes indirectes.

2. LA POSSÉ DU PROBLÈME. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Le problème à valeurs initiales dont leur intégration numérique nous allons étudier dans ce travail peut se poser sous la forme suivant:

$$\begin{aligned} y'' &= f(t, y, y') , \quad 0 \leq t \leq T \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y'_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où les fonctions y , y' sont définies dans l'intervalle $[0, T]$ et f dans $[0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ et prenant valeurs dans \mathbb{R}^m .

2.1 Définition.- Nous dirons que f est une fonction lipschitzienne par rapport à y et y' dans $[0, T]$, s'il existe une constante positive L telle que se vérifie:

$$\| f(t, y, y') - f(t, z, z') \| \leq L (\| y - z \| + \| y' - z' \|)$$

pour tous $t \in [0, T]$, $y, z, y', z' \in \mathbb{R}^m$, où $\|\cdot\|$ est une norme dans \mathbb{R}^m . Nous notons par C_L l'ensemble de toutes les fonctions lipschitziennes par rapport à y et y' .

En avant nous utiliserons des fonctions f continues et lipschitziennes par rapport à y et y' , car ces sont des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions du problème possé.

Comme il est habituelle (Henrici (4)) à la construction de solutions d'un PVI, nous introduisons une grille de points

$$\{ t_n \ni n \in \mathbb{N}; t_{n+j} \in [0, T], j = 1(1) N \}$$

$$N = \max \{ n; nh \in [0, T] \} = \max J_h$$

2.2 Définition. - Nous appelons pair de formules linéaires à pas multiple (PFML) aux pairs d'équations à différences (Lambert (5)) ayant la forme suivant:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j^{(2)} y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j^{(2)} f(t_{n+j}, y_{n+j}, y'_{n+j})$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j^{(1)} y'_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j^{(1)} f(t_{n+j}, y_{n+j}, y'_{n+j}) \quad (2.2)$$

où k est un entier fixé, $\alpha_j^{(2)}, \beta_j^{(2)}, \alpha_j^{(1)}, \beta_j^{(1)}$, sont des constantes réelles qui ne dépendent pas de n ni de h et vérifie $\alpha_k^{(2)}, \alpha_k^{(1)} \neq 0$ et de plus $|\alpha_0^{(2)}| + |\beta_0^{(2)}| > 0$, $|\alpha_0^{(1)}| + |\beta_0^{(1)}| > 0$.

2.3 Définition. - Nous appellenls solution approchée du PVI (2.1) tout pair de suites $\{y_n, y'_n\}_{n \in J_h}$ telles que y_n et y'_n sont des approximations à la solution exacte $y(t)$ et à sa dérivée, respectivement, dans le point t_n et construits au moyen de PFML à k -pas définies ci-dessus.

Il est évident que pour spécifier une PFML à k -pas il faut utiliser un algorithme d'initiation que nous amène les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} y_n &= \eta_n, & y'_n &= \eta'_n \\ f_n &= f(t_n, y_n, y'_n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Généralement cet algorithme d'initiation est une méthode d'un pas, bien que pour des méthodes particulières peut avoir des algorithmes d'initiation aussi particulières, p.e., la méthode d'initiation de Herrick (Herrick (2), Fox (6)).

On dit que le PFML est explicite si $\beta_k^{(2)} = \beta_k^{(1)} = 0$; dans ce cas, le calcul des valeurs y_{n+k} ne porte pas aucune difficulté. Si $\beta_k^{(2)}, \beta_k^{(1)} \neq 0$, le PFML (2.2) est dit implicite; dans ce cas, pour calculer les y_{n+k} il faut la résolution d'un système d'équations linéaires qui a la forme

$$y_{n+k} - h^2 (\alpha_k^{(2)} / \beta_k^{(2)}) f(t_{n+k}, y_{n+k}, y'_{n+k}) = \Delta_n^{(2)} \quad (2.4)$$

$$y'_{n+k} - h (\alpha_k^{(1)} / \beta_k^{(1)}) f(t_{n+k}, y_{n+k}, y'_{n+k}) = \Delta_n^{(1)} \quad (2.5)$$

par quelque procédé itératif. Par hypothèse nous disposons de telle méthode nous permettant de résoudre les équations (2.4) et (2.5) avec la précision et frais computationnel donnés.

2.4 Définition. - Nous définissons les polynômes caractéristiques associés à un PFML au moyen de

$$\rho^{(i)}(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma^{(i)}(\zeta) = \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j$$

Evidentement, ces polinômes ensemble à l'algorithme d'initiation déterminent complètement la méthode que noterons $\{ (\rho^{(i)}(\zeta), \sigma^{(i)}(\zeta)) ; i = 1, 2 \}$.

Sans aucune perte de généralité et pour éviter des indeterminations, dorénavant nous possons $\alpha_k^{(i)} = 1, i = 1, 2$.

Nous introduisons les opérateurs d'erreur local $\{ L^{(1)}, L^{(2)} \}$ de la méthode par

$$L^{(i)}[y(t), h] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j^{(i)} y(t + jh) - h^2 \beta_j^{(i)} f(t + jh, y(t + jh), y'(t + jh))]$$

$$i = 1, 2$$

donc nous donnons la définition suivante

2.5 Définition. - Nous appellerons erreur de truncation local dans le point t_{n+k} pour le PFML (2.2) au pair

$$e^{(i)}_{n+k} = L^{(i)}[y(t_n); h], \quad i = 1, 2$$

2.6 Définition. - Nous dirons que le PFML est d'ordre p si $p = \max \{ q ; q \in Z^+ \}$ et telles que

$$L^{(i)}[y(t); h] = O(h^{q+i}), \quad i = 1, 2$$

quand $h \rightarrow 0^+$ pour tout $y(t)$.

2.7 Proposition. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une méthode $\{ (\rho^{(i)}, \sigma^{(i)}) ; i = 1, 2 \}$ soit d'ordre p est que les constantes

$$C^{(i)}_1 = \sum_{j=0}^k [\alpha_j^{(i)} (j^1 / 1!) - \beta_j^{(i)} (j^{1-i} / (1-i)!)], \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

vérifient

$$C^{(i)}_1 = 0, \quad \text{si } 0 \leq 1 \leq p + i - 1 \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (2.8)$$

$$C^{(i)}_{p+1} \neq 0$$

Démonstration. : Il suffit développer les opérateurs d'erreur local en puissances de h dans une voisinage du point t , pour obtenir

$$L^{(2)} [y(t); h] = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(2)} h^p y^{(p)}(t) \quad (2.9)$$

$$L^{(1)} [y(t); h] = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(1)} h^p y^{(p+1)}(t)$$

Les condicions ci-dessus sont independentes du point t où l'on a effectué les développements comme on le peut constater immédiatement. \ddagger

2.8 Définition. - Nous appellerons constantes d'erreur de truncature local de la méthode aux constantes $C^{(2)}_p, C^{(1)}_q$ avant definies, où

$$l = \min \{ p; C_p^{(1)} \neq 0 \}, \quad q = \min \{ p; C_p^{(2)} \neq 0 \}$$

2.9 Proposition. - Les condicions ci-dessus sont équivalentes à ces autres

$$L^{(i)}[t^l; h] = 0, \quad 0 \leq l \leq p+1, \quad i = 1, 2 \quad (2.10)$$

$$L^{(i)}[t^{p+2}; h] \neq 0, \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2$$

Démonstration. : Il suffit d'obtenir les expressions des opérateurs d'erreur local pour les fonctions $y(t) = t^i$ et leur développement en puissances de t . \ddagger

Tout d'accord à ce resultat et à la relation entre les operateurs et les erreurs locales, nous pouvons dire que pour tout PVI dont leur solution soit exactement un polinôme du degré $\leq p+1$, les erreurs locales s'annulent et, par conséquence, pour valeurs initiales exactes, les solutions numériques et analitiques seraient les mêmes.

2.10 Définition. - Nous dirons q'une méthode $\{(\rho^{(i)}, \sigma^{(i)}); i = 1, 2\}$ est consistente si

$$\max_{k \leq n \leq N} \{ \|e_n^{(i)}\| / h^i \} \longrightarrow 0$$

pour $i = 1, 2$

quand h tends vers cero ($h \longrightarrow 0^+$).

Nous dirons q'une méthode est consistente d'ordre p si

$$\max_{k \leq n \leq N} \{ \|e_n^{(i)}\| / h^i \} = O(h^{p+i}), \quad (h \longrightarrow 0^+)$$

pour $i = 1, 2$

D'après la définition on déduit que consistence est équivalente à que l'ordre de la méthode soit un, c'est à dire,

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}(1) &= \rho'^{(2)}(1) = 0, \quad \rho''^{(2)}(1) = 2 \sigma^{(2)}(1) \\ \rho^{(1)}(1) &= 0, \quad \rho'^{(1)}(1) = \sigma^{(1)}(1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Comme pour tous les méthodes que changent le pas d'intégration d'accord avec une estimation de l'erreur local, nous sommes intéressés à trouver une borne pour l'erreur local. Pour cela, nous n'avons que développer les fonctions $y(t + jh)$, $y'(t + jh)$, $y''(t + jh)$ en puissances de h et substituer à l'expression des opérateurs erreur local en considérant le résidu à la forme intégral, pour obtenir

$$L^{(i)}[y(t); h] = (h^{p+i} / (p+i-1)!) \int_0^k G_i(\tau) y^{(p+2)}(t + \tau h) d\tau \quad (2.12)$$

• $i = 1, 2$

où les fonctions

$$G_2(\tau) = \sum_{j=0}^k [\alpha_j^{(2)} (j-\tau)_+^{p+1} - p(p+1) \beta_j^{(2)} (j-\tau)_+^{p-1}] \quad (2.13)$$

$$G_1(\tau) = \sum_{j=0}^k [\alpha_j^{(1)} (j-\tau)_+^p - \beta_j^{(1)} (j-\tau)_+^{p-1}]$$

sont appelées noyaux de Peano associées à la méthode.

A ce point, nous pouvons distinguer deux cases :

1) $G_{(i)}(\tau)$, $i = 1, 2$ ne changent pas leur signe dans $[0, k]$. Dans ce cas, d'après (2.12), le théorème de Lagrange nous permet déduire les bornes suivantes:

$$\| L^{(i)}[y(t); h] \| \leq (h^{p+i} / (p+i-1)!) \| y^{(p+2)} \|_\infty \left| \int_0^k G_i(\tau) d\tau \right|$$

pour $i = 1, 2$

c'est à dire

$$\| L^{(i)}[y(t); h] \| \leq |C_{p+i}| h^{p+i} Y, \quad i = 1, 2 \quad (2.14)$$

où $Y = \sup\{ |y^{(p+2)}(x)| ; 0 \leq x \leq t \}$

2) $G_{(i)}(\tau)$, $i=1, 2$ changent leur signe dans $[0, k]$. Ici, il n'est pas possible d'appliquer le théorème de Lagrange, mais on peut trouver une majoration plus grossière que (2.14)

3. STABILITÉ DE P.F.M.L.

Nous exposons une forme matricielle qui fait équivalentes les PFML à pas fixe aux méthodes d'un pas quand on étudie l'stabilité des premières et nous permettant la caractérisation de la stabilité d'une façon très élégant. D'ailleurs, nous pouvons généraliser très facilement l'étude au cas de PFML à pas variable.

Comme nous avons établie dejá, une PFML est fixé par (2.2), (2.3). Compte tenue que chaque application de la méthode passe de la considération des valeurs

$$y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}, y'_n, y'_{n+1}, \dots, y'_{n+k-1}$$

à ces autres

$$y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k}, y'_{n+1}, y'_{n+2}, \dots, y'_{n+k}$$

nous introduisons les matrices suivantes (Calvo y Montijano (7))

$$Y_{n+k} = [y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_{n+1}, hy'_{n+k}, hy'_{n+k-1}, \dots, hy'_{n+1}]^T \quad (3.1)$$

$$\eta = [\eta^{(2)}_{k-1}, \eta^{(2)}_{k-2}, \dots, \eta^{(2)}_0, h\eta^{(1)}_{k-1}, h\eta^{(1)}_{k-2}, \dots, h\eta^{(1)}_0]^T$$

$$A_i = \begin{bmatrix} -\alpha_{k-1}^{(i)} & -\alpha_{k-2}^{(i)} & \cdots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & & \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$A = \text{diag}(A_2, A_1)$$

et les vecteurs

$$e_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$$

$$e_{k+1} = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T$$

$$\Phi^{(2)}_{n+k} = \Phi^{(2)}_{n+k} (Y_{n+k}, Y_{n+k-1}) = (\sum_{j=0}^k \beta_j^{(2)} f_{n+j}) e_1$$

$$\Phi^{(1)}_{n+k} = \Phi^{(1)}_{n+k} (Y_{n+k}, Y_{n+k-1}) = (\sum_{j=0}^k \beta_j^{(1)} f_{n+j}) e_{k+1}$$

où $Y_{n+k}, \eta, e_1, e_{k+1}, \Phi^{(2)}_{n+k}, \Phi^{(1)}_{n+k}$ appartiennent à R^{2k} et A_i sont des matrices de $M_R(k)$.

Avec cette notation, nous pouvons écrire la méthode (2.2), (2.3) sous la forme

$$Y_{k-1} = \eta \quad (3.3)$$

$$Y_{n+k} = A Y_{n+k} + h^2 [\Phi^{(2)}_{n+k} + \Phi^{(1)}_{n+k}], \quad 0 \leq n \leq N-k$$

Remarquons que si le PVI est s-vectoriel la formulation matricielle (3.3) est aussi valable avec la seule considération suivant, les vecteurs $Y_{n+k}, \eta, e_1, e_{n+k}, \Phi^{(2)}_{n+k}, \Phi^{(1)}_{n+k}$, doivent être des matrices avec s-colonnes

Ci-après nous donnons une généralisation de la notion de stabilité déjà connue pour des méthodes d'un pas.

3.1 Définition. - Nous dirons que la méthode (2.2), (2.3) est stable s'il existent des constantes positives h_0, K_1, K_2 telles que pour toute fonction $f \in C_L$ et tout $h \in (0, h_0]$ les solutions Y_n de (3.3) et Y_n^* du problème

$$Y_{k-1}^* = \eta + \omega_{k-1} \quad (3.4)$$

$$Y_{n+k}^* = A Y_{n+k}^* + h^2 [\Phi^{(2)*}_{n+k} + \Phi^{(1)*}_{n+k}] + \omega_{n+k}, \quad 0 \leq n \leq N-k$$

où $\omega_j \in R^{2k}$ sont des perturbations arbitraires vérifiant

$$\|Y_n^* - Y_n\| \leq [(K_1/h) + K_2] \sum_{j=k-1}^n \|\omega_j\|, \quad k-1 \leq n \leq N \quad (3.5)$$

Remarquons que l'élection de la norme $\|\cdot\|$ dans R^{2k} est indifférent pour les questions théoriques.

3.2 Théoreme. - La méthode (2.2), (2.3) est stable pour toute $f \in C_L$ si et seulement si elle est stable pour $f = 0$.

Démonstration :

====>) Trivial

<====) $f = 0$ entraîne $\Phi^{(i)}_n = 0$, $i=1, 2$ et notons $Z_n = Y_n^* - Y_n$ où Y_n, Y_n^* sont les solutions de (3.3), (3.4) correspondantes; alors nous avons

$$Z_{k-1} = \omega_{k-1} \quad (3.6)$$

$$Z_{n+k} = A Z_{n+k-1} + \omega_{n+k}$$

et ainsi

$$\|Z_n\| \leq [(K_1/h) + K_2] \sum_{j=k-1}^n \|\omega_j\|, \quad k-1 \leq n \leq N \quad (3.7)$$

pour tout $n \geq k-1$

Maintenant, soient $f \in C_L$ quelconque et Y_n, Y_n^* solutions des équations (3.3), (3.4) et notant $Z_n = Y_n^* - Y_n$, nous obtenons

$$Z_{k-1} = \delta_{k-1}$$

$$Z_{n+k} = A Z_{n+k-1} + \delta_{n+k}, \quad 0 \leq n \leq N-k$$

avec

$$\delta_{k-1} = \omega_{k-1}$$

$$\delta_{n+k} = h^2 [(\Phi^{*(2)}_{n+k} - \Phi^{(2)}_{n+k}) + (\Phi^{*(1)}_{n+k} - \Phi^{(1)}_{n+k})] + \omega_{n+k}$$

qui est stable par hypothèse, donc

$$\|Z_n\| \leq [(K_1/h) + K_2] \sum_{j=k-1}^n \|\delta_j\|, \quad k-1 \leq n \leq N \quad (3.8)$$

Compte tenu que

$$\|\delta_j\| \leq \|\omega_j\| + 2h^2 \beta L (\|Z_j\| + \|Z_{j-1}\|)$$

où $\beta = \max_{0 \leq j \leq k} \{ \beta_j^{(2)}, \beta_j^{(1)} \}$, soit h_0 tel que

$$h_0^* = 1 - 2 h_0 \beta L K_1 - 2 h_0^2 \beta L K_2 > 0$$

et possant

$$K_i^* = K_i / h_0^*, \quad i = 1, 2, \quad B = 4 h_0 \beta L (K_1^* + K_2^* h_0)$$

nous pouvons écrire pour tout $h \in (0, h_0]$

$$\|Z_n\| \leq [(K_1^*/h) + K_2^*] \sum_{j=k-1}^n \|\omega_j\| + h B \sum_{j=k-1}^{n-1} \|Z_j\|$$

et à induction :

$$\|Z_n\| \leq \exp(TB) [(K_1^*/h) + K_2^*] \sum_{j=k-1}^n \|\omega_j\|$$

c'est à dire, la méthode est stable. \ddagger

3.3 Corollaire. - La méthode (2.2), (2.3) est stable si et seulement s'il existe des constantes positives $K_i, i = 1, 2$ telles que

$$\sup \|A^n\| \leq (K_1/h) + K_2, \quad k-1 \leq n \leq N \quad (3.9)$$

Démonstration. : D'après le théorème 3.2, la formule (3.9) entraîne

$$Z_{n+k} = A^{n+1} \omega_{k-1} + A^n \omega_k + \dots + \omega_{n+k}$$

et par conséquence

$$\|Z_{n+k}\| \leq \sup_{k-1 \leq n \leq N} \|A^n\| \sum_{j=k-1}^n \|\omega_j\|, \text{ pour tout } n \geq k-1$$

ce qui est équivalent à

$$\sup_{k-1 \leq n \leq N} \|A^n\| \leq (K_1/h) + K_2 \quad \ddagger$$

3.4 Corollaire. - Si les sous-matrices $A_i, i = 1, 2$ vérifient les majorations

$$\sup_{k-1 \leq n \leq N} \|A_2^n\| \leq (K_1/h) + K_2, \quad \sup_{k-1 \leq n \leq N} \|A_1^n\| \leq K_3 \quad (3.10)$$

K_i , $i = 1, 2, 3$, étant constantes alors la méthode est stable.

Démonstration. : Il suffit considérer l'inégalité

$$\|A^n\| \leq \|A_2^n\| + \|A_1^n\| \neq$$

Ci-après, nous souhaitons trouver des conditions simples nous permettant construire des méthodes directes du type considéré dans ce papier. Le théorème et corolaire ci-dessous nous montrent des résultats intéressants.

3.5 Théorème. - Les propositions suivantes sont équivalentes:

- 1) Il existe des constantes positives K_i , $i = 1, 2, 3$ telles que

$$\sup_{k-1 \leq n \leq N} \|A_2^n\| \leq (K_1/h) + K_2, \quad \sup_{k-1 \leq n \leq N} \|A_1^n\| \leq K_3$$

- 2) Les valeurs propres de A , vérifient une des trois suivantes propositions

- a) $|\lambda| < 1$
- b) $|\lambda| = 1$ et λ est une valeur propre simple de A_1
- c) $|\lambda| = 1$ et λ est une valeur propre de A_2 à multiplicité pas plus grande que deux

Démonstration. :

- 1) \implies 2) Si S_i , $i = 1, 2$ sont des matrices complexes qui réduisent, respectivement, A_i , $i = 1, 2$ à sa forme canonique de Jordan J_i , $i = 1, 2$, nous avons :

$$A_i = S_i J_i S_i^{-1}, \quad i = 1, 2$$

ou bien

$$A = SJS^{-1}$$

avec

$$S = \text{diag}(S_2, S_1), \quad J = \text{diag}(J_2, J_1)$$

et compte tenue de

$$A_i = S_i J_i^n S_i^{-1}, \quad i = 1, 2$$

J_i , $i = 1, 2$ vérifient des majorations tout à fait analogues à celles de A_i , $i = 1, 2$.

Maintenant, soit λ une valeur propre de A , c'est à dire, de A_2 ou de

A_1 ou de tous les deux. La submatrice de Jordan associée sera :

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + M$$

ce qui entraîne

$$J_\lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & (n_1)\lambda^{n-1} & & \dots & & \\ 0 & \lambda^n & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & (n_1)\lambda^{n-1} & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^n & & \end{bmatrix} = (\lambda I + M)^n \quad (3.11)$$

Par conséquence, d'après les hypothèses, on peut établir $|\lambda| \leq 1$

Voyons plusieurs cases :

a) λ valeur propre de A_1 et $|\lambda| = 1$. Il faut que la multiplicité de λ soit 1, car, au contraire, J_1^n n'aurait pas l'acotation dite, selon nous voyons d'après (3.11).

b) λ valeur propre de A_2 et $|\lambda| = 1$. Il faut que la multiplicité de λ soit plus petite ou égal à 2 (le même raisonnement est valable).

c) λ quelconque avec $|\lambda| < 1$. Il n'y a pas des problèmes.

2) ==> 1). Trivial. \ddagger

Remarque. - La matrice A qui caractérise la méthode a une forme spéciale comme somme diagonal de deux matrices de Frobenius A_2, A_1 , avec polinôme caractéristique

$$P(\zeta) = p^{(2)}(\zeta)p^{(1)}(\zeta)$$

En outre, les vecteurs propres d'une matrice de Frobenius associées à une valeur propre λ sont $c(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \dots, 1)^T$, ($c = \text{const.}$), donc les vecteurs propres de A auraient la même forme convenablement remplis avec zeros. Alors, le corolaire suivant est immédiat.

3.6 Corollaire. - Si les racines $\zeta^{(i)}$, $i = 1, 2$ des polinômes caractéristiques $p^{(i)}(\zeta)$ d'une méthode $\{(p^{(i)}(\zeta), \sigma^{(i)}(\zeta)), i = 1, 2\}$ vérifient

$$i) |\zeta^{(i)}| < 1, i = 1, 2$$

$$ii) |\zeta^{(i)}| = 1, i = 1, 2 \text{ et multiplicité de } \lambda^{(i)} \text{ pas plus grande que } i$$

alors, la méthode $\{(\rho^{(i)}(\zeta), \sigma^{(i)}(\zeta)), i = 1, 2\}$ est stable.

Remarque. - C'est important souligner que pour stabilité nous imposons des conditions moins restrictives que la stabilité des méthodes $\{(\rho^{(i)}(\zeta), \sigma^{(i)}(\zeta))\}, i = 1, 2$ séparément.

4. CONVERGENCE DE PFML.

Ensuite nous allons voir comment comparer la solution exacte du PVI (2.1) avec la solution approchée obtenue par une des méthodes $\{(\rho^{(i)}(\zeta), \sigma^{(i)}(\zeta)), i = 1, 2\}$ déjà présentées.

4.1 Définition. - Nous dirons qu'une telle méthode est convergente si pour toute fonction $f \in C_L$ les solutions exacte et approchée du PVI (2.1) vérifient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|Y(t_n) - Y_n\|_\infty = 0, \quad k \leq n \leq N = T/h \quad (4.1)$$

tandis que les valeurs d'initiation satisfont

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1/h) \|Y(t_{k-1}) - Y_{k-1}\|_\infty = 0 \quad (4.2)$$

Comme il est habituel, nous appelons erreur de discréétisation locale de la méthode à la quantité

$$d_n = Y(t_n) - Y_n$$

4.2 Définition. - Un PFML est convergente d'ordre p si

$$\max_{k-1 \leq n \leq N} \|d_n\| = O(h^{p+1}) \quad (4.3)$$

quand h tends vers zéro ($h \rightarrow 0$).

4.3 Théorème. - Un PFML est convergente s'il est stable et consistante.

Démonstration. : D'après les hypothèses, la solution exacte vérifie

$$y(t_n) = \eta_n + (y(t_n) - \eta_n), \quad y'_n(t) = \eta'_n + (y'(t_n) - \eta'_n) \quad n=0(1)k$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j^{(2)} y(t_{n+j}) = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j^{(2)} f(t_{n+j}, y(t_{n+j}), y'(t_{n+j})) + e^{(2)}_{n+k} \quad (4.4)$$

$n=0(1)N-k$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j^{(1)} y'(t_{n+j}) = h \sum_{j=0}^k \beta_j^{(1)} f(t_{n+j}, y(t_{n+j}), y'(t_{n+j})) + e^{(1)}_{n+k}$$

et si nous écrivons

$$Y(t_{n+k}) = [y(t_{n+k}), \dots, y(t_{n+1}), h y'(t_{n+k}), \dots, h y'(t_{n+1})]^T$$

$$\omega_{k-1} = [(y(t_{k-1}) - \eta_{k-1}), \dots, (y(t_0) - \eta_0), h(y'(t_{k-1}) - \eta'_{k-1}), \dots]^T$$

$$\omega_{n+k} = [e^{(2)}_{n+k}, 0, \dots, 0, h e^{(1)}_{n+k}, 0, \dots, 0]^T$$

les équations (4.4) deviennent

$$Y(t_{k-1}) = \eta + \omega_{k-1} \quad (4.5)$$

$$Y(t_{n+k}) = AY(t_{n+k-1}) + h^2 [\Phi^{(2)}(Y(t_{n+k}), Y(t_{n+k-1})) + \Phi^{(1)}(Y(t_{n+k}), Y(t_{n+k-1}))]$$

$$+ \omega_{n+k}$$

$n = 0, 1, \dots, N-k$

qu'on peut considérer comme une version perturbée du problème (3.3).

Les hypothèses de stabilité entraînent

$$\|Y(t_n) - Y_n\|_\infty \leq [(K_1/h) + K_2] \sum_{j=k-1}^n \|\omega_j\|_\infty, \quad k-1 \leq n \leq N$$

$$\leq [(K_1/h) + K_2] \{ \|Y(t_{k-1}) - Y_{k-1}\|_\infty + \sum_{j=k}^N (|e^{(2)}_j| + h |e^{(1)}_j|) \} \quad (4.6)$$

et ces de consistence

$$|e^{(2)}_j| \leq C_2 h^3, \quad |e^{(1)}_j| \leq C_1 h^2$$

donc

$$\sum_{j=k}^N (|e^{(2)}_j| + h |e^{(1)}_j|) \} \leq C T h^2$$

et par conséquence

$$\| Y(t_n) - Y_n \|_\infty \leq [(K_1/h) + K_2] \{ \| Y(t_{k-1}) - Y_{k-1} \|_\infty + C T h^2 \} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

$$k \leq n \leq N \quad \dagger$$

Remarque. - Si les erreurs d'initiation sont telles que

$$\| Y(t_{k-1}) - Y_{k-1} \|_\infty = O(h^{p+2})$$

et les erreurs locales sont d'ordre p (≥ 1) telles que

$$|e^{(2)}_n| \leq K_2 h^{p+2}, \quad |e^{(1)}_n| \leq K_1 h^{p+1}$$

et en plus la méthode est stable, l'expression (4.6) nous permet d'affirmer que la méthode est convergente d'ordre plus grande ou égal à p .

5. CONSTRUCTION D'UNE FAMILIE DE PFML.

Ensuite nous étudions la construction d'une famille de PFML qui est simplement une généralisation des formules classiques (utilisées individuellement) d'Adams-Störmer et Adams-Cowell. Pour cela nous utilisons la méthode de Cowell, et nous prenons au lieu de la fonction f leur polynôme d'interpolation. Il faut rappeler (Henrici (4)) que si nous avons $k+1$ points équidistants

$$t_j = t_0 + j h, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

h étant le pas, le polynôme d'interpolation de Newton pour la fonction f on peut écrire

$$P(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_k, \quad t_0 \leq t \leq t_k \quad (5.1)$$

où $s = (t - t_k)/h$, et $\nabla^j f_k$ est la j -ème différence rétrograde et $f_i = f(t_i)$ (c'est la formule de Newton rétrograde).

Comme nous déjà connaissons, notre équation différentielle à résoudre est

$$y'' = f(t, y, y') \quad (5.2)$$

La technique classique de Cowell, rest sur deux points :

i) intégrer l'équation (5.2) sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ pour obtenir :

$$y'(t + \Delta t) - y'(t) = \int_t^{t + \Delta t} f(t, y(t), y'(t)) dt \quad (5.3)$$

ii) développe la solution $y(t)$ de (5.2) en série de Taylor pour $t + \Delta t$ et $t - \Delta t$, ce qui entraîne

$$y(t + \Delta t) - 2y(t) + y(t - \Delta t) = \int_t^{t + \Delta t} (t + \Delta t - x) [f(x) + f(2t - x)] dx \quad (5.3)$$

Si nous écrivons f_n par $f(t_n, y(t_n), y'(t_n))$, y_n par $y(t_n)$, y'_n par $y'(t_n)$ et nous prenons $t = t_n$ et $\Delta t = h$ et substituons f par leur polynôme d'interpolation (5.1) dans les points $t_{n-k}, t_{n-k+1}, \dots, t_n$ nous deduisons le suivant pair de formules linéaires à pas multiple

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \gamma_j^{(2)} \nabla^j f_n \quad (5.5)$$

$$y'_{n+1} - y'_n = h \sum_{j=0}^k \gamma_j^{(1)} \nabla^j f_n$$

avec $\gamma_j^{(2)} = (-1)^j \int_0^1 (1-s) \left[\binom{-s}{j} + \binom{s}{j} \right] ds \quad (5.6)$

$$\gamma_j^{(1)} = (-1)^j \int_0^1 \binom{s}{j} ds$$

que nous pouvons calculer à l'aide des fonctions génératrices (Henrici (6)) par les relations recurrentes ci-dessous

$$\sum_{j=0}^m (1/j + 1) \gamma_{m-j}^{(1)} = 1 \quad (5.7)$$

$$\sum_{j=0}^m (2/j + 2) H_{j+1} \gamma_{m-j}^{(2)} = 1$$

et $H_{m+1} = (1/m+1) + H_m$, $m \geq 1$

Compte tenue des relations (Henrici (4))

$$\nabla^m f_q = \sum_{j=0}^q (-1)^j \binom{m}{j} f_{q-j}$$

nous trouvons

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta^{(2)}_{kj} f_{n-j} \quad (5.8)$$

$$y'_{n+1} - y'_n = h \sum_{j=0}^k \beta^{(1)}_{kj} f_{n-j}$$

donc les coefficients $\beta^{(i)}_{kj}$, $i = 1, 2$ étant donnés par

$$\beta^{(i)}_{kj} = (-1)^j \sum_{l=0}^{k-j} \binom{k+1}{j} \gamma^{(i)}_{j+l} \quad (5.9)$$

Remarquons que ces formules (5.8) sont explicites et par conséquent il ne faut que la connaissance des valeurs $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-k}$ pour obtenir y_{n+1} , et y'_{n+1} . C'est ainsi que quelques auteurs (Herrick (4)) appellent prédicteurs ces formules de Cowell.

Presque de la même façon, la substitution de la fonction f par leur polynôme d'interpolation (5.1) dans les points $t_{n-k+1}, t_{n-k+2}, \dots, t_{n+1}$ nous donne les paires de formules à pas multiple

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta^{(2)*}_{kj} f_{n+1-j} \quad (5.10)$$

$$y'_{n+1} - y'_n = h \sum_{j=0}^k \beta^{(1)*}_{kj} f_{n+1-j}$$

où les coefficients $\beta^{(i)*}_{kj}$, $i = 1, 2$ sont exprimés par

$$\beta^{(i)*}_{kj} = (-1)^j \sum_{l=0}^{k-j} \binom{j+1}{j} \gamma^{(i)*}_{j+l} \quad (5.11)$$

et les coefficients $\gamma^{(i)*}_j$, par des formules jumelles de (5.6)

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)*}_j &= (-1)^j \int_0^1 (-s) \left[\binom{-s}{j} + \binom{s+2}{j} \right] ds \\ \gamma^{(1)*}_j &= (-1)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds\end{aligned}\quad (5.12)$$

ou bien ils sont obtenues par les lois de recurrence suivantes

$$\sum_{j=0}^m (1/j+1) \gamma^{(1)*}_{m-j} = \delta_{m0} \quad (5.13)$$

$$\sum_{j=0}^m (2/j+2) H_{j+1} \gamma^{(2)*}_{m-j} = \delta_{m0}$$

$$H_{m+1} = (1/m+1) + H_m, \quad m \geq 1 \quad \text{et} \quad \delta = \text{delta de Kronecker}$$

Remarquons que, ces formules (5.10) sont implicites et par conséquence il faut résoudre à chaque pas un système d'équations non linéaires, que nous écrivons

$$\begin{aligned}y_{n+1} - h^2 \beta^{(2)*}_{k0} f(t_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1}) &= \Delta^{(2)} \\ y'_{n+1} - h \beta^{(1)*}_{k0} f(t_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1}) &= \Delta^{(1)}\end{aligned}\quad (5.14)$$

en utilisant un algorithme itératif qui doit départir des valeurs $y^{(0)}_{n+1}, y'^{(0)}_{n+1}$ approchées. L'algorithme, par exemple des approximations successives, si f est lipschitzienne par rapport à y et y' avec constante L , nous munie une seule solution de (5.14) si

$$L h^2 \max \{ |\beta^{(2)*}_{k0}|, |\beta^{(1)*}_{k0}| \} < 1.$$

Plusieurs auteurs appellent correcteurs ces formules de Cowell; habituellement on utilise ces PFML (5.8) et (5.10) sous la forme prédicteur - correcteur en mode P (E C)^m E. Ces formules sont stables comme on peut vérifier simplement (voir corollaire 3.6).

6. APPLICATIONS PRACTIQUES.

Comme nous avons indiqué à l'introduction, le problème dont nous souhaitons l'intégration est ce du satellite artificiel terrestre que nous pouvons

mettre sous la forme

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{\mu r}{r^3} + P(t, r, r') \quad (6.1)$$

Pour faire une épreuve de la validité des méthodes deduites au paragraphe cinq, et de leur comportement par rapport à notre problème général (6.1), nous en considerons deux approximations : d'une partie, le problème de deux corps (c'est à dire, $P(t, r, r') = 0$) comme première pas vers (6.1), et de l'autre , le problème de deux corps perturbée par une force proportionnelle à la vitesse r' (p.e., le frottement atmosphérique).

En avant à l'implementation des méthodes, nous avons fait une normalization et une transformation de Levi-Civita (Stiefel - Scheifele (8)) définie par

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^2 - u_2^2 \\ x_2 &= 2 u_1 u_2 \\ dt &= r ds \quad (r = u_1^2 + u_2^2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

qui transforme le problème de deux corps dans le problème d'un oscillateur harmonique bidimensionnel :

$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad (6.3)$$

et l'autre déviens

$$u'' + \epsilon u' + \omega^2 u = 0 \quad (6.4)$$

où $\omega = \sqrt{(1-e)/2}$, e étant l'excentricité de la orbite et ϵ une constante d'ordre 10^{-12} d'après Moore (9). Nous prendrons les conditions initiales $u(0) = [1, 0]^T$, $u'(0) = [0, v_0/2]^T$ où $v_0^2 = (2/r_0) - (1/a) = 1 + e$ est la vitesse initial cartésienne.

Nous faisons la comparaison avec la solution exacte et avec la solution approchée munie par une méthode classique d'Adams - Bashforth - Moulton (Lambert (5)) pour différentes valeurs de l'excentricité (c'est à dire, de ω) et pour plusieurs valeurs du pas h après 10 revolutions. Nous prenons ordre 8 pour les deux méthodes, le mode P(EC)E et valeurs d'initiation les données par la solution exacte (que nous n'écrivons pas).

Les résultats obtenus dans un ordinateur VAX 11 - 780 sont montrés

aux tableaux ci-dessous.

Les pas considérés $\pi / 10$, $\pi / 20$, $\pi / 30$ sont des valeurs recommandées à la littérature. Les excentricités correspondent à des orbites circulaires ($e = 0$) ou presque circulaires (0.001, 0.01), ou assez excentriques (0.1, 0.2, 0.5) de satellites réels.

Nous tirons les suivantes conséquences des tableaux adjoints :

1^o. - Les méthodes PFML marchent plus mieux quand l'excentricité est plus grande, ce qui est conséquence de la regularization effectué (Coffey and Alfriend (10)).

2^o. - Les méthodes PFML donnent meilleurs résultats que les obtenus par les formules d'Adams - Bashforth - Moulton .

3^o. - Les deux méthodes numériques travaillent mieux avec pas plus petit. Remarquons que $\pi / 30$ est un pas qui se correspond à peu près avec 100 seconds de temps.

4^o. - Notre méthode marche très bien tant pour $\epsilon = 10^{-10}$ comme pour $\epsilon = 10^{-12}$. Notons que $\epsilon = 10^{-10}$ est trop grand pour les problèmes réels.

