

REVISTA
DE LA
REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA



Serie 2.^a
Volumen 71

2016

REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

REVISTA
DE LA
REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA



Serie 2.^a
Volumen 71

2016

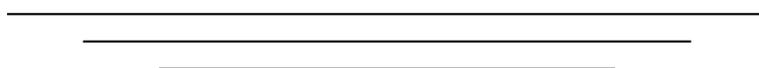
Depósito legal: Z 218-1960

Imprime:

Talleres Gráficos Edelvives

ÍNDICE DE MATERIAS

Hidden Variable A -Fractal Functions and Their Monotonicity Aspects S. K. KATIYAR, A. K. B. CHAND, AND M. A. NAVASCUÉS	7
Estudio de los procesos de evolución en tres genes de la especie canina (<i>MDR-1</i> , <i>CYP1A2</i> y <i>CYP2B11</i>) implicados en la resistencia a determinados fármacos R. GAGLIARDI, S. MUNILLA, M.V. ARRUGA, C. GARCÍA Y S. LLAMBÍ	31
La Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas Químicas y Naturales de Zaragoza: 100 años de difusión de la investigación científica (1916-2016) FRANCISCO JAVIER VIDAL BORDES	43
Discurso del Acto Central del Centenario de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas Químicas y Naturales de Zaragoza: ANTONIO ELIPE SÁNCHEZ	59
ACTIVIDADES DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA EN EL AÑO 2016	65
Instrucciones para los autores	81
Intercambio de Publicaciones	83



Hidden Variable A-Fractal Functions and Their Monotonicity Aspects

S. K. Katiyar[†], A. K. B. Chand[†] and M. A. Navascués¹

[†] Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai 600036, India.

¹ Departamento de Matemática Aplicada, Centro Politécnico Superior de Ingenieros, Universidad de Zaragoza, C/ María de Luna 3, Zaragoza 50018, Spain.

Abstract

Fractal interpolation that possesses the ability to produce smooth and nonsmooth interpolants is a novice to the subject of interpolation. Apart from appropriate degree of smoothness, a good interpolant should reflect shape properties, for instance monotonicity, inherent in a prescribed data set. Despite the flexibility offered by these shape preserving fractal interpolants developed recently in the literature are well-suited only for the representation of self-referential functions. In this article we present hidden variable A-fractal interpolation function as a tool to associate an entire family of \mathbb{R}^2 -valued continuous functions $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ parameterized by a suitable block matrix \mathbf{A} with a prescribed function $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. Depending on the choice of parameters, the members of the family may be self-referential, or non-self-referential, and preserve some properties of original function \mathbf{f} , thus yielding more diversity and flexibility in the process of approximation. As an application of the developed theory, we introduce a new class of monotone \mathcal{C}^1 -cubic interpolants by taking full advantage of flexibility offered by the hidden variable A-fractal interpolation functions (HFIFs). This theory invoked to the \mathcal{C}^1 -cubic spline HFIF, which can be viewed as a fractal perturbation of the traditional \mathcal{C}^1 -cubic spline, culminates with the desired monotonicity preserving \mathcal{C}^1 -cubic HFIF. The monotonicity preserving interpolation scheme developed herein generalizes and enriches its traditional nonrecursive counterpart and its fractal extension.

Keywords. Fractal Operator, Fractal Cubic Spline, Hidden Variable Fractal Interpolation Function, Monotonicity, Parameter Identification

MSC 2000 Classifications. 28A80, 41A05, 41A10, 65D07, 26C15

1 Introduction and Motivation

Fractals are known to construct extremely complicated and impressive shapes, which many times resemble objects of the physical world. Fractal interpolation functions (FIFs), introduced

¹Corresponding author. Tel: +34976761983, Fax: +34976761886. E-mail address: manavas@unizar.es

by Barnsley [2, 3] not only open a new research field in the approximation theory of functions but also draw considerable attention of the researchers in various scientific areas applied in natural sciences [21, 22], engineering applications [7], image compression and processing [17] and economics [19]. This technique is followed in earnest by a host of researchers (see, for instance [8, 9, 12, 13, 23, 24, 26, 31]). FIFs provide a basis for the constructive approximation theory of nondifferentiable functions. Further, differentiable FIFs constitute an alternative to the traditional nonrecursive interpolation and approximation methods (see, for instance, [4, 8, 12, 26]). In this way, the fractal methodology provides more flexibility and versatility on the shape of an interpolant. Consequently, this function class can be useful for mathematical and engineering problems where the classical spline interpolation approach does not work satisfactorily. FIFs are generally self-referential in the sense that the graph of the function is a union of transformed copies of itself.

To approximate non-self-similar objects found in nature, Barnsley et al. [5] extended the idea of FIFs to produce more flexible univariate interpolation functions, namely, hidden variable FIFs (HFIFs). Bouboulis and Dalla [6] have constructed hidden variable vector valued FIFs on random grids in \mathbb{R}^2 . As the values of HFIF continuously depend on the parameters which define it because of that it is useful in adjusting the shape of interpolation data. HFIF is more diverse and appealing than a FIF. In some practical applications, the interpolation data might be generated simultaneously from self-referential and non-self-referential functions. To study such data, Chand and Kapoor [9] introduced the notion of coalescence hidden variable FIF (CHFIF).

In practice, it is very desirable for the shape of the approximant/interpolant to be compatible with the given data. For this, scientists and engineers usually demand that approximation/interpolation methods accurately represent the physical reality. The problem of searching a sufficiently smooth function that preserves the qualitative shape property inherent in the data is generally referred to as shape preserving interpolation/approximation, which is important in practical ground, and received considerable attention in the literature (see, for instance, [15, 16, 18, 20] and references quoted therein). The shape properties are mathematically expressed in terms of conditions such as positivity, monotony and convexity. As a submissive contribution to this goal, Chand and collaborators have initiated the study on shape preserving fractal interpolation and approximation using various families of polynomial and rational iterated function system (see, for instance, [10, 11, 29, 30]). These shape preserving fractal interpolation schemes possess the novelty that the interpolants inherit the shape property in question and at the same time the suitable derivatives of these interpolants own irregularity in finite or dense subsets of the interpolation interval. This attribute of shape preserving FIFs finds potential applications in various nonlinear phenomena.

The primary intent of this article is to employ \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF for monotonicity preserving interpolation, thereby giving an entire class of monotonic interpolants that include traditional monotonic \mathcal{C}^1 -cubic spline and their fractal extensions studied recently as

special cases. In this regard, the traditional monotone cubic spline interpolation has been extensively studied. Necessary and sufficient condition for a cubic spline to be monotone in an interval is studied by Fritsch and Carlson [16] and they used it to develop a two-pass algorithm for constructing a monotone cubic interpolant to a given set of monotone data. The algorithm discussed by Fritsch and Butland [15] provides an improvement to Fritsch-Carlson (FC) algorithm by providing a flexibility of one pass. Both these methods are simple and easy to implement. Subsequently, many variants and improvements to FC algorithm were proposed, see for instance, [14, 32].

By using suitable IFS, Barnsley and Navascués have provided a method to perturb a continuous function $f \in \mathcal{C}(I)$ so as to yield a class of continuous functions $f^\alpha \in \mathcal{C}(I)$, where α is a free parameter, called the scale vector. For suitable values of the scale vector α , the fractal functions f^α simultaneously interpolate and approximate f . By this method one can define fractal analogues of any continuous function. Navascués [25] introduced an operator $\mathcal{F}^\alpha : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ defined through $f \mapsto f^\alpha$ and developed properties of this operator. This enriched the fractal approximation theory and facilitated the theory of fractal interpolation to interact with the fields such as functional analysis and operator theory (see, for instance, [26–28]).

We apply hidden variable FIF as a tool to fraternize a family of \mathbb{R}^2 -valued continuous fractal functions with a prescribed continuous function $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined on a real compact interval I , where \mathbb{R}^2 being endowed with the l^1 -norm. In detail, we obtain a family of continuous fractal functions $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ for a given continuous function $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, parameterized by a block matrix $\mathbf{A} = [A_n]_{n=1}^M$, where each A_n is a suitable matrix in $M^{2 \times 2}(\mathbb{R})$, the space of all 2×2 matrices having real entries. This is a natural extension of the “fractal perturbation” process applied in the case of real-valued functions to obtain α -fractal function f^α corresponding to f studied in detail by Navascués (see, for instance, [26, 28]). The advantage gained is that the function whose graph is the orthogonal projection of graph $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ provides non-self-referential fractal function corresponding to a given real valued continuous function in contrast to the self-referential fractal generalizations obtained by α -fractal technique. Further, by the proper selection of parameters of the hidden variable FIF, the projection can be made self-referential as well, thus providing more flexibility and diversity in the process of approximation. We may refer $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ as \mathbf{A} -fractal function corresponding to \mathbf{f} or fractal perturbation of \mathbf{f} . The presence of the block matrix parameter \mathbf{A} in the constructed function undoubtedly provides more flexibility, which may be exploited in various approximation and engineering problems.

To invite the class of approximants $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ parameterized by \mathbf{A} to the area of shape preserving approximation, we identify suitable parameters so that $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ preserves \mathcal{C}^r -continuity and monotonicity inherent in the function \mathbf{f} being perturbed. This monotonicity preserving hidden variable fractal perturbation scheme is applied to construct \mathcal{C}^1 -cubic hidden variable FIFs corresponding to a given monotonic Hermite data. These conditions are then used to develop an algorithm which constructs a monotonic \mathcal{C}^1 -cubic spline HFIF to monotone data. The curve

produced contains no extraneous “bumps” or “wiggles” which makes it more readily acceptable to scientists and engineers. Compared to most other shape preserving methods, the method proposed in this paper is characterized by its efficiency, in terms of time required to determine the interpolant, storage to required to represent it, and/or time required to evaluate it. Examples are included which compare this algorithm with other piecewise cubic interpolation methods. Consequently, the paper also provides an entire class of monotonic interpolants that include the traditional monotonic C^1 -cubic spline and their fractal analogue as special cases.

The organization of the paper is as follows: In Section 2, we recall some of the required basic tools. In Section 3, we construct \mathbf{A} -fractal function corresponding to a \mathbb{R}^2 -valued continuous function \mathbf{f} . We consider the operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}] : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ which assigns $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ to the function \mathbf{f} , establish some properties and some results on Schauder basis in Section 4. In Section 5, we identify suitable parameters in the IFS so that $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$, which are regarded as the fractal perturbation of a given function \mathbf{f} , preserves the properties (for instance, regularity and monotonicity) inherent in \mathbf{f} . We develop a monotonicity preserving cubic spline interpolation scheme that extends the methods described in the reference [16] of Fritsch and Carlson in Section 5 which is followed by numerical illustration.

2 Background and Preliminaries

In this section we briefly recall requisite general material for our study like the notions of Cubic Interpolation, Iterated function system (IFS), FIF, CHFIF, and establish some of their basic properties. For a detailed study, reader may refer to [2, 5, 16, 24] for any additional information.

2.1 Piecewise cubic interpolation

For $r \in \mathbb{N}$, let \mathbb{N}_r denote the subset $\{1, 2, \dots, r\}$ of \mathbb{N} . Let a set of data points $D = \{(x_n, y_n) \in I \times \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_N\}$ satisfying $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, where $I = [x_1, x_N]$ be given. The local mesh spacing is $h_n = x_{n+1} - x_n$, and the secant slope of the linear interpolant between the data points is $\Delta_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}$. A piecewise cubic function $s \in \mathcal{C}^1(I)$ is uniquely determined by y_n and d_n , where $s(x_n) = y_n$, $s^{(1)}(x_n) = d_n$, $n \in \mathbb{N}_N$. The traditional C^1 -cubic interpolant s defined over the subinterval $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ is defined as follows:

$$s_n(x) = \frac{d_n + d_{n+1} - 2\Delta_n}{h_n^2}(x - x_n)^3 + \frac{-2d_n - d_{n+1} + 3\Delta_n}{h_n}(x - x_n)^2 + d_n(x - x_n) + y_n. \quad (2.1)$$

2.2 Monotone piecewise cubic interpolation with Fritsch-Carlson algorithm

For our convenience, we consider the interpolated data to be monotonic increasing throughout the remainder of the paper. For a monotonic increasing data (i.e., $y_n \leq y_{n+1}$, for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$), we invoke here the well-known Fritsch-Carlson algorithm which ensures that the corresponding cubic interpolant s is monotone. The basis of this algorithm is to check whether a cubic

polynomial s defined on $[x_n, x_{n+1}]$ is monotone on that interval, and it is given in the following proposition.

Proposition 2.1 (Fritsch and Carlson [16]). *For the data set $\{(x_n, y_n, d_n) : n \in \mathbb{N}_N\}$, consider the traditional C^1 -cubic spline s defined as (2.1). Let $\Delta_n \neq 0$, let $\eta_n = \frac{d_n}{\Delta_n}, \xi_n = \frac{d_{n+1}}{\Delta_n}$. Then s is monotone on $[x_n, x_{n+1}]$ if and only if: (i) $d_n = d_{n+1} = 0$ if $\Delta_n = 0$, or (ii) $(\eta_n, \xi_n) \in \mathcal{M}$ if $\Delta_n \neq 0$, \mathcal{M} is the closed region bounded by the axes and the “upper half” of the ellipse $x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 9 = 0$ shown in the following Figure 1.*

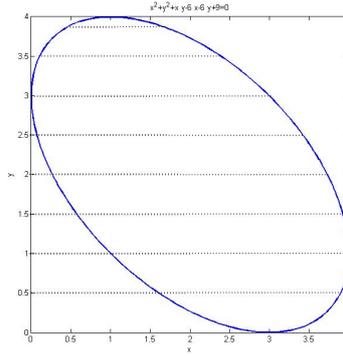


Figure 1: Fritsch-Carlson monotone region.

Algorithm (Fritsch-Carlson)

Step 1: Initialize derivatives $d_n, n \in \mathbb{N}_N$ such that $\text{sgn}(d_n) = \text{sgn}(d_{n+1}) = \text{sgn}(\Delta_n)$. If $\Delta_n = 0$, set $d_n = d_{n+1} = 0$.

Step 2: For each interval $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ in which $(d_n, d_{n+1}) \notin \mathcal{M}_n$, modify d_n and d_{n+1} to d_n^∞ and d_{n+1}^∞ , such that $(d_n^\infty, d_{n+1}^\infty) \in \mathcal{M}_n$, where the closed region $\mathcal{M}_n = \mathcal{M} \cdot \Delta_n = \{(x\Delta_n, y\Delta_n) : (x, y) \in \mathcal{M}\}$.

Fritsch and Carlson observed that decreasing the magnitude of d_n in moving (d_n, d_{n+1}) into \mathcal{M}_n may force (d_{n-1}, d_n) out of \mathcal{M}_{n-1} and vice versa. Due to this reason, they suggested to work with a subregion ρ of \mathcal{M} of enjoying the property that if $(x, y) \in \rho$ and $0 \leq \hat{x} \leq x$, $0 \leq \hat{y} \leq y$, then $(\hat{x}, \hat{y}) \in \rho$. The recommended regions are (see Fig. 2):

- (i) Ω_1 : the largest subset of \mathcal{M} bounded by the four lines $\eta = 0, 3$, and $\xi = 0, 3$,
- (ii) Ω_2 : region bounded by $\eta = 0, \xi = 0$, and the circle $\eta^2 + \xi^2 = 3^2$,
- (iii) Ω_3 : the subset of \mathcal{M} determined by the lines $\eta = 0, \xi = 0$, and $\eta + \xi - 3 = 0$,
- (iv) Ω_4 : the subset of \mathcal{M} bounded by $\eta = 0, \xi = 0, 2\eta + \xi - 3 = 0$, and $\eta + 2\xi - 3 = 0$.