EPSI	H	EXC	METODO DE STOR-COW-ADAMS	ADAMS-BAS-MOUL
0.000000000000	0.31416	0.0000	0.783D-08	0.452D-06
0.000000000000	0.15708	0.0000	0.308D-10	0.183D-08
0.000000000000	0.10472	0.0000	0.119D-11	0.723D-10
0.000000000000	0.31416	0.0010	0.780D-08	0.451D-06
0.000000000000	0.15708	0.0010	0.307D-10	0.183D-08
0.000000000000	0.10472	0.0010	0.119D-11	0.720D-10
0.000000000000	0.31416	0.0100	0.752D-08	0.435D-06
0.000000000000	0.15708	0.0100	0.298D-10	0.177D-08
0.000000000000	0.10472	0.0100	0.115D-11	0.698D-10
0.000000000000	0.31416	0.1000	0.473D-08	0.284D-06
0.000000000000	0.15708	0.1000	0.197D-10	0.117D-08
0.000000000000	0.10472	0.1000	0.774D-12	0.466D-10
0.000000000000	0.31416	0.2000	0.286D-08	0.177D-06
0.000000000000	0.15708	0.2000	0.109D-10	0.688D-09
0.000000000000	0.10472	0.2000	0.417D-12	0.269D-10
0.000000000000	0.31416	0.5000	0.337D-09	0.214D-07
0.000000000000	0.15708	0.5000	0.131D-11	0.815D-10
0.000000000000	0.10472	0.5000	0.454D-13	0.320D-11

METODO DE

EPSI	H	EXC	STOR-COW-ADAMS	ADAMS-BAS-MOUL
0.000000000001	0.31416	0.0000	0.783D-08	0.452D-06
0.000000000001	0.15708	0.0000	0.308D-10	0.183D-08
0.000000000001	0.10472	0.0000	0.119D-11	0.723D-10
0.000000000100	0.31416	0.0000	0.783D-08	0.452D-06
0.000000000100	0.15708	0.0000	0.308D-10	0.183D-08
0.000000000100	0.10472	0.0000	0.119D-11	0.723D-10
0.000000000001	0.31416	0.0010	0.780D-08	0.451D-06
0.000000000001	0.15708	0.0010	0.307D-10	0.183D-08
0.000000000001	0.10472	0.0010	0.119D-11	0.720D-10
0.000000000100	0.31416	0.0010	0.780D-08	0.451D-06
0.000000000100	0.15708	0.0010	0.307D-10	0.183D-08
0.000000000100	0.10472	0.0010	0.119D-11	0.720D-10
0.000000000001	0.31416	0.0100	0.752D-08	0.435D-06
0.000000000001	0.15708	0.0100	0.298D-10	0.177D-08
0.000000000001	0.10472	0.0100	0.115D-11	0.698D-10
0.000000000100	0.31416	0.0100	0.752D-08	0.435D-06
0.000000000100	0.15708	0.0100	0.298D-10	0.177D-08
0.000000000100	0.10472	0.0100	0.115D-11	0.698D-10
0.000000000001	0.31416	0.1000	0.473D-08	0.284D-06
0.000000000001	0.15708	0.1000	0.197D-10	0.117D-08
0.000000000001	0.10472	0.1000	0.774D-12	0.466D-10
0.000000000100	0.31416	0.1000	0.473D-08	0.284D-06
0.000000000100	0.15708	0.1000	0.197D-10	0.117D-08
0.000000000100	0.10472	0.1000	0.775D-12	0.466D-10
0.000000000001	0.31416	0.2000	0.286D-08	0.177D-06
0.000000000001	0.15708	0.2000	0.109D-10	0.688D-09
0.000000000001	0.10472	0.2000	0.420D-12	0.269D-10
0.000000000100	0.31416	0.2000	0.286D-08	0.177D-06
0.000000000100	0.15708	0.2000	0.109D-10	0.688D-09
0.000000000100	0.10472	0.2000	0.418D-12	0.269D-10
0.000000000001	0.31416	0.5000	0.337D-09	0.214D-07
0.000000000001	0.15708	0.5000	0.131D-11	0.815D-10
0.000000000001	0.10472	0.5000	0.424D-13	0.320D-11
0.000000000100	0.31416	0.5000	0.337D-09	0.214D-07
0.000000000100	0.15708	0.5000	0.131D-11	0.815D-10
0.000000000100	0.10472	0.5000	0.422D-13	0.320D-11

CONCLUSIONS.

Nous avons formulé une généralization des méthodes de Cowell pour l'intégration directe des équations différentielles du second ordre, dérivée première étant présent ou non, sous la forme de paires des formules linéaires à pas multiple (P FML), au lieu des formules classiques de Cowell à différences centrales ou rétrogrades. Nous

avons possé les définitions d'ordre, consistance et stabilité des PFML et étudié leur caractérisation d'après une formulation matricielle très élégant qui nous permet oftenir le resultat (3.6).

De la même façon nous avons prouvé une condition suffisante pour la convergence de PFML. Maintenant nous sommes en train d'étudier quelques propriétés de stabilité.

Comme un cas particulier nous avons décrie la construction d'une famille de PFML qui est simplement le pair predicteur - correcteur de Cowell - Sörmer - Adams que quelques autres auteurs (Herrick (2), Merson (11)) ont déjà présented avec différences centrales ou retrogrades, et qui est d'une plus facile implementation.

En fin, nous avons fait une épreuve pour deux problèmes assez representatives du problème général : le problème de Kepler et le problème de Kepler perturbé par le frottement atmosphérique. La consequence tirée par nous sont que ces PFML marchent très bien quand on compare avec les méthodes d'Adams - Bashforth - Moulton.

REMERCIEMENT.

Ce papier a été supporté par le project CB4/85 de la Diputación General de Aragón (España).

BIBLIOGRAPHIE.

- 1.- Hall, G. and Suleiman, M.B. : 1981, " Stability of Adams - type Formulae for Second - Order O.D.E." IMA of Num. Anal. 1, 427 - 438.
- 2.- Herrick, S. : 1972, Astroynamics, vol. 2, Van Nostrand Reinhold, London.
- 3.- Gear, G.W. : 1978, " The Stability of Numerical Methods for Second Order Ordinary Differential Equations" ; SIAM J. Num. Anal., 15, 188 - 197
- 4.- Henrici, P. : 1962, Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations Jhon Wiley, New York.

- 5.- Lambert, J.D. : 1973, Computational Methods in Ordinary Differential Equations; Jhon Wiley, New York.
- 6.- Fox, K. : 1984, " Numerical Integration of the Equations of Motion of Celestial Mechanics "; Cel. Mech. 33, 127 - 142
- 7.- Calvo, M. y Montijano, J.I. : 1985, M.L.M. para la resolución numérica de E.D.O.; Universidad de Zaragoza.
- 8.- Stiefel, E. and Scheifele, G. : 1971, Linear and Regular Celestial Mechanics; Springer - Verlag, Berlin.
- 9.- Moore, P. : 1978, " Orbitally Stable Multistep Methods " ; Cel. Mech., 17, 281 - 298
- 10.- Coffey, S.L. and Alfriend, K.T. : 1984, " An Analytic Orbit Prediction Program Generator " ; J. Guidance, Control and Dynamics, 7, 575 - 581.
- 11.- Merson, R.H. : 1974, " RAE Technical Report 74 184 ".

Estudio cualitativo e integración de las ecuaciones del movimiento del "main problem" ecuatorial

FRANCO J. M. y PALACIOS M.

Departamento de Matemática Aplicada (E.T.S.I.I.Z.), Av. María Zambrano, 50,
50015-Zaragoza

AMS: 70M05

Resumen: En este trabajo estudiamos el movimiento de un satélite artificial terrestre en una aproximación de primer orden, sujeto a moverse en el plano ecuatorial de la Tierra. Estudiamos cualitativamente las posibles trayectorias, tratando el problema como un campo de fuerzas centrales. Finalmente integramos analíticamente el problema, obteniendo la ecuación de la órbita y la ley horaria del movimiento en función de integrales y funciones elípticas.

1. Introducción.

En este trabajo estudiamos el movimiento de un satélite artificial terrestre sujeto a moverse en el plano ecuatorial. El movimiento consistirá en un problema kepleriano perturbado, con una perturbación inversamente proporcional al cubo de la distancia y cuya órbita tiene una inclinación de 0° . La energía potencial de este modelo viene dada por

$$V = -\frac{\mu}{r} - \varepsilon \frac{\mu}{2r^3}, \quad (1.1)$$

donde r es la distancia del centro de masas del sistema al satélite, $\varepsilon = J_2$ (término debido al achatamiento de la Tierra) y μ es la constante gravitacional.

En la expresión (1.1) se observa que el potencial es una función que solo depende de la distancia radial r y, en consecuencia, podemos considerar el movimiento del satélite como el movimiento de una partícula bajo la acción de un campo de fuerzas centrales, donde la magnitud de la fuerza es

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{\mu}{r^2} - \varepsilon \frac{3\mu}{2r^4} \quad (1.2)$$

Por lo tanto, el movimiento tendrá lugar en un plano (plano ecuatorial terrestre) y para su estudio utilizaremos coordenadas polares (r, θ) .

2. Ecuaciones del movimiento.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento en coordenadas polares vienen dadas por

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = f(r) \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (2.2)$$

siendo $f(r)$ la magnitud de la fuerza de atracción dada en (1.2). La ecuación (2.2) nos da la integral de las áreas o del momento angular

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h, \quad (2.3)$$

de manera que, si despejamos la velocidad angular y sustituimos en la ecuación (2.2) obtenemos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \left[V(r) + \frac{1}{2} \frac{h^2}{r^2} \right] \quad (2.4)$$

En la expresión (2.4) se refleja que nuestro problema de tipo bidimensional ha quedado reducido a un problema unidimensional equivalente, donde la cantidad

$$V_e = V(r) + \frac{1}{2} \frac{h^2}{r^2}$$

representa una energía potencial ficticia que será muy útil para poder estudiar cualitativamente las posibles órbitas del movimiento.

Considerando la integral de la energía del movimiento

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_e(r)$$

y despejando la velocidad radial obtenemos formalmente la solución en función del tiempo

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2 [E - V_e(r)]}} \quad (2.5)$$

$$\theta_0 - \theta = \int_{t_0}^t \frac{h}{r^2(t)} dt \quad (2.6)$$

o en el caso de que nos interese la ecuación de la órbita junto con la ley horaria

$$\theta_0 - \theta = \int_{r_0}^r \frac{h}{r^2 \sqrt{2 [E - V_e(r)]}} dr \quad (2.7)$$

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r^2(\theta)}{h} d\theta \quad (2.8)$$

3. Descripción cualitativa de las órbitas.

Para una discusión cualitativa del carácter de las órbitas, usaremos representaciones gráficas de la energía potencial ficticia V_e para diferentes valores del momento angular h . Derivando la energía potencial ficticia $V_e(r)$ e igualando a 0, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$2\mu r^2 - 2h^2 + 3\varepsilon\mu = 0,$$

de donde obtenemos los puntos extremos.

- Si $h^4 > 6\mu^2\varepsilon$, la función V_e tiene dos puntos extremos para

$$r = \frac{h^2 \pm \sqrt{h^4 - 6\mu^2\varepsilon}}{2\mu}$$

cuyo carácter se determina sin más que tener en cuenta que $V_e(r) \rightarrow 0^+$ cuando $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$V_e(r_+) = V_{e,\min} < 0$$

$$V_e(r_-) = V_{e,\max} \quad (> 0, \text{ si } h^4 > 8\mu^2\epsilon) \text{ y } (< 0, \text{ si } h^4 < 8\mu^2\epsilon)$$

ver las figuras (1.a) y (1.b)

- Si $h^4 < 6\mu^2\epsilon$, la función $V_e(r)$ será monótona (ver la figura (1.c))

De las tres posibles gráficas obtenidas para la energía potencial ficticia, estudiaremos con detalle el caso de la figura (1.a), siendo análogo el estudio de los restantes casos.

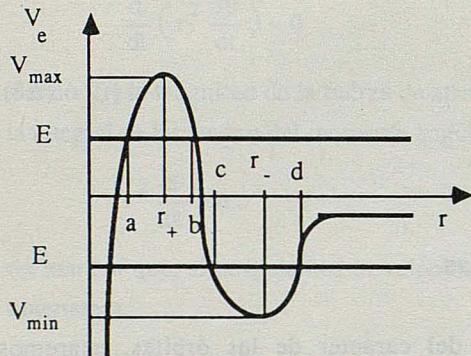
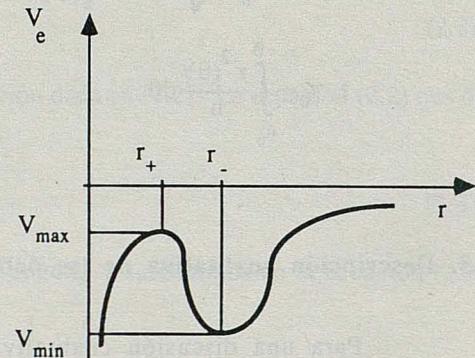


Figura (1.a)



Figura(1.b)

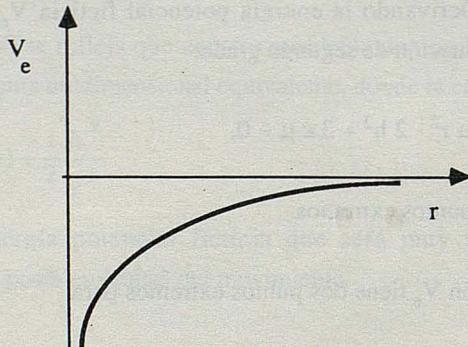


Figura (1.c)

Si la energía $E > V_{\max}$, la partícula procedente del infinito cae en el centro del potencial y la velocidad angular aumenta de acuerdo con la ecuación $d\theta/dt = h/r^2$ (ver las figuras 2.a y b). Para grandes distancias tales que $\epsilon\mu/r^3 \ll \mu/r$, el término dominante en la energía potencial es $-\mu/r$ y la órbita será muy próxima a una hipérbola. En el caso en

que la energía sea muy próxima a V_{\max} , la partícula pasa lentamente através del rango de r , es decir, la partícula gira alrededor del centro de fuerzas dando un gran número de vueltas y luego cae hasta el centro (ver la figura 2.b).

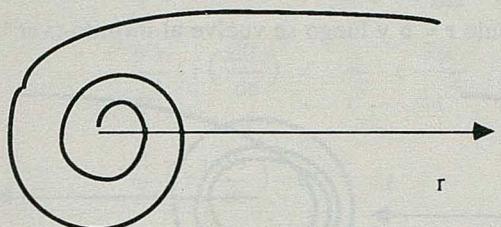


Figura (2.b)

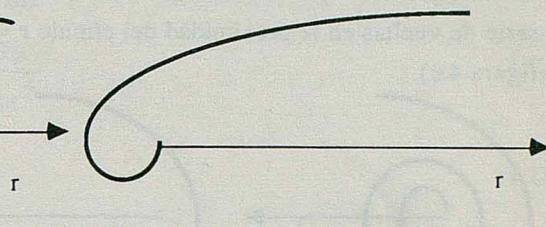


Figura (2.a)

Si la energía $E = V_{\max}$, la partícula se aproxima asintóticamente al punto $r = r_+$ en su movimiento radial. Si la partícula se encuentra en la región $r > r_+$, la órbita será una espiral que se aproxima al círculo de radio r_+ y centro el centro de fuerzas, por el exterior (ver la figura 3). En el caso en que la partícula se mueva en la región $r < r_+$, la partícula parte del centro de fuerzas y se aproxima al círculo antes mencionado, por su interior (ver la figura 3). Finalmente, el movimiento a lo largo del círculo $r = r_+$ es posible, pero es muy inestable, de forma que, cualquier cambio producido en las integrales E ó h , hará que la órbita deje de ser circular.

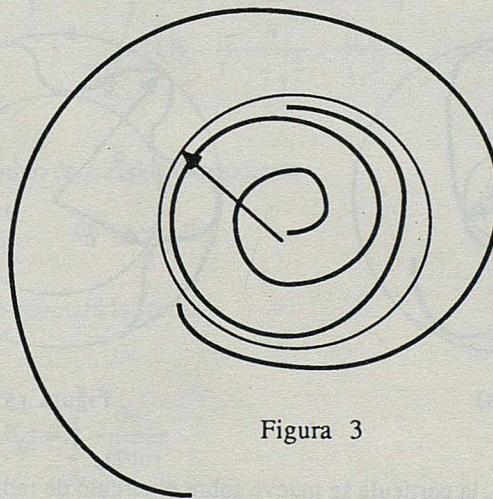
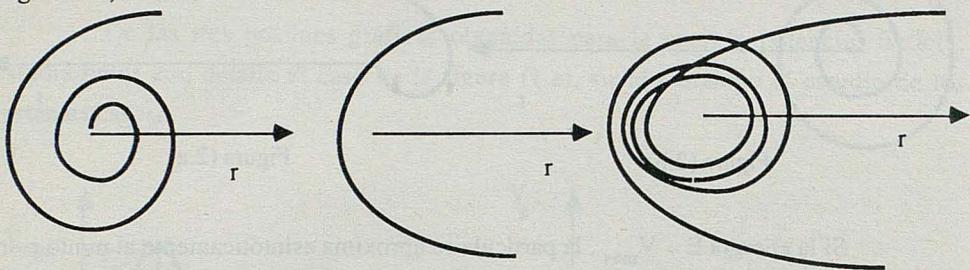


Figura 3

Si $0 < E < V_{\max}$, tenemos dos posibles regiones del movimiento para la partícula, $r < a$ ó $r > b$. Si la partícula se mueve en la región $r < a$, la órbita tiene la

forma de un trozo de espiral y la partícula cae hacia el centro de fuerzas (ver la figura 4.a). Si la partícula se mueve en la región $r > b$, la partícula viene del infinito y es reflejada por la barrera de potencial volviéndose de nuevo al infinito (ver las figuras 4.b y c). En el caso en que $r > b$ y E sea muy próxima a V_{\max} , la partícula viene del infinito, da una serie de vueltas en la proximidad del círculo $r = b$ y luego se vuelve al infinito (ver la figura 4.c).



Figura(4.a)

Figura(4.b)

Figura (4.c)

Si $V_{\min} < E < 0$, la partícula da lugar a oscilaciones rápidas en el rango $c \leq r \leq d$. Si la energía es próxima a cero, la amplitud de las oscilaciones radiales será grande y su periodo puede ser también grande, dando lugar a varias revoluciones durante una oscilación radial (figura 5.a). Cuando la energía E es próxima a V_{\min} , la órbita es próxima a un círculo de radio r_+ y las oscilaciones radiales son pequeñas (figura 5.b).

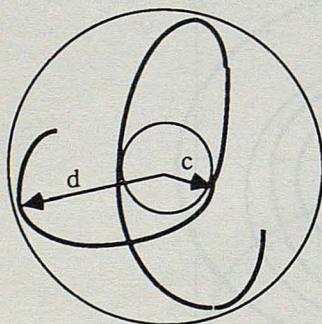


Figura (5.a)

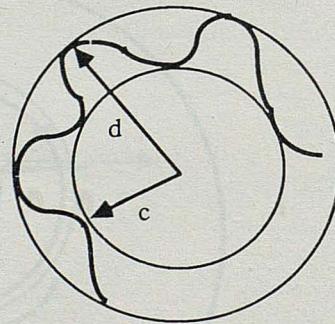


Figura (5.b)

Si $E = V_{\min}$, la partícula se mueve sobre el círculo de radio $r = r_-$.

En la siguiente sección, estudiaremos con más detalle el movimiento de la partícula cuando la energía $E < 0$ (movimiento acotado).

4. Estudio del movimiento acotado.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento, en nuestro caso, vienen dadas por

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = - \frac{\mu}{r^2} - \epsilon \frac{3\mu}{2r^4} \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (4.2)$$

y de la expresión (4.2) se obtiene inmediatamente la integral del momento angular dada en la expresión (2.3)

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.1)-(4.2), podemos despejar la velocidad angular de la integral del momento angular, sustituirla en la ecuación (4.1) e integrar la ecuación resultante. Pero nosotros estamos interesados en la obtención de la ecuación de la órbita y, por lo tanto, utilizaremos la expresión (2.7) de la sección 1

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{h dr}{\sqrt{2(E + \frac{\mu}{r} - \frac{h^2}{2r^2} + \frac{\mu\epsilon}{2r^3})}} \quad (4.3)$$

Efectuando el cambio de variable dependiente

$$r = \frac{1}{u}, \quad dr = - \frac{1}{u^2} du$$

la expresión (4.3) adoptará la forma

$$\gamma(\theta - \theta_0) = \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{P(u)}} \quad (4.4)$$

donde $\gamma = -\mu\epsilon/h^2 > 0$,

$$P(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 - u^3,$$

$$a_0 = -\frac{2 E}{\mu \epsilon}, \quad a_1 = \frac{h^2}{\mu \epsilon}, \quad a_2 = -\frac{2}{\epsilon}.$$

La parte de la derecha de la expresión (4.4) es una integral elíptica incompleta de primer orden, sin embargo, antes de proceder a la resolución formal de la ecuación (4.4), haremos un análisis de la cúbica $P(u)$ y del rango de la variable u , desde el punto de vista de la mecánica orbital.

Consideraremos órbitas de tipo elíptico que presenten puntos de máxima y mínima proximidad a la masa atrayente, que se designan con los nombres de *apoábside* y *periábside*, de radios r_a y r_p , respectivamente. En estos puntos se verifica

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

y teniendo en cuenta la transformación de variables efectuada, tenemos

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{h} \frac{dr}{dt} = 0$$

De donde deducimos que la condición de ábside vendrá dada por

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \tag{4.5}$$

De la expresión (4.5) se deduce que dos de las raíces de la cúbica $P(u)$ serán los ábsides y, por lo tanto, tendrá dos raíces reales positivas. Teniendo en cuenta que las raíces imaginarias deben aparecer en pares conjugados, concluimos que las raíces de dicha cúbica son todas reales y al menos dos de ellas son positivas. Si designamos a estas raíces por u_1, u_2, u_3 , y suponemos que las tenemos ordenadas en orden decreciente

$$u_1 > u_2 > u_3,$$

como la variable u ha de estar acotada entre dos de estos valores sucesivos, los dos posibles rangos para u son:

$$u_1 > u_2 > u > u_3, \quad u_1 > u > u_2 > u_3$$

Teniendo en cuenta que $P(u) = (u_1 - u)(u - u_2)(u - u_3)$, si suponemos que estamos en el primer caso, $P(u) < 0$, el argumento bajo el signo del radical será negativo y llegamos a una contradicción (ya que en caso contrario la cúbica tendría dos raíces imaginarias

conjugadas). Por lo tanto, el rango de u será $u_1 > u > u_2 > u_3$ y las raíces u_1 y u_2 tendrán un significado especial

$$u_1 = \frac{1}{r_p}, \quad u_2 = \frac{1}{r_a}$$

Ecuación de la órbita.

Tomando condiciones iniciales $\theta(t_0) = \theta_0$ en la época de paso del satélite por el periábside e integrando la ecuación (4.4) (ver Byrd and Friedman[3] 236.00), resulta

$$\gamma(\theta - \theta_0) = -\frac{2}{\sqrt{u_1 - u_3}} \operatorname{sn}^{-1} (\operatorname{sen} \varphi, k) \quad (4.6)$$

donde k es el módulo de las funciones e integrales jacobianas elípticas, y en nuestro caso tiene el valor

$$k = \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}} < 1,$$

la variable argumento φ es conocida como la amplitud de la integral elíptica de primer orden, y en nuestro caso viene definida por

$$\varphi = \arcsen \sqrt{\frac{u_1 - u}{u_1 - u_2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

Invirtiendo la expresión (4.6) obtenemos la ecuación de la órbita

$$r(\theta) = \frac{\beta}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 [\gamma^* \sqrt{u_1 - u_3} (\theta - \theta_0)]} \quad (4.7)$$

donde las constantes α , β y γ^* vienen dadas por

$$\beta = \frac{1}{u_1}, \quad \alpha^2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1}, \quad \gamma^* = \frac{\gamma}{2}$$

La función sn^2 es una función periódica de periodo $2K$, donde K es la integral elíptica completa de primer orden definida por $K = F(\pi/2, k)$. De acuerdo con esto, el radio vector es una función periódica de θ con periodo

$$T = \frac{2 K}{\gamma^* \sqrt{u_1 - u_3}}$$

Sin embargo, $T \neq 2\pi$ y la distancia radial es obtenida de nuevo cuando el radio vector gira hasta T . Esto implica que, en general, la trayectoria del satélite no es cerrada, trazando una curva esquemática como la dada en la figura 6.

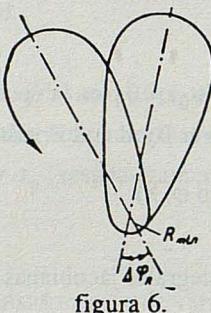


figura 6.

Durante el tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del satélite por el periábside, el radio vector del periábside habrá girado un ángulo

$$\Delta \phi_p = T - 2\pi$$

Para que la trayectoria del satélite sea cerrada, se ha de verificar que el número $k = \Delta \phi_p / \pi$ sea un número racional, ya que en caso contrario, la trayectoria sería densa en el anillo $r_p \leq r \leq r_a$ (ver Puel[5]).

Ley horaria del movimiento.

La ley horaria del movimiento la deduciremos de la integral del momento angular (2.3) y la expresión de la ecuación de la órbita, resultando

$$\frac{h}{\beta^2} \int_{t_0}^t dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \delta (\theta - \theta_0))^2} \quad (4.8)$$

donde $\delta = \gamma^* (u_1 - u_3)^{1/2}$

Si hacemos el cambio de variable $\phi = \delta (\theta - \theta_0)$, $d\phi = \delta d\theta$ y comenzamos a contar

ángulos desde el periábside ($\theta_0 = 0$), la ecuación (4.8) queda:

$$\frac{\delta h}{\beta^2} (t - t_0) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \phi)^2} \quad (4.9)$$

donde t_0 es la época de paso por el periábside

Para resolver la ecuación (2.9), utilizaremos la fórmula 336.03 dada por Byrd and Friedman[3], obteniendo la siguiente ley horaria (ecuación de Kepler generalizada)

$$N(t - t_0) = C_1 \Pi(\phi, k) + C_2 E(\phi, k) + C_3 \Pi(\phi, \alpha^2, k) + C_4 \frac{\sin \phi \cos \phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}{1 - \alpha^2 \sin^2 \phi}$$

donde las constantes vienen dadas por

$$N = \frac{\delta h}{\beta^2}$$

$$C_1 = \frac{u_1}{2 u_2}$$

$$C_2 = \frac{u_1 (u_3 - u_1)}{2 u_2 u_3}$$

$$C_3 = \frac{u_1 u_3 + u_1 u_3 + u_2 u_3}{2 u_2 u_3}$$

$$C_4 = \frac{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}{2 u_2 u_3}$$

La ley horaria viene expresada en función de las integrales jacobianas elípticas de primero, segundo y tercer orden y de la variable ϕ que a su vez es una función lineal de θ . Hacemos notar que no es sencillo invertir esta ecuación, análoga a la ecuación de Kepler, sin embargo la variable θ puede ser computada, para un instante dado t , mediante un algoritmo de tipo numérico como el método de Newton-Raphson. Una vez calculada $\theta(t)$ el radio vector vendrá dado por la ecuación de la órbita (4.7), con lo cual el problema queda totalmente resuelto.

Agradecimientos.

Este trabajo ha sido realizado dentro del programa de los proyectos CB4/84 de la Diputación General de Aragón y CAICYT número 779-84.

Referencias.

- [1] BELEN'KII, I. M.: *A Method of Regularizing the Equations of Motion in Central Force-Field*. *Celas. Mech.* 23 (1981) 9-32.
- [2] BELETSKII, V. V.: *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass*. Israel Program for Scientific Translations, (1966), Apéndice 2, pp. 250-256.
- [3] BYRD, P. F. and FRIEDMAN, M. D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engeniers and Scientists*, (1971), Springer-Verlag, New York.
- [4] JEZEWSKI, J. D.: *An Analytic Solution for the J_2 Perturbed Equatorial Orbit*. *Celas. Mech.* 30 (1983) 363-371.
- [5] PUEL, F.: *The Rotation Number of Buned Orbits in a Central Field*. *Celas. Mech.* 29 (1983) 255-266.
- [6] STERNE, T. E.: *The Gravitational Orbit of a Satellite of an Oblate Planet*. *Atron. J.*, 63 Nº 1255 (1958) 28-40.
- [7] WHITTAKER, E. T.: *Analitical Dynamics*, 1937 Cambridge.

METODO ESTROBOSCOPICO EN VARIABLES DE DELAUNAY. APLICACION A UN RADIAL DEL SATELITE ARTIFICIAL.

A. ABAD, A. ELIPE Y M.L. SEIN-ECHALUCE

Departamento de Física Teórica. (Astronomía). Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza (Spain).

The second order stroboscopic method is developed and an application to the zonal Earth satellite formulated in Delaunay variables is made. The advantages of these variables versus Hill variables for this method are exposed.

1. INTRODUCCION.

El método estroboscópico, propuesto por Roth (1973), es un método semianalítico que ha sido utilizado con muy buenos resultados en análisis de misión, en predicción de vida de satélites, en construcción de ventanas de lanzamiento, etc.

Dicho método consiste esencialmente en restringir la validez de la teoría analítica a una única revolución, y después de ésta, aplicar la misma teoría a los elementos actualizados en la siguiente revolución, y así sucesivamente, de modo que se pueden calcular numerosas órbitas.

Una de las principales ventajas de este método la constituye el hecho de que se obtiene una gran velocidad de cálculo, y como se ha comprobado, una buena precisión incluso después de cientos de revoluciones (Janin, 1979).

El método estroboscópico ha sido utilizado en diferentes conjuntos de variables: elementos clásicos (Roth, 1973, 78, 79), elementos equinocciales (Lecohier, 1985), variables de Hill (Sein-Echaluce, Abad y Elipe, 1987), etc. En estas últimas, se pierden gran parte de las ventajas del método al aparecer términos de orden cero en las ecuaciones diferenciales del movimiento.

En el presente artículo, siguiendo la extensión de segundo orden obtenida por los autores, formulamos el problema de movimiento de un intermediario correspondiente a un satélite zonal en variables de Delaunay, con lo que se evitan las anteriores dificultades. Lógicamente, es de interés la utilización de las variables de Delaunay en el problema inicial (antes de promediar), sin embargo, planteamos el intermediario radial para destacar la ventaja de estas variables frente a las de Hill.

2. METODO ESTROBOSCOPICO DE SEGUNDO ORDEN.

Consideremos las ecuaciones del movimiento de una partícula atraída por un potencial Kepleriano perturbado:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \overset{0}{F} + \overset{1}{\epsilon F} + \overset{2}{\epsilon^2 F} \\ \frac{dy}{dt} &= \overset{0}{G} + \overset{1}{\epsilon G} + \overset{2}{\epsilon^2 G}\end{aligned}\tag{1}$$

siendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ el sistema de variables, ϵ y la variable angular rápida (por ejemplo anomalía verdadera, excéntrica, media, etc.).

De acuerdo con la estructura del método estroboscópico, se introduce la variable rápida y como la nueva variable independiente, con lo que el sistema (1) adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{\overset{0}{F} + \overset{1}{\epsilon F} + \overset{2}{\epsilon^2 F}}{\overset{0}{G} + \overset{1}{\epsilon G} + \overset{2}{\epsilon^2 G}} \\ \frac{dt}{dy} &= \frac{1}{\overset{0}{G} + \overset{1}{\epsilon G} + \overset{2}{\epsilon^2 G}}\end{aligned}\tag{2}$$

La solución de éste vendrá dada por

$$\begin{aligned}x &= \overset{0}{x} + \overset{1}{\epsilon x} + \overset{2}{\epsilon^2 x} \\ t &= \overset{0}{t} + \overset{1}{\epsilon t} + \overset{2}{\epsilon^2 t}\end{aligned}\tag{3}$$

(los superíndices 0,1,2 corresponden a la perturbación de orden 0,1,2).

De acuerdo con las expresiones (3), los segundos miembros de la ecuación (2) pueden ser desarrollados en serie de Taylor. Derivando a continuación (3) e identificando los coeficientes de las potencias del pequeño parámetro ϵ en las ecuaciones (2), se tiene

$$\frac{dx^0}{dy} = \frac{\mathbf{F}^0}{G^0} = \Phi^0(\mathbf{x}^0; y) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dy} &= \frac{1}{(G^0)^2} [\mathbf{F}^1 G^0 + G^0 \sum_1^n \mathbf{F}_k^0 \cdot \mathbf{x}_k^1 - \mathbf{F}^0 G^1 \\ &\quad - \mathbf{F}^0 \cdot \sum_1^n G_k^0 \mathbf{x}_k^1] = \Phi^1(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1; y) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{dy} &= \frac{1}{(G^0)^3} [-\mathbf{F}^{002} G^0 + \mathbf{F}^0 (G^1)^2 - \mathbf{F}^1 G^0 G^1 + \mathbf{F}^2 (G^0)^2 - \\ &\quad - \mathbf{F}^{00} \sum_1^n G_k^1 \mathbf{x}_k^1 - \mathbf{F}^{00} \sum_1^n G_k^0 \mathbf{x}_k^2 + 2\mathbf{F}^0 G^1 \sum_1^n G_k^0 \mathbf{x}_k^1 + \\ &\quad + (G^0)^2 \sum_1^n \mathbf{F}_k^1 \mathbf{x}_k^1 + (G^0)^2 \sum_1^n \mathbf{F}_k^0 \mathbf{x}_k^2 - G^0 G^1 \sum_1^n \mathbf{F}_k^0 \mathbf{x}_k^1 - \\ &\quad - \mathbf{F}^{10} \sum_1^n G_k^0 \mathbf{x}_k^1 - \frac{1}{2} \mathbf{F}^{00} \sum_1^n \sum_1^n G_{kj}^0 \mathbf{x}_k^1 \mathbf{x}_j^1 + \\ &\quad + \frac{1}{2} (G^0)^2 \sum_1^n \sum_1^n \mathbf{F}_{kj}^0 \mathbf{x}_k^1 \mathbf{x}_j^1 + \mathbf{F}^0 (G_k^0 \mathbf{x}_k^1)^2 - \\ &\quad - G^0 (\sum_1^n \mathbf{F}_k^0 \mathbf{x}_k^1) (\sum_1^n G_j^0 \mathbf{x}_j^1) = \Phi^2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2; y) \end{aligned} \quad (6)$$

donde las funciones G^1, \mathbf{F}^i se calculan en \mathbf{x}^0 y las funciones \mathbf{F}_k, G_j , son las derivadas con respecto a las componentes \mathbf{x}_k , y \mathbf{F}_{kj}, G_{kj} las segundas respecto a \mathbf{x}_k y \mathbf{x}_j .

Siguiendo el mismo proceso, el sistema correspondiente al tiempo t viene dado por las expresiones

$$\frac{dt^0}{dy} = \frac{1}{G^0} = \psi^0(\mathbf{x}^0; y) \quad (7)$$

$$\frac{dt^1}{dy} = \frac{1}{(G^0)^2} [G^1 + \sum_1^n G_k^0 \mathbf{x}_k^1] = \psi^1(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1; y) \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dt^2}{dy} = & \frac{1}{(G)^0_3} [- G^0 G^2 - G^0 \sum_1^n G_k^1 x_k^1 - G^0 \sum_1^n G_k^0 x_k^2 - \\
 & - \frac{1}{2} G^0 \sum_1^n \sum_1^n G_{kj}^0 x_k^1 x_j^1 + (G^1)^2 + \\
 & 2G^1 \sum_1^n G_k^0 x_k^1 + (\sum_1^n G_k^0 x_k^1)^2] = \psi^2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2; y)
 \end{aligned} \tag{9}$$

A continuación se aplica el esquema del método estroboscópico para integrar este sistema, teniendo en cuenta que en general, la solución de los sistemas diferenciales (4, 5, 6), no son un conjunto de cuadraturas como sucede con los elementos orbitales clásicos (Roth, 1979) o con las variables de Delaunay como se verá más adelante.

La solución de segundo orden, después de n revoluciones, es de la forma

$$\mathbf{x}_n^2 = \mathbf{x}_n^0 + \Delta \mathbf{x}_n^1 + \Delta \mathbf{x}_n^2 \tag{10}$$

con

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{x}_n^1 &= \varepsilon \int_0^{2\pi} \phi^1(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, y) dy \\
 \Delta \mathbf{x}_n^2 &= \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \phi^2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, y) dy
 \end{aligned}$$

donde el símbolo integral debe entenderse como la solución del sistema diferencial cuando la variable rápida sufre una variación de 2π .

Para más detalles, véase Roth (1979).

3. INTERMEDIARIO RADIAL EN VARIABLES DE HILL.

Aunque el contenido de este epígrafe apareció en Sein-Echaluce et al.(1987), exponemos aquí brevemente la formulación en variables de Hill, con objeto de resaltar el inconveniente más importante que aparece en estas variables, que sin embargo queda eliminado en otro conjunto como el de Delaunay.

Consideremos un satélite moviéndose en un campo gravitatorio simétrico de la forma

$$v = -\frac{\mu}{r} [1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n P_n (\sin \phi)] \quad (11)$$

siendo α el radio ecuatorial, J_n los armónicos zonales, $P_n(\sin \phi)$ el polinomio de Legendre de grado n en $\sin \phi$ y ϕ la declinación del satélite.

Si la función Hamiltoniana la tenemos expresada en variables de Hill ($r, \theta, v, R, \Theta, N$), tras aplicar dos transformaciones canónicas de tipo Lie (ver Cid et al. 1985), se obtiene un nuevo Hamiltoniano, promediado, de un grado de libertad en las variables (r, R), dado por la expresión

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \epsilon \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} s^2 \right) + \\ & + \epsilon^2 \frac{\Theta^2}{2r^4 p} \left[\frac{3s^2 (4s^2 - 3)}{8} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J'_{2n}}{2(n-2)} B_{2n}^0 \right] + \\ & + \epsilon^2 \frac{\Theta^2}{2r^4 p} e^2 \left[\frac{3s^2 (23s^2 - 16)}{32} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J'_{2n}}{2(n-2)} B_{2n}^0 \sum_{j=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2j} \binom{2j}{j} \left(\frac{1}{2} e \right)^{2j-2} \right] \end{aligned}$$

siendo todos los coeficientes que aparecen funciones exclusivas de los momentos (Θ, N), que son constantes, de la variable r y de su momento conjugado R .

Aplicando la teoría expuesta en el apartado anterior, obtenemos para el orden cero

$$\begin{aligned} \frac{dr^0}{d\theta} &= R^0 (r^0)^2 / \Theta \\ \frac{dv^0}{d\theta} &= 0 \\ \frac{dR^0}{d\theta} &= \frac{\Theta^0}{r^0} - \frac{\mu}{\Theta} \end{aligned} \quad (12)$$

La integración de este sistema es muy fácil, toda vez que coincide con el movimiento

no perturbado del problema de dos cuerpos, y por tanto, se conoce la expresión explícita de las variables r y R en función de la variable θ .

Para el primer orden, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dr^1}{d\theta} &= \frac{2R^0 r^0 r^1}{\Theta} + \frac{(r^0)^2 R^1}{\Theta} + \frac{3\mu N^2 r^0 R^0}{2\Theta^5} \\ \frac{dv^1}{d\theta} &= \frac{3\mu N}{2r^0 \Theta^3} \\ \frac{dR^1}{d\theta} &= \frac{\Theta r^1}{(r^0)^2} + \frac{3\mu(2-3s^2)}{4\Theta(r^0)^2} + \frac{3\mu N^2}{2\Theta^5 r^0} - \frac{3\mu N^2}{2\Theta^3(r^0)^2}\end{aligned}\quad (13)$$

En este caso, aparecen tanto r^1 como R^1 mezclados, siendo por tanto necesario el resolver dicho sistema mediante métodos numéricos, con lo que se pierden en gran parte las ventajas inherentes al método estroboscópico. Algo análogo sucede con las ecuaciones de segundo orden. No obstante, parece lógico pensar que una adecuada elección de la variable rápida (una anomalía intermedia) nos pueda solventar la mencionada dificultad. Dicho estudio está en fase de realización.

4. INTERMEDIARIO EN VARIABLES DE DELAUNAY.

Vamos a considerar a continuación el movimiento del satélite descrito anteriormente en variables de Delaunay (l, g, h, L, Θ, N), (donde hemos puesto $\Theta \equiv G$, $N \equiv H$, para evitar confusiones de notación). Tras dos transformaciones de tipo Lie con objeto de eliminar las variables angulares g y h , y utilizando los desarrollos de Hansen para el movimiento elíptico, se obtiene el siguiente intermediario:

$$\begin{aligned}H &= \frac{-\mu^2}{2L^2} + \frac{\epsilon \mu^2}{2\Theta^8} (3N^2 - \Theta^2) (1 + e \cos f)^3 + \\ &+ \epsilon^2 \frac{3\mu^6 (1 + e \cos f)^2}{16\Theta^{10}} [4s^4 - 3s^2 + \frac{e^2}{4}(23s^4 - 16s^2)]\end{aligned}\quad (14)$$

donde la excentricidad e y la anomalía verdadera f son

$$e^2 = 1 - \frac{\Theta^2}{L^2} \quad y \quad f = f(l, \Theta, N)$$

En este caso, consideramos la anomalía media l como la variable angular rápida, y podemos aplicar el método estroboscópico tal como aparece en el párrafo 2, resultando los siguientes sistemas de ecuaciones para los distintos órdenes (0,1,2) correspondientes a las variables g, h y L :

$$\frac{d g^0}{d l} = \frac{d h^0}{d l} = \frac{d L^0}{d l} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d g^1}{d l} = \frac{-3(L^0)^3}{\Theta^8} (1 + e^0 \cos f^0) \left[\frac{(4N^2 - \Theta^2)(1 + e^0 \cos f^0)}{\Theta^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (3N^2 - \Theta^2)(1 + e^0 \cos f^0) \right]_L = \phi_1^1(L^0; l)$$

$$\frac{d h^1}{d l} = \frac{3N(L^0)^3}{2\Theta^8} (1 + e^0 \cos f^0)^3 = \phi_2^1(L^0; l) \quad (16)$$

$$\frac{d L^1}{d l} = \frac{3e^2(L^0)^6}{4\Theta^{11}} (3N^2 - \Theta^2)(1 + e^0 \cos f^0)^4 = \phi_3^1(L^0; l)$$

y para el segundo,

$$\frac{d g^2}{d l} = \frac{1}{(G^0)^2} \left[(F_L^{11} G^0 - G_L^0 F^{11}) L^1 - (F^{11} G^1 - F^{21} G^0) \right]$$

$$\frac{d h^2}{d l} = \frac{1}{(G^0)^2} \left[(F_L^{12} G^0 - G_L^0 F^{12}) L^1 - (F^{12} G^1 - F^{22} G^0) \right] \quad (17)$$

$$\frac{d L^2}{d l} = \frac{1}{(G^0)^2} \left[(F_L^{13} G^0 - G_L^0 F^{13}) L^1 - (F^{13} G^1 - F^{23} G^0) \right]$$

donde las funciones $F^{ij}, G^i, F_{\alpha\beta}^{ij}, G_{\alpha\beta}^i$ están evaluadas en L^0 , y vienen dadas por las expresiones:

$$F^{11} = \frac{-3\mu^2}{\Theta^8} (1 + e \cos f)^2 \left[\frac{4N^2 - \Theta^2}{\Theta} (1 + e \cos f) - \right. \\ \left. - \frac{3N^2 - \Theta^2}{2} (1 + e \cos f) \right]_\Theta$$

$$F^{21} = \frac{3 \mu^6 (1+e \cos f)}{8 \Theta^{10}} \left[-\frac{5}{\Theta} (1+e \cos f) + (1+e \cos f) \Theta \right] \cdot$$

$$\cdot \left[4 s^4 - 3 s^2 + \frac{e^2}{2} (23 s^4 - 16 s^2) \right] +$$

$$+ (1+e \cos f) \left\{ \frac{N^2}{\Theta^3} \left[8 s^2 - 3 + \frac{23}{2} e^2 s^2 - 4 e^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\Theta}{4 L^2} (23 s^4 - 16 s^2) \right\}$$

$$F^{12} = \frac{3 \mu^2 N}{2 \Theta^8} (1+e \cos f)^3$$

$$F^{22} = \frac{-3 \mu^6 N}{8 \Theta^{12}} (1+e \cos f) \left[8s^2 - 3 + \frac{e^2}{2} (23 s^2 - 8) \right]$$

$$F^{13} = \frac{3 \mu^2 e L^3}{4 \Theta^{11}} (3 N^2 - \Theta^2) (1+e \cos f)^4$$

$$F^{23} = \frac{3 \mu^6 e L^3}{8 \Theta^{13}} \sin f (1+e \cos f)^3 \left[8s^2 - 3 + \frac{e^2}{2} (23 s^2 - 8) \right]$$

siendo

$$(1+e \cos f) \Theta = - \frac{2 \Theta}{e L^2} \left[\cos f - \frac{L^2}{\Theta^2} e \sin f (2 \sin f + \frac{2}{2} \sin 2f) \right]$$

$$(1+e \cos f) L = \frac{\Theta^2}{e L^3} \left[\cos f - \frac{L^2}{\Theta^2} e \sin f (2 \sin f + \frac{e}{2} \sin 2f) \right]$$

En esta ocasión, las ecuaciones (17) son cuadraturas, debido a que en cada orden solamente aparecen las soluciones correspondientes a los órdenes anteriores, que previamente son calculadas. Debido a este hecho, se obtiene una gran velocidad de cálculo.

Las ecuaciones correspondientes a la variable temporal t , son:

$$\frac{d t^0}{d l} = \frac{(L^0)^3}{\mu^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d \frac{t^1}{L}}{d \frac{1}{L}} &= \frac{3(L^0)^6}{2 \Theta^8 \mu^2} (3N^2 - \Theta^2) (1 + e^0 \cos f^0) (1 + e \cos f)_{L^1}^0 - \\ &- \frac{3(L^0)^2}{\mu^2} L^1 \\ \frac{d \frac{t^2}{L}}{d \frac{1}{L}} &= \frac{1}{(G^0)^3} \left[-G^0 G^2 - G^0 G_L^1 L^1 - G^0 G_L^0 L^1 - \frac{1}{2} G^0 G_{LL}^0 (L^1)^2 + \right. \\ &\left. + (G^1)^2 + 2 G^1 G_L^0 L^1 + (G_L^0 L^1)^2 \right]\end{aligned}$$

A GRADECIMIENTOS.

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la D.G.A. (Proyecto CB 4/84), CAZAR y Universidad de Zaragoza.

REFERENCIAS.

- Sein-Echaluce, M.L., Abad, A. y Elipe, A. (1987). *IAF Paper 87-339*
 Cid, R, Ferrer, S. y Sein-Echaluce, M.L. (1985): *Celest.Mech.* **38**, 1991-205.
 Janin, G. (1979) *ESA STM-208*
 Roth, E. (1973): *Celest.Mech.* **8**, 245-249.
 Roth, E. (1978): In V.Szebehely (ed) "Dynamics of Planets and Satellites and Theories of their motion", Ed. Reidel, Dordrecht, 181-188
 Roth, E. (1979): *Journal of Applied Math.and Physics (ZAMP)* Vol.30, 315-325.
 Lecohier, G. (1985): *ESOC MAO Working Paper n° 221*

MOVIMIENTO DE UN SOLIDO PESADO EN UN CONJUNTO SUPERABUNDANTE DE VARIABLES

R. CID* Y M.E. SAN SATURIO†

*Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.

†Departamento de Matemática Aplicada a la Técnica. E.T.S.I.I.
Universidad de Valladolid.

In this paper we study the rotational motion of a heavy rigid body, formulate in a set of redundant and complex variables (z_1, z_2, z_3, z_4) and their conjugate momenta (z_1, z_2, z_3, z_4) . These variables are defined by means of the Euler angles (ψ, θ, ϕ) and their conjugate momenta $(p_\psi, p_\theta, p_\phi)$.

In this conditions, explicit expressions for the fundamental equations and first integrals are given. Our study is applied to the case of Lagrange-Poisson, checking the involutory character of the integrals. Besides, a close solution of the problem by means of the Weierstrass elliptic functions is given.

1.- INTRODUCCION.

En recientes trabajos (M.E. San Saturio, 1986; R. Cid y M.E. San Saturio, 1987) los autores demuestran un cierto número de proposiciones que definen las condiciones y propiedades inherentes a transformaciones canónicas que aumentan el número de variables.

De manera más concreta, si se considera una transformación, definida por funciones de clase $C^{(2)}$

$$q_i = q_i(Q) \quad P_\alpha = \sum p_i (\partial q_i / \partial Q_\alpha) \quad (1.1)$$

donde (q, p) es un $2n$ -dimensional espacio $(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ y (Q, P) un $2(n+1)$ -dimensional espacio $(Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}; P_1, P_2, \dots, P_{n+1})$, se demuestra que:

"Un sistema diferencial

$$q_i = \partial H / \partial p_i \quad p_i = -\partial H / \partial q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

con un hamiltoniano $H(q, p, t)$, de clase $C^{(2)}$, puede ser transformado en un nuevo sistema

$$\dot{Q}_\alpha = \partial H^*/\partial P_\alpha \quad \dot{P}_\alpha = -\partial H^*/\partial Q_\alpha \quad (\alpha=1,2,\dots,n+1) \quad (1.3)$$

de hamiltoniano $H^* = H[q(Q), p(Q, P), t]$ por medio de la transformación canónica (1.1)".

Dicha proposición, combinada con otra anterior, demuestra que cada solución $Q(t)$, $P(t)$, del sistema (1.3) determina una solución $q(t)$, $p(t)$, del sistema (1.2).

2.- ECUACIONES QUE DEFINEN EL MOVIMIENTO DE UN SOLIDO RIGIDO.

Recordemos que el movimiento de un sólido rígido, con un punto fijo O , viene perfectamente definido por medio de los tres ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ) , que determinan la posición de un sistema móvil $Ox_1x_2x_3$, rígidamente unido al sólido, con respecto a un sistema fijo $OX_1X_2X_3$.

En tales condiciones, si (I_1, I_2, I_3) son los momentos principales de inercia del sólido, que determinan la orientación del sistema móvil $Ox_1x_2x_3$, los momentos $(p_\psi, p_\theta, p_\phi)$, conjugados de las variables (ψ, θ, ϕ) , quedan definidos por las igualdades

$$\begin{aligned} p_\psi &= I_1 \omega_1 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + I_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta \cos \phi + I_3 \omega_3 \cos \theta \\ p_\theta &= I_1 \omega_1 \cos \phi - I_2 \omega_2 \operatorname{sen} \phi \\ p_\phi &= I_3 \omega_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

siendo

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos \phi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

las componentes de la velocidad angular del sólido en el sistema móvil.

Identificando las variables (ψ, θ, ϕ) con (q_1, q_2, q_3) y los momentos $(p_\psi, p_\theta, p_\phi)$ con (p_1, p_2, p_3) , las ecuaciones diferenciales del movimiento coinciden con (1.2), siendo ahora

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2I_1} \left[\frac{\operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \theta} (p_\psi - p_\phi \cos \theta) + p_\theta \cos \phi \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2I_2} \left[\frac{\cos \phi}{\operatorname{sen} \theta} (p_\psi - p_\phi \cos \theta) - p_\theta \operatorname{sen} \phi \right]^2 + \frac{p_\phi^2}{2I_3} + U \end{aligned} \quad (2.3)$$

En el caso concreto del sólido pesado, el potencial U adopta la forma

$$U = x_1^0 \sin \theta \sin \phi + x_2^0 \sin \theta \cos \phi + x_3^0 \cos \theta \quad (2.4)$$

donde (x_1^0, x_2^0, x_3^0) designan las coordenadas constantes del centro de masas del sólido en el sistema móvil.

3.- EXTENSION CANONICA RELATIVA A UN CONJUNTO SUPERABUNDANTE DE VARIABLES COMPLEJAS.

Consideremos el conjunto de cuatro variables

$$\begin{aligned} z_1 &= \sin \frac{\theta}{2} e^{i\delta} & z_2 &= \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\delta} \\ z_3 &= i \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\sigma} & z_4 &= -i \cos \frac{\theta}{2} e^{i\sigma} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde

$$\sigma = \frac{1}{2}(\psi + \phi) \quad \delta = \frac{1}{2}(\psi - \phi) \quad (3.2)$$

y calculemos sus productos binarios

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} & z_1 z_3 &= \frac{i}{2} \sin \theta e^{-i\phi} & z_2 z_3 &= \frac{i}{2} \sin \theta e^{-i\psi} \\ z_3 z_4 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} & z_2 z_4 &= -\frac{i}{2} \sin \theta e^{i\phi} & z_1 z_4 &= -\frac{i}{2} \sin \theta e^{i\psi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Combinando adecuadamente estos productos, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_3 z_4 &= 1 & -z_1 z_2 + z_3 z_4 &= \cos \theta \\ z_1 z_3 - z_2 z_4 &= i \sin \theta \cos \phi & z_1 z_3 + z_2 z_4 &= \sin \theta \sin \phi \\ z_2 z_3 + z_1 z_4 &= \sin \theta \sin \psi & z_2 z_3 - z_1 z_4 &= i \sin \theta \cos \psi \end{aligned} \quad (3.4)$$

y también

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = -e^{2i\phi} \quad \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \operatorname{tag}^2 \frac{\theta}{2} \quad \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3} = -e^{2i\psi} \quad (3.5)$$

De las fórmulas (3.4) resultan fácilmente las relaciones

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 2 \sqrt{z_1 z_2 z_3 z_4} & \cos \theta &= z_3 z_4 - z_1 z_2 \\ \sin \phi &= \frac{z_2 z_4 + z_1 z_3}{2 \sqrt{z_1 z_2 z_3 z_4}} & \cos \phi &= \frac{i(z_2 z_4 - z_1 z_3)}{2 \sqrt{z_1 z_2 z_3 z_4}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{\sin \phi}{\sin \theta} = \frac{z_2 z_4 + z_1 z_3}{4 z_1 z_2 z_3 z_4} \quad \frac{\cos \phi}{\sin \theta} = \frac{i(z_2 z_4 - z_1 z_3)}{4 z_1 z_2 z_3 z_4}$$

Por otra parte, derivando parcialmente las igualdades (3.5) con respecto a las variables z_i , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z_1} &= -\frac{i}{2z_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z_2} = \frac{i}{2z_2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z_3} = \frac{i}{2z_3}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z_4} = -\frac{i}{2z_4} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z_1} &= \frac{\alpha}{z_1}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z_2} = \frac{\alpha}{z_2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z_3} = -\frac{\alpha}{z_3}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z_4} = -\frac{\alpha}{z_4} \quad (3.7) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z_1} &= \frac{i}{2z_1}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z_2} = -\frac{i}{2z_2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z_3} = \frac{i}{2z_3}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z_4} = -\frac{i}{2z_4} \end{aligned}$$

siendo $\alpha = \sqrt{z_1 z_2 z_3 z_4}$

Entonces, de acuerdo con la definición (1.1) de los momentos $Z_\alpha = P_\alpha$, y los valores (3.7) de las derivadas $\partial q_i / \partial z_\alpha$, tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} z_1 z_1 &= -\frac{i}{2} P_\psi + \alpha P_\theta + \frac{i}{2} P_\phi \\ z_2 z_2 &= \frac{i}{2} P_\psi + \alpha P_\theta - \frac{i}{2} P_\phi \\ z_3 z_3 &= \frac{i}{2} P_\psi - \alpha P_\theta + \frac{i}{2} P_\phi \\ z_4 z_4 &= -\frac{i}{2} P_\psi - \alpha P_\theta - \frac{i}{2} P_\phi \quad (3.8) \end{aligned}$$

o sus inversas

$$\begin{aligned} P_\psi &= \frac{i}{2}(z_1 z_1 - z_2 z_2 - z_3 z_3 + z_4 z_4) \\ P_\theta &= \frac{1}{4\alpha}(z_1 z_1 + z_2 z_2 - z_3 z_3 - z_4 z_4) \\ P_\phi &= -\frac{i}{2}(z_1 z_1 - z_2 z_2 + z_3 z_3 - z_4 z_4) \\ 0 &= z_1 z_1 + z_2 z_2 + z_3 z_3 + z_4 z_4 \quad (3.9) \end{aligned}$$

Observemos que, como consecuencia de esta última igualdad, la expresión de P_θ se puede escribir en la forma

$$P_\theta = \frac{1}{2\sqrt{z_1 z_2 z_3 z_4}} [z_3 z_4 (z_1 z_1 + z_2 z_2) - z_1 z_2 (z_3 z_3 + z_4 z_4)] \quad (3.10)$$

En efecto, poniendo $a = z_1 z_2$, $b = z_3 z_4$, $A = z_1 z_1 + z_2 z_2$, $B = z_3 z_3 + z_4 z_4$, con $A+B=0$, se tiene

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left[\frac{(a+b)}{2}(A-B) \right] = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left[\frac{(a-b)}{2}(A+B) + bA - aB \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{ab}}(bA - aB) \end{aligned}$$

que demuestra (3.10).

Como consecuencia de todas estas igualdades, se obtienen sin mayor dificultad las relaciones

$$\begin{aligned} (p_\psi - p_\phi \cos\theta) \frac{\sin\phi}{\sin\theta} + p_\theta \cos\phi &= \frac{i}{2}(z_4 z_1 - z_3 z_2 - z_2 z_3 + z_1 z_4) \\ (p_\psi - p_\phi \cos\theta) \frac{\cos\phi}{\sin\theta} - p_\theta \sin\phi &= \frac{1}{2}(-z_4 z_1 - z_3 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_4) \end{aligned} \quad (3.11)$$

que utilizaremos en lo que sigue.

4.- ECUACIONES FUNDAMENTALES E INTEGRALES PRIMERAS EN EL MOVIMIENTO DE UN SOLIDO PESADO.

Con objeto de expresar las ecuaciones del movimiento de un sólido pesado, comenzemos introduciendo las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{i}{2}(z_4 z_1 - z_3 z_2 - z_2 z_3 + z_1 z_4) & k_1 &= z_1 z_3 + z_2 z_4 \\ W_2 &= \frac{1}{2}(-z_4 z_1 - z_3 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_4) & k_2 &= i(z_2 z_4 - z_1 z_3) \\ W_3 &= \frac{i}{2}(-z_1 z_1 + z_2 z_2 - z_3 z_3 + z_4 z_4) & k_3 &= z_3 z_4 - z_1 z_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

De acuerdo con esto, el hamiltoniano del problema, dado en (2.3), adopta la forma

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{W_1^2}{I_1} + \frac{W_2^2}{I_2} + \frac{W_3^2}{I_3} \right] + U \quad (4.2)$$

siendo ahora

$$U = x_1^\circ k_1 + x_2^\circ k_2 + x_3^\circ k_3 \quad (4.3)$$

y las ecuaciones diferenciales del movimiento, en el conjunto de variables $(z_1, z_2, z_3, z_4; z_1, z_2, z_3, z_4)$ vendrán dadas por la igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= + \frac{iz_4}{2I_1} W_1 - \frac{z_4}{2I_2} W_2 - \frac{iz_1}{2I_3} W_3 \\ \dot{z}_2 &= - \frac{iz_3}{2I_1} W_1 - \frac{z_3}{2I_2} W_2 + \frac{iz_2}{2I_3} W_3\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= - \frac{iz_2}{2I_1} W_1 + \frac{z_2}{2I_2} W_2 - \frac{iz_3}{2I_3} W_3 \\ \dot{z}_4 &= + \frac{iz_1}{2I_1} W_1 + \frac{z_1}{2I_2} W_2 + \frac{iz_4}{2I_3} W_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= - \frac{iZ_4}{2I_1} W_1 - \frac{Z_4}{2I_2} W_2 + \frac{iZ_1}{2I_3} W_3 - (x_1^o - ix_2^o) z_3 + x_3^o z_2 \\ \dot{Z}_2 &= + \frac{iZ_3}{2I_1} W_1 - \frac{Z_3}{2I_2} W_2 - \frac{iZ_2}{2I_3} W_3 - (x_1^o + ix_2^o) z_4 + x_3^o z_1 \\ \dot{Z}_3 &= + \frac{iZ_2}{2I_1} W_1 + \frac{Z_2}{2I_2} W_2 + \frac{iZ_3}{2I_3} W_3 - (x_1^o - ix_2^o) z_1 - x_3^o z_4 \\ \dot{Z}_4 &= - \frac{iZ_1}{2I_1} W_1 + \frac{Z_1}{2I_2} W_2 - \frac{iZ_4}{2I_3} W_3 - (x_1^o + ix_2^o) z_2 - x_3^o z_3\end{aligned}\tag{4.5}$$

Es inmediato comprobar que, en todos los casos, dichas ecuaciones tienen las siguientes integrales primeras

$$\begin{aligned}\phi_1 &= H(z, Z) = h \\ \phi_2 &= z_1 z_2 + z_3 z_4 = 1 \\ \phi_3 &= \frac{1}{2}(z_1 Z_1 - z_2 Z_2 - z_3 Z_3 + z_4 Z_4) = p_\psi = c\end{aligned}\tag{4.6}$$

siendo h y c dos constantes reales de integración.

La primera es evidente por ser H independiente de t . En cuanto a la segunda y tercera basta comprobar la anulación de las expresiones

$$\begin{aligned}z_1 \dot{z}_2 + \dot{z}_1 z_2 + z_3 \dot{z}_4 + \dot{z}_3 z_4 \\ z_1 \dot{z}_1 + \dot{z}_1 z_1 - z_2 \dot{z}_2 - \dot{z}_2 z_2 - z_3 \dot{z}_3 - \dot{z}_3 z_3 + z_4 \dot{z}_4 + \dot{z}_4 z_4\end{aligned}$$

una vez sustituidos los valores de \dot{z}_α , \dot{z}_α , por medio de las ecuaciones (4.4) y (4.5).

De igual modo se comprueba que dichas integrales están en involución, esto es que los paréntesis de Poisson $\{\phi_i, \phi_j\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) se anulan identicamente.

En efecto, teniendo en cuenta las ecuaciones de Hamilton
 $dz_\alpha/dt = \partial H/\partial Z_\alpha$, $dz_\alpha/dt = -\partial H/\partial z_\alpha$, resulta

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{H, \phi_2\} = -d\phi_2/dt = 0$$

$$\{\phi_1, \phi_3\} = \{H, \phi_3\} = -d\phi_3/dt = 0 \quad (4.7)$$

$$\{\phi_2, \phi_3\} = \left[(\partial\phi_2/\partial z_\alpha) \cdot (\partial\phi_3/\partial Z_\alpha) \right] = \frac{i}{2}(z_1z_2 - z_1z_2 - z_3z_4 + z_3z_4) = 0$$

Recordemos (Whittaker, 1965) que "si n integrales distintas $\phi_k(z, Z, t) = c_k$ de un sistema

$$dz_k/dt = \partial H/\partial Z_k \quad dZ_k/dt = -\partial H/\partial z_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (4.8)$$

están en involución y despejamos los momentos en la forma

$Z_k = z_k(z, c, t)$, la expresión $\sum z_k dz_k - Hdt$ es la diferencial exacta de una cierta función $f(z, c, t)$ y las restantes integrales del sistema (4.8) vienen dadas por ecuaciones del tipo $\partial f/\partial c_k = b_k = \text{const.}$ "

Dicho de otra forma, el conocimiento de n integrales en involución de un sistema canónico de n grados de libertad, determina su total integración.

Según esto, para la total integración del problema de movimiento de un sólido pesado, será necesario obtener una cuarta integral que se encuentre en involución con las tres anteriores dadas en (4.6).

Como se sabe, la existencia de una nueva integral del problema sólamente es conocida en determinados problemas, cuya paternidad ha sido asignada a los autores Euler-Poinsot, Lagrange-Poisson y S. Kowalevsky, con independencia de la trivial solución del caso esférico ($I_1 = I_2 = I_3$).

De hecho, S. Kowalevsky (1889) y A.M. Lyapunov (1894) han demostrado que si las constantes $I_1, I_2, I_3, x_1^0, x_2^0, x_3^0$, son reales y los momentos I_1, I_2, I_3 , distintos de cero, los cuatro casos clásicos son los únicos para los cuales los parámetros (2.2), $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$, y los (4.1), $k_1(t), k_2(t), k_3(t)$, con valores arbitrarios $\omega_i(0), k_i(0)$, son funciones uniformes del tiempo.

Observemos, sin embargo, que imponiendo restricciones sobre los valores de las constantes h , c , I_1 , I_2 , I_3 , x_1^o , x_2^o , x_3^o , pueden existir soluciones particulares del problema, que son citadas en la literatura (Leimanis, 1965).

5.- OTRA FORMULACION DE LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES.

Derivando con respecto al tiempo t las igualdades (4.1) y sustituyendo las expresiones de las derivadas \dot{z}_α , \ddot{z}_α , según (4.4) y (4.5), se llega fácilmente a las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2 w_3 \left[\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right] - x_2^o k_3 + x_3^o k_2 \\ \dot{w}_2 &= w_1 w_3 \left[\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right] + x_1^o k_3 - x_3^o k_1\end{aligned}\quad (5.1)$$

$$\dot{w}_3 = w_1 w_2 \left[\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right] - x_1^o k_2 + x_2^o k_1$$

$$\dot{k}_1 = - \frac{w_2}{I_2} k_3 + \frac{w_3}{I_3} k_2$$

$$\dot{k}_2 = \frac{w_1}{I_1} k_3 - \frac{w_3}{I_3} k_1 \quad (5.2)$$

$$\dot{k}_3 = - \frac{w_1}{I_1} k_2 + \frac{w_2}{I_2} k_1$$

que son semejantes a las de Euler y Poisson, aunque escritas en el sistema de variables (z, \dot{z}) .

El sistema diferencial formado por las ecuaciones (5.1) y (5.2), tiene las integrales primeras (4.6) y satisface, además, a la relación de ligadura

$$z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + z_3 Z_3 + z_4 Z_4 = 0 \quad (5.3)$$

Observemos que, con arreglo a este esquema de cálculo, la integral Φ_3 puede escribirse en la forma

$$\Phi_3 = w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 = c \quad (5.4)$$

según se desprende del cálculo efectuado con las expresiones de las funciones w_1 , w_2 , w_3 , k_1 , k_2 , k_3 , dadas en (4.1), del mismo modo que Φ_2 es equivalente a la integral

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1 \quad (5.5)$$

6.- RESOLUCION DEL PROBLEMA DE MOVIMIENTO DE UN SOLIDO PESADO
EN EL CASO DE LAGRANGE-POISSON.

Las condiciones que definen el problema de Lagrange-Poisson, son las siguientes

$$I_1 = I_2 , \quad x_1^o = x_2^o = 0 , \quad x_3^o > 0 \quad (6.1)$$

Por tanto, si hacemos

$$I_{13} = \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \quad (6.2)$$

las ecuaciones (5.1) y (5.2) se reducen, quedando

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= I_{13} W_2 W_3 + x_3^o k_2 & \dot{k}_1 &= -\frac{W_2}{I_1} k_3 + \frac{W_3}{I_3} k_2 \\ \dot{W}_2 &= -I_{13} W_1 W_3 - x_3^o k_1 & \dot{k}_2 &= \frac{W_1}{I_1} k_3 - \frac{W_3}{I_3} k_1 \\ \dot{W}_3 &= 0 & \dot{k}_3 &= \frac{1}{I_1} (-W_1 k_2 + W_2 k_1) \end{aligned} \quad (6.3)$$

La anulación de la derivada \dot{W}_3 , determina una cuarta integral $W_3 = p_\phi = c_o$, siendo c_o una constante real, por tanto, si se introducen las notaciones

$$c_1 = 2I_1 x_3^o > 0 \quad h_1 = 2I_1 \left[h - \frac{c_o^2}{2I_3} \right] \quad (6.4)$$

las integrales del problema se pueden escribir

$$\begin{aligned} W_1^2 + W_2^2 &= h_1 - c_1 k_3 \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 &= 1 \\ W_1 k_1 + W_2 k_2 &= c - c_o k_3 \\ W_3 &= c_o \end{aligned} \quad (6.5)$$

De acuerdo con esto, si multiplicamos la primera integral por $1 - k_3^2 = k_1^2 + k_2^2$ y elevamos al cuadrado la tercera, resultan las siguientes relaciones

$$W_1^2 k_1^2 + W_2^2 k_2^2 + W_2^2 k_1^2 + W_1^2 k_2^2 = (h_1 - c_1 k_3)(1 - k_3^2) \quad (6.6)$$

$$W_1^2 k_1^2 + W_2^2 k_2^2 + 2W_1 W_2 k_1 k_2 = (c - c_o k_3)^2 \quad (6.7)$$

a las que podemos añadir la última ecuación (6.3) elevada al cuadrado, esto es

$$W_1^2 k_2^2 + W_2^2 k_1^2 - 2W_1 W_2 k_1 k_2 = I_1^2 k_3^2 \quad (6.8)$$

Sumando (6.7) y (6.8) y restando (6.6), se obtiene

$$I_1^2 k_3^2 = -(c - c_0 k_3)^2 + (h_1 - c_1 k_3)(1 - k_3^2)$$

o bien

$$\frac{I_1^2}{c_1} \dot{k}_3^2 = k_3^3 - f_1 k_3^2 + f_2 k_3 + f_3 \quad (6.9)$$

siendo f_1 , f_2 , f_3 , las constantes

$$f_1 = \frac{c_0 + h_1}{c_1}, \quad f_2 = \frac{2c_0 c}{c_1} - 1, \quad f_3 = \frac{h_1 - c^2}{c_1} \quad (6.10)$$

Introduciendo las notaciones

$$k_3(t) = k(t) + \frac{f_1}{3} \quad a = \sqrt{x_3^0 / 2I_1} \quad (6.11)$$

y multiplicando por 4 la ecuación diferencial (6.9), resulta después de extraer la raíz cuadrada

$$adt = \frac{dk}{\sqrt{4k^3 - g_2 k - g_3}} = \frac{dk}{\sqrt{P(k)}} \quad (6.12)$$

siendo ahora

$$g_2 = 4 \left[\frac{f_1^2}{3} - f_2 \right] \quad g_3 = 4 \left[-f_3 - \frac{f_1 f_2}{3} + \frac{2f_1^2}{27} \right] \quad (6.13)$$

Integrando (6.12) en el intervalo (t_0, t) al que corresponderán los valores (k_0, k) , tendremos

$$a(t-t_0) = \int_{k_0}^k \frac{dk}{\sqrt{P(k)}} = \mathcal{J}^{-1}(k_0) - \mathcal{J}^{-1}(k) \quad (6.14)$$

en cuya igualdad solamente se ha considerado el signo (+) por suponer que $k(t)$ crece con t y donde $\mathcal{J}(x)$ designa la función de Weierstrass (Schwarz H.A., Weierstrass K., 1893) que figura tabulada en Proc. Roy. Artillery Inst., v 17, pp. 181-216, y que está definida por la serie

$$(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{g_2 x^2}{20} + \frac{g_3 x^4}{28} + \frac{g_2^2 x^6}{1200} + \frac{3g_2 g_3 x^8}{6160} + \dots \quad (6.15)$$

Finalmente, poniendo

$$u = a \left[t - t_0 - \varphi^{-1}(k_0) \right] \quad (6.16)$$

se obtiene

$$k_3(t) = k(t) + \frac{f_1}{3} = \varphi(u) + \frac{f_1}{3} \quad (6.17)$$

El conocimiento de la función

$$k_3(t) = \cos \theta(t) \quad (6.18)$$

no sólo nos proporciona el valor de $\theta(t)$ en su verdadero cuadrante, puesto que $0 < \theta < \pi$, sino que nos permite calcular en todo instante los productos $z_1 z_2$, $z_3 z_4$, cuyo carácter real y positivo es evidente según las dos primeras fórmulas (3.3), teniéndose por tanto

$$z_1 z_2 = \frac{1}{2}(1 - k_3) \quad z_3 z_4 = \frac{1}{2}(1 + k_3) \quad (6.19)$$

Para concluir el cálculo de las funciones $\psi(t)$, $\phi(t)$, podemos introducir las funciones

$$\mu = \operatorname{Log} \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 2i\phi + \operatorname{Log}(-1) = 2i(\phi + \frac{\pi}{2} + n\pi) \quad (6.20)$$

$$\nu = \operatorname{Log} \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3} = 2i\psi + \operatorname{Log}(-1) = 2i(\psi + \frac{\pi}{2} + n\pi)$$

siendo n un número entero y designando por Log el logaritmo neperiano.

Derivando (6.20) con respecto a t , tendremos

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= -\frac{\dot{z}_1}{z_1} + \frac{\dot{z}_2}{z_2} - \frac{\dot{z}_3}{z_3} + \frac{\dot{z}_4}{z_4} = -\frac{i(W_1 k_1 + W_2 k_2) k_3}{2I_1 z_1 z_2 z_3 z_4} + \frac{2iW_3}{I_3} \\ \dot{\nu} &= \frac{\dot{z}_1}{z_1} - \frac{\dot{z}_2}{z_2} - \frac{\dot{z}_3}{z_3} + \frac{\dot{z}_4}{z_4} = \frac{i(W_1 k_1 + W_2 k_2)}{2I_1 z_1 z_2 z_3 z_4} \end{aligned} \quad (6.21)$$

de donde se deducen las expresiones de $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$, sin más que igualar las fórmulas (6.21) con las derivadas de las (6.20). Se obtienen así las igualdades

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{c}{I_3} - \frac{(c - c_0 k_3) k_3}{I_1(1-k_3^2)} = c_0 I_{13} + \frac{b}{1-k_3} + \frac{b'}{1+k_3} \\ \dot{\psi} &= \frac{c - c_0 k_3}{I_1(1-k_3)} = -\frac{b}{1-k_3} + \frac{b'}{1+k_3}\end{aligned}\quad (6.22)$$

donde b y b' denotan las constantes

$$b = \frac{c_0 - c}{2I_1} \quad b' = \frac{c_0 + c}{2I_1} \quad (6.23)$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta la igualdad (6.12) y definimos las integrales

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_{k_0}^k \frac{dk}{\sqrt{P(k)}} \\ J_3 &= \int_{k_0}^k \frac{dk}{(k_0(k-\beta))\sqrt{P(k)}} \\ J'_3 &= \int_{k_0}^k \frac{dk}{(k_0(k-\beta'))\sqrt{P(k)}}\end{aligned}\quad (6.24)$$

siendo β y β' las constantes

$$\beta = 1 - \frac{f_1}{3} \quad \beta' = -1 - \frac{f_1}{3} \quad (6.25)$$

tendremos

$$\begin{aligned}\phi - \phi_0 &= \frac{c_0 I_{13}}{a} J_1 - \frac{b}{a} J_3 + \frac{b'}{a} J'_3 \\ \psi - \psi_0 &= \frac{b}{a} J_3 + \frac{b'}{a} J'_3\end{aligned}\quad (6.26)$$

Así pues, el cálculo de los ángulos de Euler $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$, viene dado por medio de integrales elípticas de Weierstrass, de primera especie (J_1) y de tercera especie (J_3 , J'_3), quedando el problema completamente resuelto.

BIBLIOGRAFIA.

Cid, R. y San Saturio, M.E. (1987). Celest. Mech. (aceptado para publicación).

Euler, L. (1758). Mem. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres de Berlin, 14, 1765, 154-193 y (1760), 16, 1767, 176-227.

Kowalevsky, S.V. (1889). Acta Math. 12, 177-232 y (1890), 14, 81-93; (1890). Acad. Sci. Inst. Francia. 31, 1-62.

Lagrange, J.L. (1788). Mécanique Analytique. Paris: Veuve Desaint y (1889). Paris: Gauthier-Villars.

Leimanis, E. (1965). The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. New York.

Poinsot, L. (1834). Publicado de nuevo en J. Math. Pures Appl. (1), 16, 289-336 (1851).

Poisson, S.D. (1813). J. Ecole Polyt. 16, 247-262, y Traité de Mécanique. Paris: Bachelier (1811).

San Saturio, M.E. (1986). Fac. Cienc. Univ. Zaragoza. Tesis doct.

Tisserand, F. (1891). Traité de Mécanique Celeste. Paris: Gauthier-Villars (vol. II).

DATOS DE DISPERSION CONTAMINADOS POR RUIDO Y ATENUACION ANELASTICA

J. BADAL*, V. CORCHETE* Y F. SERÓN⁺

*Departamento de Física Teórica (Geofísica). Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA.

+Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Matemáticas.
Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA.

A study of the behaviour of the specific disipation coefficient of an anelastic medium is carried out from the analysis of synthetic seismograms corresponding to dispersed seismic waves contaminated by random noise. The analysis is made by means of the frequency-domain Wiener filtering by using a modified Tukey window. At any case, the phase velocity is less sensitive than group velocity to the noise. The attenuation coefficient and the quality factor of the medium are parameters which always show a large instability versus noise, this negative effect being very obvious for short periods.

1. INTRODUCCION

La determinación de los rasgos estructurales de la litosfera y el manto superior, de las propiedades anelásticas de la tierra y del mecanismo de la fuente sísmica, pasa por el cálculo de magnitudes importantes, en función del periodo de las ondas sísmicas dispersadas, tales como el tiempo de llegada de grupo, el ángulo de fase y la amplitud. Este cálculo puede llevarse a cabo usando métodos de una sola estación, o bien métodos de dos estaciones. Con las reservas debidas, dentro del marco de los primeros, el análisis de ventana móvil (Landisman et al., 1969) o la técnica del filtro múltiple (Dziewonski et al., 1969) se pueden utilizar para el cálculo de velocidades de grupo y velocidades de fase. La estructura Q de la corteza se puede deducir a partir de las amplitudes de las ondas superficiales (Cheng y Mitchell, 1981). Pero estos métodos requieren el conocimiento previo del mecanismo de la fuente sísmica o la suposición de que sus efectos son lo suficientemente pequeños como para ser ignorados.

Los métodos de dos estaciones no precisan de esta informa-

ción, pero requieren, en cambio, dos estaciones sísmicas alineadas con el epicentro sísmico sobre un mismo círculo máximo. Dos estaciones se pueden usar para determinar el coeficiente de atenuación entre estaciones.

Una deconvolución por mínimos cuadrados o deconvolución Wiener (Wiener, 1949; Treitel y Robinson, 1966; Peacock y Treitel, 1969) ha sido utilizada por Taylor y Toksöz (1982) sobre ondas superficiales para obtener la respuesta impulso del medio entre estaciones. Recientemente, Hwang y Mitchell (1986) han llevado a cabo un análisis de ondas superficiales mediante una nueva técnica que combina el filtrado Wiener en el dominio frecuencia con las técnicas de mejora de la relación señal/ruido, como son las que sirven para identificar y separar los distintos trenes de ondas que componen la señal, es decir, el filtrado en tiempo variable (Cara, 1973) o el filtrado acoplado en fase (Herrin y Goforth, 1977; Goforth y Herrin, 1979). Este método da excelentes resultados en cuanto a la determinación de velocidades de fase entre estaciones, velocidades de grupo y coeficientes de atenuación. En realidad, es una réplica del método utilizado por Taylor y Toksöz (1982), quienes hacen uso del filtrado Wiener en el dominio tiempo.

Cierto que la deconvolución Wiener no es capaz de remover con eficiencia interferencias modales, cuando los modos superiores se sobreponen al modo fundamental en las funciones de correlación. Precisamente, para paliar este efecto, se recurre al filtrado en tiempo variable o al uso de filtros acoplados en fase, para aislar un modo particular en cada una de las dos estaciones. Pero el filtrado Wiener en el dominio frecuencia permite lograr una mayor exactitud y estabilidad de los resultados al analizar datos contaminados por ruido.