Fritsch and Carlson also observed that the choice of Ω_1 produces the least change in the derivatives and the graph more closely resembles the graph obtained using the standard three point difference formula. The choice of Ω_4 produces the greatest change in the derivatives and the

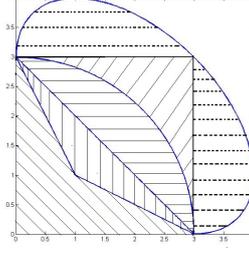


Figure 2: Fritsch-Carlson subregions. Diagonal hatching (- slope): Ω_4 ; Vertical hatching: $\Omega_3 - \Omega_4$; Horizontal hatching: $\Omega_2 - \Omega_3$; Diagonal hatching (+ slope): $\Omega_1 - \Omega_2$; Dotted: $\mathcal{M} - \Omega_1$.

graph more closely resembles a piecewise linear function. The choice of Ω_2 and Ω_3 lies somewhere in between. So it is highly recommended here to take the choice Ω_2 for most pleasing results. This kind of algorithm is known as fit and modify type algorithm.

2.3 Iterated function system

Let (X, d_X) be a complete metric space with metric d_X . If $w_n : X \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}_N$ are continuous mappings, then $\mathcal{I} = \{X; w_n : n \in \mathbb{N}_N\}$ is called an IFS. If, in addition, each $w_n, n \in \mathbb{N}_N$ is a contraction map, then the IFS \mathcal{I} is referred to as a hyperbolic IFS or contractive IFS. The attractor associated with the IFS \mathcal{I} is the unique fixed point of the Hutchinson map $W : H(X) \rightarrow H(X)$ defined by $W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$, where $H(X)$ is the set of all nonempty compact subsets of X endowed with the Hausdorff metric h . The Hausdorff metric h completes $H(X)$. When \mathcal{I} is a hyperbolic IFS with contractivity c , the IFS \mathcal{I} has an attractor, an attractor being a fixed point of the collage map W . It is well known that W is a contraction on the complete metric space $(H(X), h)$ with the same contractivity c . A self-referential object is a set or measure that can be defined in terms of a finite collection of geometric transformations applied to it. Since $A = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$, the attractor A of the IFS \mathcal{I} is self-referential e.g. the middle third Cantor set is the union of two shrunken version of the whole set.

2.4 Fractal interpolation function

For the construction of FIF, a suitable IFS whose attractor is the graph of the desired interpolant be defined as follows. Let a set of data points $D = \{(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}_N\}$ satisfying $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, $N > 2$, be given. Set $I = [x_1, x_N]$, $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ for $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Suppose $L_n : I \rightarrow I_n \subset I$, $n \in \mathbb{N}_{N-1}$ be contraction homeomorphisms such that $L_n(x_1) = x_n$, $L_n(x_N) = x_{n+1}$, and mappings $F_n : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that are contraction in second argument fulfilling $F_n(x_1, y_1) = y_n$, $F_n(x_N, y_N) = y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Let $X := I \times \mathbb{R}$ and consider the IFS $\mathcal{I} = \{X; w_n = (L_n, F_n) : n \in \mathbb{N}_{N-1}\}$. According to the IFS theory [3], such an IFS has a unique attractor $G = G(f)$ is the graph of a continuous function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ interpolating

the given data set and satisfying $f(x_n) = y_n$, for $n \in \mathbb{N}_N$. The aforementioned function f is referred to as a FIF corresponding to D and is obtained as the fixed point of the Read-Bajraktarević (RB) operator T on (\mathcal{G}, ρ) as $(Tg)(x) = F_n(L_n^{-1}(x), g \circ L_n^{-1}(x))$, for $x \in I_n = [x_n, x_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, where \mathcal{G} be the set of continuous functions $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ such that $h(x_1) = y_1, h(x_N) = y_N$ equipped with the metric $\rho(h, h^*) = \max\{|h(x) - h^*(x)| : x \in I\}$ for $h, h^* \in \mathcal{G}$. Since graph of f , $G(f)$ is a union of transformed copies of itself, specifically $G(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} w_n(G(f))$, the map f is a *self-referential function*.

2.5 Hidden variable fractal interpolation function

To approximate non-self-affine patterns, hidden variable FIFs are constructed by projecting vector valued FIF corresponding to a generalized interpolation data, which we shall succinctly review in the following.

For constructing an interpolation function $g_1 : I = [x_1, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ such that $g_1(x_n) = y_n$ for all $n \in \mathbb{N}_N$, consider a generalized set of data of D , $\widehat{D} = \{(x_n, y_n, z_n) \in I \times \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}_N\}$. Here $\{z_n : n \in \mathbb{N}_N\}$ are real parameters, whose selection is highly subjective. The idea is to construct a fractal interpolation function for \widehat{D} , and project its graph into $I \times \mathbb{R}$ such a way that the projection is the graph of a function that interpolates D . For $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, let the contraction homeomorphisms $L_n : I \rightarrow I_n \subset I$ be defined so as to satisfy

$$L_n(x) = a_n x + b_n, \quad L_n(x_1) = x_n \text{ and } L_n(x_N) = x_{n+1}. \quad (2.2)$$

Let \mathbb{R}^2 be endowed with the Manhattan metric $d_M((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Here we note that an element in \mathbb{R}^2 may be regarded as an ordered pair (a_1, a_2) or as a column matrix $(a_1, a_2)^t$ which will be clear from the context. Let $F_n : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$F_n(x, \mathbf{y}) = F_n(x, y, z) = (F_n^1(x, y, z), F_n^2(x, z))^t := A_n(y, z)^t + (p_n(x), q_n(x))^t, \quad (2.3)$$

where t denotes the transpose, A_n are upper-triangular matrices $\begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$, and p_n, q_n are suitable real valued continuous functions so that the following conditions are satisfied for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$:

- (i) $d_M(F_n(x, y, z), F_n(x^*, y, z)) \leq c_1 |x - x^*|$ for some constant $c_1 > 0$,
- (ii) $d_M(F_n(x, y, z), F_n(x, y^*, z^*)) \leq s d_M((y, z), (y^*, z^*))$ for $0 \leq s < 1$,
- (iii) join-up conditions: $F_n(x_1, y_1, z_1) = (y_n, z_n)$ and $F_n(x_N, y_N, z_N) = (y_{n+1}, z_{n+1})$.

The variables α_n, β_n , and γ_n are chosen such that $\|A_n\|_1 < 1$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Consider $w_n : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow I \times \mathbb{R}^2$ defined by $w_n(x, y, z) = (L_n(x), F_n(x, y, z))$. It follows from the conditions on maps L_n and F_n that w_n are contraction maps with respect to the metric d_M^* defined on $I \times \mathbb{R}^2$ by $d_M^*((x, y, z), (x^*, y^*, z^*)) = |x - x^*| + \theta d_M((y, z), (y^*, z^*))$ for some $\theta > 0$. Consequently, the generalized IFS $\{I \times \mathbb{R}^2; w_n : n \in \mathbb{N}_{N-1}\}$ admits an attractor $A \in H(I \times \mathbb{R}^2)$. It follows from the generalized IFS theory that A is the graph of a continuous function $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

such that $\mathbf{g}(x_n) = (y_n, z_n)$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Letting $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ it follows that $g_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function interpolating D . The aforementioned function $g_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ is called (coalescence) *hidden variable fractal interpolation function* associated with the set of data D (see, for instance, [9]).

Let \mathcal{G}^* be the set of continuous functions $\mathbf{h} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $\mathbf{h}(x_1) = (y_1, z_1)$, $\mathbf{h}(x_N) = (y_N, z_N)$ equipped with the metric $d(\mathbf{h}, \mathbf{h}^*) = \max\{d_M(\mathbf{h}(x), \mathbf{h}^*(x)) : x \in I\}$. To obtain a functional equation for \mathbf{g} , we recall that \mathbf{g} is the fixed point of the operator $T^* : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ defined by

$$(T^*\mathbf{h})(x) = F_n(L_n^{-1}(x), \mathbf{h}(L_n^{-1}(x))), \text{ for } x \in I_n, n \in \mathbb{N}_{N-1}.$$

Whence, the vector-valued function \mathbf{g} satisfies the functional equation

$$\mathbf{g}(L_n(x)) = A_n\mathbf{g}(x) + (p_n(x), q_n(x))^t, x \in I,$$

and the component functions g_1 and g_2 obey the following coupled functional equations.

$$\begin{aligned} g_1(L_n(x)) &= \alpha_n g_1(x) + \beta_n g_2(x) + p_n(x), \\ g_2(L_n(x)) &= \gamma_n g_2(x) + q_n(x), x \in I. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Throughout the remainder of the paper, we use the block matrix $\mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_{N-1}] = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$ to collectively represent the parameters involved in the definition of HFIFs.

3 Construction of A-fractal Function Corresponding to a \mathbb{R}^2 -valued Continuous Function \mathbf{f}

In this section we deal with the construction of an \mathbf{A} -fractal function corresponding to a \mathbb{R}^2 -valued continuous function \mathbf{f} with the help of theory reported in the previous section. We enunciate that a continuous function $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ gives rise to an entire family of fractal functions $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ parameterized by a certain block matrix $\mathbf{A} = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$ with $A_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$, where $\mathbf{f}[\mathbf{0}] = \mathbf{f}$. Let \mathbb{R}^2 be endowed with the Manhattan metric and $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$, the space of all continuous \mathbb{R}^2 -valued functions on $I = [x_1, x_N]$. Choose a partition $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ satisfying $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ in I and consider the data set $D = \{(x_n, f_1(x_n), f_2(x_n)) : n \in \mathbb{N}_N\}$. In the IFS $\{I \times \mathbb{R}^2; (L_n, F_n) : n \in \mathbb{N}_{N-1}\}$ defined through (2.1)-(2.2), we consider the special case

$$p_n(x) = f_1 \circ L_n(x) - \alpha_n b_1(x) - \beta_n b_2(x), \quad q_n(x) = f_2 \circ L_n(x) - \gamma_n b_2(x),$$

where $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ satisfies $\mathbf{b}(x_1) = \mathbf{f}(x_1)$ and $\mathbf{b}(x_N) = \mathbf{f}(x_N)$. In this case, the IFS $\{I \times \mathbb{R}^2; (L_n, F_n) : n \in \mathbb{N}_{N-1}\}$ provides a fixed point that is the graph of a continuous function denoted here as $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = (f_1[\mathbf{A}], f_2[\mathbf{A}])$. Following (2.3), we stipulate that $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ satisfies:

$$\mathbf{f}[\mathbf{A}](x) = \mathbf{f}(x) + A_n(\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{b})(L_n^{-1}(x)), x \in I_n, n \in \mathbb{N}_{N-1}. \quad (3.5)$$

The fixed point $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ also depends on the choice of $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. We call this function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ as \mathbf{A} -fractal function of \mathbf{f} with respect to the partition $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ and the function \mathbf{b} . Let \mathbf{f} be a continuous classical interpolant for the data set $D = \{(x_n, y_n, z_n) : n \in \mathbb{N}_N\}$. Since $\mathbf{f}[\mathbf{A}](x_n) = \mathbf{f}(x_n)$ for all $n \in \mathbb{N}_N$, for any choice of $\mathbf{A} = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$ and any choice of \mathbf{b} fulfilling the conditions specified earlier, the fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ can be regarded as ‘‘fractal generalization’’ of the function \mathbf{f} . For a given continuous function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, we can select $\mathbf{f} = (f, f)$ and $\mathbf{b} = (b, b)$ satisfying $b(x_1) = f(x_1)$ and $b(x_N) = f(x_N)$, $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$ to construct \mathbf{A} -fractal function for \mathbf{f} . In this case we obtain $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = (f[\mathbf{A}], f[\mathbf{A}])$, where $f[\mathbf{A}]$ coincides with the standard γ -fractal function f^γ corresponding to f with $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1})$.

Remark 3.1. The projection $G(g_1)$ of the attractor $G(\mathbf{g})$ is not always the union of transformed copies of itself. Hence, g_1 is, in general, non-self-referential. It can be observed that $G(g_2) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} w_n^2(G(g_2))$, where $w_n^2(x, z) := (L_n(x), F_n^2(x, z)) = (a_n x + b_n, \gamma_n z + q_n(x))$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Thus, g_2 is a self-referential fractal function interpolating $\{(x_i, z_i) : i \in \mathbb{N}_N\}$. In particular, $f_2[\mathbf{A}]$ is self-referential as (α -fractal function according to the definition given in the reference [26]).

Remark 3.2. With $|\gamma|_\infty := \max\{|\gamma_n| : n \in \mathbb{N}_{N-1}\}$, it is easy to see that $\|f_2[\mathbf{A}] - f_2\|_\infty \leq \frac{|\gamma|_\infty}{1 - |\gamma|_\infty} \|f_2 - b_2\|_\infty$. Thus, for proper choices of γ_n , $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, the self-referential function $f_2[\mathbf{A}]$ simultaneously interpolates and approximates f_2 . A similar remark holds for $f_1[\mathbf{A}]$.

Remark 3.3. If the elements of the hidden variable FIF are chosen such that $z_n = y_n$ for all $n \in \mathbb{N}_N$, and $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$, $p_n = q_n$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, then $f_1[\mathbf{A}]$ coincides with $f_2[\mathbf{A}]$, and hence in this case one obtains a self-referential hidden variable FIF.

Remark 3.4. If $\beta_n = 0$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, then $G(g_1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} w_n^1(G(g_1))$, where

$$w_n^1(x, y, z) := (L_n(x), F_n^1(x, y, z)) = (a_n x + b_n, \alpha_n y + p_n(x)) \text{ for all } n \in \mathbb{N}_{N-1}.$$

Therefore, we infer that g_1 , and hence, in particular, $f_1[\mathbf{A}]$ is self-referential in this case as well as (α -fractal function according to the definition given in the reference [26]).

4 Approximation results

In this section, we consider certain properties of the corresponding map $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}[\mathbf{A}]$ for a fixed \mathbf{A} such as $\mathbf{f}[0] = \mathbf{f}$. There may be many choices to select an appropriate \mathbf{b} . Among them to fulfill our desire, we assume that \mathbf{b} depends linearly on \mathbf{f} , that is to say, $\mathbf{b}_{\lambda\mathbf{f} + \mathbf{g}} = \lambda\mathbf{b}_\mathbf{f} + \mathbf{b}_\mathbf{g}$ or $\mathbf{b} = L\mathbf{f}$, where $L : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ is a linear operator which is bounded with respect to the norm $\|\mathbf{f}\|_\infty := \sup\{\|\mathbf{f}(x)\|_{l^1} : x \in I\} = \sup\{|f_1(x)| + |f_2(x)| : x \in I\}$. Let $\|L\|$ denote the operator norm of L with respect to $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. For a fixed partition D , parameter matrix \mathbf{A} , and continuous function \mathbf{b} , let us consider the operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}] : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$

which assigns $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ to the function \mathbf{f} . The block matrix \mathbf{A} can be viewed as an element in $M^{2 \times 2(N-1)}(\mathbb{R})$ and $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \{|\alpha_n|, |\beta_n| + |\gamma_n|\} < 1$.

The researches of Navascués (see, for instance, [26, 28]) bring influence for our work in this section. While the results in this section share a natural kinship with the corresponding results in the case of real valued fractal function, the reader will also discern a considerable degree of disparity due to the vector valuedness considered herein.

Theorem 4.1. *The following holds:*

I. $\mathbf{f}[\mathbf{0}] = \mathbf{f}$. Consequently, if $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, then the fractal operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ is the identity operator on $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$.

II. If $\mathbf{b} = \mathbf{f}$, then $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = \mathbf{f}$.

III. The fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ corresponding to \mathbf{f} satisfies the inequality

$$\|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty.$$

IV. For suitable choices of parameters, the fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ simultaneously interpolates and approximates \mathbf{f} .