En este artículo, nosotros empleamos esta técnica para estudiar el comportamiento del coeficiente de disipación específica de un medio anelástico a partir del análisis de sismogramas sintéticos correspondientes a ondas sísmicas superficiales contaminadas por ruido aleatorio.

2. METODO

El filtrado Wiener en el dominio frecuencia se basa en el cálculo de la función de correlación de los sismogramas registrados en un par de estaciones y en el cálculo de la función de autocorrelación de la señal registrada en la estación a la que primero llega la energía sísmica. Ambas funciones se deben ventanear por medio de sendas ventanas trapezoidales de distintas longitudes. Estas longitudes se optimizan visualmente para conseguir la mayor reducción de ruido posible. Luego, las dos funciones de correlación ventaneadas se llevan al dominio frecuencia por medio de la transformada de Fourier y así se obtienen los correspondientes espectros suavizados. El filtrado considera la función de Green en el dominio frecuencia, $H(f)$, que es justamente el cociente entre el espectro suavizado de la función de correlación $\bar{G}(f)$ y el espectro suavizado de la función de autocorrelación $\bar{R}(f)$:

$$H(f) = \frac{\bar{G}(f)}{\bar{R}(f)}$$

Las velocidades de grupo, $U(f)$, entre estaciones se calculan aplicando la MFT a la función de Green. Las velocidades de fase, $c(f)$, se calculan a partir del espectro de fase de la función de transferencia usando la fórmula

$$c(f) = \frac{f \Delta}{f(t_{02} - t_{01}) + (\phi(f) \pm N)}$$

donde Δ es la distancia en km entre estaciones, t_{01} y t_{02} los tiempos origen de los sismogramas de partida, $\phi(f)$ la fase de la función de Green en ciclos y N un número entero a determinar.

Los coeficientes de atenuación $\gamma(f)$ característicos del medio entre estaciones se calculan de acuerdo con la fórmula

$$\gamma(f) = - \frac{\ln(|H(f)|\sqrt{\sin \Delta_2 / \sin \Delta_1})}{\Delta}$$

donde Δ_1 y Δ_2 son las distancias epicentrales de las estaciones 1 y 2, respectivamente.

De acuerdo con Hwang y Mitchell (1986), el filtrado Wiener en el dominio frecuencia es más efectivo que el filtrado Wiener en el dominio tiempo, porque hace uso de una longitud de ventana más pequeña, lo cual produce una función de Green entre estaciones más suavizada. Esto conduce a una mayor exactitud y estabilidad de los resultados al analizar datos contaminados por ruido.

La optimización del filtrado Wiener en el dominio frecuencia se consigue usando una ventana trapezoidal para ventanear la función de correlación de las señales registradas en las dos estaciones y otra ventana similar de longitud menor para ventanear la función de autocorrelación de la señal registrada en la primera estación. La ventaja de este método sobre la técnica de la razón espectral es precisamente el ventaneo selectivo que deja al ruido fuera de la ventana.

3. SISMOGRAMAS SINTETICOS Y PRIMEROS RESULTADOS

La generación de un sismograma sintético pasa por disponer de un espectro de fase y de un espectro de amplitud determinados. Así, mediante la transformada de Fourier inversa, es posible construir una señal en el dominio tiempo. El espectro de fase se puede calcular a partir de una curva de dispersión dada, por integración de los tiempos de grupo correspondientes. En cuanto al espectro de amplitud, debe seleccionarse un espectro obtenido a partir de un sismograma real, convenientemente suavizado, para así reproducir un caso de interés. La figura 5 muestra la curva de velocidades de grupo que nosotros hemos utilizado. Como espectro de amplitud suavizado hemos considerado el representado en la figura 1. Con estos datos espetrales y de dispersión, el resultado obtenido es un sismograma sintético (no contaminado) como el representado en la figura 2.

A partir de aquí, la generación de sismogramas Rayleigh sintéticos réplicas de los que se registrarían en dos estaciones sísmicas situadas sobre el mismo círculo máximo que pasa por el epicentro, a distancias epicentrales una doble que la otra, no es difícil. La figura 3 muestra sismogramas Rayleigh sintéticos, a distancias de 733 y 1466 km de la fuente sísmica, correspondientes al

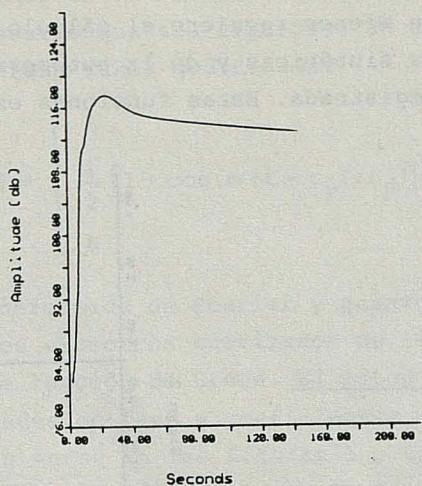


Figura 1. Espectro de amplitud suavizado correspondiente a una onda Rayleigh observada, considerado para generar un sismograma sintético.

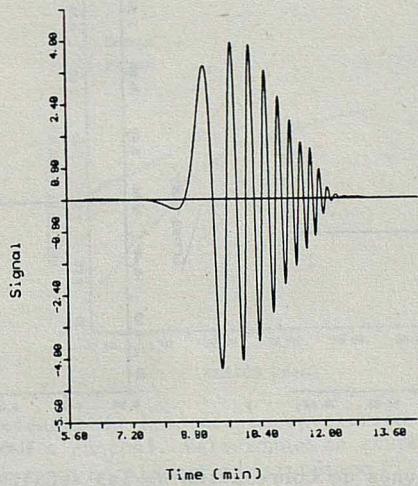


Figura 2. Ejemplo de sismograma sintético correspondiente a una onda sísmica dispersada.

paso de una misma onda Rayleigh por dos estaciones sísmicas siguiendo en su propagación un arco de círculo máximo.

La deconvolución Wiener requiere el cálculo de la correlación de ambas señales sintéticas y de la autocorrelación de la señal primeramente registrada. Estas funciones están representadas en la figura 4.

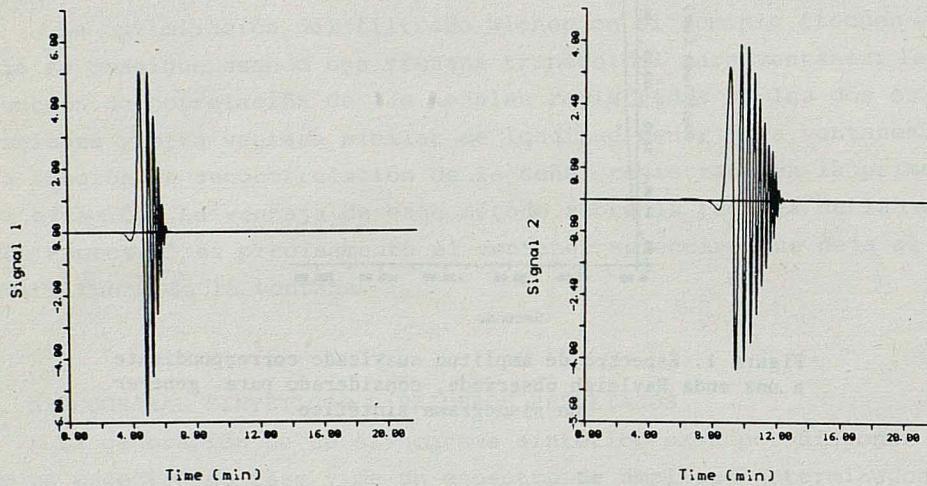


Figura 3. Sismogramas Rayleigh sintéticos generados a partir de datos de dispersión y espectrales reales, a distancias de 733 y 1466 km de la fuente sísmica.

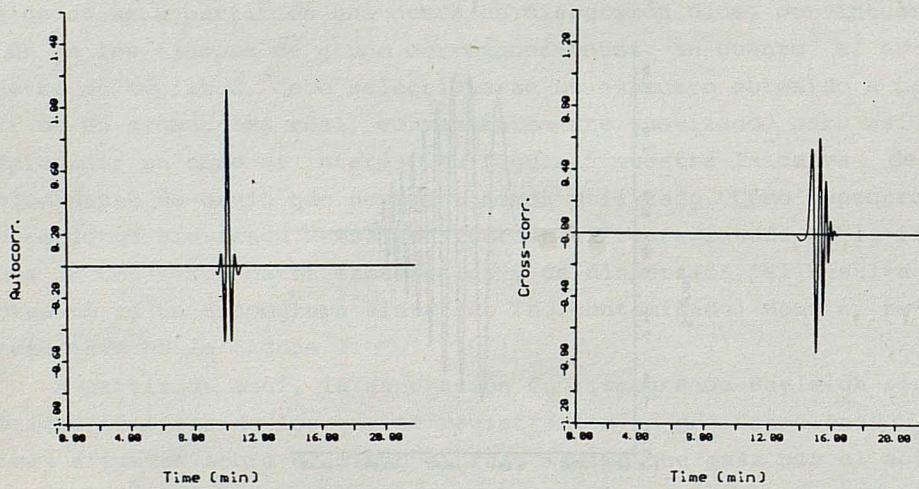


Figura 4. Funciones de correlación de las señales sintéticas representadas en la fig. 3.

Como estamos manejando señales no contaminadas por ruido, el ventaneo involucrado en el filtrado Wiener no produce ninguna mejora y no es necesario que sea riguroso. En cualquier caso se ha utilizado una ventana Tukey modificada:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq t_0 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos(\pi(t - t_0)/t_p) \right] & , t_0 \leq |t| \leq t_0 + t_p \\ 0 & , |t| \geq t_0 + t_p \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Fourier y pasando al dominio frecuencia, obtenemos los espectros suavizados de las funciones anteriores y por ende la función de Green. El método propuesto permite calcular velocidades de fase y coeficientes de atenuación. Estos resultados pueden verse en las figuras 5 y 6, respectivamente. El factor de calidad Q del medio puede calcularse mediante la fórmula

$$Q(T) = \frac{\pi}{\gamma(T) U(T) T}$$

donde $U(T)$ es la velocidad de grupo para el periodo T , que es un dato inicial. El resultado puede verse en la figura 7.

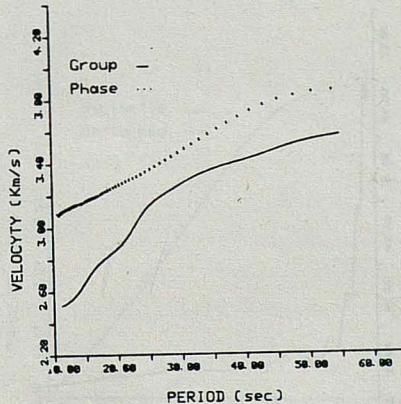


Figura 5. Velocidades de fase por deconvolución Wiener en el dominio frecuencia (línea a puntos). Velocidades de grupo Rayleigh utilizadas para generar un sismograma sintético (línea continua).

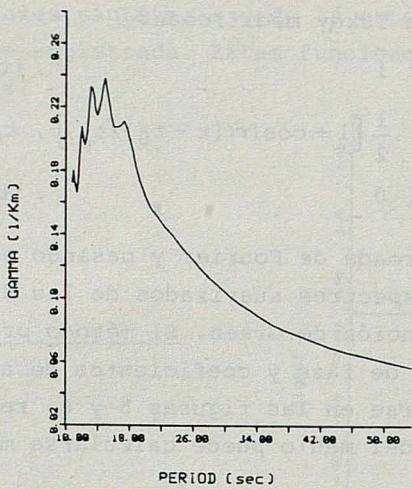


Figura 6. Coeficientes de atenuación ($\times 10^{-2}$) calculados por medio del filtrado Wiener en el dominio frecuencia.

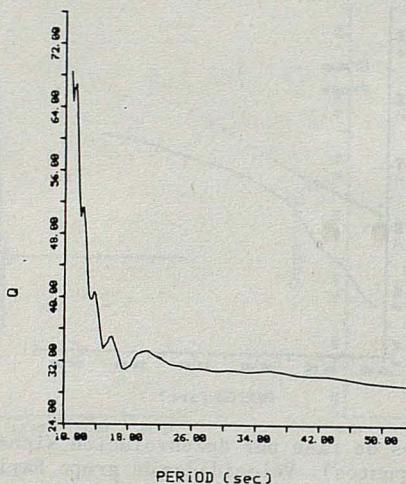


Figura 7. Factor de calidad (sin ruido).

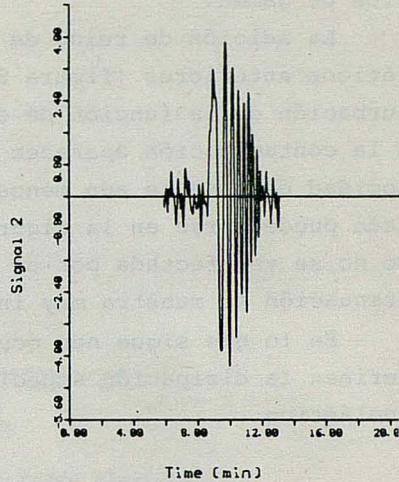
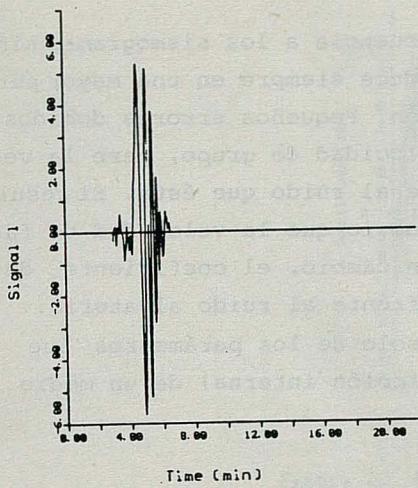


Figura 8. Sismogramas Rayleigh sintéticos contaminados por ruido de alta frecuencia.

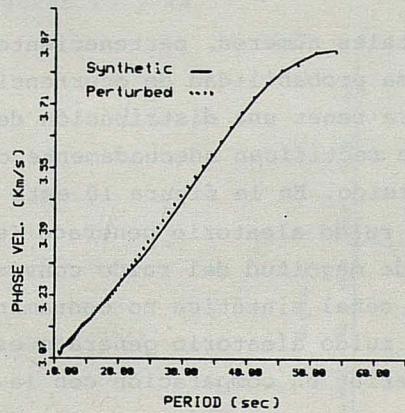


Figura 9. Comparación de velocidades de fase obtenidas mediante filtrado Wiener a partir de datos Sintéticos sin ruido (línea continua) y datos sintéticos con ruido (línea a puntos).

El hecho de que el coeficiente de atenuación y el factor de calidad de un medio exhiban siempre una mayor dispersión que la velocidad de fase es debido al logaritmo que aparece en la expresión de gamma.

La adición de ruido de alta frecuencia a los sismogramas sintéticos anteriores (figura 8) se traduce siempre en una mayor perturbación de la función de correlación. Pequeños errores debidos a la contaminación aparecen en la velocidad de grupo, pero la velocidad de fase es aun menos sensible al ruido que ésta. El resultado puede verse en la figura 9. Es obvio que la velocidad de fase no se ve afectada por el ruido. En cambio, el coeficiente de atenuación se muestra muy inestable frente al ruido aleatorio.

En lo que sigue nos ocuparemos solo de los parámetros que definen la disipación específica (fricción interna) de un medio anelástico.

4. DATOS CONTAMINADOS POR RUIDO ALEATORIO Y RESULTADOS

Se genera ruido mediante una distribución de números aleatorios que obedece a la función de probabilidad

$$P(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Esto significa que tales números, pertenecientes al intervalo (0,1), tienen todos la misma probabilidad de ocurrencia. A estos números se les resta 0.5 para tener una distribución de media cero. Después, los valores se rectifican adecuadamente con el fin de controlar el nivel de ruido. En la figura 10 está dibujado el espectro de amplitud del ruido aleatorio generado (en db). Para tener una idea del orden de magnitud del ruido conviene comparar su espectro con el de la señal sintética no contaminada (figura 1). Aproximadamente, el ruido aleatorio generado es más de dos órdenes de magnitud inferior en comparación con la señal.

La figura 11 muestra sismogramas Rayleigh sintéticos contaminados obtenidos por la adición de ruido aleatorio a los anteriores. Las funciones de correlación requeridas por el método pueden

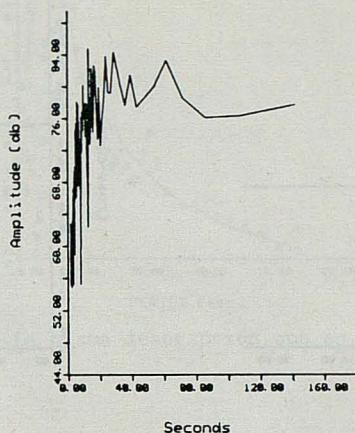


Figura 10. Espectro de ruido aleatorio.

verse en la figura 12. Los resultados correspondientes al coeficiente de atenuación y al factor de calidad, tras el filtrado Wiener en el dominio frecuencia, son los que aparecen, respectivamente, en las figuras 13 y 14.

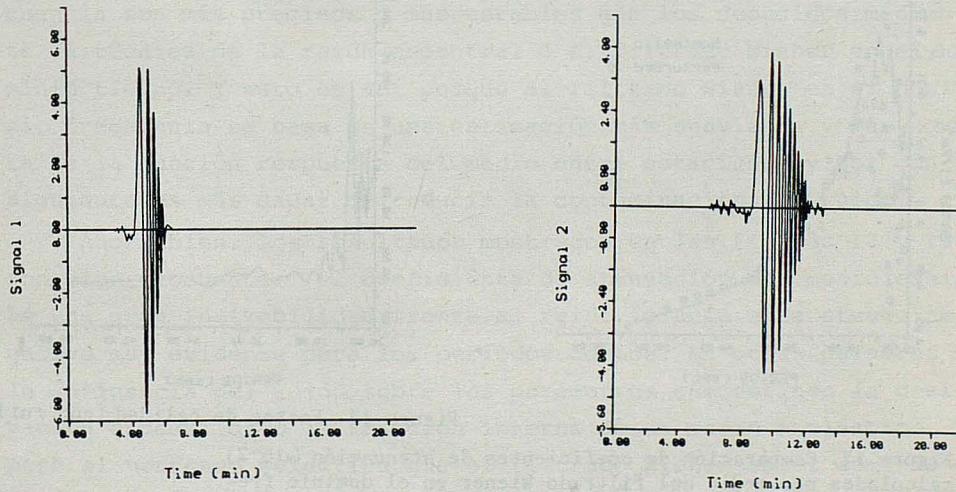


Figura 11. Sismogramas sintéticos perturbados por la adición de ruido aleatorio.

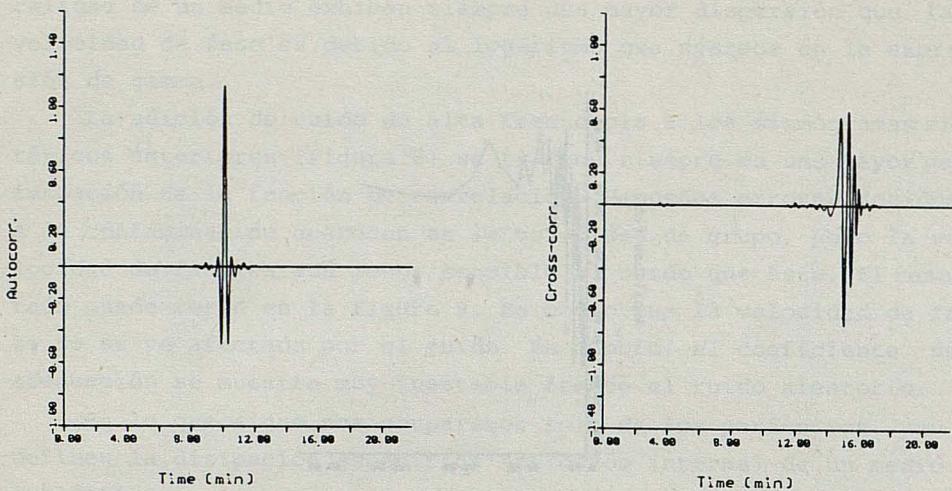


Figura 12. Funciones de correlación de la señales sintéticas representadas en la fig. 11.

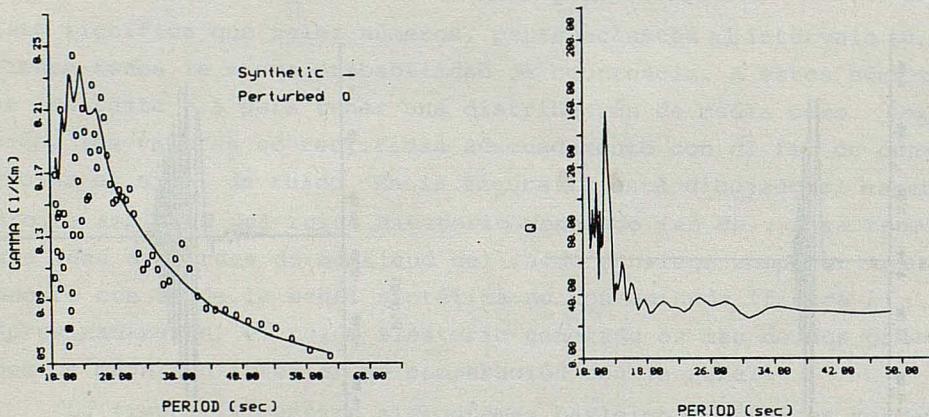


Figura 13. Comparación de coeficientes de atenuación ($\times 10^{-2}$) calculados por medio del filtrado Wiener en el dominio frecuencia a partir de datos sintéticos sin ruido (línea continua) y datos sintéticos con ruido (círculos).

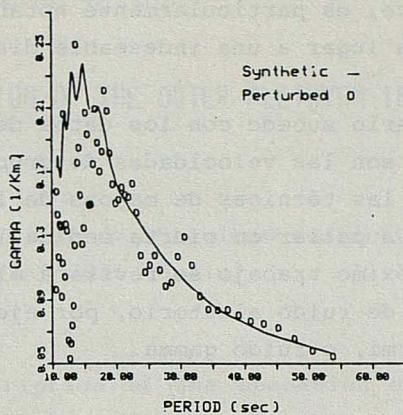


Figura 15. La misma descripción que en la fig. 13.

Con mayor nivel de ruido se obtienen resultados similares. La figura 15 es un fiel exponente de lo conseguido en este caso.

5. COMENTARIOS

De acuerdo con Hwang y Mitchell (1986), los coeficientes de atenuación determinados por el filtrado Wiener en el dominio frecuencia son más precisos y más estables que los deducidos mediante la técnica de la razón espectral o el filtrado Wiener en el dominio tiempo. Y esto es así porque el filtrado Wiener en el dominio frecuencia se basa en una estimación más suavizada y más exacta de la función respuesta del medio entre estaciones y por consiguiente es más capaz de reducir la contaminación por ruido.

Ahora bien, los resultados mostrados en las figuras 13 y 15 son bien elocuentes: el coeficiente de atenuación del medio exhibe una gran inestabilidad frente al ruido, siendo este efecto negativo muy evidente para los períodos cortos. En otras palabras: la influencia del ruido sobre los parámetros que definen la disipación específica o la fricción interna de un medio anelástico, pese al ventaneo selectivo que el filtrado Wiener en el dominio

frecuencia introduce, es particularmente notable para las frecuencias más altas y da lugar a una indeseable dispersión de la información.

Todo lo contrario sucede con los datos de dispersión propiamente dichos, como son las velocidades de grupo y las velocidades de fase. Sin duda, las técnicas de mejora de la relación señal/ruido contribuirán a paliar en cierta medida la inestabilidad de γ o de Q. En un próximo trabajo se revisará el problema considerando varios tipos de ruido aleatorio, por ejemplo, ruido gaussiano, ruido de Fermi, o ruido gamma.

REFERENCIAS

- CARA, M., 1973. Filtering of the dispersed wavetrains. *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, 33, 65-80.
- CHENG, C.C. and B.J. MITCHELL, 1981. Crustal Q in the United States from multimode surface waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 71, 161-181.
- DZIEWONSKI, A., S. BLOCH and M. LANDISMAN, 1969. A technique for the analysis of transient seismic signals. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 59, 427-444.
- GOFORTH, T. and E. HERRIN, 1979. Phase-matched filters: application to the study Love waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 69, 27-44.
- HERRIN, E. and T. GOFORTH, 1977. Phase-matched filters: application to the study of Rayleigh waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 67, 1259-1275.
- HWANG, H.J. and B.J. MITCHELL, 1986. Interstation surface wave analysis by frequency-domain Wiener deconvolution and modal isolation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 76, 847-864.
- LANDISMAN, M., A. DZIEWONSKI and Y. SATO, 1969. Recent improvements in the analysis of surface wave observations. *Geophys. J.*, 17, 369-403.
- PEACOCK, K.L. and S. TREITEL, 1969. Predictive deconvolution: theory and practice. *Geophysics*, 34, 155-169.
- TAYLOR, S. and N. TOKSÖZ, 1982. Measurement of interstation phase and group velocities and Q using Wiener filtering. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72, 73-91.
- TREITEL, S. and E.A. ROBINSON, 1966. The design of high resolution digital filters. *IEEE Trans. Geoscience Electronics*, 4, 25-38.
- WIENER, N., 1949. Time Series. M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts

A COMPLETE DESCRIPTION OF THE OUTER PLETHYSM IN R(S).

G. OCHOA

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. 50009 ZARAGOZA (Spain).

A parcial description of the operation of $R(S)$ called outer plethysm was given by P. Hoffman. In this note we obtain a complete description of that operation. Our result has been used to suggest the "good" definition of the outer plethysm in the operator ring $B(S) = \bigoplus_{n \geq 0} B(\Sigma_n)$.

The set Λ of all λ -operations (natural transformations from the underlying set functor, from the category of λ -rings to the category of sets, to itself) is a λ -ring (see Knutson [3], Ch.I)

The free λ -ring in one generator, $Z[u_1, u_2, \dots]$ where $\lambda^k(u_1) = u_k$ for $k \geq 1$, and the graded ring $R(S) = \bigoplus_{n \geq 0} R(\Sigma_n)$ ($R(\Sigma_n)$ is the representation ring of the symmetric group of degree n) are λ -rings isomorphic to Λ (see Atiyah and Tall [1], Hoffman [2] and Knutson [3]).

D. Knutson conjectures in [3] that the operation of $R(S)$, called outer plethysm, which corresponds with the composition of Λ can be described through a suitable wreath product. Hoffman [2] in pag. 28-29, proves that the behaviour of this operation, "v", for elements $b \in R(\Sigma_k)$ and $a \in R(\Sigma_\ell)$ is

$$b \circ a = \theta_*[(\bar{\tau}_k(a))(\pi^*(b))]$$

where the group homomorphisms

$$\theta : \Sigma_k < \Sigma_\ell > \longrightarrow \Sigma_{k\ell}$$

$$\pi : \Sigma_k < \Sigma_\ell > \longrightarrow \Sigma_k$$

are the inclusion and the projection, respectively, and the map

$$\bar{\tau}_k : R(\Sigma_\ell) \longrightarrow R(\Sigma_k < \Sigma_\ell >)$$

acts on actual representations by $\bar{\tau}(M) = M \otimes \dots \otimes M^k$ with the obvious action of $\Sigma_k < \Sigma_\ell >$ (see [2], pag. 12, ...).

Our aim is to describe " $b \vee a$ " when $a = a_1 + \dots + a_r$ with a_j in $R(\Sigma_{\ell_j})$ for $j = 1, \dots, r$. As far as we know, there is no description of " $b \vee a$ " in this case; of course, no problem arises by considering b , because the operation " \vee " is left additive. We will use the definitions and notations given in [2] pages 1-28.

Theorem. - Let $b \in R(\Sigma_k)$, $a_j \in R(\Sigma_{\ell_j})$ for $j = 1, \dots, r$. Then, one has

$$b \vee (a_1 + \dots + a_r) = \sum_{\alpha} (\theta_{\alpha})^* [(\otimes \bar{\tau}_{i_j}(a_j)) (\pi_{\alpha}^* \delta_{\alpha}^*(b))] \quad (1)$$

where the summation is over all r -partitions $\alpha = (i_1, \dots, i_r)$ of k ; θ_{α} is the composition:

$$\begin{aligned} \Sigma_{i_1} < \Sigma_{\ell_1} > \times \dots \times \Sigma_{i_r} < \Sigma_{\ell_r} > &\longrightarrow \Sigma_{i_1 \ell_1} \times \dots \times \Sigma_{i_r \ell_r} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \Sigma_{i_1 \ell_1 + \dots + i_r \ell_r} \end{aligned}$$

$\otimes \bar{\tau}_{i_j}(a_j) := \bar{\tau}_{i_1}(a_1) \otimes \dots \otimes \bar{\tau}_{i_r}(a_r)$ is an element of

$$R(\Sigma_{i_1} < \Sigma_{\ell_1} > \times \dots \times \Sigma_{i_r} < \Sigma_{\ell_r} >).$$

$$\pi_{\alpha} : \Sigma_{i_1} < \Sigma_{\ell_1} > \times \dots \times \Sigma_{i_r} < \Sigma_{\ell_r} > \longrightarrow \Sigma_{i_1} \times \dots \times \Sigma_{i_r}$$

$$\delta_{\alpha} : \Sigma_{i_1} \times \dots \times \Sigma_{i_r} \longrightarrow \Sigma_k$$

Proof: With the notations of Hoffman [2] we have to prove

$$\tau^b \tau(a_1 + \dots + a_r) = \tau^c$$

being c the second member of the equality (1).

First we will show that the following diagram commutes for every τ -ring K :

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\tau} & KP & \xrightarrow{\xi^{\otimes r}} & KQ \\ \downarrow \tau & \searrow \tau^{\otimes r} & & \downarrow & \downarrow \bar{\mu} \\ I & & KP \otimes \dots \otimes KP & \longrightarrow & KQ \otimes \dots \otimes KQ \\ \Delta^{(r)} \downarrow & \nearrow \bar{\mu} & & & \downarrow \\ KP^{(r)} & \xrightarrow{\square^{(r)}} & & & KQ \end{array}$$

where $\square^{(r)}_{(i_1, \ell_1), \dots, (i_r, \ell_r)}(z) = t \otimes \square_{(i_1, \ell_1)}(x_1) \otimes \dots \otimes \square_{(i_r, \ell_r)}(x_r)$

for every t in K , x_j in $R(\Sigma_{i_j \ell_j})$ with $j = 1, \dots, r$ and
 $z = t * x_1 * \dots * x_r$.

I and II commute by iii) and iv), respectively, of the definition of τ -ring (see pag. 133 of [2]).

It is easy to check the commutativity of III.

Observe that θ_α^* is the composition

$$\square^{(r)}_{(i_1, \ell_1), \dots, (i_r, \ell_r)} \Delta^{(r)}_{i_1 \ell_1, \dots, i_r \ell_r}$$

Now, let K be a τ -ring and x an element of K .

$$\tau^c(x) = \langle \tau(x), c \rangle = \sum_{\alpha} \langle \tau(x), (\theta_\alpha)^* [(\otimes \bar{\tau}_{i_j}(a_j))(\pi_\alpha^* \delta_\alpha^*(b))] \rangle$$

by Frobenius reciprocity

$$= \sum_{\alpha} \langle \square^{(r)} \Delta^{(r)} \tau(x), [(\otimes \bar{\tau}_{i_j}(a_j))(\pi_\alpha^* \delta_\alpha^*(b))] \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} \langle \bar{\mu} \xi^{\otimes r} \tau(x), [(\otimes \bar{\tau}_{i_j}(a_j))(\pi_\alpha^* \delta_\alpha^*(b))] \rangle$$

putting x_j for the component in $K * R(\Sigma_{\ell_j})$ of $\tau(x)$

$$\pi_j : \Sigma_{i_j} \times \Sigma_{\ell_j} \longrightarrow \Sigma_{i_j} \quad (j = 1, \dots, r)$$

$$\delta_\alpha^*(b) = \sum_Y b_Y^1 * \dots * b_Y^r$$

$$= \sum_{\alpha} \langle \bar{\mu}(\xi_{i_1, \ell_1}(x_1) * \dots * \xi_{i_r, \ell_r}(x_r)), \sum_Y (\otimes [\bar{\tau}_{i_j}(a_j) \pi_j^*(b_Y^j)]) \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_Y (\prod_{j=1}^r \langle \xi_{i_j, \ell_j}(x_j), \bar{\tau}_{i_j}(a_j) \pi_j^*(b_Y^j) \rangle)$$

applying Prop. (4.4) of [2]

$$= \sum_{\alpha} \sum_Y (\prod_{j=1}^r \langle \tau_{i_j}(x_j), a_j \rangle, b_Y^j)$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_Y \langle \otimes \tau_{i_j}(x_j), a_j \rangle, \otimes b_Y^j = \sum_{\alpha} \langle \otimes \tau_{i_j}(x_j), a_j \rangle, \delta_\alpha^*(b)$$

by Frobenius reciprocity and putting \times for the cross product

$$= \sum_{\alpha} \langle \tau_{i_1}(x_1), a_1 \rangle \times \dots \times \tau_{i_r}(x_r), a_r \rangle, b \rangle$$

$$= \langle \tau_k(\langle x_1, a_1 \rangle + \dots + \langle x_r, a_r \rangle), b \rangle$$

$$= \langle \tau_k(\langle \tau(x), (a_1 + \dots + a_r) \rangle), b \rangle = \tau^b \tau(a_1 + \dots + a_r)(x).$$

So, the proof is finished.

A similar description of the outer plethysm was obtained by the author in [4] for the ring $B(S) = \bigoplus_{n \geq 0} B(\Sigma_n)$, where $B(\Sigma_n)$ is

the Burnside ring of the symmetric group of degree n , Σ_n .

REFERENCES:

- [1] M.F. Atiyah and D.O. Tall: "Group Representations, λ -rings and the J-homomorphism". Topology 8 (1969), pag. 253-269.
- [2] P. Hoffman: " τ -rings and Wreath Product Representations". Lect. Notes in Math. 746, Springer (1979).
- [3] D. Knutson: " λ -rings and the Representation Theory of the Symmetric Group". Lect. Notes in Math. 308 (1973).
- [4] G. Ochoa: "Outer Plethysm, Burnside Ring and β -rings". To appear in the J. of Pure and Applied Algebra.

CARACTERISTICAS DE LOS RAFONIS Y ALVEOLOS DESARROLLADOS AL SUR DE ZARAGOZA.

M.A. SORIANO

Departamento de Ciencias de la Tierra. Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. 50009 ZARAGOZA (España).

We have observed tafoni's formation in the central Ebro Basin. They are developed on the slopes of the "formación Longares" and facies Weald sandstones. Its external shape is generally elliptic and its dimensions are variable. In general are in isolated exposed rocks. There are several factors which contribute to tafoni's development, the fractures in the sandstones, the moisture inside the tafoni, their orientation with respecto to the sun and finally the salt crystallization.

1. INTRODUCCION

La zona que hemos estudiado se encuentra localizada al sur de la provincia de Zaragoza, en las proximidades de las poblaciones de Mezalocha y Villanueva de Huerva que se sitúan a lo largo del cauce del río Huerva. Desde un punto de vista geológico el área está enclavada dentro de la Depresión del Ebro cerca dē su contacto con la Cordillera Ibérica (Fig. 1). Esta última se encuentra constituida en este sector por materiales paleozoicos, mesozoicos y paleógenos, principalmente, mientras que la depresión está rellenada por depósitos de edad neógena formados por alternancias de conglomerados y areniscas en las zonas marginales (Formación Longares de QUIRANTES, 1978) y hacia el centro de la depresión disminuye el contenido en detriticos y aumenta el de materiales evaporíticos (Formación Zaragoza de QUIRANTES, 1978).

Los alveolos y tafonis son formas cavernosas que se encuentran sobre vertientes escarpadas. Se desarrollan sobre rocas granudas, tanto ígneas como sedimentarias. Son cavidades casi hemisféricas y externamente tienen forma circular o elíptica. Tanto unas formas como las otras se han descrito en áreas diversas por gran número de autores

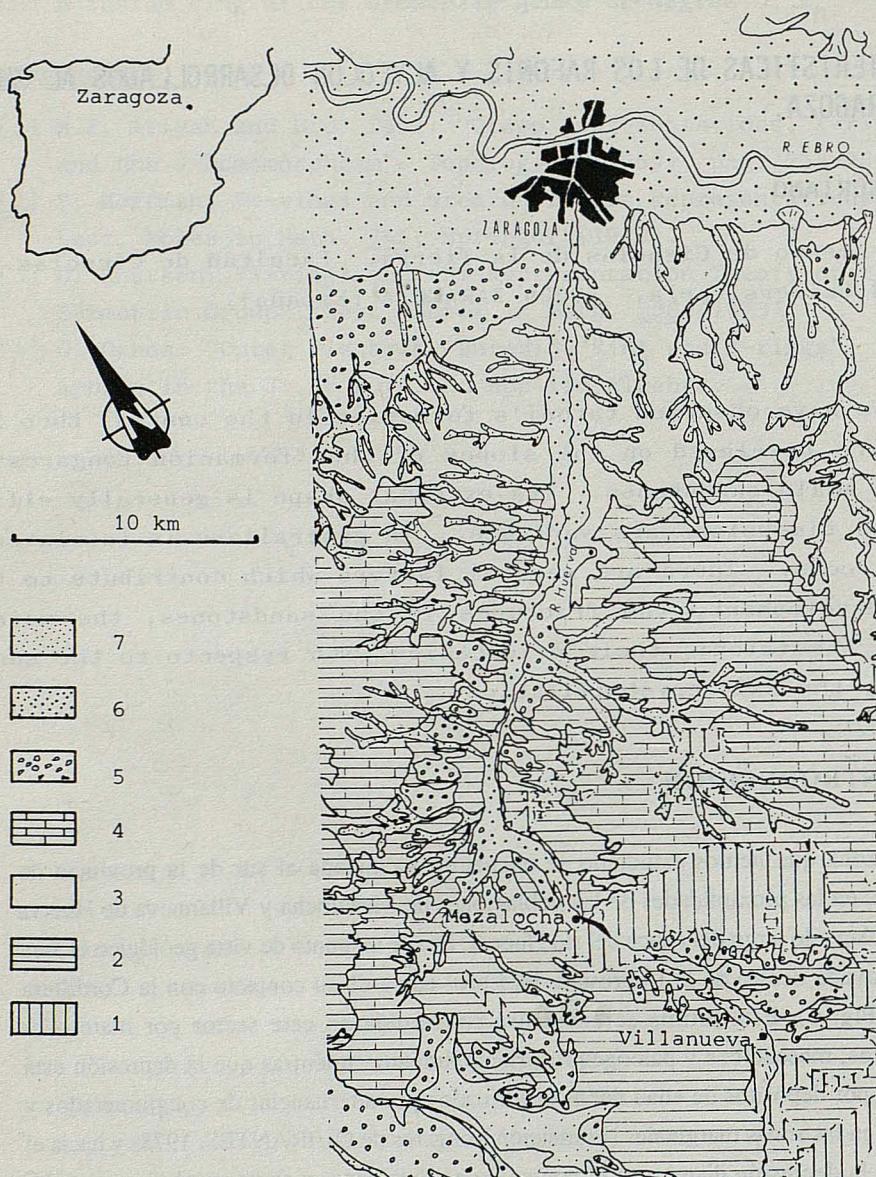


Fig. 1.- Situación geográfico-geológica de la zona estudiada. 1. Mesozoico. 2. Mioceno detrítico. 3. Mioceno yesífero. 4. Mioceno calcáreo. 5. Glacis pliocuaternarios. 6. Terrazas cuaternarias. 7. Rellenos de valle de fondo plano (simplificado a partir de Riba et al., 1970 a y b).

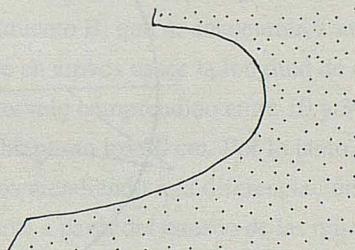
(CALKIN y CAILLEUX, 1962; DRAGOVICH, 1969; COOKE y WARREN, 1973; MABBUTT, 1977; MARTINI, 1978; SMITH, 1978 y MUSTOE, 1982). Dentro de la Depresión del Ebro destacamos entre otros el estudio llevado a cabo por RODRIGUEZ y NAVASCUES (1982) en las proximidades de Huesca.

Los alveolos y tafonis se desarrollan sobre la formación Longares y sobre las areniscas mesozoicas en facies Weald de la Cordillera Ibérica, si bien, los mejor desarrollados son los que se generan sobre la primera. Con el estudio de estos modelados pretendemos determinar cuales son los principales factores que influyen en su génesis. Para ello, se han analizado las dimensiones y características de estas dos formas básicamente en dos estaciones situadas en las inmediaciones de Mezalocha, ambas sobre materiales de la formación Longares.

2. CARACTERISTICAS GENERALES.

La forma externa de estos modelados es, en general, elíptica, aunque se han observado, así mismo, algunos casi circulares. En muchos casos, la sección que presentan tiene mayor dimensión en la base que en el techo de la oquedad, siendo muy semejantes al tipo que MARTINI (1978) denomina "Lisa" (Fig. 2). En los demás que se han reconocido, tanto la base como el techo tienen igual longitud. También hemos observado, mayor profundidad en uno de los lados del tafoni. Es del mismo modo importante señalar que se trata de formas activas hoy día. Este hecho viene corroborado por la presencia de detritus en la base de la cavidad, apreciándose también descamaciones en las paredes y techo de la misma.

Fig. 2.- Perfil transversal del tafoni de pared tipo Lisa de MARTINI (1978).



Como indicamos en el apartado anterior, hemos estudiado con mayor detenimiento las formas que se desarrollan en dos afloramientos próximos a Mezalocha. En ambos se han medido las direcciones que tienen las aperturas de estas oquedades. Como vemos en la Fig. 3A las orientaciones obtenidas a partir de 60 medidas, dan un máximo muy claro hacia el SSE, mientras que en la Fig. 3B observamos mayor dispersión (los datos que se han

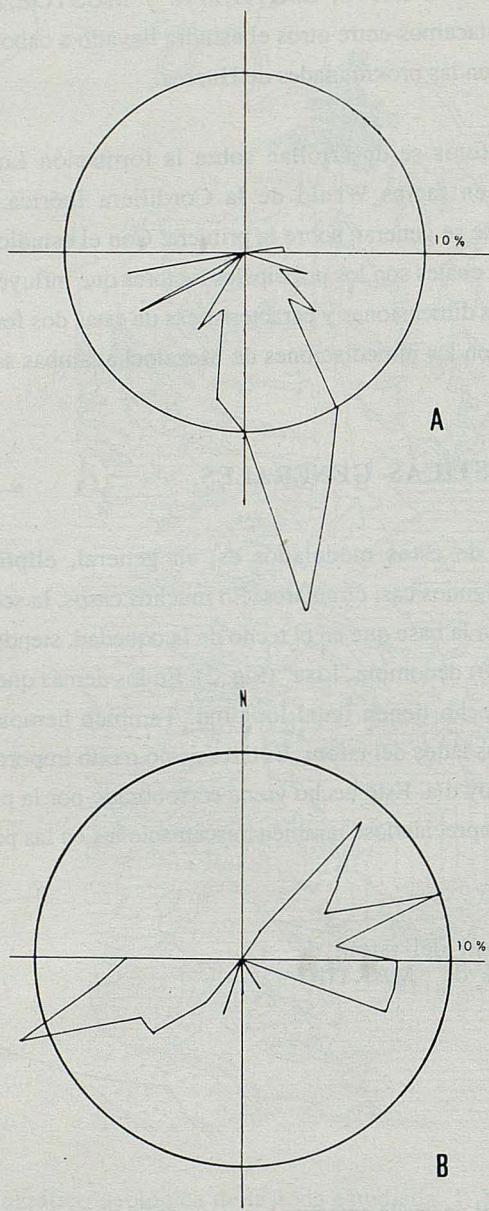


Fig. 3.- Diagramas de rosas de las orientaciones de las aperturas de los tafonis. A.- En la estación 1. B. En la estación 2.

tomado en este caso son 69), aunque de un modo general podemos considerar un máximo hacia el SW y otro hacia el E y ENE. En el caso del primer afloramiento, hay una clara disposición de las aperturas de estos modelados hacia solana, lo cual en principio, como veremos, tiende a favorecer su desarrollo. El segundo de ellos, es un afloramiento situado a ambos lados de un pequeño barranco cuya dirección, en líneas generales en este tramo, es de 140°; esto explica las diferencias tan fuertes que existen en los sentidos de apertura, ya que dependen de que las depresiones se sitúen a uno u otro lado del valle. A pesar de ello vemos que el mayor número de formas se generan hacia la dirección donde reciben un máximo de insolación.

	Nº de oquedades del afloramiento A	Nº de oquedades del afloramiento B
Longitud < 10 cm	2	10
" 10-30 cm	31	40
" 30-50 cm	19	15
" 50-70 cm	7	4
" > 70 cm	1	

CUADRO 1.- Distribución de alveolos y tafonis a partir de la longitud que presentan.

Además de las direcciones que tienen estas formas, también hemos medido las tres dimensiones principales que presentan, longitud, altura y profundidad, así como la altitud que tienen con respecto al suelo, estando comprendida ésta entre 1 y 2 m generalmente, a excepción de los tafonis orientados al SW del afloramiento B, que se encuentran a menos de 1 m de altitud. A partir de ellas, podemos ver que en ambos casos la longitud de estos modelados, presenta un máximo importante en el intervalo comprendido entre 10 y 30 cm mientras que son bastante escasas las formas que sobrepasan los 50 cm. Por lo tanto, más de la mitad de las oquedades estudiadas son alveolos atendiendo a la diferenciación que efectúan muchos autores que han trabajado en este tema a partir del tamaño de las mismas.

Como podemos ver en el Cuadro 1, hay mayor número de cavidades con mayores dimensiones en el afloramiento A (pese a que el número total de las mismas es menor en él), que en el B. Probablemente esto sea debido a la orientación más propicia que tienen los alveolos y tafonis de la primera de las estaciones consideradas. Por otra parte, vemos que un aumento o disminución de cada una de las dimensiones que hemos medido, lleva asociado el incremento o descenso, respectivamente, de las demás, como podemos ver en

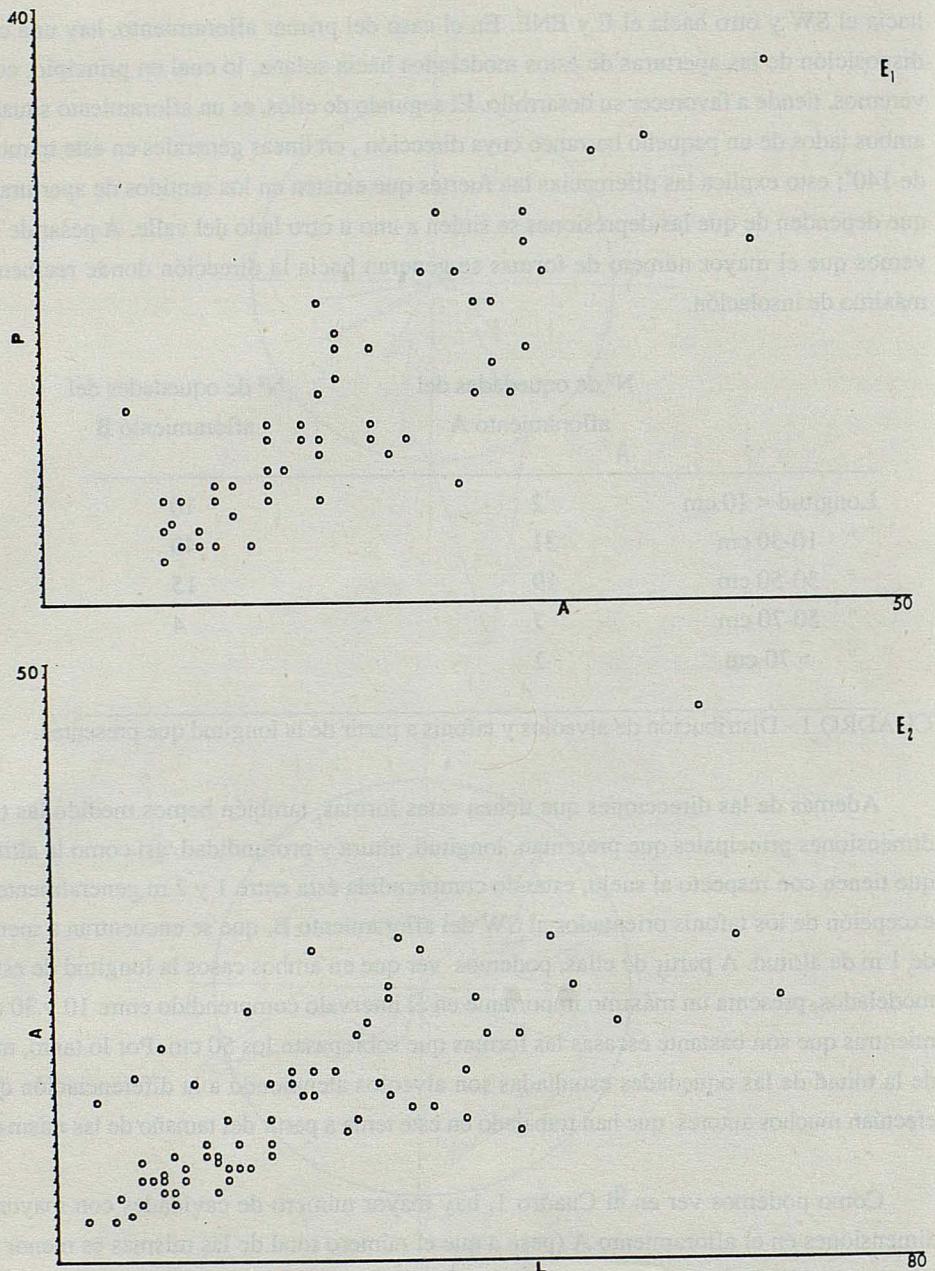


Fig. 4.- Relaciones lineales entre distintas dimensiones de los tafonis. L:Longitud.
A:Altura. P:Profundidad. E₁:Estación 1. E₂: Estación 2. Las medidas están expresadas en centímetros.

la Fig 4A y B.

3. DISCUSION.

En general, se considera que el fenómeno de alveolinización y tafonización , se produce como consecuencia de una desagregación y descamación de la roca. Estos procesos se inicián a partir de zonas de debilidad bien sea textural o estructural de la roca (DRAGOVICH, 1969), de ahí que los encontremos asociados a planos de estratificación (horizontal o cruzada) y de diaclasas; también se desarrollan mejor sobre rocas granudas, homogéneas y no muy cementadas (MAINGUET, 1972).

Las génesis que se han propuesto de estos modelados son muy variadas. En un principio, los mecanismos de los que se hablaba eran de meteorización física (chorros de arena, gotas de lluvia, presión debida a la cristalización de sales, diferencias térmicas, acción del viento y hielo-deshielo). Además de todos estos mecanismos hay que considerar también reacciones químicas tales como hidrólisis, hidratación y difusión (MARTINI, 1978).

En el caso que nos ocupa vemos que la distribución morfoclimática de la Depresión media del Ebro (RODRIGUEZ, 1982) asigna para esta zona una morfogénesis actual semiárida que en los meses más cálidos incluso puede llegar a ser árida. Bajo este tipo de clima y con la litología adecuada, los procesos que predominan son de meteorización mecánica (humectación-secado y haloclastismo sobre todo). Ambos provocan una desagregación y descamación de la roca, hechos que favorecen la formación del tafoni (EVANS, 1969-70).

La litología existente es un factor básico en la génesis del tafoni. Las areniscas que encontramos en esta zona, no son excesivamente compactas. Los relieves estructurales que generan tienen vertientes de elevada pendiente y sin apenas vegetación. Además presentan zonas de debilidad (los propios planos de estratificación y los planos de fractura tales como diaclasas). Todo ello favorece la alteración inicial de la roca. Incluso en algunas de estas oquedades se observan, como ya dijimos, diferencias importantes en su profundidad causadas por el mayor avance del tafoni o alveolo a favor de las diaclasas.

Pensamos que a continuación hay factores decisivos que intervienen en la evolución de estas oquedades. Uno de ellos es la mayor humedad que existe en el interior de estas

formas (que en algunos casos proviene del ascenso capilar que tiene lugar en los periodos más húmedos). El segundo viene determinado por la orientación a solana, que provoca que existan diferencias morfoclimáticas entre la parte interior y exterior de los tafonis y alveolos. La temperatura y humedad es más uniforme en el interior, donde se produce una meteorización más intensa (MARTINI, 1978). Este hecho se confirma a partir de los resultados de las mediciones que realizamos (Fig. 3). El tercero es el haloclastismo. En efecto, la composición de la mayor parte de las areniscas neógenas que están rellenando la Depresión del Ebro es sódica, por lo tanto en períodos secos puede producirse fácilmente la recristalización de sales que habrían sido transportadas previamente disueltas en el agua en las épocas más húmedas. Esta cristalización se manifiesta por la presencia de eflorescencias salinas en el interior de las cavidades. Finalmente, la evacuación del residuo que se produce como consecuencia de la meteorización del tafoni y que se deposita en la base del mismo se produce por el viento y el escurrimiento de agua, principalmente.

4. REFERENCIAS.

- CALKIN, P. y CAILLEUX, A. (1962) Z. Geomorph. N. F. 6 pp 317-324.
- COOKE, R.U. y WARREN ,A. (1973) Geomorphology in deserts. Anchor Press. 394 p.Londres.
- DRAGOVICH, D. (1969) Z. Geomorph. N.F. 2, pp 163-181.
- EVANS, I.S. (1970) Rev. de Géomorph. Dynamique XIX année, nº4, pp.153-177.
- MABBUTT, J.A. (1977) Desert landforms The MIT Press. 340 p.
- MAINGUET, M. (1972) Etudes de photo-interpretation.t II, pp 229-657. París.
- MARTINI, I.P. (1978) Z. Geomorph. N.F. 22, pp. 44-67.
- MUSTOE, G.E. (1982) Geological Society of America Bulletin vol. 93, pp. 108-115.
- QUIRANTES, J. (1978) Estudio sedimentológico y estratigráfico del terciario continental de los Monegros. Inst. Fernando el Católico. CSIC. 200 p. Zaragoza.
- RIBA, O.; MALDONADO, A.; PUIGDEFABREGAS, C.; QUIRANTES,J. y VILLENA, J. (1970a) Mapa geológico de España E 1:200.000. Hoja nº 32. (Zaragoza). I.G.M.E. Madrid.
- RIBA, O.; VILLENA, J. y MALDONADO, A. (1970b) Mapa geológico de España. E 1:200.000. Hoja nº 40 (Daroca) I.G.M.E. Madrid.
- RODRIGUEZ, J. (1982) Estudios Geológicos, 38, pp. 43-50.
- RODRIGUEZ, J. y NAVASCUES, L. (1982) Tecniterrae, 49, pp. 7-12.
- SMITH, B.J. (1978) Z. Geomorph. N. F., 22, pp. 21-43.

PETROLOGICAL AND GEOCHEMICAL CONSIDERATIONS ON THE CABO ORTEGAL COMPLEX (NW SPAIN).

A. APARICIO*, V. SÁNCHEZ CELA** Y L.E.CACHO*

*Departamento de Geología. MNCN-C.S.I.C. Madrid.

**Departamento de Geología (Petrología y Geoquímica). Universidad de Zaragoza.

In this paper we want to present various geological, petrological and geochemical data that appear to question the petrogenetic theories established for the Cabo Ortegal Complex, mainly in relation to the metabasic rocks (amphibolites, eclogites, serpentinites, etc.).

Many ultrabasic rocks defined as peridotites are in fact various chloritic-sepentinic rocks associated, in some cases, in concordance with rocks of indubitable sedimentary origin.

The geological association between ultrabasites with rocks of pelitic and carbonate nature together with new petrological data and various deductions and considerations appear to point out a new petrogenetic model where the host sedimentary rocks played a great part in the origin and diversification of the different igneous-metamorphic facies at Cabo Ortegal.

INTRODUCTION

The Cabo Ortegal Complex is formed by an igneous metamorphic series consisting of schists, amphibolites, granulites, eclogites, serpentinites, calc-silicate rocks and various granitic rocks; the latter located in the nucleous of an anticlinorial structure, whose borders are formed by shales, phyllites and schists that intercalate some levels of serpentinite-chloritites, marbles, quartzites and some granitoids.

The whole Complex is affected by Hercynian metamorphic processes from a low to medium degree and also by various igneous-granitization processes induced by underlying granitic masses that, in such zone, hardly outcrop.

All the authors⁽¹⁾, who with different objectives have studied the Cabo Ortegal Complex, consider the basic-ultrabasic rocks as of allochthonous character and mantlelic origin, which during Hercynian times were affected by various metamorphism (M_{1-4}) and deformation (D_{1-5}) - processes.

However, an objective analysis of the different works in such a zone indicates that many questions are not answered or are partially and differentially interpreted:

- Original materials which gave origin to granulites, eclogites, amphibolites, serpentinites, etc.
- Stratigraphy of the Complex with the location of the different rocks.
- Intensity of metamorphism in their various stages, etc.

(1) VOGEL, 1967; MAAKANT, 1970; ENGELS, 1972; OVERMEEREN VAN, 1975; KEASBERRY et al. 1976; MEER VAN DER, 1976; FERNANDEZ & MONTESERIN, 1976; CALSTEREN VAN, 1977; FERNANDEZ & FERNANDEZ, 1977; ANTONIOZ & FERRAGNE, 1978; MATTE, 1968; TEX DEN, 1981a,b; MEER VAN DER, et al., 1981; VOGEL et al., 1983; GRIFFITHS et al., 1985, etc.

In this study we wish to present new petrological and geochemical data which, together with other previous ones from geologic to geochemical types, appear to point out a new petrogenetic model, very different from those considered today.

PETROGRAPHIC FEATURES

The most abundant rocks in the zone in question (Fig. 1) correspond to "metabasic" rocks (VOGEL & WARNAARS, 1967; ENGELS, 1972; FERNANDEZ & MONTESERIN, 1976; FERNANDEZ & FERNANDEZ, - 1977, etc.). Although these rocks were named with different words, (according to their geographical situation), they mainly correspond to amphibolites, with a defined foliation and with a paragenesis of amphibol + clinopyroxene + clinozoisite + garnet + plagioclase, Rutile and - sphene are some frequent accessory minerals.

This lithological group is unclear, so in levels from some centimetres to meters in width, various rocks such as: granatites, calc-silicate rocks, feldspar amphibolites, clinopyroxenites, etc. could be associated among them. Also within the amphibolite group some rocks with garnet+ clinopyroxene + amphibol (eclogites) appear with an irregular distribution. These rocks also appear in contact with schistose formations and also intercalated within the amphibolites. According to their rate of recrystallization these materials exhibit foliation or not.

The second lithologic group, through its importance corresponds to that defined as "paragneisses of Chimparra and Cariño". These "paraderived rocks" are intercalated, with a clear concordance, within the previous and the most important formation constituted by amphibolites, eclogites, and serpentinites (the "ultrabasic group").

This lithologic group outcrop in two bands located to the East and West of Cabo Ortegal in approximately North-South direction. The materials of this group outcrop in levels from centimetric to metrical scale within the serpentinites, amphibolites and granulites-eclogites. In the schistosed paragneisses the presence is also frequent of thin intercalations of - amphibolites, granulites, etc.

These schistosed paragneisses are formed by quartz, plagioclase, garnet, biotite, muscovite + staurolite and sometimes disthene and sillimanite. The K-feldspar only appear near or in contact with granitic rocks. We therefore fail to understand the cause as these rocks are defined as gneisses; "plagioclase-schists" could be a more fitting name. In some points and - near granitic rocks (Regoa) there exist lit-par-lit K-feldspars concordant with the schistosity of the host rocks ("plagioclase-schist").

The third lithologic group, by its extension, corresponds to those so called "peridotites" of Cabo Ortegal. This is, in fact, formed by various serpentinites and chloritites, mainly located in three outcrops. Limo, Herbeira and Uzal (Fig. 1). Very similar rocks also appear intercalated within other formations, as occurs in the shale-schistose formation which surrounds the ultrabasic serpentinic-chloritic group ("peridotites").

These ultrabasic rocks in some places (Herbeira) exhibit a well defined stratification; calc-silicate rocks and various schists are frequently found within them. In some points and associated to "carbonate" rocks some fossilized rests can be observed.

The ultrabasic lithologic group is mainly formed by various serpentinites and chloritites with more or less olivine + clinopyroxene + amphibol + spinel + carbonates + talc. The percentages of these subordinate minerals are variable. In many points the association chlorite-serpentine almost form 100% of the rock. In many cases the abundance of chloritic mine-

rals appears to be related to mylonitized zones.

Within the Complex and in the surrounding shaly zone there exist some granitic rocks - which outcrop in small dispersive masses. These, according to the zone, can respond to various aplites, pegmatites, granodiorites, adamellites and alkaline granites, either in the form of dykes or in small stocks with elongated and oval forms. Because of its small size the cartography of these masses is very difficult. These granitic rocks, which we interpret as belonging, in various petrographic types, to one same underlying granitic unity, have been interpreted by many authors as rocks originated by anatexis of a host pelitic series. We therefore find strange the names applied by those authors for these "granitic" rocks. So when they outcrop within shales-phyllites they are named keratophyres or rhyolites, but when they outcrop within schist or amphibolites they are named two mica-granites.

These granitic rocks also outcrop in a N-S long and a wide band at the west of the Complex, apparently with a syntectonic character in contact with the regional shales. Curiously it is close to the contacts where the porphyroblastic facies (e.g. "ollos de sapo") are more frequent. These porphyroblastic rocks are interpreted by ourselves as a result of metasomatic granitization processes induced by the underlying granitic masses in a dynamic environment - (SANCHEZ CELA & APARICIO, 1982).

These granites are formed by quartz, microcline, plagioclase, muscovite, biotite. Apatite, zircon and opaques are some frequent accessory minerals. Garnet can also be found. These granites in the Beroa zone contain some enclaves of schists similar to the regional host eschistose rocks. In the contacts with the granites these schist exhibit frequent lit-par-lit structures which can easily be interpreted as silica-feldspathization processes induced by the granitic rocks.

Finally and surrounding the Complex abundant lutitic materials appear generally in low metamorphic degrees (phyllites) with a very uniform composition. Within this monotonous series there exist some intercalations of amphibolites, serpentinites, marbles and quartzites. The illitic-muscovitic minerals are the most abundant components; quartz, chlorite and sometimes Na-plagioclases are subordinate minerals. These "lutitic" materials close to the Complex sometimes contain some small crystals of chloritoid.

GEOCHEMISTRY

With the object of trying to find some petrogenetic relationship between the different lithologic formations at Cabo Ortegal 42 chemical analysis (major and minor elements) were realized. From these 4 correspond to granites; 7 to serpentinites-chloritites; 13 to schists; 7 to granulites-eclogites, and 11 to amphibolites (Table 1).

In the SiO_2 -oxides diagram interesting compositional relations can be observed (Fig. 2). With relation to Al_2O_3 and P_2O_5 the amphibolitic and granulitic rocks exhibit oxide percentages very similar to the schist and granite ones.

MnO , TiO_2 , CaO , FeO , Fe_2O_3 show a gradual growth from schist-granites to amphibolites-granulites-eclogites. K_2O , on the contrary, shows an inverse behaviour, whereas Na_2O is high in amphibolites due to the abundant presence of plagioclases and amphiboles in such rocks. Chloritites-serpentinites exhibit low percentages in many chemical elements with the exception of MgO , Fe_2O_3 and MnO which are high although some amphibolites are plotted in the same chemical field.

As a synthesis it can be said that the chemical differences between the various rocks are not as important in the way that they should be if they correspond to such different types as schists, chloritites-serpentinites, etc.

The same occurs in the SiO_2 -minor element diagrams (Fig. 3) that show "increasing in Rb, Ba, Y, Zn (this latter partially) and a decrease in Zr, Ce, La. Other elements such as Sr and Cu do not exhibit any variation from schists-granites to chloritites. These latter rocks exhibit higher contents in Ni due to their higher Mg content. The rest of the elements manifest a normal behaviour in relation to the other lithologic types. So these rocks show similar contents in Zr, Cu and Y to the schist-granitic types. On the contrary the Sr, Ce and Zn contents are very close to the amphibolite-granulite ones. There exists a high correlation between Rb- K_2O ; Ba- SiO_2 ; Ni-Mg and La-Ba.

On the assumption that all these rocks are magmatic from Mantle provenance later differentiated, metamorphized and tectonized, several geologists have built CIPW norms in order to find geochemical relationships (VOGEL et al., 1983; ARPS et al., 1977, etc.) (Table 2). It can be seen how the amphibolites show large variations in "quartz" and "anorthite" that are a consequence of their wide compositional variation. From 11 analysis only 4 have normative olivine and 2 normative nepheline. The same occurs with the granulites-eclogites; 2 show quartz and olivine normatives; nevertheless these chemical features are only a consequence of the different mineral percentages in the rocks and not by the lack of crystallization of some of them.

In the chloritites-serpentinites their contents in normative corundum in surprisingly similar to the granitic and schistose rocks.

Therefore the chemical data appear to indicate more the existence of a certain genetic correlation among the different lithologic groups than a "breaking", as it would be if these rocks were so different in their origins. So rocks of indubitable crustal origin (e.g. schist) show a certain chemical overlapping with rocks considered to be from the Mantle provenance by almost all geologists (e.g. metabasites).

CHEMICAL MINERALOGY

The main minerals and the more common in amphibolites (granulites-eclogites), schists, granitic rocks and chloritites-serpentinites were analyzed: garnets, amphiboles, pyroxenes, olivines, chlorites, serpentines and micas.

- Garnets. These are very frequent in all the lithologic groups, they are only lacking in chloritites-serpentinites.

In the schists the garnets are of almandine type (Alm_{56-85} ; Py_{3-15} ; Gross_{1-34} ; Esp_{1-21}). In amphibolites they are also of almandine type (Alm_{52-64} ; Py_{8-17} ; Gross_{22-29} ; Esp_{1-21} ; - equally it occurs in granulites-eclogites (Alm_{50-57} ; Py_{17-21} ; Gross_{24-28} ; Esp_{1-13}) and granitic rocks (Alm_{61-73} ; Py_{3-6} ; Gross_{1-29} ; Esp_{1-21}) with compositions that are overlapped among them.

The chemical features are shown in the Al-Gross-Py triangle (Fig. 4), where the compositional field of the granites-schists is wide and overlaps the amphibolites one. In this triangle the garnets are plotted in the eclogite C field (COLEMAN et al., 1965).

There exists a relationship between the CaO contents in the garnets and those of the whole rocks. This appears to indicate that the original composition of the rocks is the main factor in the composition of the garnets during the metamorphic processes.

In this way it is surprising that very different rocks such as schist-granites and "ultrabasites" contain very similar garnets, it is to say almandine-grossularite garnets.

- Pyroxenes. These minerals in amphibolites, granulites, eclogites and chloritites-serpentinites were analyzed. According to the Ca-Mg-Fe triangle the pyroxenes can be classified as diopside-salite types, although there also exist, to a lesser degree, endiopside, augite and orthopyroxene. Nevertheless the wide compositional distribution does not fit the different lithologic defined groups. So pyroxenes in chloritites-serpentinites, in some cases, - are plotted as enstatite, and in others as endiopside and diopside. Pyroxenes of amphibolites, granulites and eclogites are plotted in the same places as the chloritites-serpentinites ones (Fig. 5).

The jadeite contents of pyroxenes are also very variable and they do not depend on the rock type. So pyroxenes of amphibolites and chloritites-serpentinites may or may not contain this component (from 22 to 91%). In granulites and eclogites the jadeite component can vary from 76 to 91%; in amphibolites from 22-78%; and in chloritites-serpentinites the analyzed pyroxene contains 26% of jadeite.

- Amphiboles. These minerals, of course, are abundant in amphibolites; in lesser quantities they also are frequent in granulites-eclogites.

According to Hawthorne's (1983) classification, Ca-amphiboles are mainly pargasites or pargasitic hornblendes. In some calc-silicate rocks exist orthoamphiboles of anthophyllitic types.

In general there exists a lineal whole rock-amphibol correlation. So an increase of Mg in amphiboles is parallel to an increase of Mg in whole rock.

- Olivines. These minerals are only present in the ultrabasic rocks (serpentinites-chloritites). Their composition is very constant (Fo_{88-90}). It is to say they are almost forsterites.

- Biotites. These were analyzed in those rocks where they are more abundant: granites and some schists. They exhibit a uniform composition. So in the $Al-K-(Fe+Mg+Mn)$ and $Mg-(Al^6+Ti)-(Fe+Mg)$ triangles they are plotted in a small field (Fig. 6).

- Chlorites. These minerals are very abundant in "ultrabasic" rocks (chloritites-serpentinites). They are always rich in Mg contents with variable and less contents of FeO (Corundumphyllite types).

- Serpentinites. These minerals are curiously less abundant than the chloritic ones in the rocks defined by geologists as ultrabasites or peridotites, which are in fact chlorititic-serpentinic rocks. All these serpentines show high FeO contents.

- Feldspars. Some plagioclases from granitic, schistose and amphibolitic rocks were analyzed. They show generally low An contents: An_{1-53} in amphibolites; An_{11-15} in granites, and An_{5-7} in schist.

The K-feldspar in granitic rocks and some schists corresponds to a microcline with - $Or \approx 90$.

METAMORPHISM

The references of the different authors generally indicate the existence of 4 metamorphic stages (M_1-M_4) and 5 fold ones (F_1-F_5). (e.g. VOGEL, 1967; VOGEL et al., 1983). The M_1

metamorphic stage corresponds to the eclogite-granulite facies. The M_2 is of granulitic type. The M_3 of amphibolitic type; and the M_4 would correspond to the greenschist facies.

Many geologists deduced those structural and metamorphic stages in basis to mineralogical studies and considerations established on metamorphized ultrabasites. So various retrometamorphic processes are cited, e.g. destabilization of pyroxenes (omphacite) and formation of amphiboles.

This petrostructural interpretation however originates many problems, mainly if we take into account the existence of pelitic paragenesis intercalate, generally in concordance, within ultrabasites and that curiously they strongly exhibit no retrometamorphic processes. This important observation, in our opinion, appears to be in clear opposition to the existence of retrometamorphic phenomena that almost all geologists deduce in the metabasites: eclogites, granulites, amphibolites and chloritites-serpentinites.

From an objective view we can consider at Cabo Ortegal the existence of a wide zone affected by a metamorphism in greenschists facies that corresponds to the surrounding phyllite-shaly area. These materials gradually transit towards an amphibolitic facies from a low to medium degree at the same nucleus as Cabo Ortegal.

Within the Cabo Ortegal Complex the "pelitic" paragenesis with quartz + plagioclase + biotite + muscovite + garnet + sillimanite + disthene + staurolite indicate medium degree metamorphic conditions. Owing to this paragenesis, which it would appear in gradual form intercalated within the ultrabasites, appear to indicate that both rocks, pelitic and ultrabasites, have also been affected by similar metamorphic processes.

So the M_1 metamorphic conditions established by some authors (VOGEL, 1967; VOGEL et al., 1983, etc.) evolved from 900-600 °C and 14-19 Kb, through 750-700 °C and 6-10 Kb, to lower temperatures (according to γ_{18}^0) as 500°C (VOGEL & GARLICK, 1970; ADDY & GARLICK, 1974). These latter data are similar to those of KUIJPER (1979) (600 °C and 10-11 Kb). These latter P-T conditions appear more to correspond to amphibolite facies than to the eclogite one, as interpreted by some authors.

In order to establish P-T metamorphic conditions several geothermometers were used, mainly the biotite-garnet pair (PERCHUK, 1977; PERCHUK et al., 1981; FERRY & SPAR, 1978; GOLDMAN & ALBEE, 1977) for pelitic rocks.

The pyroxene-amphibol pair (PERCHUK, 1977; PERCHUK et al., 1981) the garnet-amphibol pair (PERCHUK, 1970, 1971), and the plagioclase-amphibol pair (PERCHUK, 1977; PLYUSNI-NA, 1982) for amphibolites, granulites-eclogites, were used.

In schists the data of PERCHUK (1977), PERCHUK et al. (1981), and WELLS & RICHARDSON (1979) were used, and for amphibolites the BROWN (1977) data.

In general terms it can be said that the metamorphic conditions for schists, amphibolites, granulites, eclogites and chloritites-serpentinites ("metabasites") are very similar to the medium degree metamorphic ones.

On the other hand and at mineral scale the garnet-pyroxene pairs of the metabasites indicate very close formation-conditions for all these rocks (Fig. 7) (see COLEMAN et al., 1965).

The existence of "relict" minerals attributed by various authors as from the "katazonal origin" could not be stated by means of chemical criteria, although the analysis carried out on various crystals of garnets and pyroxenes, that appear to exhibit some "relict" features.

res", do not show that character. On the contrary they show a chemical identity with the other minerals. On the other hand the composition of some minerals, such as olivines, is very similar to olivines originated by contact-metamorphism (metasomatism) of carbonate rocks. This origin can also explain the formation of amphibol minerals with pargasitic compositions, it is to say that all of them were originated by transformation of carbonate-sedimentary rocks in a suitable chemical and physical environment whose main cause must be found in the underlying granitic masses existent at Cabo Ortegal.

In this way the so called "relict textures" could, on the contrary, correspond to "growth textures" of pyroxenes, amphiboles, etc., in a medium degree metamorphic environment where high metamorphic conditions were never reached (see SANCHEZ CELA & APARICIO, 1982).

The main stage could correspond to that defined, by some authors, as M_3 . It is evident that the shaly metamorphic zone (Ordovician-Silurian), that surrounds the Cabo Ortegal Complex, indicates greenschist metamorphic conditions (paragenesis with quartz + plagioclase + + muscovite + chlorite + chloritoid). These petrographic facies are interpreted by various authors as retrometamorphic ones and originated during the M_4 stage. In basis to the transitional characters (structural, petrographic, etc.) that are evident from these surrounding shales to the schists we prefer to include both materials, shales and schists, as belonging to one same metamorphic cycle and both synchronically developed in two different geographical zones.

PREMETAMORPHIC ORIGINAL ROCKS AND SOME PETROGENETIC CONSIDERATIONS.

The geological, petrographic and geochemical data on the "metabasites" at Cabo Ortegal Complex (amphibolites, granulites, eclogites and chloritites-serpentinites) indicate that they all belong to one same petrogenetic unity whose polyphasic character is closely related with processes that took place in the Upper Continental crust.

In our opinion the origin of these metabasites appear to be more as a consequence of the assumption of that basic-ultrabasic rocks are from Mantle provenance independently if many geological and petrological data question that origin.

There exist abundant data that indicates that all the lithological groups at Cabo Ortegal had a partial sedimentary origin: a) pelitic and carbonatic rocks, sometimes fossiliferous, that alternate or intercalate within amphibolites and chloritites-serpentines; b) presence of foliation, schistosity and stratification in the metabasites (amphibolites, chloritites-serpentinites, etc.), etc.

The geochronological data (WAN CARLSTEREN et al., 1979) together with stratigraphic considerations appear to place the Cabo Ortegal Complex and the surrounding materials mainly in the Lower-Paleozoic. Generally the surrounding materials are assigned to Ordovician-Silurian (VAN DER MEER, 1975). As in many places there exists a gradual transition towards the materials of the nucleous. In this way it is not absurd to suppose that these latter materials could correspond to Cambrian as some geological data appears to indicate (VAN CARLSTREN, 1977).

It would be interesting therefore to try to correlate the materials at Cabo Ortegal with others of the Iberian Massif. In nearby zones, East Galicia and Asturias, there exist thick and monotonous series of Cambrian materials that by their petrological features could be considered the predecessors of the igneous-metamorphic ones at Cabo Ortegal. So in Asturias (ZAMARREÑO, 1983) there exist thick Cambrian stratigraphic sequences where the lutitic materials are dominant (various phyllites and schists), but in lower-levels carbonate mate-

rials are frequent: limestones, dolomites and sometimes magnesites, in many cases transformed or alternating with marbles, calc-silicate rocks and also some "basic-ultrabasic" rocks very similar to the chloritites-serpentinites at Cabo Ortegal.

These sedimentary materials or other very similar ones were present at Cabo Ortegal before the various structural, metamorphic and mainly granitization processes took place. The result was the formation of a petrological polyphasic pectrostructural unity nowadays formed by various schists, amphibolites, granulites, eclogites and chlorites-serpentinites with scarce outcrops of granites or other rocks such as rhyolites, keratophyres, porphyries, etc. all of which we interpretet as differential and superficial manifestations of underlying granitic masses, principal cause of the various structural and petrological processes that too, place, in a wide geological cycle, at Cabo Ortegal zone.