V. If the vector-valued function \mathbf{b} depends linearly on \mathbf{f} , then

$$\mathcal{F}[\mathbf{A}] : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2), \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}[\mathbf{A}] \text{ is linear.}$$

VI. If $\mathbf{b} = L\mathbf{f}$, where $L : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ is a bounded linear map with respect to the uniform norm then the fractal operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}] : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$, $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}[\mathbf{A}]$ is bounded.

VII. If $\|\mathbf{A}\|_1 < \|L\|^{-1}$, then $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ is injective and its range ($Rg(\mathcal{F}[\mathbf{A}])$) is closed, $\mathcal{F}[\mathbf{A}]^{-1}$ is bounded on ($Rg(\mathcal{F}[\mathbf{A}])$) and $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$, $\mathcal{F}[\mathbf{A}]^{-1}$ are both closed operators.

Proof. I. Follows directly from the functional equation for $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ (cf. (3.5)).

II. Let $\mathbf{b} = \mathbf{f}$. In this case, the functional equation (3.5) for $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ reads

$$\mathbf{f}[\mathbf{A}](x) = \mathbf{f}(x) + A_n(\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f})(L_n^{-1}(x)) \text{ on } I_n, n \in \mathbb{N}_{N-1},$$

which is obviously satisfied by $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = \mathbf{f}$. Since $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ is obtained as a fixed point of the map T , from the uniqueness of the fixed point it follows that $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = \mathbf{f}$.

III. By definition

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty &= \sup \left\{ \|\mathbf{f}[\mathbf{A}](x) - \mathbf{f}(x)\|_{l^1} : x \in I \right\}, \\ &= \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \sup \left\{ \|(\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f})(x)\|_{l^1} : x \in I_n \right\}, \\ &= \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \sup \left\{ \|A_n(\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{b})(L_n^{-1}(x))\|_{l^1} : x \in I_n \right\}. \end{aligned}$$

Letting $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = (f_1[\mathbf{A}], f_2[\mathbf{A}])$ and performing the matrix multiplication, through a series of self-explanatory steps we obtain:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty &= \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \sup \left\{ |\alpha_n (f_1[\mathbf{A}] - b_1)(L_n^{-1}(x)) + \beta_n (f_2[\mathbf{A}] - b_2)(L_n^{-1}(x))| + |\gamma_n (f_2[\mathbf{A}] - b_2) \circ L_n^{-1}(x)| : x \in I_n \right\}, \\
&\leq \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \sup \left\{ |\alpha_n| |(f_1[\mathbf{A}] - b_1)(L_n^{-1}(x))| + (|\beta_n| + |\gamma_n|) \cdot |(f_2[\mathbf{A}] - b_2)(L_n^{-1}(x))| : x \in I_n \right\}, \\
&\leq \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \|A_n\|_1 \sup \left\{ |(f_1[\mathbf{A}] - b_1)(L_n^{-1}(x))| + |(f_2[\mathbf{A}] - b_2)(L_n^{-1}(x))| : x \in I_n \right\}, \\
&= \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{b}\|_\infty, \\
&\leq \|\mathbf{A}\|_1 (\|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty),
\end{aligned}$$

from which the desired estimate can be deduced.

IV. For an arbitrary selection of the partition, free and constrained parameters, and function \mathbf{b} , the interpolation property of $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$, i.e., $\mathbf{f}[\mathbf{A}](x_n) = \mathbf{f}(x_n)$ is evident and it is in fact a content of the construction.

Let $\epsilon > 0$. To show $\|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty < \epsilon$, it suffices to show, thanks to Part III, that $\frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty < \epsilon$. Choose the parameters α_n , β_n , and γ_n such that

$$\|\mathbf{A}\|_1 < \frac{\epsilon}{\epsilon + \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty} < 1.$$

With this selection, it is a matter of direct verification that $\frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty < \epsilon$, whence the stated result follows.

V. Let \mathbf{f}, \mathbf{g} be in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. We have $(\mathcal{F}[A])(\mathbf{f}) = \mathbf{f}[\mathbf{A}]$ and $(\mathcal{F}[A])(\mathbf{g}) = \mathbf{g}[\mathbf{A}]$. To prove that $(\mathcal{F}[A])(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}) = \lambda\mathbf{f}[\mathbf{A}] + \mu\mathbf{g}[\mathbf{A}]$. Recall that

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}[\mathbf{A}](x) &= \mathbf{f}(x) + A_n(\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{b}_f)(L_n^{-1}(x)), \\
\mathbf{g}[\mathbf{A}](x) &= \mathbf{g}(x) + A_n(\mathbf{g}[\mathbf{A}] - \mathbf{b}_g)(L_n^{-1}(x)), \quad \forall x \in I_n,
\end{aligned}$$

and then

$$(\lambda\mathbf{f}[\mathbf{A}] + \mu\mathbf{g}[\mathbf{A}])(x) = (\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})(x) + A_n(\lambda\mathbf{f}[\mathbf{A}] + \mu\mathbf{g}[\mathbf{A}] - \mathbf{b}_{\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}})(L_n^{-1}(x)).$$

Therefore, $\lambda\mathbf{f}[\mathbf{A}] + \mu\mathbf{g}[\mathbf{A}]$ is the fixed point of the operator

$$(T\mathbf{h})(x) = F_n(L_n^{-1}(x), \mathbf{h}(L_n^{-1}(x))) = (\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})(x) + A_n(\mathbf{h} - \mathbf{b}_{\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}})(L_n^{-1}(x)).$$

From the uniqueness of the fixed point we gather that

$$(\lambda \mathbf{f} + \mu \mathbf{g})[\mathbf{A}] = \lambda \mathbf{f}[\mathbf{A}] + \mu \mathbf{g}[\mathbf{A}],$$

demonstrating the linearity of $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$.

VI. From Part III, we have

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{F}[\mathbf{A}])(\mathbf{f})\|_\infty &= \|(\mathcal{F}[\mathbf{A}])(\mathbf{f}) - \mathbf{f} + \mathbf{f}\|_\infty, \\ &\leq \|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{f}\|_\infty, \\ &\leq \left(\frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty + \|\mathbf{f}\|_\infty \right), \\ &\leq \left(\frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|I_d - L\| + 1 \right) \|\mathbf{f}\|_\infty, \end{aligned}$$

where I_d is the identity operator on $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. This shows that the linear map $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ is bounded, and the operator norm satisfies $\|\mathcal{F}[\mathbf{A}]\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|I_d - L\| + 1$.

VII. It is patent from a moment's reflection on the proof of Part III that

$$\|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{b}\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - L\mathbf{f}\|_\infty.$$

Assume $(\mathcal{F}[\mathbf{A}])(\mathbf{f}) = \mathbf{f}[\mathbf{A}] = \mathbf{0}$. Then, we have

$$\|\mathbf{f}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|L\| \|\mathbf{f}\|_\infty.$$

Since $\|\mathbf{A}\|_1 < \|L\|^{-1}$, it is manifest that $\|\mathbf{f}\|_\infty = 0$. That is $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, yielding injectivity of the operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$. Again using Part III,

$$\|\mathbf{f}\|_\infty \leq \|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{f}[\mathbf{A}]\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - L\mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{f}[\mathbf{A}]\|_\infty.$$

By some simple manipulations on the above inequality we obtain

$$\|\mathbf{f}\|_\infty \leq \frac{1 + \|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1 \|L\|} \|\mathbf{f}[\mathbf{A}]\|_\infty,$$

from which we see that the inverse operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}]^{-1}$ is bounded on $(Rg(\mathcal{F}[\mathbf{A}]))$. To prove the range of $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ is closed one can follow the arguments provided in Theorem 3.5 of [26]. The operators $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ and $\mathcal{F}[\mathbf{A}]^{-1}$ are continuous in this case and thus closed. \square

Definition 4.1. A sequence (x_m) of a Banach space X is a Schauder basis, if for all $x \in X$ there exists a unique representation of x as

$$x = \sum c_m x_m,$$

where (c_m) is a sequence of scalars.

Definition 4.2. A sequence (x_m) of a Banach space is a Schauder sequence, if it is a Schauder basis for $[x_m] = \overline{\text{span}}(x_m)$.

Note: The set $\text{span}(x_m)$ is the family of finite linear combinations of the elements x_m and $[x_m]$ is the topological closure of $\text{span}(x_m)$.

Theorem 4.2. If (f_m) is a Schauder basis of $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ and $\|\mathbf{A}\|_1 < \|L\|^{-1}$, then $(f_m[\mathbf{A}])$ is a Schauder sequence.

Proof. Although the norm and the space of functions used are different, the arguments are similar to those provided in the proof of Theorem 2.12 of the reference [27]. The operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ is in this case a topological isomorphism onto $Rg(\mathcal{F}[\mathbf{A}]) = [\mathbf{f}_m[\mathbf{A}]]$, and these types of transformations preserve the bases. \square

On lines similar to Theorem 4.1, elementary property of the operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ can be established, for instance, we have the following.

Theorem 4.3. For the variables $\alpha_n, \beta_n,$ and $\gamma_n, n \in \mathbb{N}_{N-1}$ selected so that $\|\mathbf{A}\|_1 < (1 + \|I_d - L\|)^{-1}$, the corresponding fractal operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}] : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ is a topological isomorphism.

Proof. According to Part III of Theorem 4.1, $\|(\mathcal{F}[\mathbf{A}])(\mathbf{f}) - \mathbf{f}\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f} - L\mathbf{f}\|_\infty$ and consequently $\|I_d - \mathcal{F}[\mathbf{A}]\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|I_d - L\|$. The hypothesis $\|\mathbf{A}\|_1 < (1 + \|I_d - L\|)^{-1}$ now yields $\|I_d - \mathcal{F}[\mathbf{A}]\| < 1$. That the operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}] = I_d - (I_d - \mathcal{F}[\mathbf{A}])$ has bounded inverse follows from the standard theorem which reads: If T is a bounded linear operator from a Banach space into itself such that $\|T\| < 1$, then $I - T$ has bounded inverse and the Neumann series $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converges in operator norm to $(I - T)^{-1}$ [1]. This completes the proof. \square

Theorem 4.4. If (f_m) is a Schauder basis of $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ and $\|\mathbf{A}\|_1 < (1 + \|I_d - L\|)^{-1}$, then $(f_m[\mathbf{A}])$ is a Schauder basis as well.

Proof. The operator $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ is in this case a topological isomorphism according to the previous Theorem. Consequently $(\mathbf{f}_m[\mathbf{A}])$ is a Schauder basis of $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$. \square

5 Fractal Function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ Preserving Some Properties of Original Function \mathbf{f}

In this section, we identify suitable parameters in the IFS so that \mathbf{A} -fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ preserves the properties (for instance, regularity and monotonicity) inherent in \mathbf{f} .

Theorem 5.1. Let $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^r(I, \mathbb{R}^2)$. Suppose $D = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ be an arbitrary partition on I satisfying $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, block matrix $\mathbf{A} = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$, $A_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$ of

parameters satisfy $|\alpha_n| < a_n^r$, $|\beta_n| + |\gamma_n| < a_n^r$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Further suppose that $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in C^r(I, \mathbb{R}^2)$ fulfills $\mathbf{b}^{(j)}(x_1) = \mathbf{f}^{(j)}(x_1)$, $\mathbf{b}^{(j)}(x_N) = \mathbf{f}^{(j)}(x_N)$ for $j = 0, 1, \dots, r$. Then the corresponding \mathbb{R}^2 -valued fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ is r -smooth, and $\mathbf{f}[\mathbf{A}]^{(j)}(x_n) = \mathbf{f}^{(j)}(x_n)$ for $n \in \mathbb{N}_N$ and $j = 0, 1, \dots, r$.

Proof. Let $\mathfrak{R} := \{\mathbf{h} \in C^r(I, \mathbb{R}^2), \mathbf{h}^{(j)}(x_1) = \mathbf{f}^{(j)}(x_1) \text{ and } \mathbf{h}^{(j)}(x_N) = \mathbf{f}^{(j)}(x_N), j = 0, 1, \dots, r\}$. Here \mathfrak{R} is closed subset of the complete metric space $(C^r(I, \mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{C^r(I, \mathbb{R}^2)})$, where

$$\|\mathbf{f}\|_{C^r(I, \mathbb{R}^2)} := \max\{\|\mathbf{f}^{(j)}\|_\infty : j = 0, 1, \dots, r\}, \quad \|\mathbf{f}^{(j)}\|_\infty := \sup\{\|\mathbf{f}^{(j)}(x)\|_{l^1} : x \in I\}$$

and hence the space \mathfrak{R} is complete. Suppose $T_{\mathbf{A}} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ is defined as follows.

$$\begin{aligned} (T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})(x) &= F_n\left(L_n^{-1}(x), \mathbf{h}(L_n^{-1}(x))\right), \\ &= \mathbf{f}(x) + A_n(\mathbf{h} - \mathbf{b})(L_n^{-1}(x)) \quad x \in I_n, \quad n \in \mathbb{N}_{N-1}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

It follows upon the assumptions on \mathbf{f} , \mathbf{b} and the parameters involved in block matrix $\mathbf{A} = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$, that $T_{\mathbf{A}}\mathbf{h}$ is r -times differentiable with a continuous r -th derivative on each interval (x_n, x_{n+1}) . We prove that $T_{\mathbf{A}}$ maps \mathfrak{R} into \mathfrak{R} . With the choice of \mathbf{b} , we have $(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})(x_1) = \mathbf{f}(x_1)$ and $(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})(x_N) = \mathbf{f}(x_N)$. Next we verify

$$(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_n^+) = (T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_n^-) \quad \forall n \in \mathbb{N}_{N-1}.$$