REFERENCES

- ADDY, S.K. & GARLICK, G.D. (1974). Oxygen isotope fractionation between rutile and water. Contr. Min. Petr. 45, 119, 121.
- ANTHONIOZ, P.M. & FERRAGNE, A. (1978). Le Precambrian polymetamorphique ellochtonne du Nord-Ouest de la Peninsule Iberique, témoin d'une nappe de charriage calédonienne. In. M. JULIVERT et al. Edit. "Geología de la parte Norte del Macizo Ibérico". Ediciones del Castro, La Coruña. 23-42.
- ARPS, C.E.S.; CALSTEREN, P.W.C. VAN; HILGEN, J.D.; KUIJPER, R.O. & DEN TEX E. (1977). Mafic and related complexes in Galicia: An excursion guide. Leidse. Geol. Med. 51, 63-94.
- BROWN, E.H. (1977). The crossite content of Ca-amphibole as a guide to pressure of metamorphism. Journal of Petrology, 18, 53-72.
- CALSTEREN, P.W.C. VAN (1977). Geochronological, geochemical and geophysical investigations in the high-grade mafic-ultramafic complex at Cabo Ortegal and other pre-existing elements in the Hercynian basement of Galicia (NW Spain). Verh Nr2 ZWO, Laboratorium voor Isotope - Geologie, Amsterdam, 1-74.
- CALSTEREN, P.W.C. VAN; BOELRIJK, N.A.I.M.; HEBEDA, E.H.; PRIEM, H.N.A.; DEN TEX, E.; BERDURMEN, E.A.Th. & VERSCHUPE, R.H. (1979). Isotopic dating of older elements (including the Cabo Ortegal mafic-ultramafic complex) in the hercynian orogen of NW of Spain: Manifestations of a presumed early paleozoic Mantle-plume. Chemical Geol. 24, 35-56.
- COLEMAN, R.G.; LEE, D.E. & BEALTY, L.B. (1965). Eclogites and oeclogites: their differences and similarities. Geol. Soc. of Amen. Bull. 76, 483-508.
- DEN TEX, E. (1981a). A geological section across the Hesperian massif in western and central Galicia. Geol. en Mijnbouw, 60, 33-40.
- DEN TEX, E. (1981b). Basement evolution in the northern Hesperian Massif. A preliminary survey of results obtained by the Leiden Research Group. Leidse. Geol. Med. 52, 1-21.
- ENGELS, J.S. (1972). The catazonal polymetamorphic rocks of Cabo Ortegal (NW Spain), a structural and petrofabric study. Leidse. Geol. Med. 48, 83-133.
- FERNANDEZ MARTINEZ, F. & FERNANDEZ POMPA, F. (1977). Mapa Geológico de España. 1:50.000, nº 1, Cariño. Memoria 34 pp.
- FERNANDEZ POMPA, F. & MONTESERIN LOPEZ, V. (1976). Mapa Geológico de España, 1:50.000. nº 7. Cedeira. Memoria 73 pp.

- FERRY, J.M. & SPEAR, F.S. (1978). Experimental calibration of the partitioning of Fe and Mg between biotite and garnet. *Contr. Min. Pet.* 66, 113-117.
- GOLDMAN, D.S. & ALBEE, A.L. (1977). Correlation of Mg/Fe partitioning between garnet and biotite $^{18}/^{16}$, partitioning between quartz and magnetite. *Am. J. Sci.* 277, 750-761.
- GRIFFITHS, J.B.; PEUCAT, J.J.; CORNICHET, J.; IGLESIAS, M. & GIL, J.I. (1985). U-Pb, Nd isotope and REE geochemistry in eclogites from the Cabo Ortegal Complex, Galicia, Spain. An example of REE immobility conserving MORB like patterns during high-grade metamorphism. *Chem. Geology (Isotope Geoscience Section)* 52, 217-225.
- HAWTHORNE, F.C. (1983). The crystal chemistry of the amphiboles. *Can. Min.* 21, 173-180.
- KEASBERRY, E.J.; VAN CALSTEREN, P.W.C. & KUIJPER, R.P. (1976). Paleozoic mantle diapirism in Galicia. *Tectonophysics*, 31, 61-65.
- KUIJPER, R.P. (1979). U-Pb systematics and the petrogenetic evolution of infracrustal rocks in the Paleozoic basement of western Galicia (NW Spain). *Lab. Isotopen Geology*, 5, 101 pp.
- MAASKANT, P. (1979). Chemical petrology of polymetamorphic ultramafic rocks from Galicia, NW Spain. *Leidse Geol. Med.* 45, 237-325.
- MATTE, Ph. (1968). La structure de la virgation hercynienne de Galice (Espagne). *Géol. Alp.* 44, 157-280.
- MEER MOHR, C.G. VAN DER (1975). The palaeozoic strata near Moeche in Galicia, NW Spain. *Leidse Geol. Med.* 49, 487-497.
- MEER MOHR, C.G. VAN DER; KUIJPER, R.P.; CALSTEREN, P.W.C. VAN; & DEN TEX (1981). The Hesperian Massif: From Iapetus aulacogen to ensialic orogen. A model for its development. *Geol. Rundschau*, 70, 459-472.
- OVERMEEREN, R.A. VAN (1975). A gravity investigation of the catazonal rocks complex at Cabo Ortegal (NW Spain). *Tectonophysics*, 26, 293-307.
- PERCHUK, L.L. (1977). Thermodynamic control of metamorphic processes. In: *Energetics of geodynamic processes*. Ed. Saxena SK. Bhattachanji, S. Springer Verlag, N.Y. 286-352.
- PERCHUK, L.I.; PODLESSKII, K.K. & ARANOVICH, L.Y. (1981). Calculation of thermodynamic properties of end-member minerals from natural paragenesis. In: *Thermodynamics of minerals and melts*. Ed. Newton, R.C., Navrotsky, A. Wood, B.J. Springer Verlarg, N.Y. 111-129.
- PLYUSNINA, L.P. (1982). Geothermometry and geobarometry of plagioclase-hornblende bearing assemblages. *Contr. Min. Petr.* 80, 140-146.
- SANCHEZ CELA, V. & APARICIO YAGUE, A. (1982). Feldspathic-quartz rocks, of sedimentary, metamorphic and igneous facies, in relation to granitization-transformation processes in the Hercynian massif of Spain. In: *Transformists Petrology*. Theophrastus publication, SA. Athens, 305 pp. Ed. F.D. Drescher-Kaden and SS Augustithis.
- VOGEL, D.E. (1967). Petrology of an eclogite and pyrigarnite-bearing polymetamorphic rock complex at Cabo Ortegal, NW Spain. *Leidse Geol. Med.* 10, 121-213.
- VOGEL, D.E. & GALICK, G.D. (1979). Oxygen-isotope ratios in metamorphic eclogites. *Contr. Min. Petr.* 28, 183-191.
- VOGEL, D.E. & WARNAARS, F.W. (1967). Metaolivine gabbro from Cabo Ortegal NW Spain: a case of incipient eclogitization. *N. Jb. Min. Mh.* 110-115.

VOGEL, D.E.; ENGELS, J.P. & DEN TEX, E. (1983). El Complejo de Cabo Ortegal. Geología de España. T.I., IGME. 440-449 pp.

WELLS P.R.A. & RICHARDSON, S.W. (1979). Thermal evolution of metamorphic rocks in the central Highlands of Scotland. In: The caledonides of the British Isles reviewed. Ed. Harris A. L., Holland CH and Leake, B.E. Spes. Publ. Geol. Soc. London nº 8. 339-344.

ZAMARREÑO, I. (1983). Estratigrafía del Paleozoico en el Macizo Ibérico. Geología de España. Libro Jubilar, J.M. Ríos, IGME, 117-191

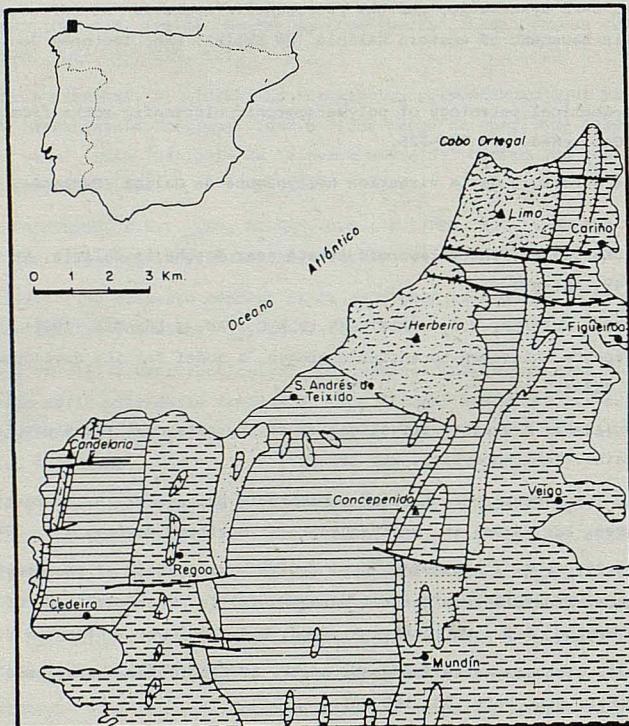
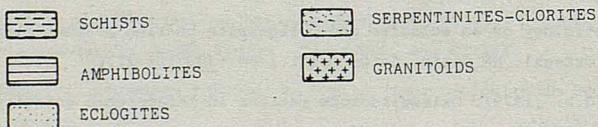


FIG. 1. Schematic geological map of Cabo Ortegal



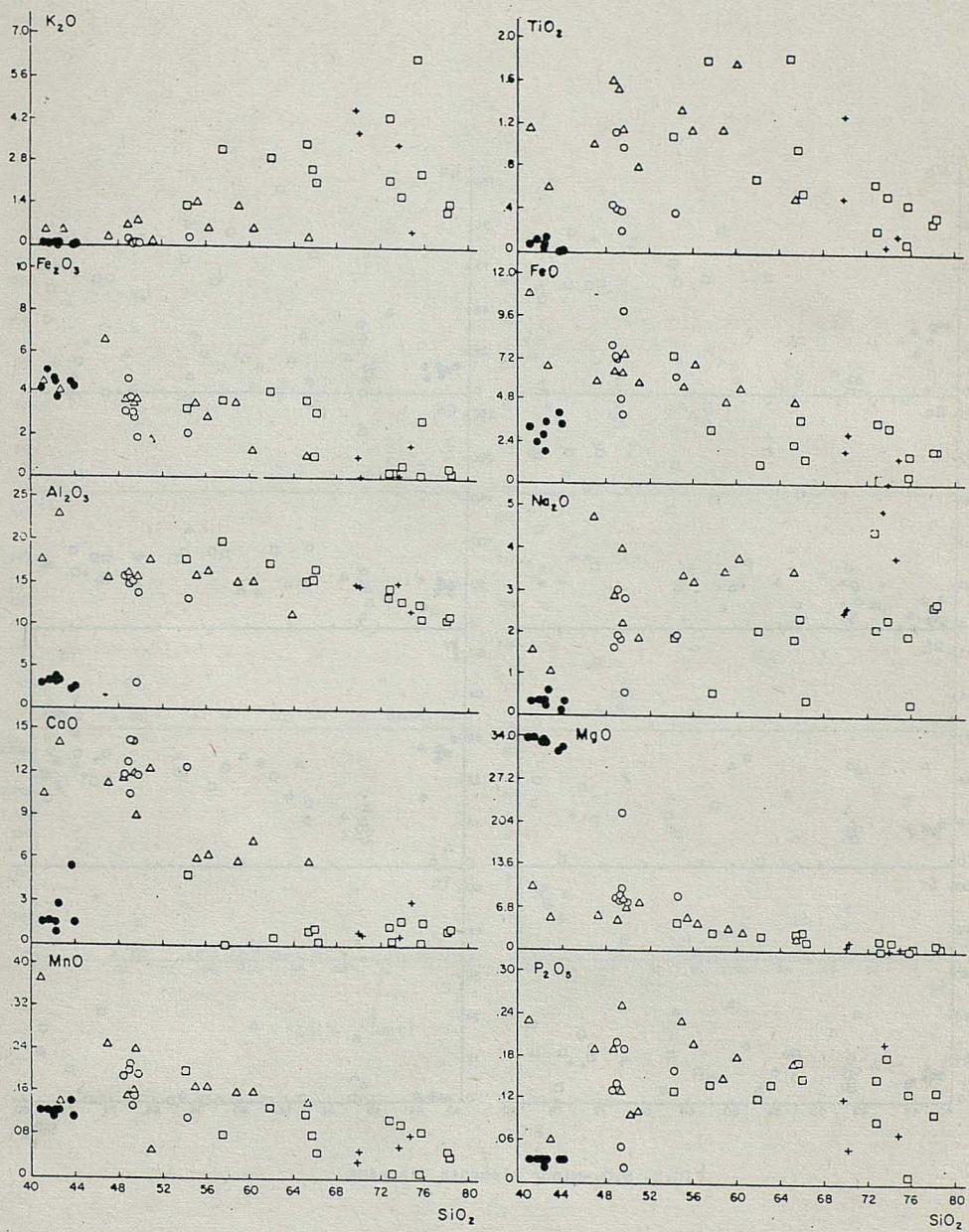


FIG. 2- SiO_2 - oxides diagrams. Δ = amphibolites; \square = schists; $+$ = granites;
 ● = serpentinites-chloritites; \circ = granulites-eclogites.

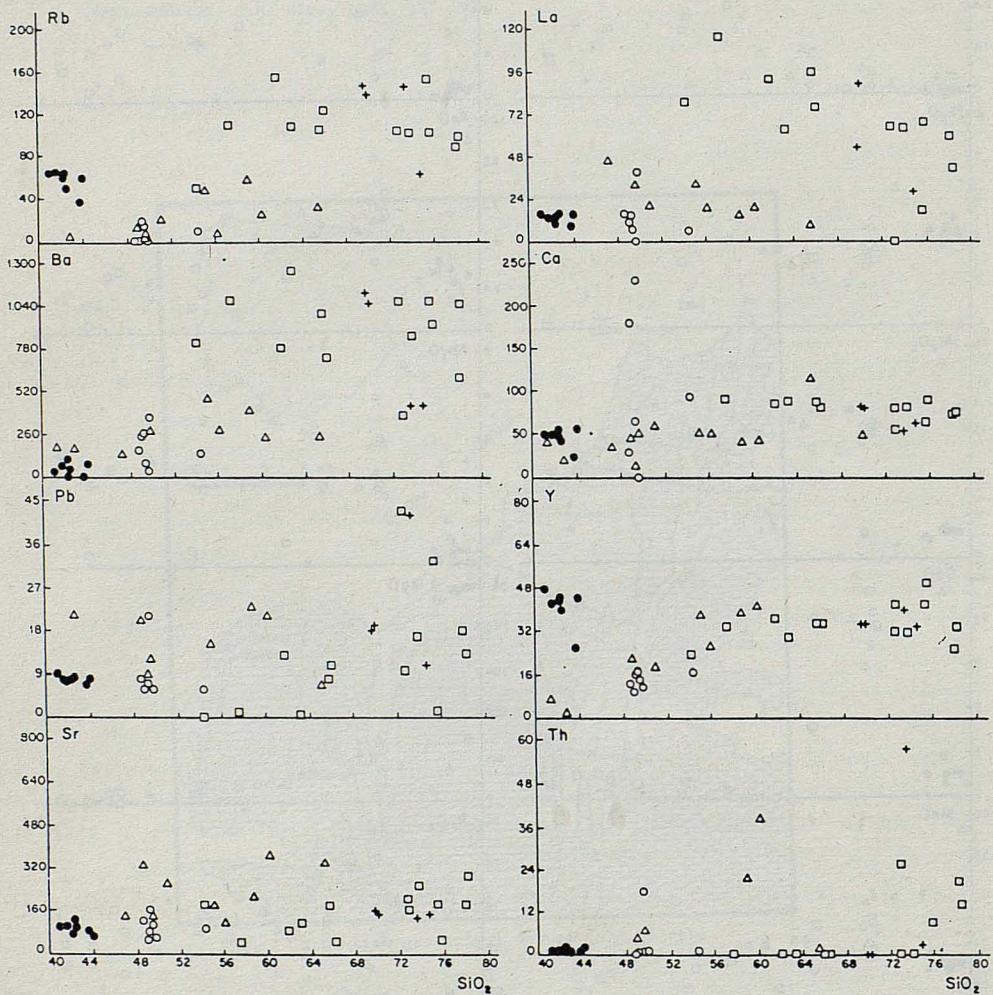


FIG.3- SiO_2 -minor elements diagrams

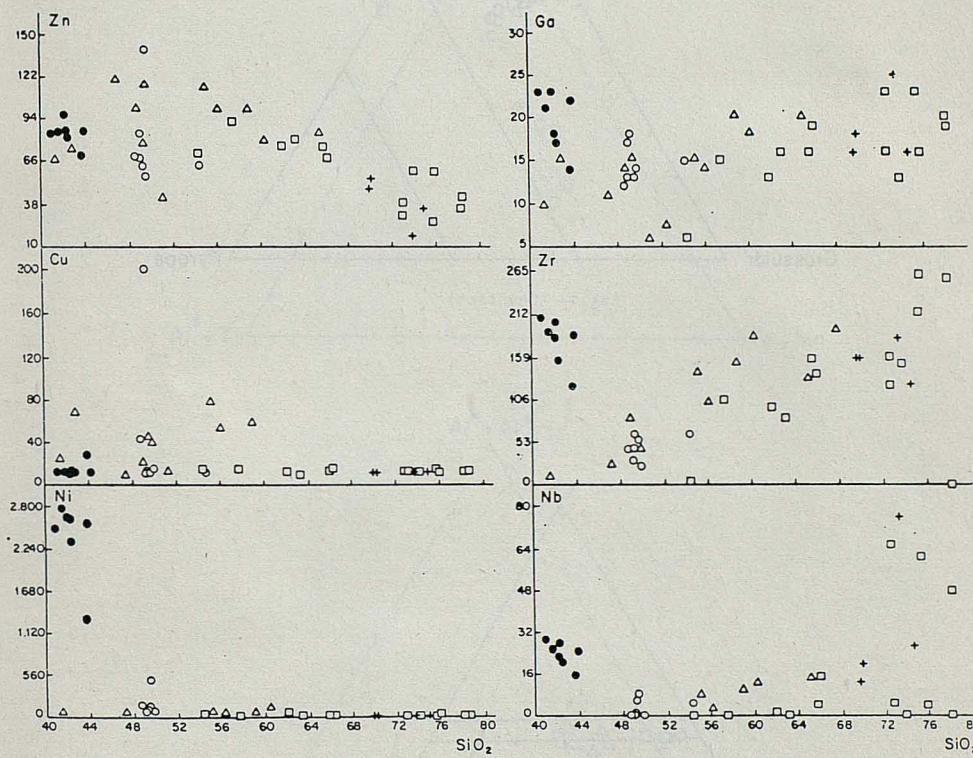


FIG. 3- (Cont)

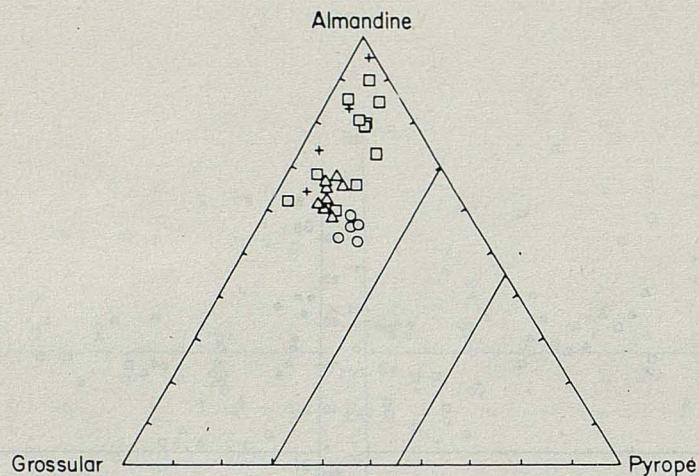


Fig.4- (See text)

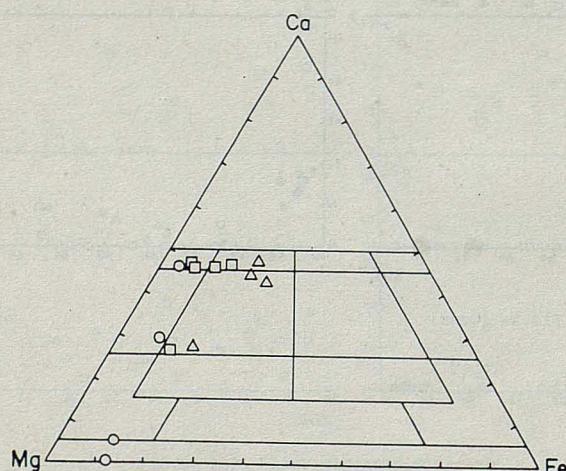


Fig.5- (See text)

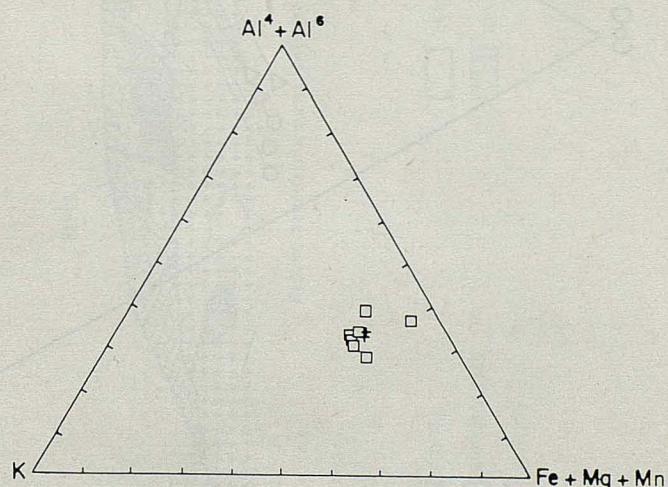
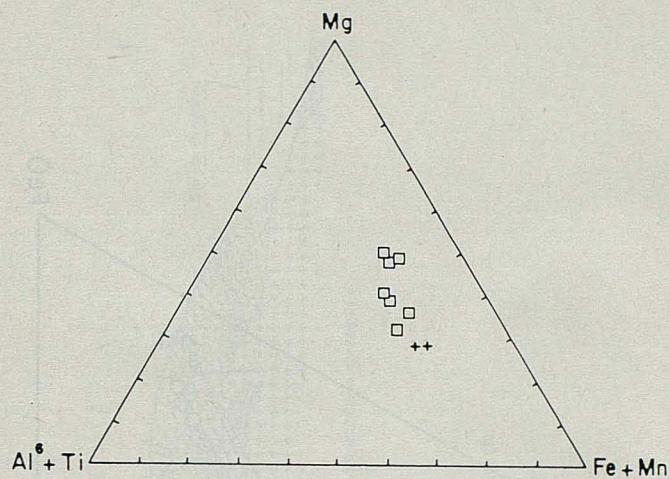


Fig.6- (See text)

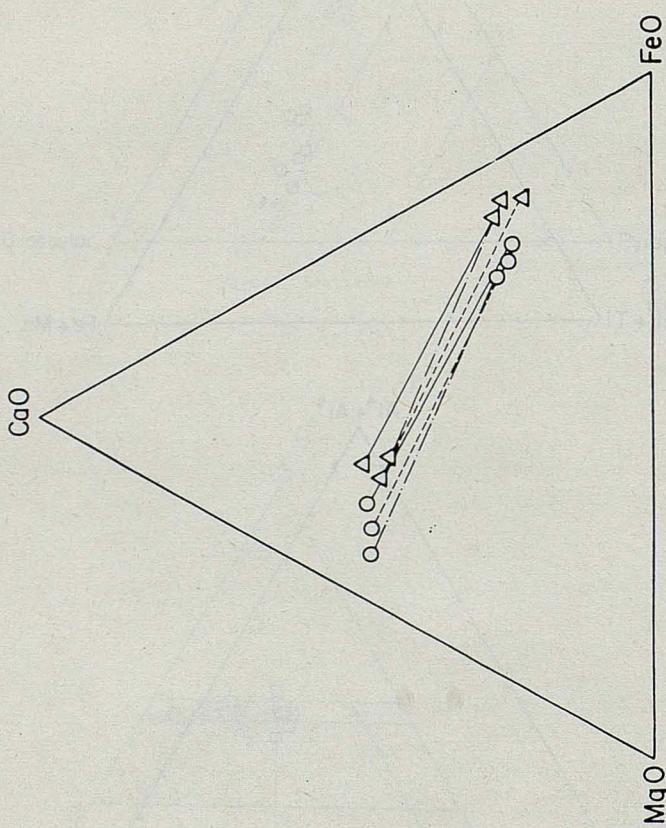


Fig. 7 (See text)

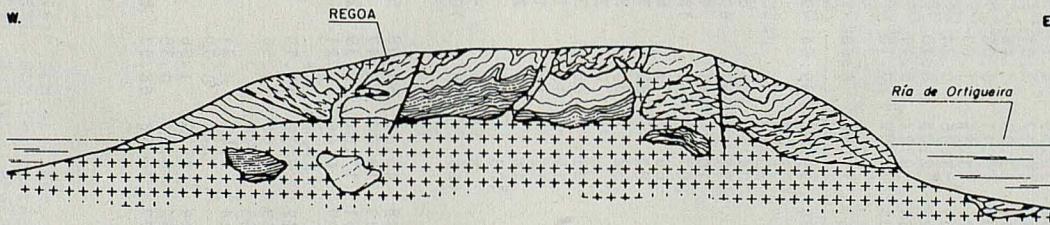


FIG.8- Petrostructural interpretation at Cabo Ortegal.

[diagonal lines]	SLATES
[horizontal lines]	AMPHIBOLITES
[vertical lines]	SCHISTS
[cross-hatch]	SERPENTINITES
[plus signs]	GRANITES

TABLE 1
Chemical composition of schists (Analyst M. Vallejo; CSIC)

Sample	1866	1869	1872	1889	1892	1894	1899	1909	1910	1943
SiO ₂	54.50	75.90	62.10	74.00	75.70	72.90	66.30	78.20	78.45	73.04
TiO ₂	1.09	0.46	0.71	0.55	0.10	0.65	0.56	0.30	0.34	0.23
Al ₂ O ₃	17.68	11.22	17.43	13.21	12.92	13.59	16.77	10.86	11.29	14.64
Fe ₂ O ₃	3.18	2.75	4.12	0.58	0.10	0.17	3.07	0.41	0.17	0.16
FeO	7.38	1.61	1.17	3.21	0.48	3.53	1.48	1.92	1.90	0.31
MnO	0.20	0.09	0.13	0.10	0.01	0.11	0.05	0.05	0.04	0.01
MgO	4.72	0.73	2.57	1.82	0.26	1.95	1.83	1.07	1.02	0.36
CaO	4.79	1.78	0.57	1.83	0.27	1.16	0.24	1.07	1.28	0.46
Na ₂ O	1.89	0.32	2.07	2.36	1.95	2.08	0.40	2.64	2.70	4.42
K ₂ O	1.31	2.46	2.94	1.73	6.31	2.24	2.11	1.16	1.43	4.34
P ₂ O ₅	0.13	0.13	0.12	0.18	0.01	0.09	0.15	0.10	0.13	0.15
CO ₂	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
H ₂ O	3.07	2.30	5.83	0.14	1.67	1.06	6.68	1.99	1.10	1.50
TOTAL	99.94	99.75	99.76	99.71	99.78	99.83	99.64	99.77	99.85	99.62

Rb	50	102	156	103	153	104	124	89	99	200
Ba	815	931	788	863	1072	1071	732	607	1056	376
Pb	—	1	13	17	33	10	11	18	13	43
Sr	185	53	87	255	194	207	44	189	295	164
La	79	69	93	65	19	66	77	61	43	1
Ce	92	90	85	82	65	80	82	75	76	56
Y	24	50	37	32	42	32	35	26	34	42
Th	—	—	—	—	9	—	—	21	14	26
Zn	70	59	76	60	27	31	68	35	43	39
Cu	14	13	13	13	15	12	16	13	13	12
Ni	36	37	40	13	9	12	12	12	10	7
Ga	6	16	13	13	23	16	19	20	19	23
Zr	3	261	97	150	215	125	138	—	256	160
Nb	—	4	1	—	61	5	15	—	48	66
V	271	54	317	340	—	168	268	107	97	—

Q	17.24	60.05	34.10	45.39	38.98	43.96	53.08	53.53	52.07	29.59
Or	7.74	14.54	17.37	10.22	37.29	13.24	12.47	6.85	8.45	25.65
Ab	16.00	2.71	17.52	19.98	16.51	17.61	3.39	22.35	22.85	37.41
An	22.91	7.98	2.04	7.90	1.27	6.66	0.21	4.66	5.50	1.30
Ne	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
C	4.76	5.11	10.09	4.56	2.42	5.30	13.75	3.56	3.28	2.19
En	11.75	1.82	6.40	4.53	0.65	4.86	4.56	2.66	2.54	0.90
Fs	9.50	0.09	—	4.59	0.65	5.47	—	2.78	2.86	0.08
Mt	4.61	3.99	2.14	0.84	0.14	0.25	3.31	0.59	0.25	0.23
Hm	—	—	2.65	—	—	0.79	—	—	—	—
Ilm	2.07	0.87	1.35	1.04	0.19	1.23	1.06	0.57	0.65	0.44
Ap	0.30	0.30	0.28	0.42	0.02	0.21	0.35	0.23	0.30	0.35
I.D.	40.98	77.29	68.99	75.59	92.77	74.80	68.93	82.73	83.38	92.65

- 1866) Schist. Loc. Pasada dos Mestas.
- 1869) Schist. Meizoso.
- 1872) Schist. Meizoso.
- 1889) Schist gneísmico. Uzal.
- 1892) Schist gneísmico. Malde.
- 1894) Schist. Coto de Poula.
- 1899) Schist. Nogueira-Regoa.
- 1909) Schist. Cañotas.
- 1910) Schist. San Julián del Trebol.
- 1943) Gneis. Regoa-Boriza.

TABLE 1
Chemical composition of schists (Analyst M. Vallejo; CSIC)

Sample	1946	1958	1999
SiO ₂	65.35	65.90	57.71
TiO ₂	1.85	0.97	1.81
Al ₂ O ₃	15.51	15.62	19.94
Fe ₂ O ₃	3.58	1.04	3.59
FeO	2.33	3.74	3.11
MnO	0.12	0.08	0.08
MgO	2.88	3.14	3.03
CaO	1.17	1.28	0.10
Na ₂ O	1.86	2.36	0.56
K ₂ O	3.40	2.56	3.16
P ₂ O ₅	0.14	0.17	0.14
CO ₂	—	—	—
H ₂ O	1.56	2.99	6.55
TOTAL	99.75	99.85	99.78
Rb	109	105	110
Ba	1258	998	1081
Pb	—	8	1
Sr	112	185	42
La	64	97	116
Ce	88	87	90
Y	30	35	34
Th	—	—	—
Zn	80	75	91
Cu	10	12	15
Ni	17	17	18
Ga	16	16	15
Zr	84	158	106
Nb	—	4	—
V	213	253	276
Q	35.12	33.36	38.02
Or	20.09	15.13	18.67
Ab	15.74	19.98	4.74
An	4.89	5.24	—
Ne	—	—	—
C	6.98	7.05	15.75
En	7.17	7.82	7.55
Fs	—	4.56	—
Mt	2.54	1.51	5.04
Hm	1.83	—	0.12
Ilm	3.51	1.84	3.44
Ap	0.32	0.39	0.32
I.D.	70.95	68.46	61.44

1946) Schist . Barrosas.
 1958) Schist . Casal de Marí.
 1999) Schist . Punta de Fornelo.

TABLE 1

Chemical composition of amphibolites (Analyst M. Vallejo; CSIC)

Sample	1906	1919	1926	1868	1879	1881	1885	1934
SiO ₂	55.30	41.40	47.30	49.90	43.00	59.10	65.50	60.47
TiO ₂	1.34	1.14	1.01	1.15	0.61	1.16	0.50	1.79
Al ₂ O ₃	15.87	17.67	15.65	15.55	23.11	15.15	15.52	15.26
Fe ₂ O ₃	3.41	4.46	6.54	3.55	4.01	3.51	1.00	1.26
FeO	5.53	10.89	5.82	7.50	6.81	4.61	4.65	5.41
MnO	0.17	0.37	0.25	0.24	0.14	0.16	0.14	0.16
MgO	4.97	9.90	5.57	6.86	5.13	3.73	2.35	3.20
CaO	6.05	10.47	11.21	8.90	14.08	5.80	5.87	7.25
Na ₂ O	3.31	1.59	4.69	3.99	1.07	3.43	3.46	3.76
K ₂ O	1.34	0.48	0.24	0.80	0.50	1.28	0.29	0.59
P ₂ O ₅	0.23	0.23	0.19	0.25	0.06	0.15	0.17	0.18
CO ₂	-	-	-	-	-	-	-	-
H ₂ O	2.22	1.28	1.33	1.10	1.41	1.56	0.51	0.44
TOTAL	99.74	99.88	99.80	99.79	99.93	99.64	99.96	99.77
Rb	47	-	-	6	2	57	33	26
Ba	475	171	141	285	175	398	252	245
Pb	15	-	-	12	21	23	7	21
Sr	175	6	140	55	764	210	339	361
La	33	29	46	33	14	15	9	19
Ce	49	41	33	49	19	40	114	42
Y	38	6	76	18	2	39	33	41
Th	8	-	-	-	-	22	1	38
Zn	114	67	119	117	73	99	84	79
Cu	78	24	8	40	69	60	10	2
Ni	55	48	60	96	12	35	13	109
Ga	15	10	11	13	15	20	20	16
Zr	141	9	25	45	-	151	134	184
Nb	8	-	-	-	-	10	14	12
V	594	929	961	816	729	415	2	620
O	9.59	-	-	-	-	16.11	25.85	16.25
Or	7.92	2.84	1.42	4.73	2.95	7.56	1.71	3.49
Ab	28.02	11.00	26.93	33.77	9.06	29.03	29.29	31.83
An	24.49	39.66	20.94	22.16	56.78	22.16	25.96	23.02
Ne	-	1.33	6.92	-	-	-	-	-
C	-	-	-	-	-	-	-	-
Den	2.35	5.72	21.26	11.18	6.57	3.31	0.83	5.74
Dfs	0.90	3.06	5.45	5.35	3.78	1.23	0.88	3.92
En	11.29	-	-	0.51	1.08	7.75	5.47	5.31
Fs	4.96	-	-	0.28	0.72	3.29	6.68	4.15
Fo	-	15.42	2.81	7.98	6.06	-	-	-
Fa	-	10.42	0.91	4.83	4.41	-	-	-
Mt	4.94	6.47	9.48	5.15	5.81	5.09	1.45	1.83
Ilm	2.54	2.17	1.92	2.18	1.16	2.20	0.95	3.40
Ap	0.53	0.53	0.44	0.58	0.14	0.35	0.39	0.42
I.D.	45.53	15.17	35.26	38.50	12.01	52.71	56.86	51.56

1906) Amphibolite. Castro.

1919) Amphibolite. Renedos de San Julián.

1926) Amphibolite. San Román.

1868) Amphibolite. Meizoso.

1879) Amphibolite. Teixidelo.

1881) Amphibolite. Teixidelo.

1885) Amphibolite. Crucero Los Carris.

1934) Amphibolite. Tojo.

TABLE 1
Chemical composition of amphibolites (Analyst M. Vallejo; CSIC)

Sample	1938	1940	1949	1953
SiO ₂	49.58	51.17	49.08	56.30
TiO ₂	1.54	0.80	1.61	1.16
Al ₂ O ₃	15.32	17.71	16.14	16.31
Fe ₂ O ₃	3.48	1.72	3.62	2.78
FeO	6.29	5.76	6.49	6.89
MnO	0.16	0.05	0.15	0.17
MgO	8.17	7.70	5.09	4.68
CaO	11.98	12.25	11.56	6.27
Na ₂ O	2.19	1.88	2.88	3.22
K ₂ O	0.10	0.12	0.65	0.54
P ₂ O ₅	0.13	0.10	0.19	0.20
CO ₂	-	-	-	-
H ₂ O	1.04	0.66	2.24	1.44
TOTAL	99.98	99.92	99.70	99.96
Rb	2	19	13	7
Ba	58	-	257	288
Pb	9	-	20	11
Sr	139	262	333	112
La	-	21	13	20
Ce	14	58	44	50
Y	17	19	22	27
Th	6	-	4	-
Zn	77	43	100	100
Cu	43	13	20	55
Ni	109	14	35	39
Ga	15	6	14	14
Zr	45	-	82	103
Nb	2	-	2	3
V	1309	159	832	576
Q	1.86	3.17	.0.85	11.96
Or	0.59	0.71	3.84	3.19
Ab	18.54	15.91	24.38	27.26
An	31.68	39.53	29.19	28.45
Ne	-	-	-	-
C	-	-	-	-
Den	16.88	12.19	15.04	0.67
Dfs	4.65	4.39	6.77	0.44
En	12.52	13.53	5.70	11.35
Fs	3.96	5.59	2.95	8.52
Mt	5.05	2.49	5.25	4.03
Ilm	2.92	1.52	3.06	2.20
Ap	0.30	0.23	0.44	0.45
I.D.	20.99	19.79	29.07	42.41

1938) Amphibolite. Loc. Purrico.
 1940) Amphibolite. Loc. Faro Candelaria.
 1949) Amphibolite. Loc. Landoy
 1953) Amphibolite. Loc. Vieiteiras.

TABLE 1

Chemical composition of granulites-eclogites (Analyst M. Vallejo; CSIC)

Sample	1931	1950	1865	1876	1912	1997	1951
SiO ₂	49.22	49.53	48.90	49.70	49.30	50.02	54.60
TiO ₂	1.12	0.39	0.43	0.21	0.40	0.97	0.35
Al ₂ O ₃	14.82	15.13	15.75	3.17	15.66	13.73	13.16
Fe ₂ O ₃	4.65	3.01	3.04	2.82	3.68	1.80	2.05
FeO	7.27	4.71	7.93	3.88	7.20	9.92	6.04
MnO	0.20	0.13	0.19	0.15	0.21	0.19	0.11
MgO	7.72	9.74	8.34	21.86	8.74	7.55	8.52
CaO	12.71	14.17	11.74	14.07	10.43	11.84	12.33
Na ₂ O	1.91	1.84	1.67	0.56	3.01	2.84	1.92
K ₂ O	0.05	0.12	0.15	0.08	0.10	0.08	0.23
P ₂ O ₅	0.14	0.05	0.13	0.02	0.20	0.19	0.16
CO ₂	-	-	-	-	-	-	-
H ₂ O	0.12	1.12	1.51	2.77	0.89	0.81	0.38
TOTAL	99.93	99.94	99.78	99.29	99.82	99.94	99.85

Rb	-	17	1	14	-	-	9
Ba	256	81	168	27	259	367	152
Pb	6	7	8	21	6	6	6
Sr	52	159	118	107	79	53	92
La	11	7	16	-	15	40	6
Ce	181	65	29	-	180	231	95
Y	10	17	13	14	16	12	17
Th	1	1	-	18	1	1	1
Zn	68	62	69	56	84	141	63
Cu	11	11	44	200	13	15	12
Ni	75	120	144	486	93	71	96
Ga	13	18	12	13	17	14	15
Zr	28	60	42	56	44	23	63
Nb	-	6	-	8	1	-	5
V	6	7	1351	11623	6	6	6

Q	2.49	-	0.90	-	-	-	7.01
Or	0.30	0.71	0.89	0.47	0.59	0.47	1.36
Ab	16.17	15.57	14.14	4.74	25.84	24.04	16.25
An	31.72	32.67	35.04	5.90	28.92	24.48	26.61
C	-	-	-	-	-	-	-
Den	17.97	24.59	12.18	46.56	12.44	15.80	19.71
Dfs	6.54	5.09	5.98	3.52	4.94	11.34	7.31
En	10.90	10.21	15.12	17.44	7.89	5.71	12.08
Fs	4.55	2.42	8.51	1.51	3.59	4.70	5.14
Fo	-	1.86	-	10.80	5.68	4.04	-
Fa	-	0.49	-	1.03	2.85	3.67	-
Mt	6.74	4.36	4.41	4.09	5.34	2.61	2.97
Ilm	2.13	0.74	0.82	0.40	0.76	1.84	0.66
Ap	0.32	0.12	0.30	0.05	0.46	0.44	0.37
I.D.	18.95	16.28	15.92	5.21	26.07	24.51	24.63

- 1931) Eclogite. Cota 483.
 1950) Granulite. Sismundi.
 1865) Eclogite. Barreiras.
 1876) Eclogite. Coto Amengiro.
 1912) Eclogite. Coto Ortegal.
 1997) Eclogite. Casario La Cruz.
 1951) Granulite. Sismundi.

TABLE 1
Chemical composition of serpentinites (Analyst M. Vallejo; CSIC)

Sample	1867	1870	1888	1901	1902	1982	1980
SiO ₂	41.87	42.67	42.51	43.97	41.25	44.23	42.43
TiO ₂	0.09	0.12	0.04	-	0.07	0.01	0.02
Al ₂ O ₃	3.44	3.41	3.22	2.46	3.11	2.72	3.81
Fe ₂ O ₃	5.04	3.73	4.48	4.38	4.20	4.23	4.57
FeO	2.43	3.48	1.85	3.92	3.17	3.39	2.82
MnO	0.12	0.12	0.12	0.14	0.12	0.11	0.11
MgO	33.74	33.05	33.54	31.64	33.62	32.40	33.23
CaO	1.64	2.73	0.87	5.30	1.52	1.56	1.50
Na ₂ O	0.36	0.60	0.22	0.10	0.35	0.33	0.37
K ₂ O	0.50	0.10	0.01	-	0.05	0.05	0.09
P ₂ O ₅	0.03	0.03	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03
CO ₂	-	-	-	-	-	-	-
K ₂ O	10.72	9.47	12.70	7.70	12.09	10.36	10.78
TOTAL	99.98	99.51	99.58	99.64	99.58	99.42	99.76

Rb	64	50	64	36	64	59	60
Ba	63	47	3	-	28	77	108
Pb	8	8	8	7	9	8	6
Sr	99	90	117	80	100	64	72
La	14	16	15	9	16	16	10
Ce	49	43	45	23	49	56	53
Y	42	40	44	26	47	44	43
Th	1	1	1	1	1	2	2
Zn	85	82	86	70	84	85	96
Cu	12	12	12	27	11	11	11
Ni	2763	2344	2622	1291	2520	2578	2657
Ga	21	17	18	14	23	22	23
Zr	191	156	203	123	208	186	182
Nb	26	21	28	15	29	25	23
V	34	35	36	22	32	41	40

Q	-	-	-	-	-	-	-
Or	2.95	0.59	0.06	-	0.30	0.30	0.53
Ab	3.05	5.08	1.86	0.85	2.96	2.79	3.13
An	6.29	6.32	4.19	6.26	6.77	5.79	7.25
C	-	-	1.31	-	-	-	0.45
Den	1.28	5.31	-	14.89	0.44	1.33	-
Dfs	-	0.19	-	0.63	0.01	0.04	-
En	31.25	27.24	48.09	31.60	33.67	46.32	38.48
Fs	0.14	1.10	-	1.54	0.99	1.67	0.73
Fo	36.57	36.86	24.84	28.24	34.94	23.66	31.03
Fa	0.18	1.65	-	1.52	1.13	0.94	0.65
Mt	7.31	5.41	6.24	6.35	6.09	6.13	6.63
Hm	-	-	0.18	-	-	-	-
Ilm	0.17	0.23	0.08	-	0.13	0.02	0.04
Ap	0.07	0.07	0.05	0.07	0.07	0.07	0.07
I.D.	6.00	5.67	1.92	0.85	3.26	3.09	3.66

- 1867) Serpentinite. Basada das Mestas.
- 1870) Serpentinite. Meizoso.
- 1888) Serpentinite. Cruceiro Los Carris.
- 1901) Serpentinite. Hcubeira.
- 1902) Serpentinite. Cantiles del Cuadro.
- 1982) Serpentinite. Jubia.
- 1980) Serpentinite. Jubia.

TABLE 1
Chemical composition of granites (Analyst M. Vallejo; CSIC)

	<u>1897</u>	<u>1898</u>	<u>1915</u>	<u>1942</u>
SiO ₂	73.80	69.95	74.85	70.20
TiO ₂	0.08	0.52	0.17	1.29
Al ₂ O ₃	15.11	14.96	12.05	14.83
Fe ₂ O ₃	0.10	0.99	1.52	0.04
FeO	0.16	1.89	1.54	2.90
MnO	0.06	0.03	0.08	0.05
MgO	0.12	0.89	0.57	1.52
CaO	0.78	0.99	3.11	0.84
Na ₂ O	4.87	2.48	3.77	2.58
K ₂ O	3.39	4.55	0.52	3.82
P ₂ O ₅	0.20	0.12	0.07	0.05
CO ₂	—	—	—	—
H ₂ O	1.10	2.19	1.56	1.71
	99.77	99.56	99.81	99.83
Rb	147	146	63	139
Ba	432	1125	439	1054
Pb	42	18	11	19
Sr	134	161	147	153
La	—	54	29	90
Ce	54	82	63	80
Y	40	35	34	35
Th	58	—	3	—
Zn	17	48	35	54
Cu	12	11	12	11
Ni	8	8	9	9
Ga	25	16	16	18
Zr	182	158	125	158
Nb	76	13	27	20
V	10	48	49	62
Q	31.13	34.16	43.08	35.17
Or	20.03	26.89	3.07	22.57
Ab	41.22	20.99	31.91	21.84
An	2.56	4.13	14.42	3.84
C	2.49	4.44	—	5.04
Den	—	—	0.24	—
Dfs	—	—	0.21	—
En	0.30	2.22	1.31	3.79
Fs	0.19	1.85	1.33	3.25
Mt	0.14	1.44	2.20	0.06
Ilm	0.15	0.99	0.32	2.45
Ap	0.46	0.28	0.16	0.12
I.D.	92.33	82.04	78.07	79.58

1897) Granite. Barrosas.

1898) Granite. La Regoa-Nogueira.

1915) Granite (plagioclásico) Penedos-San Juan.

1942) Granite. Regoa-Boriza.

TABLE 2
Chemical composition of garnets (Analyst J. de la Puente; CSIC)*

Sample	1866	1869	1872	1889	1894	1897	1898	1910	1915	1909	1943	1958	1942	1999	1946
SiO ₂	37.35	32.29	37.02	38.07	37.56	42.92	38.54	37.03	35.28	38.46	37.39	39.42	37.78	38.10	38.73
Al ₂ O ₃	25.66	23.19	24.50	26.27	24.92	20.43	22.91	24.55	24.75	23.19	23.18	24.30	24.03	23.51	23.41
FeO	22.22	26.02	30.04	23.57	29.88	26.60	24.86	28.40	26.52	26.06	34.35	27.86	27.35	32.20	31.16
MgO	3.68	1.12	3.07	4.06	2.97	0.90	1.16	1.11	1.80	1.74	1.63	4.31	1.47	2.89	2.43
CaO	8.87	13.25	3.36	6.53	3.84	0.41	8.03	3.99	10.65	8.94	1.53	3.95	3.99	1.81	3.78
MnO	1.25	1.54	2.43	1.57	1.64	7.94	4.86	5.79	0.72	1.32	1.50	0.73	5.86	1.36	0.76
TiO ₂	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TOTAL	99.06	100.43	100.45	100.09	100.82	99.22	100.38	100.89	99.72	97.73	99.60	100.59	100.19	99.88	100.31
Si	5.794	5.627	5.817	5.831	5.849	6.744	6.051	5.844	5.599	6.032	5.988	6.049	5.969	6.011	6.065
Al ⁴	0.206	0.373	0.183	0.169	0.151	-	-	0.156	0.401	-	0.012	-	0.031	-	-
Al ⁶	4.509	4.006	4.376	4.597	4.445	3.803	4.261	4.434	4.251	4.308	4.386	4.417	4.467	4.394	4.343
Fe	2.882	3.469	3.948	3.019	3.891	3.496	3.265	3.748	3.520	3.418	4.601	3.575	3.614	4.248	4.081
Mg	0.851	0.266	0.721	0.927	0.690	0.212	0.273	0.261	0.426	0.407	0.389	0.985	0.270	0.679	0.567
K	1.474	2.264	0.565	1.072	0.641	0.069	1.351	0.675	1.812	1.503	2.262	0.650	0.675	0.306	0.635
Mn	0.164	0.209	0.342	0.204	0.216	1.057	0.647	0.774	0.098	0.176	0.204	0.095	0.785	0.182	0.101
Ti	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Alm.	56.86	58.41	73.60	61.09	74.20	73.15	61.03	70.26	62.86	64.72	85.90	70.72	68.38	80.83	78.26
Pyropo	13.59	3.62	10.85	15.19	10.64	3.57	4.11	3.96	6.15	6.23	5.88	15.79	5.30	-10.47	8.81
Gross.	26.31	34.48	9.54	19.62	11.05	1.30	22.85	11.44	29.26	25.74	4.43	11.62	11.56	5.26	11.00
Esp.	3.21	3.47	5.98	4.09	4.09	21.96	12.00	14.33	1.71	3.29	3.77	1.86	14.74	3.43	1.91

* Number of ions on the basis of 24(O).

TABLE 2
Chemical composition of biotites (Analyst J. de la Puente; CSIC)

Sample	1866	1942	1894	1909	1898	1889	1946	1910	1958
SiO ₂	32.75	31.07	35.66	33.87	32.23	37.22	35.46	33.27	36.46
Al ₂ O ₃	22.21	19.50	18.46	22.92	18.96	16.19	18.77	20.53	19.42
FeO	20.96	24.27	15.84	21.96	22.86	16.42	18.18	21.53	17.67
MgO	14.89	7.08	12.70	8.63	7.04	12.03	9.53	9.37	10.32
K ₂ O	3.02	8.98	10.48	7.37	9.43	9.96	10.33	9.79	10.39
MnO	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TiO ₂	1.79	4.39	2.65	1.78	4.74	4.14	3.90	2.92	2.44
H ₂ O	4.06	3.80	3.99	4.01	3.87	4.01	3.97	3.96	4.02
TOTAL	99.70	99.12	99.83	100.57	100.06	99.99	100.17	101.39	100.76
Si	4.831	4.889	5.342	5.072	4.980	5.558	5.344	5.032	5.429
Al ⁴	3.169	3.111	2.658	2.928	3.020	2.442	2.656	2.968	2.571
Al ⁶	0.711	0.523	0.619	1.138	0.616	0.421	0.694	0.709	0.855
Fe	2.586	3.194	1.984	2.751	2.955	2.051	2.291	2.723	2.200
Mg	3.275	1.660	2.837	1.928	1.623	2.677	2.140	2.112	2.291
K	0.568	1.802	2.004	1.408	1.859	1.898	1.986	1.889	1.973
Mn	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Ti	0.199	0.519	0.299	0.201	0.551	0.465	0.443	0.332	0.274
OH	4	4	4	4	4	4	4	4	4

*Number of ions on the basis of 24(O), 4(OH).

TABLE 2

Chemical composition of pyroxenes* (Analyst J. de la Puente; CSIC)

Sample	1870	1868	1867	1876-2	1876-3	1926	1931	1901	1902	1950	1997	1940	1934
SiO ₂	56.11	51.07	51.65	55.07	53.15	51.73	53.73	53.24	56.40	54.59	55.34	53.92	52.79
Al ₂ O ₃	3.37	7.15	10.54	7.11	2.09	9.98	8.77	1.13	—	7.16	9.45	6.20	6.43
FeO	7.69	9.67	4.60	6.48	3.51	9.70	5.09	2.72	7.70	3.35	5.76	8.70	9.66
MgO	31.93	10.38	19.25	19.42	16.97	8.35	11.16	19.02	32.70	13.01	9.10	18.10	9.48
CaO	—	17.78	12.69	11.74	23.09	14.09	16.55	24.34	2.98	17.63	14.87	12.34	18.23
Na ₂ O	—	2.90	1.20	—	—	5.88	4.09	—	—	3.66	5.57	0.48	2.50
K ₂ O	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
MnO	0.12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TiO ₂	—	—	—	—	—	0.24	0.16	—	—	0.14	0.10	0.24	0.39
TOTAL	99.24	98.98	99.96	99.83	98.83	100.00	99.58	100.47	99.79	99.57	100.21	100.01	99.51
Si	1.953	1.912	1.830	1.947	1.956	1.905	1.944	1.933	1.976	1.964	1.985	1.935	1.958
Al ⁴	0.047	0.088	0.170	0.053	0.044	0.095	0.056	0.043	—	0.036	0.015	0.065	0.042
Al ⁶	0.092	0.229	0.272	0.244	0.047	0.340	0.319	—	—	0.269	0.386	0.198	0.240
Fe	0.224	0.302	0.136	0.191	0.108	0.298	0.154	0.082	0.225	0.101	0.172	0.261	0.299
Mg	1.657	0.579	1.017	1.023	0.931	0.458	0.602	1.029	1.708	0.698	0.486	0.968	0.524
Ca	—	0.713	0.482	0.444	0.910	0.556	0.641	0.947	0.111	0.680	0.571	0.474	0.724
Na	—	0.211	0.082	—	—	0.419	0.287	—	—	0.255	0.387	0.033	0.180
K	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mn	0.003	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ti	—	—	—	—	—	0.006	0.004	—	—	—	0.002	0.006	0.011
Enst	87%	—	—	—	—	—	—	—	92%	88%	—	—	—

* Number of ions on the basis of 6(O).

TABLE 2
Chemical composition of plagioclases* (Analyst J. de la Puente; CSIC)

Sample	1897	1942	1943	1919	1885	1881	1949	1934	1940	1953
SiO ₂	65.80	64.97	67.65	61.18	61.29	68.50	63.75	62.78	52.75	61.46
Al ₂ O ₃	22.84	22.75	20.95	24.86	24.41	20.28	23.42	22.83	30.25	24.15
CaO	2.27	2.98	1.35	5.31	5.86	0.18	4.01	4.33	10.92	4.93
Na ₂ O	9.66	9.52	10.12	8.03	8.64	10.11	9.58	8.82	5.48	9.17
K ₂ O	0.16	0.19	0.62	—	0.24	—	0.08	0.36	—	0.30
TOTAL	100.76	100.43	100.71	99.40	100.46	99.08	100.87	99.14	99.41	100.04
Si	11.450	11.378	11.765	10.888	10.862	11.987	11.174	11.201	9.590	10.926
Al	4.707	4.719	4.315	5.241	5.124	4.204	4.862	4.824	6.515	5.085
Ca	0.424	0.559	0.252	1.013	1.112	0.184	0.754	0.828	2.127	0.939
Na	3.260	3.233	3.415	2.771	2.970	3.432	3.258	3.051	1.932	3.162
K	0.037	0.044	0.137	—	0.055	—	0.019	0.083	—	0.069
Ab	87.00	83.50	89.21	72.04	70.56	98.96	79.87	75.96	46.09	74.72
An	11.99	15.33	6.97	27.95	28.07	1.03	19.61	21.87	53.90	23.56
Or	1.00	1.16	3.80	—	1.36	—	0.51	2.15	—	1.70

* Number of ions on the basis of 32(O).

TABLE 2
Chemical composition of amphiboles* (Analyst J. de la Puente; CSIC)

Sample	1821	1879	1868	1865	1876-1	1919	1931	1934	1938	1906	1926	1885	1940	1949	1951	1950	1953	1997
SiO ₂	40.49	41.90	40.05	44.91	54.56	40.19	42.50	38.22	44.98	40.24	40.04	39.99	46.48	44.10	45.25	44.65	41.97	42.98
Al ₂ O ₃	16.91	20.22	15.90	14.04	1.09	17.22	14.90	15.75	13.26	17.16	16.37	16.44	12.26	16.19	14.37	13.55	15.11	15.86
FeO	17.91	9.15	15.70	8.73	11.79	13.36	10.98	17.61	13.57	17.04	17.57	17.33	11.24	13.23	8.13	7.21	15.07	11.39
MgO	9.38	11.23	11.03	15.94	31.84	11.69	15.25	10.58	12.03	9.61	8.97	9.28	13.56	10.00	16.68	18.16	10.08	12.79
CaO	10.83	12.39	10.97	10.48	0.35	10.22	10.55	11.19	12.10	10.40	9.44	10.77	12.03	10.97	10.43	11.03	11.26	10.47
Na ₂ O	1.34	1.59	2.15	2.76	—	2.31	2.83	1.95	1.31	1.45	3.54	1.86	1.01	1.17	2.32	2.27	1.67	3.11
K ₂ O	—	1.17	1.34	0.37	—	0.80	0.65	1.37	0.13	1.27	0.50	0.81	0.13	1.07	0.20	0.21	1.03	0.44
MnO	0.28	—	—	—	—	0.11	0.10	0.10	0.10	0.10	0.12	0.11	0.22	0.21	—	—	—	—
TiO ₂	1.15	0.98	1.29	0.71	—	1.40	0.69	2.03	0.56	1.46	1.96	1.44	0.67	1.30	0.57	0.56	1.45	0.90
H ₂ O	2.01	2.09	2.01	2.09	2.19	2.02	2.06	1.98	2.05	2.02	2.00	2.00	2.07	2.06	2.11	2.10	2.01	2.06
TOTAL	100.34	100.76	100.48	100.06	101.84	99.35	100.56	100.82	100.13	100.80	100.55	100.08	99.71	100.35	100.09	99.78	99.70	100.04
Si	6.018	5.985	5.964	6.418	7.436	5.950	6.152	5.756	6.549	5.968	5.978	5.990	6.705	6.397	6.424	6.363	6.234	6.237
Al ⁴	1.982	2.015	2.036	1.582	0.176	2.050	1.848	2.244	1.451	2.032	2.022	2.010	1.295	1.603	1.576	1.637	1.766	1.763
Al ⁶	0.995	1.406	0.769	0.795	—	0.969	0.707	0.566	0.836	0.983	0.873	0.908	0.801	1.179	0.840	0.651	0.893	0.964
Fe	2.220	1.093	1.955	1.043	1.343	1.654	1.329	2.218	1.652	2.114	2.195	2.171	1.357	1.605	0.966	0.859	1.872	1.382
Mg	2.079	2.392	2.448	3.395	6.468	2.580	3.291	2.375	2.612	2.126	1.996	2.073	2.916	2.162	3.529	3.857	2.233	2.766
Ca	1.720	1.896	1.751	1.605	0.051	1.621	1.636	1.806	1.887	1.653	1.511	1.729	1.859	1.706	1.586	1.685	1.792	1.628
Na	0.388	0.440	0.622	0.766	—	0.665	0.794	0.572	0.371	0.419	1.025	0.540	0.284	0.331	0.641	0.628	0.482	0.876
K	—	0.213	0.255	0.068	—	0.151	0.120	0.263	0.024	0.241	0.095	0.156	0.024	0.199	0.023	0.038	0.195	0.081
Mn	0.035	—	—	—	—	0.014	0.012	0.012	0.012	0.012	0.015	0.014	0.027	0.026	—	—	—	—
Ti	0.128	0.106	0.144	0.076	—	0.156	0.075	0.230	0.061	0.163	0.220	0.163	0.073	0.142	0.061	0.060	0.162	0.098
OH	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

* Number of ions on the basis of 24(O), 2(OH).

TABLE 2

Chemical composition of potassium feldspars* (Analyst J. de la Puente; CSIC)

Sample	<u>1898</u>	<u>1942</u>	<u>1943</u>
SiO ₂	62.68	61.93	62.84
Al ₂ O ₃	19.56	19.42	19.26
CaO	0.15	0.10	0.27
Na ₂ O	1.18	1.00	1.23
K ₂ O	<u>16.12</u>	<u>15.80</u>	<u>15.72</u>
TOTAL	99.71	98.27	99.33
Si	11.692	11.701	11.742
Al	4.321	4.346	4.263
Ca	0.031	0.021	0.054
Na	0.429	0.368	0.446
K	3.836	3.807	3.747
Ab	9.41	8.26	9.94
An	0.69	0.47	1.27
Or	89.88	91.25	88.78

* Number of ions on the basis of 32(O).

TABLE 2

Chemical composition of chlorites and serpentines (Analyst J. de la Puente; CSIC)

Sample	Chlorites**		Serpentine*
	1870	1867	1888
SiO ₂	29.10	27.94	42.54
Al ₂ O ₃	18.51	21.05	0.77
FeO	4.01	3.98	6.16
MgO	33.13	32.44	32.51
MnO	0.21	-	-
TiO ₂	-	-	-
H ₂ O	17.24	17.35	11.98
TOTAL	102.24	102.78	93.98
Si	4.045	3.859	2.126
Al ⁴	3.048	3.444	-
Al ⁶	-	-	0.045
Fe	0.466	0.459	0.257
Mg	6.865	6.680	2.421
Mn	0.025	-	-
Ti	-	-	-
OH	16	16	4

* Numbers of ions on the basis of 9(O), 4(OH).

** Numbers of ions on the basis of 36(O), 16(OH).

TABLE 2
Chemical composition of olivines* (Analyst J. de la Puente; CISC)

Sample	<u>1980</u>	<u>1902</u>	<u>1867</u>	<u>1982</u>	<u>1901</u>	<u>1870</u>
SiO ₂	41.65	40.25	41.28	40.84	40.83	41.13
FeO	10.91	9.88	9.00	10.26	10.39	9.72
MgO	47.92	50.21	49.66	48.67	48.21	49.50
TOTAL	100.49	100.36	99.95	99.78	99.45	100.37
Si	1.016	0.984	1.006	1.003	1.006	1.002
Fe	0.222	0.202	0.183	0.210	0.214	0.198
Mg	1.743	1.829	1.804	1.782	1.771	1.797
Fo	88.70	90.00	90.79	89.45	89.21	90.07

* Number of ions on the basis of 4(O).

METODOS ISOTÓPICOS APLICADOS A LA PROSPECCION GEOTERMICA

L.F. AUQUE, J. FERNANDEZ CASCÁN

Departamento de Petrología y Geoquímica. Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. 50009 Zaragoza (España).

In this paper, an expositon and revision on the isotopic methods, applied to thermal waters, is made.

The amounts of tritium are used to define the age of the thermal water and the mixing degree with the cold ones.

The $\delta D - \delta O^{18}$ relation can indicate the rate of the isotopic change (water-rock), the input charge and evolutionary state of the system, and even the possible genesis of the geothermal area.

Finally, various isotopic geothermometers, with different calibrates, advantages and inconvenients, etc are examined.

1. INTRODUCCION

La prospección de áreas geotérmicas requiere la utilización de una metodología en la que se aúnen una serie de técnicas generalmente complementarias (geoquímicas, geofísicas, etc). Las técnicas geoquímicas han proliferado en los últimos años y su utilización ha llegado a ser indiscriminada y arbitraria. Este problema ya ha sido discutido en numerosos trabajos de síntesis sobre los distintos métodos geotermométricos basados en el quimismo de las aguas (MICHARD, 1979; FRITZ, 1981; AUQUE et al., 1986).

Los métodos isotópicos constituyen otro grupo de técnicas de amplia utilización en la prospección geotérmica. Su empleo presenta caracteres similares a los de la Hidrogeología clásica, aunque con algunas características especiales. La escasez de trabajos de recopilación sobre esta metodología específica nos ha inducido a la realización de este estudio en el que presentamos un somero repaso de las técnicas y fundamentos de esta metodología.

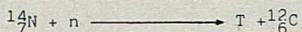
Los isótopos de la molécula del agua utilizados son tanto radiactivos (tritio) como estables (oxígeno-18 y deuterio). Con ellos pueden obtenerse datos sobre la posible mezcla de los fluidos termales con otros más fríos, o la naturaleza litológica del almacén del sistema geotermal. La aplicación de técnicas geotermométricas isotópicas requiere análisis más complejos, ya que involucran isótopos de oxígeno e hidrógeno constituyentes de otras moléculas distintas de las del agua.

2. EL TRITIO

2.1. Generalidades.

El tritio (T) es un isótopo radiactivo con un periodo de semidesintegración de 12.26 años y que puede constituir la molécula de agua HTO . Se produce en las capas superiores

de la atmósfera gracias a la reacción con N^{14} de neutrones rápidos procedentes de la interacción de rayos cósmicos con distintos átomos:



Según este proceso la producción de tritio es de 15 a 45 átomos por minuto y cm^2 en la superficie terrestre (GILETTI et al., 1958; LIBBY, 1961; SUESS, 1969), intervalo de variación dependiente de la intensidad o importancia de la actividad solar.

Esta concentración de tritio natural ha aumentado importantemente como resultado de las explosiones de bombas de hidrógeno desde 1952. La introducción de tritio artificial en la atmósfera e hidrosfera se ha usado como trazador en el estudio de aguas subterráneas (DINCER & DAVIES, 1967) y específicamente, en el estudio de aguas termales, esta alteración del ciclo natural permite estimar:

- a) El tiempo de residencia del fluido termal en el interior del reservorio.
- b) El grado de mezcla con aguas de infiltración más reciente.

Hechos que son de suma importancia a la hora de calcular la temperatura de base del sistema geotermal mediante métodos geoquímicos.

2.2. Metodología.

La concentración natural media de tritio atmosférico para nuestra latitud, antes de la primera explosión termonuclear, era de 15 U.T. (Unidad de Tritio = $T/H \cdot 10^{-8}$) según los datos señalados por OLIVE (1970). Partiendo de esta concentración inicial podemos calcular la concentración residual de las aguas en años posteriores utilizando la expresión:

$$C_t = C_0 \cdot e^{(-\frac{0.693}{T} t)} \quad (1)$$

donde C_t y C_0 son las concentraciones final e inicial respectivamente; T es el periodo de semidesintegración y t es el tiempo transcurrido. La concentración de tritio en las aguas para 1982 sería:

$$C_{1982} = 15 \cdot e^{(-\frac{0.693 \times 30}{12.26})} = 2.75 \text{ U.T.} \quad (2)$$

Si en los análisis de aguas realizados en ese año la concentración de tritio es menor de 2.75 U.T. querría decir que esas aguas se habrían infiltrado antes de 1952. Si las concentraciones obtenidas son mayores, las aguas se habrían infiltrado más recientemente o bien el fluido termal estaría sometido a procesos de mezcla con aguas más recientes.

En todo caso hay que considerar estos resultados con prudencia ya que como sugiere WILSON (1963) la presencia de bajas concentraciones de tritio en aguas termales podría deberse a una acumulación local de elementos radiactivos en un proceso de tipo hidrotermal.

2.3. Aplicación: las aguas de los balnearios de Panticosa y Benasque.

En la campaña de 1982 realizada por el IGME se hicieron distintos análisis isotópicos de los balnearios de Benasque y Panticosa. En la tabla 1 se señalan los resultados de estos análisis para el tritio junto con la temperatura de surgencia de cada fuente.

A la vista de esos datos está claro que el Manantial de Tiberio es el que parece presentar una menor proporción de mezcla de aguas o bien un mayor tiempo de residencia del fluido termal. Los manantiales del Hígado, La Laguna y San Agustín presentan una alta proporción de tritio y por lo tanto han de interpretarse como aguas más superficiales o bien con un menor

TABLA 1. Contenidos de tritio y temperatura de surgencia de los manantiales de Benasque y Panticosa (IGME, 1982).

		TEMPERATURA (°C)	TRITIO (U.T.)
Benasque:			
Manantial de Las Pilas -----		36.0	1.4
Manantial de San Victoriano -----		35.0	1.8
Manantial de Las Opiladas -----		32.5	1.2
Panticosa:			
Manantial del Hígado -----		25.0	7.0
Manantial de Tiberio -----		52.0	0.7
Manantial del Estómago -----		30.5	2.0
Manantial de La Laguna -----		24.0	17.2
Manantial de San Agustín -----		27.0	10.1
Fuente del Gas -----		21.0	1.1

tiempo de residencia en el sistema.

Los caracteres geoquímicos de estas aguas parecen indicar que las diferencias de temperatura de surgencia y contenidos de tritio de los manantiales analizados pueden explicarse más coherentemente si pensamos en un fluido termal de alta temperatura que se mezcla con aguas superficiales más frías en proporciones distintas (AUQUE & FERNANDEZ, en preparación).

3. ISOTOPOS ESTABLES. -

3.1. Generalidades.

Según datos de HOLDEN & WALKER (1972) las abundancias respectivas de los tres isótopos estables del oxígeno son: $O^{16}=99.756\%$; $O^{17}=0.039\%$; $O^{18}=0.205\%$. El hidrógeno tiene dos isótopos estables: $H^1=99.985\%$ y $D=0.015\%$.

Las composiciones isotópicas de hidrógeno u oxígeno en una muestra de agua se expresan como diferencias de relaciones O^{18}/O^{16} y D/H respecto a una muestra-tipo denominada SMOW ("Standard Mean Ocean Water") y definida por CRAIG (1961) con las siguientes proporciones moleculares: $H_2O^{16}=10^6$; $H_2O^{17}=420$; $H_2O^{18}=2000$; $HDO=316$. La expresión de la composición isotópica corresponde a:

$$\delta O^{18} = \left[\left(\frac{O^{18}}{O^{16}} \right)_{ej.} - \left(\frac{O^{18}}{O^{16}} \right)_{SMOW} \right] / \left(\frac{O^{18}}{O^{16}} \right)_{SMOW} \cdot 10^3\% \quad (3)$$

$$\delta D = \left[\left(\frac{D}{H} \right)_{ej.} - \left(\frac{D}{H} \right)_{SMOW} \right] / \left(\frac{D}{H} \right)_{SMOW} \cdot 10^3\% \quad (4)$$

Por lo tanto, valores positivos de estas ecuaciones indican un enriquecimiento de la muestra o ejemplo respecto al SMOW.

Las relaciones isotópicas del SMOW frente al agua destilada vienen definidas por las relaciones:

$$(D/H)_{SMOW} = 1.050 (D/H)_{H_2O} \quad (5)$$

$$(O^{18}/O^{16})_{SMOW} = 1.608 (O^{18}/O^{16})_{H_2O} \quad (6)$$

3.2. Evolución de $\delta^{18}\text{O}$ y δD en el ciclo hidrológico.

El reparto isotópico entre la fase vapor y la fase líquida en un proceso de evaporación está controlado por la presión de vapor de las distintas moléculas de agua. Esta presión de vapor es inversamente proporcional a la masa de las moléculas y, por lo tanto, el agua del océano remanente de un proceso evaporativo estará enriquecida en ^{18}O y D, mientras que el vapor que asciende a la atmósfera lo estará en ^{16}O e H. Este reparto isotópico viene expresado por el coeficiente de fraccionamiento isotópico " α ", que para un proceso de evaporación en condiciones de equilibrio a 25° C es (CRAIG & GORDON, 1965):

$$\alpha^{18} = (O^{18}/O^{16})_{\text{liq.}} / (O^{18}/O^{16})_{\text{vapor}} = 1.0092 \quad (7)$$

$$\alpha_D = (D/H)_{\text{liq.}} / (D/H)_{\text{vapor}} = 1.074 \quad (8)$$

Como puede verse en la figura 1, el coeficiente de fraccionamiento isotópico disminuye al aumentar la temperatura.

En el proceso subsiguiente de condensación del vapor atmosférico, la fase líquida se enriquece en ^{18}O y D, de manera que la primera precipitación es isotópicamente similar al agua oceánica (fig. 2). Esta remoción preferencial de ^{18}O y D de las masas de aire causa el enriquecimiento en ^{16}O e H en la fase de vapor que queda, y por lo tanto las posteriores lluvias tendrán valores negativos de $\delta^{18}\text{O}$ y δD .

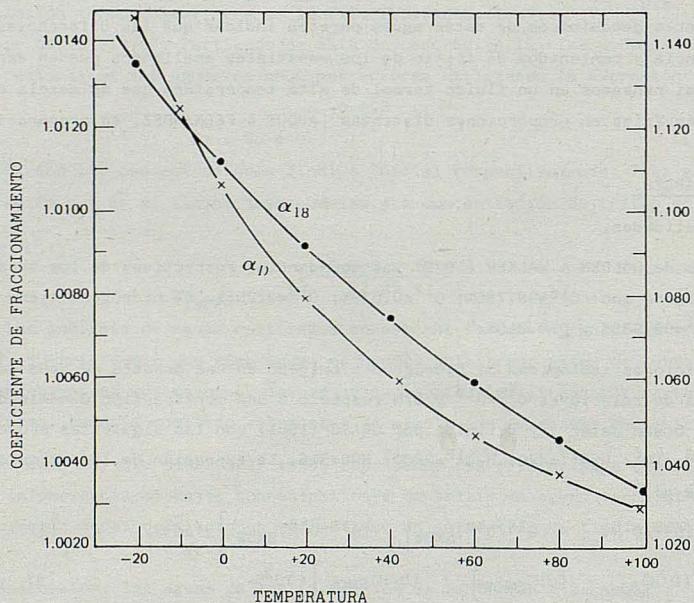


FIGURA 1. Variación del coeficiente de fraccionamiento isotópico con la temperatura.

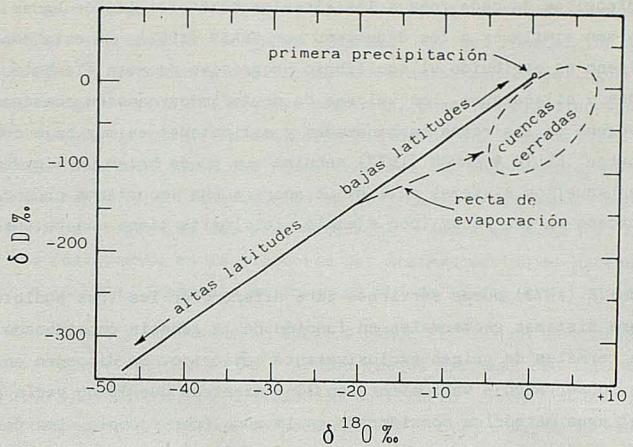


FIGURA 2. Evolución de la composición isotópica de las aguas meteóricas.

Utilizando numerosos ejemplos analíticos de aguas meteóricas recogidas a distintas latitudes, CRAIG (1961) demostró la existencia de una relación lineal entre δD y δO^{18} respecto al SMOW, definida mediante la ecuación (fig.2):

$$\delta\text{D} = 8 \delta\text{O}^{18} + 10 \quad (9)$$

Los únicos ejemplos que no cumplen esta relación son los tomados en cuencas cerradas y en ciertos ríos y lagos de África. Las cuencas cerradas, afectadas por un desequilibrio evaporativo, caen fuera de la recta (fig. 2) aunque están relacionadas con la composición original de la precipitación (δO_0^{18} , δD_0) por la ecuación:

$$\delta\text{D} = 5(\delta\text{O}^{18} - \delta\text{O}_0^{18}) + \delta\text{D}_0 \quad (10)$$

En líneas generales puede apreciarse como conforme la masa de aire húmeda asciende a mayores latitudes las precipitaciones adquieren valores de δO^{18} y δD progresivamente más negativos, debido a:

- 1) El fraccionamiento isotópico causado por diferencias de presión de vapor de las moléculas de agua a una temperatura determinada.
- 2) La disminución de la temperatura del aire que incrementa el coeficiente de fraccionamiento isotópico.
- 3) La evapotranspiración de las plantas, que favorece un enriquecimiento en O^{16} e hidrógeno.

3.3. Contenido de δO^{18} y δD en sistemas geotermales.

CRAIG (1963) determinó los valores de δO^{18} y δD de numerosas fumarolas y surgencias termales neutras o ligeramente básicas. Los resultados obtenidos señalaban que para una misma área geotermal los valores de δO^{18} son variables mientras que los de δD son constantes y similares a los de las aguas meteóricas de la zona.

Un estudio del mismo tipo es el realizado por WHITE (1973). Este autor representó los datos de conocidos sistemas geotermiales en un diagrama binario δO^{18} - δD junto con la recta de

finida por la ecuación (9) como referencia (fig. 3). Los círculos oscuros corresponden a los análisis de aguas meteóricas de cada zona y los círculos blancos a los de aguas termales. Los resultados obtenidos son similares a los deducidos por CRAIG (1963). De esta manera, el enriquecimiento en oxígeno es atribuido al equilibrio progresivo de este elemento en el agua con rocas carbonatadas y silicatadas. Los valores de deuterio permanecen constantes ya que el contenido de hidrógeno de las rocas carbonatadas y silicatadas es muy bajo comparado con el del agua; sin embargo, ELLIS & MAHON (1977) señalan que puede haber un ligero enriquecimiento en deuterio en aquellos sistemas en los que aparece una importante proporción de arcillas y minerales micáceos en las rocas (por ejemplo, la clorita tiene una relación H/O de 4/9).

El gráfico de WHITE (1973) puede servirnos para diferenciar los tres posibles comportamientos definidos para sistemas geotermales en función de la génesis considerada:

- 1) Aguas termales de origen exclusivamente meteórico. Se disponen en líneas horizontales, observándose variaciones en $\delta^{18}\text{O}$ mientras que δD no varía respecto al valor del agua meteórica considerada en la zona (por ejemplo, los de Steamboat Springs).
- 2) Aguas termales de origen meteórico con participación de aguas magmáticas. Existen cambios en los valores de δD y $\delta^{18}\text{O}$ tendentes hacia los valores esperables en aquéllas (Salton Sea, fig. 3).
- 3) Aguas termales de origen no meteórico. Se trataría de aguas juveniles de origen magmático o metamórfico. Esta última génesis es la invocada por WHITE (1973) para el caso de Sulphur Bank, donde observamos una disparidad total entre las aguas termales y las meteóricas.

El problema sobre la participación de aguas juveniles en sistemas geotermiales es algo todavía no resuelto, partiendo de la base del desconocimiento de las proporciones isotópicas de un agua juvenil. Algunos métodos deductivos permiten estimar la $\delta^{18}\text{O}$ de un agua juvenil entre +6 y +12 (es la $\delta^{18}\text{O}$ de las rocas ígneas, en general, con las cuales tiene que estar relacionada el agua juvenil); y la de δD en -55.3% (es la proporción en el agua del volcán Surtsey según los datos de ARNASON & SIGURGEIRSSON, 1968). Los rangos considerados por WHITE (1973) para las aguas juveniles o magmáticas pueden verse en la figura 3. En todo caso son bastante raros los sistemas geotermales con aguas de origen exclusivamente magmático. En general, los sistemas geotermales parecen estar recargados por aguas meteóricas mayoritariamente.