For $j = 1, 2, \dots, r$, from (5.6) we obtain

$$(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(L_n(x)) = \mathbf{f}^{(j)}(L_n(x)) + \frac{A_n(\mathbf{h} - \mathbf{b})^{(j)}(x)}{a_n^j}. \tag{5.7}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} (T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_n^+) &= \mathbf{f}^{(j)}(x_n) + \frac{A_n(\mathbf{h} - \mathbf{b})^{(j)}(x_1)}{a_n^j}, \\ (T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_n^-) &= \mathbf{f}^{(j)}(x_n) + \frac{A_n(\mathbf{h} - \mathbf{b})^{(j)}(x_N)}{a_{n-1}^j}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Since $\mathbf{h} \in \mathfrak{R}$, it is apparent that $\mathbf{h}^{(j)}(x_1) = \mathbf{f}^{(j)}(x_1)$ and $\mathbf{h}^{(j)}(x_N) = \mathbf{f}^{(j)}(x_N)$, $j = 0, 1, \dots, r$. Using the conditions on \mathbf{b} , namely, its contact of order r at the extremes of the interval I with the function \mathbf{f} , we find from the above equations that $(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_n^+) = (T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_n^-)$ for $j = 0, 1, \dots, r$ and $n = 2, 3, \dots, N - 1$. Furthermore, from above equations it can be deduced that $(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_1) = \mathbf{f}^{(j)}(x_1)$, $(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x_N) = \mathbf{f}^{(j)}(x_N)$; $j \in \{0, 1, \dots, r\}$. Thus, $T_{\mathbf{A}}\mathbf{h} \in \mathfrak{R}$ and $T_{\mathbf{A}}$ is well defined. Adhering to above equations again, we see that

$$\begin{aligned} \|(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)} - (T_{\mathbf{A}}\mathbf{h}^*)^{(j)}\|_\infty &= \sup\left\{\|(T_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)}(x) - (T_{\mathbf{A}}\mathbf{h}^*)^{(j)}(x)\|_{l^1} : x \in I\right\}, \\ &= \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \sup\left\{\left\|\frac{A_n(\mathbf{h} - \mathbf{h}^*)^{(j)}(L_n^{-1}(x))}{a_n^j}\right\|_{l^1} : x \in I_n\right\}, \\ &\leq \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \frac{\|A_n\|_1}{a_n^j} \sup\left\{\|(\mathbf{h} - \mathbf{h}^*)^{(j)}(L_n^{-1}(x))\|_{l^1} : x \in I_n\right\}, \\ &\leq \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \frac{\|A_n\|_1}{a_n^r} \|(\mathbf{h} - \mathbf{h}^*)^{(j)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Thus, for $j \in \{0, 1, \dots, r\}$ one obtains

$$\begin{aligned} \|\mathsf{T}_{\mathbf{A}}\mathbf{h} - \mathsf{T}_{\mathbf{A}}\mathbf{h}^*\|_{\mathcal{C}^r(I, \mathbb{R}^2)} &= \max\{\|(\mathsf{T}_{\mathbf{A}}\mathbf{h})^{(j)} - (\mathsf{T}_{\mathbf{A}}\mathbf{h}^*)^{(j)}\|_{\infty} : j = 0, 1, \dots, r\} \\ &\leq \max\left\{\max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \frac{\|A_n\|_1}{a_n^r} \|(\mathbf{h} - \mathbf{h}^*)^{(j)}\|_{\infty} : j = 0, 1, \dots, r\right\} \\ &\leq \max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \frac{\|A_n\|_1}{a_n^r} \|\mathbf{h} - \mathbf{h}^*\|_{\mathcal{C}^r(I, \mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Since $|\alpha_n| < a_n^r$, $|\beta_n| + |\gamma_n| < a_n^r$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, then it follows that $\|A_n\|_1 < a_n^r$. Consequently, $\max_{n \in \mathbb{N}_{N-1}} \frac{\|A_n\|_1}{a_n^r} < 1$ and $\mathsf{T}_{\mathbf{A}}$ is a contraction. The fixed point $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ of $\mathsf{T}_{\mathbf{A}}$ is the r -smooth fractal function corresponding to \mathbf{f} . It is clear from the above discussion that the derivatives of \mathbf{f} and $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ agree at the endpoints of the interpolation interval i.e. $\mathbf{f}[\mathbf{A}]^{(j)}(x_n) = \mathbf{f}^{(j)}(x_n)$ for $n \in \mathbb{N}_N$ and $j = 0, 1, \dots, r$, completing the proof. \square

The fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ established in the previous section may not preserve the monotonicity property hidden in a given data set. As indicated at the start of this section, the next theorem points to the conditions on the elements of the (hidden variable) IFS so that the \mathbf{A} -fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ retains the monotonicity of \mathbf{f} inherent in the prescribed data set. We need the following notation to best describe it. Let

$$M_i = \max_{x \in I} b_i^{(1)}(x), \quad m_{i,n} = \min_{x \in I_n} f_i^{(1)}(x) \text{ for } i = 1, 2; \quad n \in \mathbb{N}_{N-1}.$$

Note that the existence of these parameters follows from the continuity of functions involved in their definition and the compactness of the domain.

Theorem 5.2. *Let $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ be a monotonic increasing function. Consider an arbitrary partition $D = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ on I satisfying $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ and a function $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ satisfying $\mathbf{b}(x_1) = \mathbf{f}(x_1)$, $\mathbf{b}(x_N) = \mathbf{f}(x_N)$, $\mathbf{b}^{(1)}(x_1) = \mathbf{f}^{(1)}(x_1)$, $\mathbf{b}^{(1)}(x_N) = \mathbf{f}^{(1)}(x_N)$. Further, let the block matrix $\mathbf{A} = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$ with $A_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$ be selected such that the entries $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ that lie in $[0, 1)$ satisfy*

$$\alpha_n < a_n, \quad \gamma_n \leq \frac{a_n m_{2,n}}{M_2}, \quad \beta_n + \gamma_n < a_n, \quad \alpha_n M_1 + \beta_n M_2 \leq a_n m_{1,n}.$$

Then the corresponding \mathbf{A} -fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ preserves the monotonicity of \mathbf{f} .

Proof. Note that the \mathbf{A} -fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = (f_1[\mathbf{A}], f_2[\mathbf{A}])$ is constructed iteratively using the functional equations

$$\begin{aligned} f_1[\mathbf{A}](L_n(x)) &= F_n^1(x, f_1[\mathbf{A}](x), f_2[\mathbf{A}](x)), \\ &= \alpha_n f_1[\mathbf{A}](x) + \beta_n f_2[\mathbf{A}](x) + f_1(L_n(x)) - \alpha_n b_1(x) - \beta_n b_2(x), \\ f_2[\mathbf{A}](L_n(x)) &= F_n^2(x, f_2[\mathbf{A}](x)), \\ &= \gamma_n f_2[\mathbf{A}](x) + f_2(L_n(x)) - \gamma_n b_2(x). \end{aligned}$$

Differentiating the expression for $f_1[\mathbf{A}](L_n(x))$ and $f_2[\mathbf{A}](L_n(x))$, we obtain

$$\begin{aligned} a_n f_1^{(1)}[\mathbf{A}](L_n(x)) &= \alpha_n f_1^{(1)}[\mathbf{A}](x) + \beta_n f_2^{(1)}[\mathbf{A}](x) + a_n f_1^{(1)}(L_n(x)) - \alpha_n b_1^{(1)}(x) - \beta_n b_2^{(1)}(x), \\ a_n f_2^{(1)}[\mathbf{A}](L_n(x)) &= \gamma_n f_2^{(1)}[\mathbf{A}](x) + a_n f_2^{(1)}(L_n(x)) - \gamma_n b_2^{(1)}(x). \end{aligned}$$

To prove that the \mathbf{A} -fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ preserves the monotonicity of the function \mathbf{f} , we will see $f_j^{(1)}[\mathbf{A}](x) \geq 0$ for all $x \in I$, for $j = 1, 2$. For $j = 1, 2$, it is enough (by induction) to prove that $f_j^{(1)}[\mathbf{A}] \geq 0$ holds good at points on I obtained at $(i + 1)$ -th iteration whenever $f_j^{(1)}[\mathbf{A}] \geq 0$ is satisfied for distinct points on I at i -th iteration. First we consider $f_2^{(1)}[\mathbf{A}](L_n(x)) \geq 0$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. This is equivalent to prove that $(F_n^2)^{(1)}(x, z) = \frac{a_n f_2^{(1)}(L_n(x)) - \gamma_n b_2^{(1)}(x)}{a_n} \geq 0$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$ whenever $(x, z) \in I \times \mathbb{R}$ and $z \geq 0$. Again for $\gamma_n \geq 0$, the conditions $(F_n^2)^{(1)}(x, z) \geq 0$ for all $(x, z) \in I \times \mathbb{R}$ and $z \geq 0$ are met if $a_n f_2^{(1)}(L_n(x)) - \gamma_n b_2^{(1)}(x) \geq 0$. By the definition of $m_{2,n}$ and M_2 , we have $a_n f_2^{(1)}(L_n(x)) - \gamma_n b_2^{(1)}(x) \geq a_n m_{2,n} - \gamma_n M_2$. With the aforementioned points one can deduce that $(F_n^2)^{(1)}(x, z) \geq 0$ for all $x \in I$ is satisfied if $\gamma_n \in [0, 1)$ is selected so that $\gamma_n \leq \frac{a_n m_{2,n}}{M_2}$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Note also that if $M_2 = 0$, then no additional constraint on γ_n needs to be imposed.

Having selected $\gamma_n, n \in \mathbb{N}_{N-1}$ according to the aforementioned prescription, by similar arguments it can be seen that $(F_n^1)^{(1)}(x, y, z) \geq 0$ for all $x \in I$ is fulfilled, if $y \geq 0, z \geq 0, \alpha_n \geq 0, \beta_n \geq 0$ and $a_n f_1^{(1)}(L_n(x)) - \alpha_n b_1^{(1)}(x) - \beta_n b_2^{(1)}(x) \geq 0$ for all $x \in I$ and $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Note that $a_n f_1^{(1)}(L_n(x)) - \alpha_n b_1^{(1)}(x) - \beta_n b_2^{(1)}(x) \geq a_n m_{1,n} - \alpha_n M_1 - \beta_n M_2$. Consequently, the desired condition turns out to be true if $\alpha_n M_1 + \beta_n M_2 \leq a_n m_{1,n}$. This completes the proof. \square

Remark 5.1. With a slight modification of the arguments as in the foregoing theorem, analogous result may be obtained for a nonincreasing function $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$.

Remark 5.2. The aforementioned fractal scheme can be modified and extended to produce piecewise defined \mathbf{A} -fractal function which is comonotone with the given $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. For this, the interval I has to be subdivided into subintervals, say $I_j, j = 1, 2, \dots, r$ in such a way that the function $\mathbf{f}|_{I_j} = \mathbf{f}_j$ is monotonic increasing or decreasing throughout the subinterval I_j . In each of these subintervals I_j , we take base function \mathbf{b}_j , and the variables α_n^j, β_n^j and γ_n^j in the block matrix $\mathbf{A}_j = [A_n^j]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$ so as to meet the specification in Theorem 5.2 and in Remark 5.1. Consequently we can get the fractal functions $\mathbf{f}[\mathbf{A}_j]$ that retain the monotonicity of the functions $\mathbf{f}_j = \mathbf{f}|_{I_j}, j = 1, 2, \dots, r$.

6 Monotonicity of \mathcal{C}^1 -Cubic Spline Hidden Variable FIF

In this section we illustrate the fractal perturbation process, its monotonicity aspect enunciated in the previous section by taking cubic spline as an example and to develop a monotonicity preserving cubic spline hidden variable interpolation scheme that extends the methods described

in the reference [16]. Note that Fritch and Carlson [16] have established the condition on the derivative parameters so that the \mathcal{C}^1 -cubic spline reflects the monotonicity property inherent in a prescribed data set. The desired \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF can be employed to represent self-referential as well as non-self-referential monotonic function Ψ with derivative $\Psi^{(1)}$ having irregularity in a finite or dense subset of the interpolation interval.

Consider a set of Hermite data $D = \{(x_n, y_n, d_n) : n \in \mathbb{N}_N\}$, where y_n denote the function value and d_n denote the derivative value of an unknown function Ψ_1 at the knot point x_n . To obtain a \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable interpolant corresponding to D , we extend it to a generalized data set $\widehat{D} = \{(x_n, y_n, d_n, y_n^*, d_n^*) : n \in \mathbb{N}_N\}$, where y_n^* and d_n^* are real parameters that are assumed to be the function values and the derivative values of a function Ψ_2 at the knot point x_n . By making use of the general theory given in Section 2 coupled with conditions of differentiability and by taking p_n and q_n as cubic polynomials, we construct the \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF corresponding to D . With $h_n = x_{n+1} - x_n$ and $t := \frac{x-x_1}{x_N-x_1}$, the traditional nonrecursive \mathcal{C}^1 -cubic splines f_1 and f_2 corresponding to D and \widehat{D} , respectively can be represented as

$$\begin{aligned} f_1(L_n(x)) &= \{h_n(d_n + d_{n+1}) - 2(y_{n+1} - y_n)\}t^3 + \{-h_n(2d_n + d_{n+1}) \\ &\quad + 3(y_{n+1} - y_n)\}t^2 + h_n d_n t + y_n, \\ f_2(L_n(x)) &= \{h_n(d_n^* + d_{n+1}^*) - 2(y_{n+1}^* - y_n^*)\}t^3 + \{-h_n(2d_n^* + d_{n+1}^*) \\ &\quad + 3(y_{n+1}^* - y_n^*)\}t^2 + h_n d_n^* t + y_n^*. \end{aligned} \quad (6.9)$$

According to the descriptions in Theorem 5.2, we have to select the parameter matrix \mathbf{A} and function $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ in such a way to obtain a continuously differentiable fractal perturbation for $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. A natural choice of $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ is the one in which b_1 and b_2 are the two-point Hermite interpolants (with knots at x_1 and x_N) corresponding to f_1 and f_2 respectively. That is,

$$\begin{aligned} b_1(x) &= [(x_N - x_1)(d_1 + d_N) - 2(y_N - y_1)]t^3 + [-(x_N - x_1)(2d_1 + d_N) \\ &\quad + 3(y_N - y_1)]t^2 + d_1(x - x_1) + y_1, \\ b_2(x) &= [(x_N - x_1)(d_1^* + d_N^*) - 2(y_N^* - y_1^*)]t^3 + [-(x_N - x_1)(2d_1^* + d_N^*) \\ &\quad + 3(y_N^* - y_1^*)]t^2 + d_1^*(x - x_1) + y_1^*, \end{aligned} \quad (6.10)$$

With these choices of component functions and with $\mathbf{A} = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$, where $A_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, satisfy $|\alpha_n| < a_n$, $|\beta_n| + |\gamma_n| < a_n$, we obtain \mathbf{A} -fractal function $\mathbf{f}[\mathbf{A}] = (f_1[\mathbf{A}], f_2[\mathbf{A}]) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ corresponding to $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ defined as:

$$\begin{aligned} f_1[\mathbf{A}](L_n(x)) &= f_1(L_n(x)) + \alpha_n(f_1[\mathbf{A}] - b_1)(x) + \beta_n(f_2[\mathbf{A}] - b_2)(x), \\ f_2[\mathbf{A}](L_n(x)) &= f_2(L_n(x)) + \gamma_n(f_2[\mathbf{A}] - b_2)(x), \quad x \in I, \quad n \in \mathbb{N}_{N-1}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

The function $f_1[\mathbf{A}] : I \rightarrow \mathbb{R}$ enjoying the Hermite interpolation conditions $f_1[\mathbf{A}](x_n) = y_n$ and $f_1[\mathbf{A}]^{(1)}(x_n) = d_n$ is the desired \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF corresponding to D .

Remark 6.1. If we choose the “hidden variables” y_n^* and d_n^* such that $y_n^* = y_n$ and $d_n^* = d_n$ for all $n \in \mathbb{N}_N$, and the parameters according to the relation $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$, then the cubic hidden variable FIF $f_1[\mathbf{A}]$ coincides with $f_2[\mathbf{A}]$, representing a self-referential \mathcal{C}^1 -cubic FIF approached constructively by Chand and Viswanathan [12]. For other choices of the hidden variables and parameters, $f_1[\mathbf{A}]$ is, in general, non-self-referential. Thus, the method is suitable for representing both self-referential and non-self-referential function, hence referred to as cubic spline coalescence hidden variable FIF.

Suppose a monotonic interpolation data set $D = \{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}_N\}$ wherein $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_N$. Extend it to $\widehat{D} = \{(x_n, y_n, y_n^*) : n \in \mathbb{N}_N\}$ by augmenting real parameters (hidden variables) y_n^* such that $y_1^* \leq y_2^* \leq \dots \leq y_N^*$.

An Algorithm for monotonic \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF

Step 1: Compute the approximate derivative values d_n, d_n^* for $n \in \mathbb{N}_N$. Ensure that each $d_n \geq 0, d_n^* \geq 0$. If $\Delta_n = 0, \Delta_n^* = 0$, let $d_n = d_{n+1} = 0, d_n^* = d_{n+1}^* = 0$ respectively.

Step 2: For each interval I_n for which $(\eta_n, \xi_n) = (\frac{d_n}{\Delta_n}, \frac{d_{n+1}}{\Delta_n}) \notin \rho$, modify d_n, d_{n+1} to $d_n^\diamond, d_{n+1}^\diamond$ such that $(\eta_n^\diamond, \xi_n^\diamond) = (\frac{d_n^\diamond}{\Delta_n}, \frac{d_{n+1}^\diamond}{\Delta_n}) \in \rho$. Similarly, do for d_n^*, d_{n+1}^* .

Further, construct the corresponding monotonic cubic splines $f_i, i = 1, 2$, (cf. (6.9)) and the functions $b_i, i = 1, 2$, (cf. (6.10)).