3.4. Evolución isotópica en sistemas geotermales.

Estudios y trabajos del tipo de los realizados por CRAIG (1963) y WHITE (1973) han permitido analizar las pautas evolutivas de los isótopos en sistemas geotermales realimentados por aguas meteóricas.

En sistemas geotermales de este tipo debe existir un balance exacto entre un isótopo ganado por el agua y el mismo isótopo perdido por la roca. Por lo tanto un enriquecimiento isotópico en la zona de interacción puede darnos una idea de las masas reaccionantes de agua y roca.

BLATTNER (1985) resume en el diagrama $\delta^{18}\text{O}$ - δD de la figura 4 la evolución isotópica de un sistema geotermal que comienza con una composición isotópica semejante en el agua y en la roca del sistema. Las aguas, originalmente meteóricas y por lo tanto con una composición iso-

tópica "normal" (recarga de agua, fig.4), reaccionan con las aguas y se van equilibrando en el reservorio (a lo largo de la línea de trazos, (1)). Si este agua surge después de este intercambio inicial tendremos la "descarga temprana" con una composición isotópica, en especial respecto a $\delta^{18}\text{O}$, totalmente modificada en relación con la del agua meteórica inicial. Esta primera recarga de agua del sistema presenta, pues, un claro enriquecimiento positivo en $\delta^{18}\text{O}$. Sin embargo, dentro de la evolución histórica del sistema, las sucesivas recargas de agua meteórica se encontrarán con rocas cada vez más empobrecidas por las anteriores recargas, y por lo tanto el enriquecimiento en $\delta^{18}\text{O}$ es cada vez menor, tendiendo a alcanzar los valores mínimos originales del agua meteórica ("descarga madura"). Los valores de δD se estabilizan más rápidamente en la evolución del sistema debido al exceso de hidrógeno en el agua respecto a la roca (fragmento en forma de "L" de la fig.4).

Por lo tanto, tal y como señalan ELLIS & MAHON (1977), en un modelo general, áreas que presentan poco enriquecimiento en $\delta^{18}\text{O}$ serían viejos sistemas con importante recarga de agua cuya composición isotópica se ha ajustado en equilibrio. Áreas con enriquecimiento de $\delta^{18}\text{O}$ importante corresponden a sistemas de poca recarga o bien a sistemas hidrotermales jóvenes cuyas aguas están en contacto con rocas todavía no muy alteradas isotópicamente.

4. GEOTERMOMETRÍAS ISOTÓPICAS.

4.1. Introducción.

Las temperaturas de base de un sistema geotérmico pueden calcularse mediante técnicas geotermométricas químicas (ver por ejemplo AUQUE et al, 1986). Un método de cuantificación más sofisticado lo constituyen las denominadas geotermometrías isotópicas.

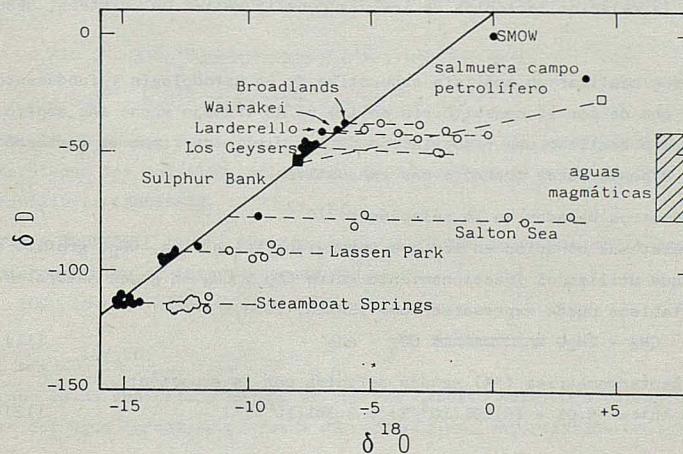


FIGURA 3. Evolución de la composición isotópica de distintos tipos de sistemas geotermales (ver texto).

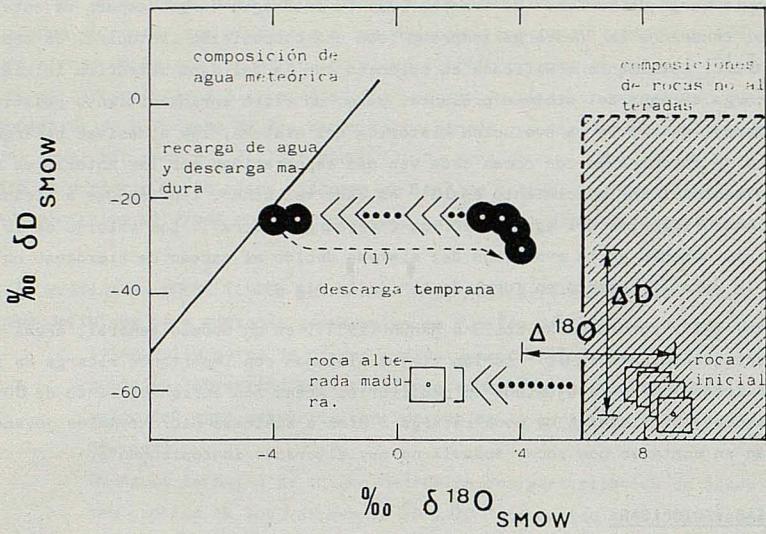


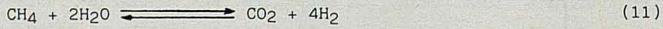
FIGURA 4. Evolución de la composición isotópica de las aguas de un sistema geotermal recargado por aguas meteóricas (BLATTNER, 1985).

Como en las técnicas geotermométricas químicas, existen varios métodos isotópicos e incluso distintos calibrados dentro de cada método. Todos ellos se basan en que el fraccionamiento isotópico en determinados sistemas binarios es función de la temperatura, lo cual permite, conociendo la relación isotópica de los dos constituyentes del sistema, deducir la temperatura.

No pretendemos realizar un análisis exhaustivo de la metodología y fundamentos de cada uno de ellos, lo que de por sí constituiría motivo de un trabajo mucho más amplio. Simplemente nos limitaremos a realizar una recopilación de los distintos tipos de geotermómetros isotópicos en vista a posteriores trabajos más exhaustivos.

4.2. Geotermómetros basados en la relación C¹³/C¹².

Se aplica a sistemas binarios en los que interviene la calcita, CO₂, grafito o CH₄. El más usual es el que utiliza el fraccionamiento entre CO₂ y CH₄ en gases naturales. El equilibrio que se establece puede expresarse como (CRAIG, 1953):



La fórmula geotermométrica (°K) vendrá definida por la ecuación:

$$1000 \ln \alpha = -9.01 + 15.301(10^3/T) + 2.361(10^6/T^2) \quad (12)$$

donde α es:

$$\alpha = (\text{C}^{13}/\text{C}^{12})_{\text{CO}_2}/(\text{C}^{13}/\text{C}^{12})_{\text{CH}_4} \quad (13)$$

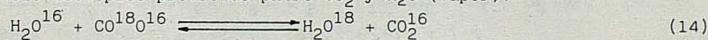
En la mayoría de los casos las temperaturas deducidas por este geotermómetro son mayores que las que existen realmente en el almacén geotérmico (CRAIG, 1975; HULSTON, 1975). La ecuación (11) es muy lenta, y los distintos intentos experimentales de alcanzar el equilibrio isotópico entre estos gases a temperaturas de 200-300° C han sido infructuosos. Por otro

lado, la composición isotópica del carbono en el metano de sistemas geotermales suele ser similar a la existente en el carbón orgánico natural por lo que las temperaturas calculadas pueden ser fortuitas (PANICHI, 1975). Por lo tanto la utilización de este geotermómetro ha de realizarse con mucha prudencia.

Otro sistema binario susceptible de ser usado como geotermómetro según la relación C¹³/C¹² es el basado en el fraccionamiento entre HCO₃⁻ y CO₂ (O'NEIL et al, 1975; TRUESELL, 1975). Los resultados obtenidos parecen ser mejores que los del CH₄-CO₂, aunque hemos de tener en cuenta que el HCO₃⁻ de las aguas termales tiende a descomponerse por reacción con otros ácidos débiles, y conforme los fluidos ascienden a la superficie, expulsando CO₂. Esta situación puede falsear los resultados obtenidos (ELLIS & MAHON, 1977).

4.3. Geotermómetros basados en la relación O¹⁸/O¹⁶.

Son muchas las reacciones que tienen lugar en sistemas hidrotermales y en las que se produce intercambio isotópico de oxígeno. Una de las usadas con propósitos geotermométricos es el intercambio isotópico producido entre CO₂ y H₂O (vapor):



La ecuación geotermométrica correspondiente es:

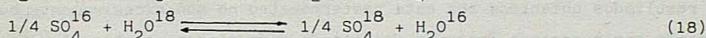
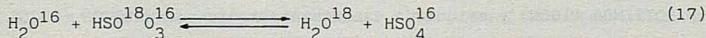
$$1000 \ln \alpha = -10.55 + 9.289(10^3/T) + 2.651(10^6/T^2) \quad (15)$$

donde α es:

$$\alpha = (\text{O}^{18}/\text{O}^{16})_{\text{CO}_2} / (\text{O}^{18}/\text{O}^{16})_{\text{H}_2\text{O}} \quad (16)$$

Sin embargo, ELLIS & MAHON (1977) señalan que en esta reacción el intercambio isotópico es muy rápido y por lo tanto de reducido interés como indicadora de temperaturas.

Más adecuadas son las reacciones en las que el fraccionamiento isotópico de oxígeno se produce en el sistema sulfato-agua. Las ecuaciones básicas de este geotermómetro son del tipo:



En la figura 5 pueden verse los distintos calibrados de geotermómetros isotópicos en los que intervienen los sulfatos, en función de las formas de estos últimos que se consideren en el equilibrio (ROBINSON, 1977).

MCKENZIE & TRUESELL (1977) realizan otro calibrado basándose en la ecuación (18). La fórmula geotermométrica de este calibrado es:

$$1000 \ln \alpha = 2.88(10^6/T^2) - 3.6 \quad (19)$$

donde α es:

$$\alpha = (\text{O}^{18}/\text{O}^{16})_{\text{SO}_4^{16}} / (\text{O}^{18}/\text{O}^{16})_{\text{H}_2\text{O}} \quad (20)$$

Este calibrado se ha convertido en uno de los más usados, poseyendo correcciones según que el enfriamiento del agua termal se produzca por conducción, vaporización brusca o vaporización continua.

La aplicación de los geotermómetros isotópicos con SO₄⁼ da, en general, buenos resultados aunque en algunos casos proporcionan temperaturas ligeramente más altas que las reales (HULSTON, 1975; MITZUTANI, 1972).

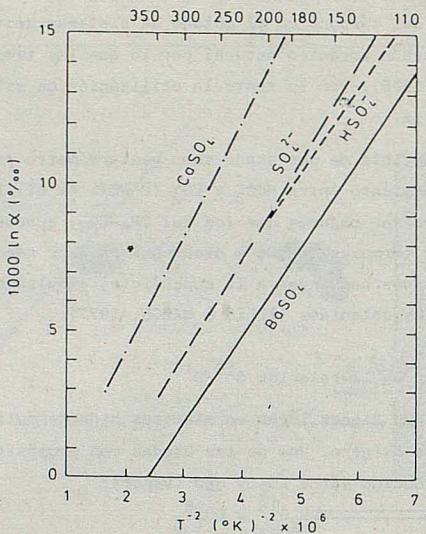


FIGURA 5. Distribución de los isótopos de oxígeno entre agua y distintas formas de sulfatos (ROBINSON, 1977).

4.4. Geotermómetros basados en la relación D/H.

Existen, también dentro de este grupo, distintos calibrados según la reacción de intercambio isotópico considerada. Una de las más usadas es:



calibrada por BOTTINGA (1969) y estudiada experimentalmente por HULSTON (1975) y ARNASON (1975). Los resultados obtenidos con este geotermómetro no son excesivamente buenos ya que está condicionado por numerosos factores propios de cada sistema geotermal y la cinética de la reacción no se conoce exactamente todavía (ELLIS & MAHON, 1977).

Otra reacción usada con fines geotermométricos es:



calibrada experimentalmente por CRAIG (1975). La ecuación geotermométrica viene dada por:

$$1000 \ln \alpha = -90.888 + 181.264(10^6/T^2) - 8.949(10^6/T^2)^2 \quad (23)$$

donde α es:

$$\alpha = (D/H)_{CH_4} / (D/H)_{H_2} \quad (24)$$

Los resultados obtenidos al aplicar este geotermómetro parecen presentar dificultades similares a los del calibrado anterior (TRUESDELL, 1975).

5. CONCLUSIONES.

Los métodos isotópicos constituyen una importante herramienta en la prospección geotérmica. Su utilización, sin embargo, no deja de ser una solución de compromiso entre el planteamiento inicial del problema, los resultados que se deseen alcanzar y los recursos económicos que se quieran o puedan utilizar. Las geotermometrías isotópicas son, en general, un complemento al resto de técnicas geotermométricas y por lo tanto su utilización no se hace

imprescindible salvo en casos muy concretos.

Más imponentes son las deducciones que se pueden obtener a partir de los contenidos de tritio, δO^{18} y δD . Tal y como se ha señalado en el apartado 2.1., los contenidos de tritio nos van a indicar a grandes rasgos el tiempo de residencia del fluido termal en el sistema y la posible existencia de fenómenos de mezcla.

Los análisis de isótopos estables de oxígeno e hidrógeno del agua proporcionan asimismo datos bastante interesantes:

- 1) Limitan la zona de recarga del sistema mediante el estudio de la ecuaciones de variabilidad isotópica que rigen la zona de estudio (ecuaciones del tipo de la (9)).
- 2) Cuantifican los intercambios isotópicos, especialmente los de O^{18} , en el reservorio, bien por interacción con la roca o por fraccionamiento a causa de la vaporización. Con ello podemos obtener una idea de la naturaleza litológica del almacén o sobre la presencia de fase vapor en el sistema.
- 3) El enriquecimiento isotópico puede informar, asimismo, de las masas reaccionantes de agua y roca, y del volumen de recarga del sistema.
- 4) Y por último, pueden suministrar información sobre la edad o periodo de funcionamiento del sistema geotermal.

Muchas de las informaciones suministradas por los métodos isotópicos pueden deducirse mediante otras técnicas o estudios, generalmente más laboriosos e inseguros, por lo que los análisis isotópicos constituyen una técnica de primer orden en la prospección geotérmica fina.

6. BIBLIOGRAFIA.

- ARNASON, B.: Proc. Int. At. Energy Agency Advisory Group Meeting Appl. Nucl. Tech. Geothermal Stud., Pisa, Italy (1975).
- ARNASON, B. and SIGURGEISSON, T.: Geochim. Cosmochim. Acta, 32, 807 (1968).
- AUQUE, L.F.; SANCHEZ CELA, V. y FERNANDEZ, J.: Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 41, 161-183 (1986).
- BLATTNER, P.: Chem. Geol., 49, 187-203 (1985).
- BOTTINGA, Y.: Geochim. Cosmochim. Acta, 33, 49 (1969).
- CRAIG, H.: Proc. Int. At. Energy Agency Advisory Group Meeting Appl. Nucl. Tech. Geothermal Stud., Pisa, Italy (1953).
- CRAIG, H.: Science, 133, 1833-1934 (1961).
- CRAIG, H.: In "Nuclear Geology on Geothermal Areas" (E. Tongiorgi, ed.), pp.17-53, Consiglio Nazionale delle Ricerche Lab. di Geol. Nucl., Pisa. (1963).
- CRAIG, H.: Proc. Int. At. Energy Agency Advisory Group Meeting Appl. Nucl. Tech. Geothermal Stud., Pisa, Italy (1975).
- CRAIG, H. and GORDON, L.I.: Consiglio Nazionale delle Ricerche, Lab. di Geol. Nucl., Pisa, Italy (1965).
- ELLIS, A.J. and MAHON, W.A.J. : "Chemistry and Geothermal Systems". Academic Press, London (1977).
- FRITZ, B.: "Etude thermodynamique et modelisation des réactions hydrothermales et dia-génétiques". Institut de Géologie. Université Louis Pasteur. Strasbourg (1981).
- HULSTON, J.R.: Proc. Int. At. Energy Agency Advisory Group Meeting Appl. Nucl. Tech. Geothermal Stud., Pisa, Italy (1975).

- IGME: "Estudio de las manifestaciones termales de Extremadura-Salamanca-Aragón-Rioja, orientada a su posible explotación como recursos geotérmicos". No publicado (1982).
- MICHARD, G.: BRGM (2 serie), section III, 2, 183-189 (1979).
- OLIVE, P.H.: "Contribution a l'étude dans l'hémisphère nord par la métodotritium". Tesis doctoral. Facultad de Ciencias de París (1970).
- O'NEIL, J.R.; TRUESDELL, A.H. and MCKENZIE, W.F.: U.N. Symp. Develop. Use Geothermal Resources, San Francisco, May 1, Abstract III-72 (1975).
- PANICHI, C.: Proc. Int. At. Energy Agency Advisory Group Meeting Appl. Nucl. Tech. Geothermal Stud., Pisa, Italy (1975).
- ROBINSON, B.W.: In "Geochemistry 1977" (A.J. Ellis, ed.). N.Z. Dept. Sci. Ind. Res. Bull. 218, Wellington (1977).
- TRUESDELL, A.H.: Proc. U.N. Symp. Develop. Use Geothermal Resources, 2nd, San Francisco, May 1. iii. (1975).
- WHITE, D.E.: Geothermics, Spec. Issue 2, 1, 58-80 (1973).

AGRADECIMIENTOS.

L.F. Auqué ha realizado este trabajo con la ayuda de una beca de investigación del CONAI de la Diputación General de Aragón. J. Fernández dispone de una ayuda del Instituto de Estudios Turolenses para el estudio de las aguas termales de Teruel. A ambos organismos expresamos nuestro agradecimiento.

Asimismo hacemos extensivo este agradecimiento a los doctores Juan Mandado y Vicente Sánchez Cela por la revisión crítica del manuscrito.

GRADO DE DIAGÉNESIS DE LAS ROCAS PELÍTICAS DEL PALEOZOICO EN LAS SIERRAS DE VICORT Y ALGAIREN (CORDILLERA IBERICA).

A. NAVAS Y J. TENA

Departamento de Petrología. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza (España).

Mineralogical association and crystallochemical parameters of illite have been used to approach the diagenesis degree undergone by Precambrian to Silurian (Ludlow) pelitic rocks from a sector of the Iberian Range. Illitechlorite facies, and high crystallinity of illites (2M politype) seem to indicate that anchizone-epizone was reached.

SITUACION GEOGRAFICA Y MARCO GEOLOGICO

La zona estudiada se encuentra situada al Suroeste de la provincia de Zaragoza, en la mitad occidental del cuadrante III de la hoja 410 (La Almunia de Doña Godina) del M.T.N. E: 1:50.000. Desde el punto de vista geológico, se emplaza en el borde Nororiental de la Rama Aragonesa de la Cordillera Ibérica, - en lo que constituye el núcleo hercínico principal (Figura 1). La superposición de las orogenias Hercínica y Alpina determina la compleja estructura tectónica que presentan los materiales aflorantes, con direcciones predominantes NO-SE y NNO-SSE.

El perfil estudiado (Figura 1) abarca las formaciones comprendidas desde el Precámbrico al Silúrico (Ludlow superior). En él puede observarse que en todas las formaciones existen niveles pelíticos, incluso en las facies de precipitación química como son las pertenecientes a la Dolomía de Ribota y a las Calizas de Cistideos.

CARACTERES PETROLOGICOS DE LAS PELITAS

Dentro de las rocas pelíticas se han estudiado limolitas s.l. y arcillitas que presentan caracteres petrográficos similares con diferencias en aspectos de composición mineralógica y tamaño cristalino. Respecto a este último, las limolitas s.l. presentan un tamaño promedio entre 15 y 40 micras, siendo de 3 a 12 micras el de las arcillitas.

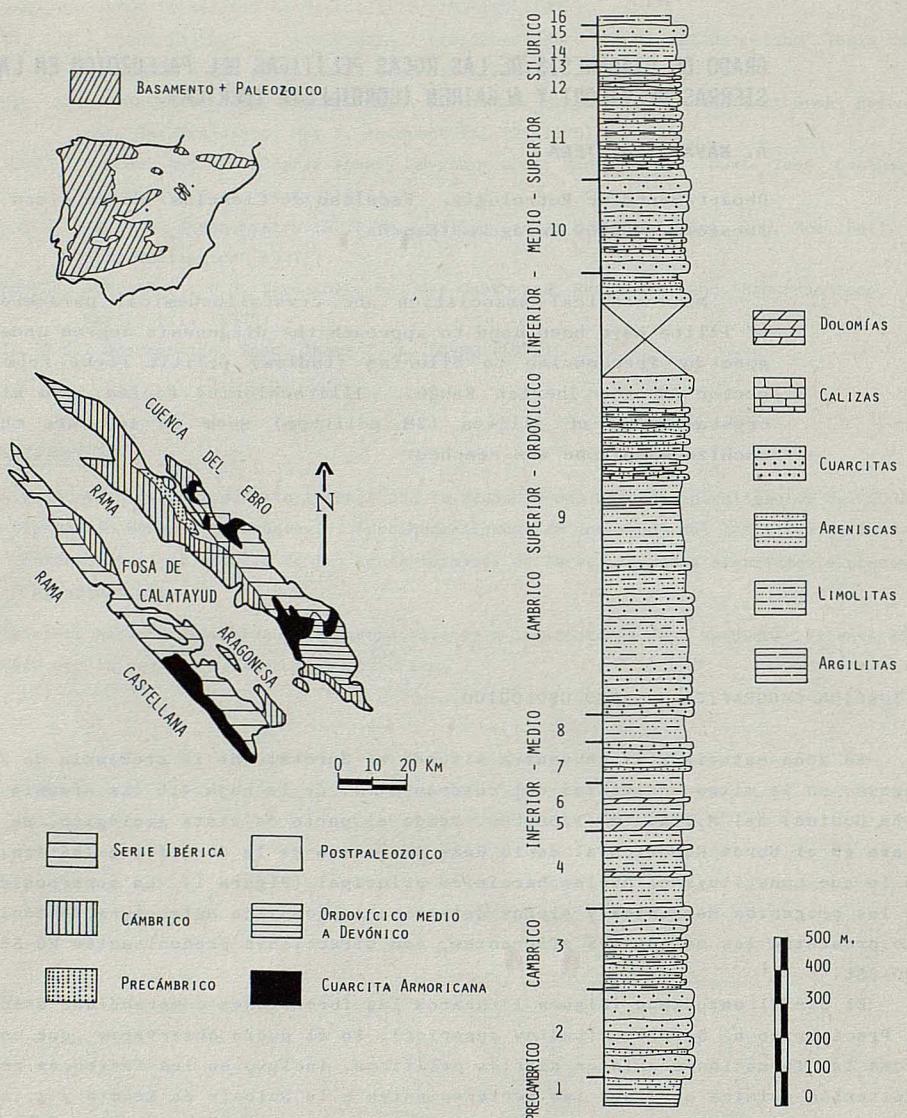


Figura 1.- Situación y marco geológico del área estudiada. Columna litoestratigráfica síntesis de los materiales aflorantes. 1) Fm. Pizarras de Paracuellos; 2) Fm. Cuarcita de Bámbola; 3) Fm. Embid; 4) Fm. Pizarras del Jalón; 5) Fm. Dolomía de Ribota; 6) Fm. Pizarras de Huérmeda; 7) Fm. Arenisca de Daroca; 8) Fm. Pizarras de Murero; 9) Serie Ibérica; 10) Fm. Cuarcita Armoricana; 11) Fm. Castillojo; 12) Fm. Fombuena; 13) Fm. Calizas de Cistideos; 14) Fm. Orea; 15) Fm. Cuarcita Blanca; 16) Fm. Bádenas.

En cuanto a la composición mineralógica, en ambas litologías son muy abundantes los minerales arcillosos y micáceos, especialmente en las arcillitas, acompañados de un porcentaje variable de cuarzo, más abundante en las limolitas. Otros componentes minerales presentes en escasos porcentajes son : micas blancas, feldespatos , accesorios (opacos, circón, turmalina, apatito y rutilo) y óxidos de hierro; ocasionalmente hay calcedonia, plagioclasas, biotita, cloritas, pirita y materia orgánica transformada. Los cristales son mayoritariamente alotriomorfos, algunos de cuarzo son subangulosos-subredondeados, están recrcidos y los de mayor tamaño flotan en la matriz lutítica.

Es generalizada en ambas litologías la existencia de fracturación ; las fracturas más gruesas aparecen normalmente llenas de cuarzo, mientras que las más finas lo están por óxidos de hierro. Es característica la existencia de pi-zarrosidad, y además existen otras estructuras: laminación flaser, boudinage , microslumping, bandeados mineralógico, lineaciones de nódulos de cuarzo y también ocasionalmente micropliegues.

Tanto las limolitas s.l. como las arcillitas están muy afectadas por transformaciones diagenéticas, entre las que cabe destacar: a) La autigénesis mineral que afecta fundamentalmente al cuarzo (micro-criptocristalino, en cristales con formas variadas y como recrcimiento en continuidad óptica con granos pre-existentes), a minerales arcillosos y micáceos (micas blancas), y también, ocasionalmente, a biotita, feldespatos, calcedonia, circón y pirita, b) la sustitución de minerales arcillosos y micáceos por cuarzo microcristalino, c) la cementación, fundamentalmente con cuarzo microcristalino que evoluciona hacia mosacicos o incluso monocróstales, d) otros procesos específicos de algunas muestras son: la alteración de feldespatos a minerales de la arcilla, de piritas a óxidos de hierro y la neoformación de nódulos de cuarzo.

ESTUDIO MINERALOGICO POR DIFRACCION DE RAYOS X

Se ha realizado este estudio con el objeto fundamental de identificar los filosilicatos y obtener además la información necesaria que permita establecer, de forma aproximada, el grado de diagénesis o metamorfismo que han sufrido las rocas pelíticas.

Mediante un equipo Philips PW 1710 de difracción de rayos X con tubo de Cu y filtro de Ni se ha determinado, por el método de polvo cristalino (roca total), la composición mineralógica cualitativa de 19 muestras, en tanto que el estudio exclusivo de filosilicatos mediante agregado orientado (fracción menor de 2 micras) se ha realizado en 23 muestras. Las muestras seleccionadas representan la mayor parte de las formaciones presentes en el área, desde el Precámbrico hasta el Silúrico (Ludlow superior), que incluyen rocas pelíticas en su litología.

Los resultados difractométricos del análisis cualitativo de los minerales existentes en roca total (difractogramas de polvo cristalino) y de los filosilicatos presentes en la fracción menor de 2 micras (difractogramas de agregado orientado) se recogen en el Cuadro 1.

La composición mineralógica, como se puede observar en el citado cuadro, es bastante homogénea y responde a la asociación mineralógica siguiente: ilita + cuarzo + clorita + feldespatos + plagioclasas + interestratificados + pirofilita + goethita + magnetita.

Es característica la presencia constante de ilita (muscovita), cuarzo, clorita (salvo en las muestras N-6, N1-3, N1-4, N1-6 y N1-17) y de feldespatos (salvo en las muestras N1-4 y N1-17), siendo éstos especialmente abundantes en las muestras N3-66, N3-56, N3-16, N3-46, N-3, N1-24, N1-14 y N-6. Hay plagioclasas en las muestras N3-16 y N-3, además de minerales interestratificados en la muestra N3-43 y pirofilita en la N1-7. En cuanto a los minerales de hierro, hay magnetita (N3-16) y goethita (N3-43, N1-3 y N1-6). Es de destacar la elevada cristalinidad de las ilitas en la práctica totalidad de las muestras, así como de las cloritas, especialmente en las de la Formación Pizarras de Paracuellos (Precámbrico).

El estudio de la cristalinidad de la ilita se ha realizado mediante la determinación de algunos parámetros cristaloquímicos medidos en los difractogramas de agregado orientado. Las condiciones de trabajo han sido las siguientes: Constante de tiempo RTC:2. Velocidad del papel RSP: 2°/minuto. Velocidad del goniómetro SPE: 0.03°/minuto.

Se han determinado los siguientes parámetros cristaloquímicos, para las reflexiones $d(001)$ y $d(002)$: la altura del pico (cm), la anchura a mitad de la altura (cm), el área del pico (cm^2) y la relación de la intensidad de las reflexiones $I(002)/I(001)$. Además, para la reflexión $d(001)$ se ha determinado el tamaño de cristalito (\AA), siguiendo las indicaciones de WEBER et al. (1976). - Las medidas de los parámetros mencionados se recogen en el Cuadro 2.

Para la determinación del grado de diagénesis y metamorfismo en base a la medida de la "cristalinidad de la ilita", se ha utilizado el diagrama de ESQUEVIN (1969), en el que se han proyectado los datos del parámetro de la anchura a mitad de la altura en \AA (cristalinidad), como se recoge en la Figura 2. La visualización del citado diagrama ofrece una situación generalizada de las ilitas en la epizona, con la excepción de dos muestras (N1-14 y N1-4) que aparecen situadas en la anquizona.

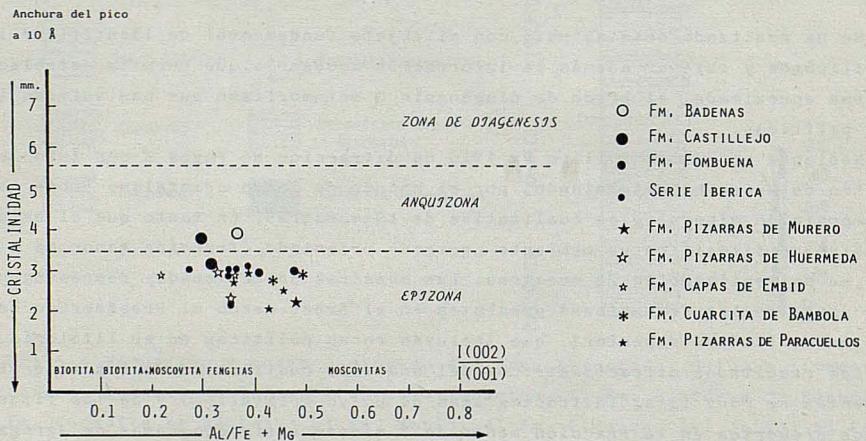


Figura 2.- Distribución de las ilitas de las rocas pelíticas del Precámbrico-Silúrico inferior en el diagrama de ESQUEVIN (1969). (Diagramas de agregado orientado).

Cuadro 1.- Análisis mineralógico cualitativo por difractometría de rayos X.

FORMACION	MUESTRA	I	C1	In	Pi	Q	Fd	Pg	Mg	Gt
PIZARRAS DE PARACUELLOS	N3-61	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N3-62	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N3-63	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N3-64	X	X	-	-	X	X	-	-	-
CUARCITA DE BAMBOLA	N3-66	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N3-56	X	X	-	-	X	X	-	-	-
CAPAS DE EMBID	N3-16	X	X	-	-	X	X	X	X	-
	N3-46	X	X	-	-	X	X	-	-	-
PIZARRAS DE HUERMEDA	N3-26	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N3-43	X	X	X	-	X	X	-	-	X
PIZARRAS DE MURERO	N3-33	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N - 3	X	X	-	-	X	X	X	-	-
SERIE	N1-33	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N1-34	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N1-24	X	X	-	-	X	X	-	-	-
IBERICA	N - 9	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N - 6	X	-	-	-	X	X	-	-	-
FOMBUENA	N1- 3	X	-	-	-	X	X	-	-	X
	N1- 4	X	-	-	-	X	-	-	-	-
	N1- 6	X	-	-	-	X	X	-	-	X
CASTILLEJO	N1-14	X	X	-	-	X	X	-	-	-
	N1-17	X	-	-	-	X	-	-	-	-
PIZARRAS DE OREA	N - 17	X	-	-	X	X	X	-	-	-
BADENAS	N1- 7	X	X	-	-	X	X	-	-	-

X = Existencia; - = No existencia; I = Ilita; C1 = Clorita

In = Interestratificados; Pi = Pirofilita; Q = Cuarzo; Fd = Fel-despatos; Pg = Plagioclasas; Mg = Magnetita; Gt = Goethita.

Cuadro 2.- Parámetros cristaloquímicos de ilitas determinados en difractogramas de agregado orientado.

d(001) Anchura cm	d(001) Area cm ²	d(002) Anchura cm	d(002) Area cm ²	I(002)/ I(001)	Tc(d001) A
0.25	1.86	0.25	0.86	0.460	320.91
0.30	1.86	0.29	0.72	0.389	267.43
0.28	1.42	0.25	0.52	0.367	286.53
0.21	4.45	0.21	1.91	0.429	382.04
0.28	4.48	0.28	1.94	0.434	286.53
0.30	4.27	0.30	2.16	0.505	267.43
0.29	2.04	0.29	0.44	0.220	276.65
0.30	3.63	0.29	1.33	0.367	267.43
0.23	3.11	0.22	1.10	0.353	348.82
0.30	2.44	0.26	0.80	0.330	267.43
0.23	1.64	0.28	0.79	0.486	348.82
0.29	2.07	0.25	0.72	0.350	276.65
0.30	4.44	0.30	1.56	0.351	267.43
0.30	3.22	0.28	1.26	0.390	267.43
0.30	2.67	0.30	0.96	0.359	267.43
0.22	2.07	0.22	0.72	0.350	364.67
0.30	3.70	0.25	1.00	0.270	267.43
0.30	1.60	0.25	0.77	0.482	267.43
0.50	0.85	0.20	0.08	0.094	164.45
0.30	2.04	0.30	0.84	0.414	267.43
0.38	1.98	0.30	0.60	0.303	211.12
0.31	0.46	0.30	0.15	0.322	258.80
0.40	1.78	0.30	0.66	0.370	200.57

Dado que la medida de la "cristalinidad de la ilita" para su utilización en el diagrama de ESQUEVIN (1969), requiere la existencia de condiciones standard, se ha utilizado otra forma de expresión de la "cristalinidad" basada en la fórmula de SCHERRER (1918) para la difracción en los cristales muy pequeños, conocida como el tamaño de cristalito, obteniéndose así una expresión de la cristalinidad que resulta independiente de las condiciones experimentales. En relación con este parámetro, WEBER et al. (1976) definen los límites de la anquizona, que corresponden a espesores aparentes comprendidos entre 150 y 275 \AA , de tal modo que los valores del tamaño de cristalito obtenidos por nosotros en los agregados orientados sitúan a la mayoría de las muestras en la anquizona.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

Del estudio mineralógico por difractometría de rayos X se pueden extraer los siguientes resultados:

1) El análisis mineralógico cualitativo revela la existencia de una composición mineralógica bastante homogénea en todas las rocas pelíticas del Paleozoico, constituida por la asociación mineralógica siguiente: ilita + cuarzo + clorita + feldespato + plagioclasas + interestratificados + pirofilita + goethita + magnetita. Es característica la presencia constante de ilita y cuarzo, siendo además bastante frecuente la presencia de clorita y feldespato, mientras que los minerales restantes están presentes de forma esporádica.

2) Por lo que respecta a los filosilicatos, principal objetivo de este estudio, la ilita es el mineral predominante, presentando una elevada cristalinidad; la clorita aparece también con especial abundancia y elevada cristalinidad en las muestras correspondientes a las formaciones del Precámbrico y Cámbrico inferior y medio, faltando en algunas de la Serie Ibérica y en las Formaciones Fombuena y Castillejo. Los interestratificados y la pirofilita aparecen sólo de forma esporádica

3) La determinación de los parámetros cristaloquímicos en las ilitas, indica una elevada cristalinidad, de forma que proyectadas en el diagrama de ESQUEVIN (1969) dan una situación generalizada en la epizona (ver Figura 2).

4) Los valores del tamaño de cristalito medidos en difractogramas de agregado orientado oscilan entre 164.45 y 382.04 \AA , predominando el de 267.43 \AA . Estos valores de espesores aparentes relativamente altos, proyectados en el diagrama de WEBER et al. (1976), dan una situación general de las ilitas comprendida en los límites de la anquizona (150-275 \AA), (ver Cuadro 2).

5) La identificación de los tipos de micas, establecida en función de la relación de intensidad de los picos (002) y (001) según ESQUEVIN (1969), ha demostrado un predominio de las fengitas y moscovitas. El politipo presente de la ilita sería 2M. FERNANDEZ NIETO et al. (1985) determinan, en función de los valores medios de b_0 (inferior a 9.025 \AA), que el tipo de micas presentes en los materiales pelíticos de la zona de Santed, corresponde a moscovitas.

6) Las ilitas y cloritas presentan una elevada cristalinidad en las muestras correspondientes a las formaciones del Precámbrico y Cámbrico inferior y medio, en tanto que es menor en las rocas pelíticas de edades posteriores.

A la vista de los resultados obtenidos, se considera que el origen de las ilitas, que presentan una cristalinidad uniformemente elevada, responde a una

recristalización diagenética fuerte y de tránsito al metamorfismo. Igualmente, cabe pensar que la génesis de las cloritas, que en algunas muestras presentan una elevada cristalinidad, responde a fenómenos de autigénesis por agradación diagenética de los minerales de la arcilla ricos en hierro y magnesio.

La pirofilita, considerada frecuentemente como indicadora de ambiente metamórfico, está presente de forma minoritaria en una muestra de la Formación - Bádenas, y se ha podido originar en el curso de la diagénesis avanzada o del anquimetamorfismo, ya que está probada su existencia a temperaturas inferiores a las del inicio del metamorfismo.

La presencia bastante constante de la paragénesis ilita-clorita, indica - que las rocas han alcanzado unas condiciones termodinámicas situadas entre la diagénesis profunda y el inicio del metamorfismo, es decir, de la anquizona - epizona. Esta zona de tránsito definida por DUNOYER (1969) por la facies "ilita-clorita" está caracterizada además, por la elevada cristalinidad de las ilitas, por la existencia del politipo 2M y por la probable presencia de pirofilita. Los materiales han soportado bajas presiones y temperaturas, como se puede deducir a partir de los valores medios de b_0 y del espaciado basal de las micas blancas, obtenidos por FERNANDEZ NIETO et al. (1985) que, además, aportan como información adicional la existencia en la Formación Valconchán de acritarcos, lo cual supone que no se han rebasado temperaturas superiores a 180°.

BIBLIOGRAFIA

1. J. ESQUEVIN: Bull. Centre Rech. Pau. S.N.P.A.. 3, 147 (1969)
2. F. WEBER, G. DUNOYER DE SEGONZAC, C. ECONOMOU: C. R. Somm. Geol. Fr. 5, 225 (1976)
3. C. FERNANDEZ-NIETO, J.M. GONZALEZ LOPEZ, J. GONZALEZ MARTINEZ: Bol. S.E.M. Vol. V (1985)
4. G. DUNOYER DE SEGONZAC: Les mineraux argileux dans la diagénèse, passage au metamorphisme. Mem. Serv. Carte Geol. Alsace Lorraine. Vol. 29 (1969)