Step 3: Denoting the derivative values obtained at the end of Step 2 by d_n, d_n^* for $n \in \mathbb{N}_N$. For f_i and $b_i, i = 1, 2$, as obtained at the end of the previous step, compute the constants $M_i = \max_{x \in I} b_i^{(1)}(x), m_{i,n} = \min_{x \in I_n} f_i^{(1)}(x)$ for $i = 1, 2$. Choose variables satisfying the following constraints:

$$0 \leq \alpha_n < a_n, \beta_n \geq 0, \gamma_n \in [0, \frac{a_n m_{2n}}{M_2}], \beta_n + \gamma_n < a_n, \text{ and } \alpha_n M_1 + \beta_n M_2 \leq a_n m_{1n}.$$

Step 4: Input the derivative values chosen in Step 2 and parameters as prescribed by Step 3 in the functional equations represented by (6.11) whereupon the points of the graph of $f_1[\mathbf{A}]$ and $f_2[\mathbf{A}]$ are computed. The parameters of this cubic FIF $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ satisfy sufficient conditions in Theorem 5.2, and hence $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ is monotone.

Note: We can apply any classical method available in literature, for instance, [14, 15, 32] up to Step 2 first, then we can obtain fractal analogue of that particular method or algorithm with combination of Step 3 and Step 4.

We prove the following theorem which provides convergence order of monotonic \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF.

Theorem 6.1. *Suppose that $\Phi \in \mathcal{C}^3(I, \mathbb{R}^2)$ is monotonic increasing. Let the approximate derivative values d_n, d_n^* satisfy $|\Phi_1^{(1)}(x_n) - d_n| \leq k_1 h^2, |\Phi_2^{(1)}(x_n) - d_n^*| \leq k_2 h^2$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$ and for some constants k_1, k_2 , where $h = \max\{h_n : n \in \mathbb{N}_{N-1}\}$. Further, let the closed triangle with vertices $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$ is contained in the subregion ρ , and the projection of (η_n, ξ_n) onto ρ satisfies $\eta_n^\diamond + \xi_n^\diamond \geq 2$, and the variables in the block matrix $\mathbf{A} = [A_n]_{n \in \mathbb{N}_{N-1}}$ are such that $|\alpha_n| < a_n^3, |\beta_n| + |\gamma_n| < a_n^3$ for all $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Then the associated monotone cubic spline hidden variable FIF $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ is a third order approximation to Φ .*

Proof. Let Φ be the original function and \mathbf{f} be a traditional cubic non-recursive approximant for Φ . We begin with the triangle inequality

$$\|\Phi - \mathbf{f}[\mathbf{A}]\|_\infty \leq \|\Phi - \mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}[\mathbf{A}]\|_\infty \quad (6.12)$$

We know [14] that Fritsch and Carlson algorithm is third order accurate under the given hypothesis. The first term in the above inequality:

$$\|\Phi - \mathbf{f}\|_\infty = O(h^3). \quad (6.13)$$

Similarly, the second term in the right hand side in (6.12) can be bounded by using Theorem 4.1, Part III as follows:

$$\|\mathbf{f}[\mathbf{A}] - \mathbf{f}\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty. \quad (6.14)$$

Now

$$\begin{aligned} \|\Phi - \mathbf{f}[\mathbf{A}]\|_\infty &\leq \|\Phi - \mathbf{f}\|_\infty + \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f} - \mathbf{b}\|_\infty, \\ &\leq \|\Phi - \mathbf{f}\|_\infty + \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} (\|\mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{b}\|_\infty), \\ &\leq \|\Phi - \mathbf{f}\|_\infty + \frac{2\|\mathbf{A}\|_1}{1 - \|\mathbf{A}\|_1} \|\mathbf{f}\|_\infty. \end{aligned}$$

Under the hypothesis, the associated monotone cubic spline hidden variable FIF $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ is third order approximation to Φ . This completes the proof. \square

7 Numerical Illustration

In this section, we illustrate the monotonicity preserving \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF scheme with some computationally generating examples. For this purpose, let us take the following subset of the Akima data: $D = \{(8, 10), (9, 10.5), (11, 15), (12, 50), (14, 60), (15, 85)\}$. We have written a simple computer program in MatLab for plotting the graphs of \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIFs. One inputs the data points, derivative values, hidden variables, and scaling parameters, whereupon points on the graph are recursively generated. Theoretically, to

obtain the actual fractal interpolant, one needs to continue the iterations indefinitely. However, in practice, computation is very fast (note that for a data set with N points exactly $(N-1)^{r+1}+1$ points with distinct x -coordinate are obtained at the r -th iteration) and a good view of the whole function is quickly obtained and may be printed with a graphics printer.

Extend the given monotonic data set to

$$\widehat{D} = \{(x_n, y_n, y_n^*) = (8, 10, 20), (9, 10.5, 23), (11, 15, 25), (12, 50, 30), (14, 60, 36), (15, 85, 40)\}.$$

Note that for the implementation of the \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF scheme one requires in input the values of the derivatives at the knot points. Therefore, in the absence of other conditions/information, estimates of derivatives are necessary. The derivative values at data points are estimated using the arithmetic mean method: At the end points x_1 and x_N , set

$$d_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta_1 = 0 \text{ or } \text{sgn}(d_{1*}) \neq \text{sgn}(\Delta_1), \\ d_{1*} = \Delta_1 + \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)h_1}{h_1 + h_2}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d_N = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta_{N-1} = 0 \text{ or } \text{sgn}(d_{N*}) \neq \text{sgn}(\Delta_{N-1}), \\ d_{N*} = \Delta_{N-1} + \frac{(\Delta_{N-1} - \Delta_{N-2})h_{N-1}}{h_{N-1} + h_{N-2}}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and at the interior points x_n ; $n = 2, \dots, N-1$, set

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta_n = 0 \text{ or } \Delta_{n-1} = 0, \\ \frac{h_n \Delta_{n-1} + h_{n-1} \Delta_n}{h_n + h_{n-1}}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

For the present data set, we have $d_1 = 0, d_2 = 1.0833, d_3 = 24.0833, d_4 = 25, d_5 = 18.3333, d_6 = 31.6667$ and $d_1^* = 3.6667, d_2^* = 2.3333, d_3^* = 3.6667, d_4^* = 4.3333, d_5^* = 3.6667, d_6^* = 4.3333$ calculated by above arithmetic mean method. Taking $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0$ for all $n = 1, 2, \dots, 5$, Fig. 3(a) shows the traditional piecewise cubic interpolant corresponding to this initial choice of derivative values. Note that this cubic interpolant is not monotone and the non-monotonic \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF $f_1[\mathbf{A}]$ displayed in Fig. 3(a) is obtained by iterating the functional equations given in (6.11) via (6.9)-(6.10). To obtain a monotone cubic interpolant $f_1[\mathbf{A}]$, we apply the FC-algorithm (Section 2) with monotonicity region ρ_2 (the disc $\eta^2 + \xi^2 = 3^2$). One procedure for modifying the derivative values in Step 2 (FC algorithm) is to construct the line joining the origin to the point (η, ξ) . Let $(\eta^\diamond, \xi^\diamond)$ be the intersection of this line with the boundary of ρ_2 . For ρ_2 , $\eta^\diamond = \tau\eta, \xi^\diamond = \tau\xi$, where $\tau = 3(\eta^2 + \xi^2)^{-1/2}$. This procedure modifies the initial derivative values to $d_1 = 0, d_2 = 0.3033, d_3 = 6.7432, d_4 = 10.6065, d_5 = 7.7800, d_6 = 31.6667$ and $d_1^* = 3.6667, d_2^* = 1.6106, d_3^* = 2.5310, d_4^* = 4.3333, d_5^* = 3.6667, d_6^* = 4.3333$. Taking $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ for all $n = 1, 2, \dots, 5$ as in Fig. 3(a) and the derivative parameters as recommended by Fritsch and Carlson (see Step 2 of our algorithm). We obtain a monotonic self-referential \mathcal{C}^1 -cubic spline in Fig. 3(b). Selecting $\alpha = (-0.2, 0.001, 0.01, 0.01, 0.01), \beta = (0, 0.002, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01)$,

and $\gamma = (-0.4, 0.008, 0.011, 0.04, 0.017)$ arbitrarily and \mathbf{b} as the two-point cubic Hermite interpolant corresponding to s and the derivative parameters as in Fig. 3(b), we obtain a non-monotonic non-self-referential cubic spline HFIF in Fig. 3(c). This illustrates the importance of the monotonicity preserving \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable FIF algorithm developed in the previous section. Next to obtain a monotone cubic HFIF we apply Steps 3 and 4 of our monotone cubic HFIF algorithm. Observe that the end derivatives $d_1 = 0, d_6 = 31.6667, d_1^* = 3.6667, d_6^* = 4.3333$ obtain through the FC-algorithm satisfy condition prescribed in Step 3, and hence there is no need of any modification, where we take ρ_2 to be the disc specified earlier. Taking $\alpha = (0, 0.001, 0.01, 0.01, 0.01), \beta = (0, 0.002, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01)$ and $\gamma = (0.007, 0.008, 0.011, 0.04, 0.017)$ arbitrarily from the range of permissible values given in Step 3 and the derivative parameters as in Fig. 3(b), the corresponding non-self-referential \mathcal{C}^1 -cubic spline HFIF retains the monotonicity is plotted in Fig. 3(d).

The derivatives of the traditional monotone cubic interpolant s , and monotone \mathcal{C}^1 -cubic spline HFIF $f_1[\mathbf{A}]$ are given in Fig. 3(e)-(f). Here the Fig. 3(b) and Fig. 3(d) look alike, but the derivative of both figures are different in nature. The function $s^{(1)}$ is smooth except possibly at the knots whereas $f_1^{(1)}[\mathbf{A}]$ shows irregularity in finite number of points or on dense subsets of the interpolation interval. Further, the irregularity can be quantified using the notion of fractal dimension. In CAGD and geometric modeling, in addition to have methods for monotone interpolation, it is desirable to have one or more parameters that can influence the shape of the interpolant and/or its derivative. So, the proposed scheme can be exploited to construct an interpolant satisfying chosen properties such as monotonicity and fractality in the derivative.

8 Concluding Remarks

In the present work, we have applied hidden variable fractal interpolation as a tool to associate an entire class of \mathbb{R}^2 -valued continuous fractal functions $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ with a prescribed continuous function \mathbf{f} . Suitable values of the parameters in the block matrix \mathbf{A} are identified so that the fractal functions retain regularity and monotonicity of the germ function \mathbf{f} . We have derived estimate for the approximation of function \mathbf{f} by their fractal analogue $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$. As an application of the developed theory, we obtain monotonic \mathcal{C}^1 -cubic spline hidden variable fractal interpolation functions corresponding to a prescribed set of monotonic data, thus initiating a new approach to shape preserving approximation via hidden variable fractal function. The monotonicity preserving interpolation scheme developed herein generalizes and enriches its traditional nonrecursive counterpart and its fractal extension. In practice, there are many instances where we desire a monotonic interpolant with its derivative receiving varying irregularity, and introduction of monotonicity of cubic HFIFs $\mathbf{f}[\mathbf{A}]$ accomplishes this. Thus, in conclusion, the hidden variable fractal methodology can be exploited in the field of shape preserving interpolation/approximation for providing more diverse and flexible shape preserving curves.

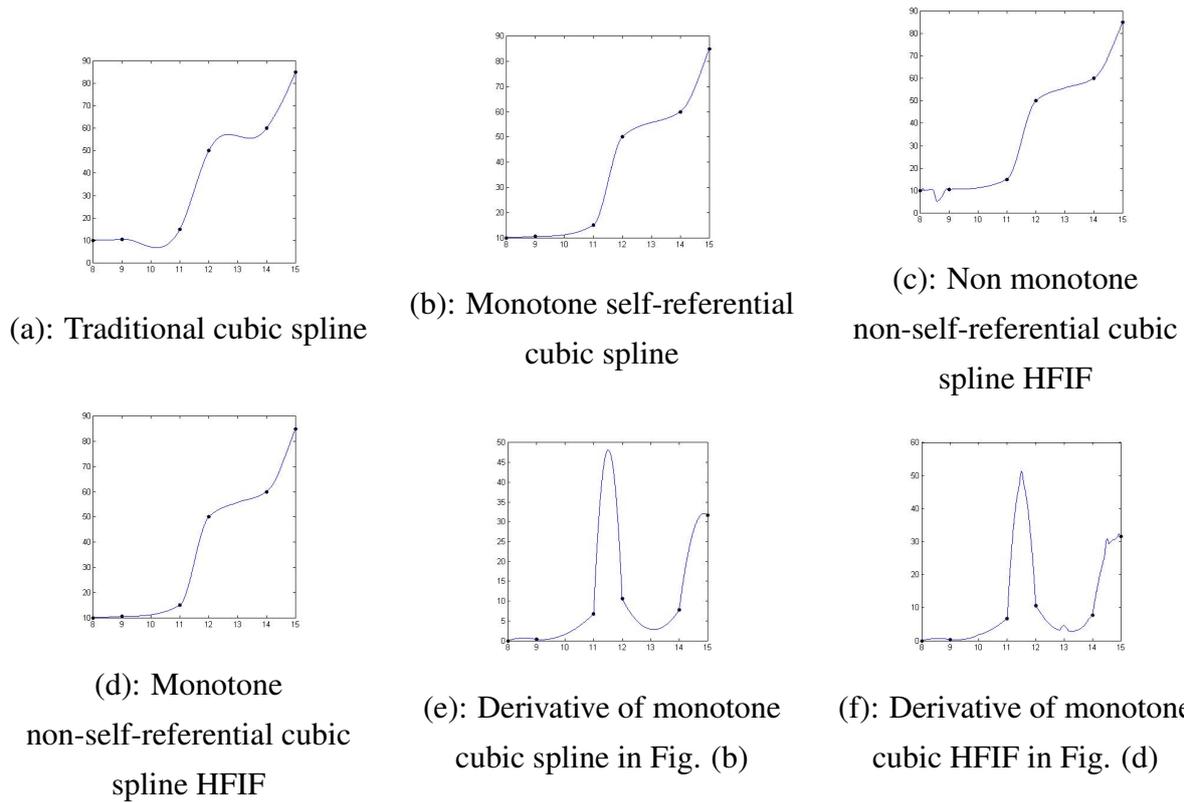


Figure 3: Cubic spline hidden variable fractal interpolation functions (HFIFs) (the interpolating data points are given by the circles and the relevant hidden variable fractal interpolants by the solid lines).

References

- [1] Bachman, G., Narici, L.: *Functional Analysis*. Dover Publication, Mineola, N. Y., 2000.
- [2] Barnsley, M. F.: *Fractals Everywhere*. Academic Press, Dublin (1988). (2nd Edition, Morgan Kaufmann 1993; 3rd Edition, Dover Publications, 2012).
- [3] Barnsley, M. F.: Fractal functions and interpolation. *Constr. Approx.* **2**(1) (1986) 303-329.
- [4] Barnsley, M. F., Harrington, A. N.: The calculus of fractal interpolation functions. *J. Approx. Theory* **57**(1) (1989) 14-34.
- [5] Barnsley, M. F., Elton, J., Hardin, D., Massopust, P.: Hidden variable fractal interpolation functions. *SIAM J. Math. Anal.* **20**(5) (1989) 1218-1242.
- [6] Bouboulis, P., Dalla, L.: Hidden variable vector valued fractal interpolation functions. *Fractals* **13**(3) (2005) 227-232.
- [7] Cai, G., Huang, J., Tian, L., Wang, Q.: Adaptive control and slow manifold analysis of a new chaotic system. *Int. J. Nonlinear Science* **2**(1) (2006) 50-60.

- [8] Chand, A. K. B., Kapoor, G. P.: Generalized cubic spline fractal interpolation functions. *SIAM J. Numer. Anal.* **44**(2) (2006) 655-676.
- [9] Chand, A. K. B., Kapoor, G. P.: Stability of affine coalescence hidden variable fractal interpolation functions. *Nonlinear Anal. TMA* **68** (2008) 3757-3770.
- [10] Chand, A. K. B., Katiyar, S. K., Saravana Kumar, G. *A new class of rational fractal function for curve fitting*. Proceeding of Computer Aided Engineering CAE 2013, ISBN No. 78-93-80689-17-3.
- [11] Chand, A. K. B., Vijender, N., Navascués, M. A.: Shape preservation of scientific data through rational fractal splines. *Calcolo.* **51** (2013) 329-362.
- [12] Chand, A. K. B., Viswanathan, P: A constructive approach to cubic Hermite fractal interpolation function and its constrained aspects, *BIT Numer. Math.*, **53**(4) (2013) 841-865.
- [13] Dalla, L., Drakopoulos, V.: On the parameter identification problem in the plane and the polar fractal interpolation. *J. Approx. Theory* **101** (1999) 289-302.
- [14] Eisenstat, S. C., Jackson, K. R., Lewis, J. W. : The order of monotone piecewise cubic interpolation. *SIAM J. Num. Anal.* **22**(6) (1985) 1220-1237.
- [15] Fritch, F. N., Butland, J.: A method for constructing local monotone piecewise cubic interpolants. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **5**(2) (1984) 300-304.
- [16] Fritsch, F. N., Carlson, R. E.: Monotone piecewise cubic interpolations. *SIAM J. Num. Anal.* **17**(2) (1980) 238-246.
- [17] Fisher, Y.: *Fractal Image Compression*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [18] Gregory, J. A., Delbourgo, R.: Shape preserving piecewise rational interpolation. *SIAM J. Stat. Comput.* **6**(4) (1985) 967-976.
- [19] Kumagai, Y.: Fractal structure of financial high frequency data. *Fractals* **10**(1) (2002) 13-18.
- [20] Han, X.: Convexity-preserving piecewise rational quartic interpolation. *SIAM. J. Numer. Anal.* **46**(2) (2008) 920-929.
- [21] Hastings, M., Sugihara, G.: *Fractals, A User's Guide for Natural Sciences*, Oxford University Press, New York (1993).
- [22] Mandelbrot, B. B.: *Fractals: From Chance and Dimension*, W. H. Fremman (1977).
- [23] Manousopoulos, P., Drakopoulos, V., Theoharis, T.: Parameter identification of 1D fractal interpolation functions using bounding volumes. *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2009) 1063-1082.
- [24] Massopust P. R.: *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*, Academic Press, 1994.
- [25] Navascués, M. A.: Fractal polynomial interpolation. *Z. Anal. Anwend.* **25**(2) (2005) 401-418.

- [26] Navascués, M. A.: Fractal approximation. *Complex Anal. Oper. Theory.* **4**(4) (2010) 953-974.
- [27] Navascués, M. A.: Fractal bases of L_p spaces. *Fractals* **20**(2) (2012) 141-148.
- [28] Navascués, M. A., Chand, A. K. B.: Fundamental sets of fractal functions. *Acta Appl. Math.* **100**(3) (2008) 247-261.
- [29] Viswanathan, P., Chand, A. K. B.: Fractal rational functions and their approximation properties. *J. Approx. Theory* **185** (2014) 31-50.
- [30] Viswanathan, P., Chand, A. K. B., Agarwal, R. P.: Preserving convexity through rational cubic spline fractal interpolation function. *J. Comp. Appl. Math.* **263** (2014) 262-276.
- [31] Wang, H. Y., Yu, J. S.: Fractal interpolation function with variable parameters and their analytical properties. *J. Approx. Theory* **175** (2013) 1-18.
- [32] Yan, Z.: Piecewise cubic curve fitting algorithm. *Math. Comput.* **49**(179) (1987) 203-213.

Estudio de los procesos de evolución en tres genes de la especie canina (*MDR-1*, *CYP1A2* y *CYP2B11*) implicados en la resistencia a determinados fármacos

R. Gagliardi¹, S. Munilla², M.V. Arruga³, C. García³, S. Llambí¹

¹Área de Genética. Facultad de Veterinaria, Universidad de La República,

Montevideo, C.P. 11600, Uruguay

²Departamento de Producción Animal, Facultad de Agronomía,

Universidad de Buenos Aires, Av. San Martín 4453 - C1417DSE - Buenos Aires, Argentina.

³Laboratorio de Citogenética y Genética Molecular. Facultad de Veterinaria.

Universidad de Zaragoza. Miguel Servet, 177 Zaragoza, C. P. 50013, España.

Abstract

The application of Pharmacogenetic and Pharmacogenomic knowledge is very important in clinical practice for adverse reaction prevention to drugs. It has been shown that not all drugs can be administered to all individuals, due to adverse reactions of intolerance controlled by genes. In many animal species, such as the canine species (*Canis lupus familiaris*), the *MDR-1*, *CYP1A2* and *CYP2B11* genes are associated with resistance to certain treatments, especially those used in clinical practice, such as antiparasitics, anesthetics and other treatments. Sometimes a treatment generates resistance after continuous exposure to the drug, whereby resistance phenotypes are selected, which is called MDR (Multidrug Resistance). The *CYP1A2* and *CYP2B11* genes are involved in the synthesis of proteins involved in the metabolism of numerous drugs, too. In the present work 26 SNP genetic markers linked to these genes are analysed. We wish to determine if any of them have suffered genetic selection or selective pressure over time, in four different canine breeds: Uruguayan Cimarrón, Border Collie, Labrador Retriever and German Shepherd. To test the hypothesis of neutral evolution we calculate the D statistic of Tajima. The results obtained indicate the neutrality hypothesis for the *MDR-1* and *CYP2B11* genes and it can be rejected for the *CYP1A2* gene.

Introducción

Existe una creciente evidencia de un vínculo claro entre las características genotípicas de cada individuo y las reacciones adversas a los medicamentos.

Los campos de la Farmacogenética y Farmacogenómica son cada vez más prometedores con respecto a la aplicación clínica de la información genética para ayudar a prevenir reacciones adversas, poder predecir el comportamiento de los fármacos y descubrir nuevas dianas farmacológicas. Un enfoque de farmacogenética para reacciones a fármacos puede aconsejar una terapia para cada paciente y permitir un régimen de medicación individualizada (Ros *et al.*, 2010).

En la especie canina (*Canis lupus familiaris*), uno de los genes implicados en la respuesta a fármacos, en concreto a la resistencia a múltiples fármacos, es el gen *MDR*. Se ha identificado una mutación consistente en una delección de pares de bases de su secuencia, denominada *MDR1-1Δ* que en los individuos portadores y de forma más intensa en los individuos homocigóticos para la delección, provoca intolerancias con efectos graves, incluso la muerte, ante determinados fármacos de uso común, como acepromacina (tranquilizante y anestésico), butorfanol (analgésico y anestésico), emodepside (antihelmíntico), eritromicina, ivermectina (agente antiparasitario), loperamida (antidiarreico), selamectina, milbemicina y moxidectina (agentes antiparasitarios), vinblastina y doxorubicina (agentes de la quimioterapia), ciclosporina (inmunosupresor), digoxina (medicamento cardíaco), doxiciclina (droga antibacteriana), entre otros. Los perros con la mutación *MDR-1* son más sensibles a estos fármacos con respecto a su probabilidad de tener una reacción adversa al medicamento.

Estas reacciones han sido descritas, principalmente en la raza Collie y en otras razas próximas. En 2011, 2013 y 2015, Gagliardi *et al.*, estudiaron los genes *MDR-1* y *CYP2D15* en la raza de perro Cimarrón uruguayo no identificando la mutación, ni tampoco ningún efecto nocivo, en concreto a la ivermectina.

Usando la tecnología actual, como la secuenciación masiva del ADN, la identificación genética de alto rendimiento y la bioinformática, se pueden identificar las variables entre pacientes para predecir las diferencias en el comportamiento y la respuesta a los fármacos.

Se ha descrito que aproximadamente un 75 % de los Border Collie en EE.UU., Francia y Australia tienen el alelo mutante y otras razas afectadas son tienen un linaje común con la anterior (Tomiyasu *et al.*, 2014).

Los genes *CYP1A2* y *CYP2B11* codifican para enzimas de su mismo nombre y son miembros del grupo que controla la síntesis del citocromo P450. Esta clase de enzimas son responsables del metabolismo de una gran variedad de fármacos. (Kamimura, 2006; Barreiro *et al.*, 2008).

Se pueden utilizar marcadores genéticos, como los polimorfismos de una única base

(SNP), que son fáciles y rápidos de identificar mediante reacciones de PCR y secuenciación de los fragmentos amplificados, y que estén ligados a los genes implicados en el metabolismo de fármacos. De esta forma, con un sencillo examen previo de los genotipos de cada individuo se puede saber si presentan un genotipo positivo a la resistencia o no.

En este trabajo, los tres genes (*MDR-1*, *CYP2B11* y *CYP1A2*) que participan en el metabolismo de fármacos se estudiaron con el objetivo de identificar los polimorfismos que se presentan en 26 SNPs ligados, en 106 animales pertenecientes a cuatro razas caninas diferentes.

Es muy útil, en este sentido, analizar marcadores genéticos ligados a estos genes de interés, para determinar si alguno de ellos ha sufrido selección genética o presión selectiva a lo largo del tiempo. Es decir, si han sufrido selección unos genotipos se habrán ido eliminando, mientras que otros se habrán mantenido o aumentado en la población. Pero también pueden ser tan sólo variaciones genéticas presentes en la población y debidas a una evolución neutra. (Akey, 2009; Abecasis *et al.*, 2012; Subramanian, 2016). Por lo que es preciso probar, previamente, que la presencia de esa variabilidad genética es debida o no a una evolución neutra. Y uno de los mejores métodos existentes es la utilización de la metodología de estimación del estadístico D de Tajima (Tajima, 1989).

La llamada Genética de poblaciones proporcionó información sobre la naturaleza de la variación a nivel molecular y, como resultado, la evidencia de que existe una variación genética contenida en las proteínas y en los genes, que no puede ser totalmente explicada por los efectos de la selección natural. Estas ideas culminaron en la propuesta de la teoría neutra de la evolución.

Una importante revisión se propuso (Kimura, 1968, 1983) para introducir la teoría de la evolución neutra, que considera la evolución de las mutaciones deletéreas ligeramente beneficiosas, cuasi-neutrales, dependiendo principalmente de la tasa de mutación, los coeficientes de selección y del tamaño de la población.

Un grupo importante de las pruebas de neutralidad se deriva de la distribución de frecuencias de los alelos en los lugares determinados, el denominado espectro de frecuencias. Todas estas pruebas estadísticas se calculan como la diferencia estandarizada de dos estimadores imparciales de la tasa de mutación (θ) bajo el modelo neutral. Una de las pruebas de neutralidad mejor conocidas dentro de este grupo se basa en el estadístico D de Tajima (Tajima, 1989).

Esta prueba sirve como una prueba de neutralidad clásica que compara las estimaciones de la cantidad de separación de los sitios segregantes y de la diferencia media de pares de bases entre secuencias de ADN y el método FST basado en la diferenciación genética de la población. El estadístico D de Tajima se calcula como la diferencia estandarizada entre la estimación de θ , basado en el número medio de diferencias por pares de bases y en el número de sitios segregantes (Barrett y Hoekstra, 2011).

El valor esperado de los estimadores bajo el modelo de evolución neutral es cero. Sin embargo, sí se detectan desviaciones significativas de cero, indica la no neutralidad. Más específicamente, los valores negativos de D pueden indicar selección positiva (o, posiblemente, una reducción en el tamaño de la población), mientras que los valores positivos indican selección equilibrada. (Van Straalen y Roelofs, 2012; Arenas et al., 2017).

Se aplicó esta prueba con el fin de determinar si la frecuencia observada de los 26 marcadores genéticos SNPs en los tres genes indicados, es consistente con un evento de selección reciente, o se corresponde con una variación genética dentro de la evolución neutra, en estas poblaciones caninas en concreto. Los resultados indican la importancia de la identificación genética de estos genes de forma previa a cualquier tratamiento clínico que se vaya a realizar en la población canina, para evitar muertes y reacciones adversas a los tratamientos y también colaboran a una mejor comprensión del proceso biológico de la selección natural, como principal motor del cambio evolutivo y fuente de adaptaciones fenotípicas.

Material y métodos

Se estudiaron 106 animales pertenecientes a cuatro razas caninas (25 animales de la raza Cimarrón uruguayo, 23 de Border Collie, 29 de Labrador Retriever y 29 de Pastor Alemán), analizándose 26 marcadores genéticos SNPs pertenecientes a los genes *MDR-1*, *CYP1A2* y *CYP2B11*. De los cuales 5 (SNP1 a SNP5) pertenecientes al gen *MDR-1* (cromosoma 14; número de acceso GenBank NC_006596.3; ID: 403879), 20 (SNP6 a SNP25) al gen *CYP1A2* (cromosoma 30; GenBank número de acceso NC_006612.3 y ID: 494010) y uno (SNP26) al gen *CYP2B11* (cromosoma 1; número de acceso GenBank NC_006583.3; ID : 474177).

El ADN se obtuvo de las muestras de sangre de cada animal, a partir del cual se analizaron los 26 SNP, obteniéndose los genotipos de cada individuo para esos 26 marcadores. A partir de los datos de genotipos se caracterizó genéticamente cada una de las cuatro poblaciones caninas estudiadas mediante los sistemas GENETIX (Belkhir *et al.*, 1996) y ARLEQUIN (Excoffier *et al.*, 2005).

Análisis estadístico

Se ha estudiado el número de alelos por locus (A), el número efectivo de alelos por locus (A_e), el porcentaje de loci polimórficos (P), la heterocigosidad observada (H_o), la heterozigosidad esperada (H_e) (Hartl y Clark, 1997; Hedrick, 2000). La diversidad genética total (H_T), la diversidad genética dentro de las subpoblaciones (H_S), la diversidad genética entre poblaciones (DST) y el coeficiente de diferenciación genética (GST) o diversidad genética dentro y entre las poblaciones locales (Hedrick, 2000).

Acerca de los estadísticos F de Wright, se calculó el coeficiente de endogamia entre individuos dentro de una población (FIS), el coeficiente de endogamia entre individuos en relación con la población total (FIT), así como la diferenciación genética entre poblaciones (FST).

Para evaluar si F , FIS y FIT eran significativamente diferentes de cero, se realizó una prueba $\chi_2 = 2NF(k - 1)$ con $df = k(k - 1)/2$, donde F es el coeficiente de endogamia, N es el tamaño de la muestra y k es el número de alelos (Li y Horvitz, 1953).

Para determinar si los valores de FST eran significativamente diferentes de la prueba cero, se utilizó $\chi_2 = 2NFST(k - 1)$ con $df = (k - 1)(s - 1)$, donde N es el tamaño de la muestra, k es el número de alelos y s es el número de subpoblaciones, en este caso el número de razas (Workman y Niswander, 1970).

Se calculó el flujo génico (Slatkin, 1987) (N_m) y las distancias genéticas (Nei, 1978).

Las secuencias se alinearon utilizando el programa BioEdit (Hall, 1999). Las secuencias resultantes se analizaron utilizando el programa Blast (Altschul et al., 1997) para confrontar con las secuencias más similares en GenBank. La alineación de secuencias se realizó utilizando el programa CLUSTALW.

Se analizaron dos secuencias en cada animal. En algunas posiciones algunos de los alelos SNP fueron indeterminados, en tales casos, se realizó el criterio de eliminación de la secuencia completa de los polimorfismos individuales en este gen.

Para estudiar la hipótesis de neutralidad se calculó la prueba D de Tajima (1989). Los valores obtenidos se compararon con los límites de confianza publicados en dicho trabajo.

Resultados

Entre los 26 SNPs estudiados pertenecientes a tres genes, cuatro de ellos, SNP1, SNP3, SNP4 y SNP5, presentaron fijación alélica en las razas Cimarrón Uruguayo y Labrador Retriever. La población Cimarrón Uruguayo presentó 10 loci homocigóticos.

Variación genética dentro de las poblaciones

Se identificaron un total de 54 alelos en los 26 loci. El número medio de alelos por locus (A), en el total de las cuatro poblaciones, fue de 2,08, con un rango de 2 a 4.

El porcentaje de loci polimórficos fue del 69,23 (95 % P), la heterocigosidad media observada $H_o = 0,3948$ y la heterocigosidad esperada $H_e = 0,3187$, indican que se observó una mayor heterocigosidad de lo esperado, es decir un exceso de heterocigotos, en todas las razas, lo que significa una excelente variabilidad genética.

La diversidad genética dentro y entre las poblaciones

La población Cimarrón Uruguayo presentó la diversidad genética más baja dentro de las poblaciones ($H_e = 0,2455$), aunque otras poblaciones tienen una heterocigosidad bastante cercana a esos valores, concretamente $H_e = 0,3175$ para la población Border Collie, $0,2909$ para la población de Labrador Retriever y $0,2674$ para la raza Pastor Alemán. La diversidad genética total (H_T) fue moderada, la media es igual a $0,3215$, con un intervalo desde $0,0504$ en el locus SNP2 a $0,4997$ en el locus SNP14. La diversidad genética dentro de las poblaciones fue $H_S = 0,2803$.

El coeficiente de diferenciación genética obtenido ($GST = 0,1280$) indica una diversidad genética del $12,8\%$ entre las razas y de $87,2\%$ dentro de las razas.

Estadísticos F de Wright

Un exceso de homocigotos se identificó en tres loci (SNP6, SNP8 y SNP13), ya que FIS fue positivo con valores significativamente diferentes de cero (Tabla 1). Los restantes valores positivos de FIS, en 4 loci (SNP1, SNP3, SNP4 y el SNP22), no fueron significativamente diferentes de cero, lo que indica que están en equilibrio de Hardy-Weinberg.

Cuando se consideran los valores de FIS que han resultado significativamente diferentes de cero, éstos se obtuvieron en 16 loci, lo que indica que sólo 10 loci están en equilibrio de Hardy-Weinberg (Tabla 1).

El valor medio de FIS es de $-0,39331$ y significativamente diferente de cero, indicando que no hay consanguinidad entre individuos dentro de cada población. El FIT medio es de $-0,18922$, indicando que la diferenciación de las poblaciones locales con respecto a la población total no es debido a la endogamia. El valor medio de FST fue $0,14648$, que prueba una moderada diferenciación genética entre las poblaciones analizadas (Tabla 1). Este valor coincide con la tasa de GST, lo que sugiere que la mayoría de la diversidad genética se encuentra dentro de las poblaciones y no entre poblaciones.

El valor medio del flujo de genes entre las poblaciones fue de 5.867 . Un valor $N_m > 1$ indica un alto flujo de genes entre las poblaciones estudiadas, es decir ha habido intercambio de genes y en algún momento se cruzaron entre sí.

Se calcularon las distancias genéticas de Nei (1978) entre las cuatro poblaciones caninas (Tabla 2) y se pudo observar que la población Cimarrón Uruguayo se encuentra más alejada genéticamente del resto de razas analizadas en este trabajo, mientras que las poblaciones más próximas han resultado ser Border Collie y Labrador Retriever, para estos loci estudiados.

Tabla 1: Resultados obtenidos en los estadísticos de Wright para los 26 loci en las cuatro razas caninas estudiadas.

Locus	FIS	FIT	FST	Nm	D
SNP1	0,12921	0,21054*	0,0934***	2,42666	0,09805
SNP2	-0,09618	-0,00331	0,08472***	2,7009	0,08853
SNP3	0,17639	0,29054**	0,1386***	1,55375	0,1492
SNP4	0,17639	0,29054**	0,1386***	1,55375	0,1492
SNP5	-0,10278	0,00483	0,09758***	2,312	0,10268
SNP6	0,60338***	0,70127***	0,24681***	0,76292	0,28344
SNP7	-0,03520	0,06809	0,09978***	2,25551	0,10512
SNP8	0,34324***	0,47082***	0,19395***	1,03899	0,21561
SNP9	0,59435***	-0,40301***	0,12001***	1,83316	0,12784
SNP10	-0,51098***	-0,29160**	0,14519***	1,47188	0,15688
SNP11	-0,45929***	-0,26497**	0,13316***	1,62744	0,1429
SNP12	-0,85401***	0,80114***	0,02852	8,51578	0,02893
SNP13	0,27669**	0,62575***	0,48259***	0,26804	0,65892
SNP14	-0,49171***	-0,47419***	0,01175	2,10266	0,01182
SNP15	-0,64694***	-0,63809***	0,00537	46,30493	0,00538
SNP16	-0,71048***	-0,68549***	0,01461	16,86157	0,01472
SNP17	-0,08622	-0,03254	0,04942*	4,80868	0,05068
SNP18	-0,26992**	-0,21255*	0,04517*	5,28465	0,04622
SNP19	-0,05042	0,00287	0,05073*	4,67805	0,05206
SNP20	-0,79100***	-0,73965***	0,02867	8,46992	0,02909
SNP21	-0,19032	0,00327	0,16264***	1,28714	0,1775
SNP22	0,14289	0,42023***	0,32358***	0,52261	0,39094
SNP23	-0,54000***	-0,37853***	0,10485***	2,13436	0,11076
SNP24	-0,76737***	-0,70650***	0,03444	7,009	0,03505
SNP25	-0,72838***	0,65489***	0,04252*	5,62959	0,04345
SNP26	-0,10294	0,50687***	0,5529***	0,20216	0,80497
Media	-0,39331***	-0,18922	0,14648***	5,867	0,15692

* $P < 0,05$

** $P < 0,01$

*** $P < 0,001$

Tabla 2: Distancias genéticas de Nei (1978) para las 4 razas caninas estudiadas

Población	Cimarrón Uruguayo	Border Collie	Labrador Retriever	Pastor Alemán
Cimarrón Uruguayo	0,000			
Border Collie	0,147	0,000		
Labrador Retriever	0,109	0,005	0,000	
Pastor Alemán	0,100	0,040	0,025	0,000

Prueba D de Tajima

Se estimó la prueba de la neutralidad de Tajima en los 26 loci de las 4 poblaciones, en este caso razas caninas analizadas (Tabla 3).

Tabla 3: Resultados del test de Tajima para los 26 loci analizados en las 4 razas caninas estudiadas

Gen	p*	N**	D (Tajima)	Significado
<i>MDR-1</i>	5	222	-0,973	ns***
<i>CYP1A2</i>	20	40	1,828	$P < 0,1$
<i>CYP2B11</i>	1	230	1,672	ns

*P: número de polimorfismos

**N: número de muestras

***ns = diferencia no significativa ($P > 0,1$)

Los resultados indican que no se puede rechazar la hipótesis de neutralidad para los genes *MDR-1* y *CYP2B11*, mientras que para el gen *CYP1A2* la probabilidad de una desviación positiva de la hipótesis de neutralidad es inferior al 10%. Un valor positivo del estadístico D de Tajima se interpreta como una forma de selección disruptiva o equilibrado en el gen. Este mecanismo de selección favorece la existencia de polimorfismos en la población.

Discusión

Se ha observado una alta variabilidad genética tanto dentro de cada población, como cuando se consideran las 4 poblaciones conjuntamente. La mayor parte de la diversidad

genética está dentro de las poblaciones ($H_S = 0,2803$), pero también entre las poblaciones ($DST = 0,0412$).

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que no hay endogamia dentro de las poblaciones ($FIS = -0,39331$), al contrario de lo que cabría esperar. Por otra parte, los valores de N_m sugieren que existe un alto flujo de genes entre ellas ($N_m = 5,867$), aunque hay que destacar que este estadístico se calcula a partir de los valores de FST o GST , en el supuesto de que la similitud o diferencia entre poblaciones es el resultado directo del flujo de genes. Sin embargo, la ligera similitud genética entre las poblaciones estudiadas ($FST = 0,1464$ y $GST = 0,1280$) puede ser debida a cuestiones históricas, ya que los loci están estrechamente vinculados a la resistencia o sensibilidad a los fármacos.

A priori, se esperaba que la deriva genética, como fuerza evolutiva que es, se presentara como un proceso determinante en la estructura genética de la población, sin embargo, no se encontró evidencia de la acción de la deriva, ya que los resultados obtenidos indican que es alta la variabilidad genética, luego el papel de la deriva no ha influenciado en la población, al menos hasta el momento.

Los resultados en términos de flujo de genes contradicen lo que se podía esperar teniendo en cuenta que las diferentes razas no suelen cruzarse entre sí, sin embargo, la similitud genética observada es probablemente debida a factores históricos, o bien se cruzaron antiguamente, o bien, los resultados están indicando un linaje común, como más probable.

En los resultados de la prueba de neutralidad, no se encontraron evidencias de que la diversidad genética descrita para estos tres genes se haya alcanzado a través de la selección, excepto probablemente para la conservación de los polimorfismos en el gen *CYP1A2*. Es decir, la variabilidad genética observada fue consistente con un equilibrio histórico que se habrá dado entre la deriva genética y las mutaciones que las sitúan muy cercanas a la neutralidad.

Cuando un gen parece desviarse del modelo de evolución neutra, se evalúa indirectamente la acción de las fuerzas selectivas. Si la variabilidad de ese gen no se ajusta a la expectativa de evolución neutra, se supone que estas desviaciones son el resultado de procesos selectivos subyacentes.

En el marco de la teoría de la evolución neutra, son esenciales dos parámetros para describir la diversidad genética a nivel molecular: uno es la diversidad de nucleótidos (π) y otro la tasa de mutación (θ).

La diversidad de nucleótidos se define como el número de nucleótidos diferentes por sitio segregante (un sitio segregante es un sitio donde, al menos, difieren dos secuencias de la muestra) en dos secuencias extraídas al azar de la población. Y la tasa de mutación se define como $\theta = 4N_e\mu$, donde N_e representa el tamaño efectivo de la población y μ es la tasa de mutación por sitio segregante. Un estimador importante de este último parámetro

se basa en el número de sitios segregantes en una muestra de secuencias: $\theta = K/a$, donde K es el número total de sitios segregantes y $a = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$, para n secuencias en la muestra (Pybus *et al.*, 2014).

Las particularidades de los estimadores de θ son utilizadas por el estadístico D de Tajima para probar la neutralidad. Bajo la neutralidad, los estimadores tienen el mismo valor esperado y su diferencia debe ser cero. Sin embargo, las desviaciones significativas de cero indican que la selección (o alternativamente, ciertos procesos demográficos) ha afectado a la variabilidad existente.

En este estudio, el gen *CYP1A2* mostró una diferencia significativa lo que indica que un proceso evolutivo se ha producido. Este resultado se puede interpretar como que se trata de una forma de selección disruptiva o equilibrada, mecanismo que favorece la existencia de polimorfismos en la población. La selección equilibrada tiende a aumentar la variabilidad dentro de las poblaciones y favorece a los individuos que se encuentran en ambos extremos de la distribución fenotípica.

Por el contrario, para los genes *MDR-1* y *CYPB11* no se puede rechazar la hipótesis de neutralidad. Este resultado plantea la preocupación de si la prueba que se ha realizado en este trabajo tiene la suficiente potencia para detectar una desviación del modelo de la teoría neutra. Simonsen *et al.*, 1995, estudiaron el poder del estadístico D de Tajima y mostraron que, dada una muestra suficientemente grande de secuencias, la prueba tiene un alto poder estadístico, pero sólo para un espacio específico de tiempo. Y este espacio está más cercano al momento en que comenzó la selección y la intensidad de selección es más fuerte.

Nuestros resultados pueden situarse en estas condiciones ya que se supone que los loci *CYPB11* y *MDR-1* sólo han sido objeto de selección muy recientemente (hace aproximadamente 10 generaciones cuando se iniciaron los tratamientos clínicos) y que el intervalo de generación es de 3 años. Luego, en base a los resultados de Simonsen *et al.*, 1995, hay dos posibilidades de interpretación de los resultados de la prueba D de Tajima para estos dos genes: o bien se mantiene la hipótesis neutra, o bien la intensidad de selección que se ha producido ha sido tan débil que no ha dejado formas detectables, si se tiene en cuenta el reducido número de generaciones que han pasado desde que comenzó la selección.

En resumen, el gen *CYP1A2* mostró una diferencia significativa en la prueba D de Tajima, lo que indica la presencia de un proceso evolutivo, seguramente por selección indirecta debido a la respuesta negativa a los tratamientos farmacológicos clínicos, mientras los genes *CYPB11* y *MDR-1*, o bien mantienen una evolución neutra, o bien, aunque haya habido selección, ésta ha sido tan débil que no ha dejado genotipos diferentes evidenciables.

Estos resultados ayudan a esclarecer el proceso biológico de la selección natural, que es uno de los principales impulsores del cambio evolutivo y es la fuente de las adaptacio-

nes fenotípicas. Estos resultados contribuyen a una mejor comprensión de los procesos de selección de los fenotipos más aptos para evitar la resistencia al tratamiento clínico y el uso de los xenobióticos en la especie canina. Con estos resultados se facilitan los procedimientos clínicos, aconsejando un análisis genético de caracterización individual antes de la utilización de fármacos, al menos en las razas descritas en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Abecasis GR, Auton A, Brooks LD, DePristo MA, Durbin RM, Handsaker RE, Kang HM, Marth GT, McVean GA. 2012. The 1000 Genomes Project Consortium, An integrated map of genetic variation from 1092 human genomes. *Nature*, **491**: 56–65.

Akey JM. 2009. Constructing genomic maps of positive selection in humans: where do we go from here? *Genome Res.*, **19**:711–722.

Altschul SF, Madden TL, Schäffer AA, Zhang J, Zhang Z, Miller W and Lipman DJ. 1997. Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs. *Nucleic Acids Res.*, **25**:3389-3402.

Arenas M, Weber CC, Liberles DA, Bastolla U. 2017. ProtASR: An evolutionary framework for ancestral protein reconstruction with selection on folding stability. *Syst. Biol.*, **5**:24-38.

Barreiro LB, Laval G, Quach H, Patin E, Quintana-Murci L. 2008. Natural selection has driven population differentiation in modern humans. *Nat. Genet.*, **40**:340–345.

Barrett RDH, Hoekstra HE. 2011. Molecular spandrels: tests of adaptation at the genetic level. *Nat. Rev. Genet.*, **12**:767–780.

Belkhir K, Borsa P, Chikhi L, Raufaste N and Bonhomme F. 1996. **GENETIX 4.05**, *logiciel sous Windows TM pour la génétique des populations*. Laboratoire Génome, Populations, Interactions, CNRS UMR 5171, Université de Montpellier II, Montpellier (France) <http://www.genetix.univ-montp2.fr/genetix/constr.htm#download>

Excoffier L, Laval G, Schneider. 2005. Arlequin (version 3.0): An integrated software package for population genetics data analysis. *Evol. Bioinform. Online*, **1**:47–50.

Gagliardi R, García CB, Llambí S, Arruga MV. 2013. Analysis of *mdr1-1Δ* mutation of MDR1 gene in the “Cimarron Uruguayo” dog. *MVZ Córdoba*, **18**(2):3480-3483.

Gagliardi R, Llambí S, Arruga MV. 2015. SNP Genetic Polymorphisms of *MDR-1*, *CYP1A2* and *CYP2B11* genes in four canine breeds upon toxicological evaluation. *J. Vet. Sci.*, **16**(3):273-280.

Gagliardi R, Llambí S, García CB, Arruga MV. 2011. Molecular study of gene *CYP2D15* (Cytochrome P450 2D15) in Cimarron Uruguayo dog. *AICA*, **1**:313-315.

- Hall TA. 1999. BioEdit: a user-friendly biological sequence alignment editor and analysis program for Windows 95/98/NT. *Nucleic Acids Symposium*, **41**:95-98.
- Hartl DL, Clark AG. 1997. *Principles of Population Genetics*. Sinauer Associates, Inc. Publishers. Sunderland, USA. 285 pp.
- Hedrick PW. 2000. *Genetics of Populations*, 2nd edn. Jones and Bartlett, Boston. MA. 315 pp.
- Kamimura H. 2006. Genetic polymorphism of cytochrome P450s in beagles: possible influence of *CYP1A2* deficiency on toxicological evaluations. *Arch. Toxicol.*, **80**:732-738.
- Kimura M. 1968. Evolutionary rate at the molecular level. *Nature*, **217**(129):624-626.
- Kimura M. 1983. *The neutral theory of molecular evolution*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Li CC, Horvitz DG. 1953. Some methods of estimating the inbreeding coefficient. *Am. J. Hum. Genet.*, **5**(2):107-117.
- Nei M. 1978. Estimation of average heterozygosity and genetic distance from a small number of individuals. *Genetics*, **89**:583-590.
- Pybus M, Dall'Olio GM, Luisi P, Uzkudun M, Carreño-Torres A, Pavlidis P, Laayouni H, Bertranpetit J, Engelken J. 2014. 1000 Genomes Selection Browser 1.0: a genome browser dedicated to signatures of natural selection in modern humans. *Nucleic. Acids Research*, **42**. doi:10.1093/nar/gkt1188.
- Ross KA, Bigham AW, Edwards M, Gozdzik A, Suarez-Kurtz G, Parra EJ. 2010. Worldwide allele frequency distribution of four polymorphisms associated with warfarin dose requirements. *J. Hum. Genet.*, **55**:582-589.
- Simmons KL, Churchill GA, Aquadro CF. 1995. Properties of statistical tests of neutrality for ADN polymorphism data. *Genetics*, **141**:413-429.
- Slatkin M. 1987. Gene flow and the geographic structure of natural populations. *Science*, **236**(4803):787-792.
- Subramanian S. 2016. The effects of sample size on population genomic analyses- implications for the test neutrality. *BMC Genomics*, **17**:1-13.
- Tajima F. 1989. Statistical method for testing the neutral mutation hypothesis by ADN polymorphism. *Genetics*, **123**:585-595.
- Van Straalen NM, Roelofs D. 2012. *An Introduction to Ecological Genomics*. Oxford University Press. England. Second edition.
- Workman PL, Niswander JD. 1970. Population studies on southwestern Indian tribes,II: Local genetic differentiation in the Papago. *Am. J. Hum. Genet.*, **22**:24-49.

La Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas Químicas y Naturales de Zaragoza: 100 años de difusión de la investigación científica (1916-2016)

Francisco Javier Vidal Bordes

Centro Universitario de la Defensa. Zaragoza

fjvidal@unizar.es

Abstract

This article tries to show the evolution of the Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas Químicas y Naturales de Zaragoza over a hundred years of existence and his influence on the development of these scientific subjects. We analyze fundamentally aspects related both to scientific disciplines of the published works, and to their formals characteristics (print, typography, cover evolution, etc.). Finally, it deals with the situation of the journal today.

1. Introducción

En 2016 se ha celebrado el centenario de la fundación de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas Químicas y Naturales de Zaragoza (en adelante RACZ). Desde sus orígenes y hasta la actualidad, esta institución ha venido sacando a la luz un variado número de publicaciones entre las que destaca, por su veteranía la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza. El primer número se editó en 1916, por lo que también la revista ha cumplido cien años.

El que una publicación periódica se mantenga durante este tiempo, siempre ha sido motivo de celebración, pero si además se trata de una revista de contenido científico, su mérito se amplía considerablemente, de aquí la importancia de dar a conocer cómo una publicación, con unos objetivos inicialmente modestos, ha podido conseguir, no sólo mantenerse viva durante todo este periodo de tiempo, sino ir incrementando, poco a poco, su interés e importancia en el ámbito científico. El presente artículo, trata de indagar en las claves de su éxito.

Este hecho, como vamos a tener oportunidad de ver, no ha sido tarea fácil, puesto que desde sus orígenes hay constancia de las dificultades, sobre todo de índole económica, por las que ha atravesado. Superarlas ha sido un reto al que han tenido que ir haciendo frente

tanto el personal de la Academia como, en determinadas ocasiones, los Departamentos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, que sabedores de la importancia, pero también de los problemas que una publicación de este tipo conlleva, no han dudado en mostrar su incondicional apoyo a lo largo de toda su trayectoria.

El contenido de la revista, al que luego haremos referencia, ha ido cambiando ya que inicialmente recogía, además de artículos de investigación, los discursos de los nuevos integrantes de la RAC, las contestaciones de los académicos los académicos, textos de conferencias, tesis o resúmenes de tesis, etc. Dicha variedad se intenta resolver creando otro tipo de publicaciones más adecuadas y en este sentido, actualmente, la RAC estructura sus publicaciones agrupándolas en Monografías, Discursos y la Revista.

Otro aspecto que ha preocupado a los integrantes de la RACZ desde su fundación, es el desarrollo de su biblioteca, prestando especial atención al incremento de sus fondos, incluso con donaciones propias. La formación de una biblioteca aseguraba la posibilidad de contar con una selecta colección de obras fundamentales para el desarrollo de las distintas materias. La RAC desde su fundación, nombraba a un académico para que se responsabilizara de la biblioteca, y de la sección bibliográfica de la revista, donde se da noticia de las últimas obras recibidas y cuyo contenido, además tiene un gran interés actual para los estudios historiográficos.

2. La Revista de la RACZ en el contexto nacional e internacional de las revistas científicas, a comienzos del S. XX

Las revistas científicas tienen su origen en la segunda mitad del S. XVII con la publicación del *Journal des Savants* y de *The Philosophical Transactions of the Royal Society*. Ya en este periodo, como indican Guerrero y López (2003)¹ este tipo de publicaciones estaban relacionadas con sociedades científicas. En nuestro país, estas publicaciones aparecen con cierto retraso ya que no será hasta finales del S. XVII cuando se editen revistas como *Anales de Historia Natural* y *Anales de Ciencias naturales*.

En el último tercio del S. XIX se publican revistas científicas de forma independiente, como es el caso *Nature* y otras, que conviven con las editadas por instituciones científicas.

Estas publicaciones constituyen un fiel indicador del desarrollo técnico de un país, de una región y, en su caso, de las instituciones que las editan, puesto que se dedican a promover, desarrollar y difundir la investigación, siendo por ello necesario, acceder tanto a un importante número de publicaciones especializadas, para conocer los avances en las distintas materias, como dar a conocer los resultados de las últimas investigaciones de los científicos de su entorno.

¹Guerrero, R. y López, R. (2003). "A brief history of the SEM journal(s): staunchly resisting improbability. I. From 1947 to 1997". *International Microbiology*, 6, 69-73.

En España, a principios del S. XX la ciencia toma un nuevo impulso con la creación de instituciones como la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas², el Institut d'Estudis Catalans y otros centros de investigación que irán surgiendo en distintos puntos del país, bien bajo los auspicios de la Junta o bien creados de forma independiente, como es el caso de la RACZ.

Estas instituciones científicas, conocían perfectamente las ventajas que ofrecían las publicaciones periódicas, como medio rápido de difusión de los conocimientos más inmediatos. Permitían además, el mantenimiento de los mismos, al fijarse sobre un soporte, siendo susceptible de ser consultado cuantas veces fuera necesario. Además ofrecían la constante posibilidad de recuperación y de aplicación de esos conocimientos en el desarrollo de la materia, y también, cómo no, en beneficio de la sociedad.

Por otro lado, este tipo de publicaciones era más que necesaria, ya que apenas existían revistas de carácter científico³, aunque como sabemos, sí había excelentes investigadores, por tanto sirvió de ayuda, no solo para dar a conocer a estas personas, sino lo que es más importante, sus trabajos de investigación. Por tanto, podemos afirmar que la fundación de la RACZ y de su revista supuso un importante complemento a la labor educativa y de investigación que se venía realizando en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, a la vez que facilitó el reconocimiento y la difusión de los trabajos de un importante número de investigadores.

La historia de estas publicaciones, ha demostrado que surgen inicialmente, como apoyo para facilitar la consecución de los objetivos de las instituciones que las crean, más concretamente, para posibilitar la labor de transmisión del conocimiento científico y certificar su validez. En este sentido, el artículo I^o del Reglamento de la Real Academia⁴ señala que son sus objetivos “el cultivo, adelantamiento y propagación de las Ciencias y sus aplicaciones” y, desde el punto de vista social, colaborar en la solución de problemas que pudieran surgir a cualquier entidad, en relación con los distintos campos de la Ciencia. De aquí que uno de los aspectos a destacar de la RACZ sea esta doble función científica y social que no solo se plasma en sus actividades sino también en los contenidos de sus publicaciones.

Así pues, tenemos que para alcanzar sus objetivos, la RACZ ha venido editando, desde su fundación, distintas publicaciones agrupadas de acuerdo con características específicas de sus contenidos.

²Labor que a partir de 1939 será continuada por el Centro Superior de Investigaciones Científicas.

³Como podemos ver en la obra de Antonio E. Ten y M.Celi Aragón, titulada *Catálogo de las revistas científicas y técnicas publicadas en España durante el S. XIX*, Valencia: Instituto de Estudios Documentales e Históricos sobre la Ciencia (Universitat de Valencia-CSIC), 1996, el número de revistas científicas sobre Matemáticas, Física o Química, en ningún caso, sobrepasan los doce títulos.

⁴El reglamento inicial aparece publicado en el primer número de la Revista de la Academia.

La Revista de la RACZ nace en un contexto histórico en el que se observa un importante aumento en la creación de revistas científicas, unas 20 anuales, tendencia que disminuirá a partir de 1917 debido a las dificultades por las que atraviesa el país y el resto del continente europeo⁵, con motivo del desarrollo del primer conflicto bélico a escala mundial. El incremento es constante a lo largo del siglo XX, contabilizándose, a finales de este, en torno a un millón de títulos (Ramos, 1999).

Debemos destacar la simbiosis que se produce entre estas instituciones y sus publicaciones, de manera que unas y otras se necesitan para subsistir. Este es un hecho que, junto a otros, ha contribuido, de forma decisiva, a su perduración y puede ayudar a explicar porqué iniciativas, de tipo privado acometidas en el mismo periodo, no llegaban a buen término⁶.

Otra de las características de estas publicaciones son las bajas tiradas. Las explicaciones son varias ya que además de su especialización, inicialmente tuvieron que hacer frente a la tradición de publicar los contenidos científicos en forma de monografía, costumbre que se irá modificando a medida que se vaya imponiendo la necesidad de publicar los resultados de investigación de una forma más ágil y rápida.

Otro factor que influye en las limitadas tiradas de las publicaciones científicas, frente a las de enfoque general o divulgativo, es la especialización de sus contenidos y del público al que se dirigen. Esto influye en el aumento del precio de edición. La Revista de la Real Academia no ha sido una excepción, y desde el comienzo tuvo que hacer frente a problemas de financiación ya que, como indica Ausejo⁷ (1999), los gastos del primer número de la Revista de la Academia fueron sufragados por su director, Zoel García de Galdeano.

En determinadas ocasiones, con el fin de alcanzar mayores ingresos por venta o suscripción, se recurría a ofrecer unos contenidos de carácter local y un enfoque más divulgativo, lo que unido al apoyo por parte de la Facultad de Ciencias y sus Departamentos, así como a las subvenciones, que se recibían de forma irregular, permitía a la publicación hacer frente a este tipo de problemas.

Además, la publicación de los trabajos científicos, no solo daba prestigio a los autores y a la institución, sino que facilitaba la crítica y el intercambio de ideas, lo que suponía, en muchas ocasiones, el establecimiento de contactos y relaciones entre especialistas de la

⁵Algaba Calvo, Antonio (2000). La difusión de la innovación. Las revistas científicas en España, 1760-1936. *Scripta Nova: Revista Electrónica de Geografía y Ciencias Sociales*, 69(17). Recuperado de <http://www.ub.edu/geocrit/sn-69-27.htm>

⁶Podría ser el caso de publicaciones como *El Progreso Matemático*, fundada por D. Zoel García de Galdeano treinta y cinco años antes, que se publicó entre los años 1881 y 1900.

⁷Ausejo, Elena (1986). "Las Matemáticas en la Academia de Ciencias de Zaragoza (1916-1936)". *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 9(16-17), 1986, 5-34.

materia, tanto a nivel nacional como internacional, permitiendo el intercambio de puntos de vista distintos, y por consiguiente el desarrollo científico y de la sociedad. En cualquier caso, mediante estas publicaciones no solo se facilitaba el dar a conocer las últimas investigaciones en cada materia, frente a los conocimientos más generales, que se recogían preferentemente en los manuales, sino también qué especialistas estaban investigando sobre un determinado tema.

Otras medidas orientadas a ampliar su difusión y estar presente en los grandes centros de investigación científica a nivel mundial, se han conseguido a través del intercambio de publicaciones.

Dicha tarea es de vital importancia en el campo científico ya que además de expandir las ideas y los trabajos de los especialistas de un determinado lugar, sirven de fuente para conocer más a fondo una materia dado que, a través de los números que se reciben en intercambio, permiten una visión más amplia de los puntos de vista actuales sobre diferentes temas de una misma especialidad. Esta labor supone un importante hecho a destacar en el desarrollo de la Ciencia de nuestro entorno dado que permitía a los especialistas en las distintas materias, consultar los trabajos realizados por investigadores de otros centros de investigación de prestigio, a nivel nacional e internacional.

La importancia de esta actividad es tal que como Ausejo et al. (2016, pág. 26) señalan, en los primeros veinte años, la Academia recibe en intercambio 49 revistas nacionales y 56 extranjeras. Para potenciar y facilitar su uso, estos fondos se han ido integrando en las bibliotecas y hemerotecas de las distintas secciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Actualmente el intercambio se realiza con 26 publicaciones nacionales y 40 internacionales y la difusión se ha incrementado con motivo de la digitalización.

3. Evolución de la revista

La *Revista de la Academia de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza* comenzó a publicarse con este título, pero cambió a *Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, como consecuencia del doblamiento de la sección Físico-Química, en 1971. Otra modificación del nombre tuvo lugar en el año 2002, cuando la Academia adquiere el título de Real, pasando a denominarse *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas Químicas y Naturales de Zaragoza*.

Su historia se puede dividir en dos grandes periodos relacionados con las dos series de la revista. La primera se desarrolló de 1916 a 1936 y consta de veinte tomos ya que en 1925 no se publicó. La revista reaparece, en su segunda serie, en 1942 publicándose, de forma ininterrumpida, hasta la actualidad. La periodicidad siempre ha sido anual.

3.1. *Contenido*

Durante la primera serie, su estructura se mantiene con pocas variaciones y recoge, además de los artículos de investigación, las referencias al personal que forma parte de la Academia⁸, las memorias anuales y, en su caso, los discursos de los nuevos académicos y las contestaciones del personal de la Academia. Otras informaciones hacen referencia a la bibliografía adquirida y a los intercambios de la revista con otras instituciones, apareciendo al final el índice de contenido. Inicialmente se publicaban también las conferencias dadas por los integrantes de la Academia, pero como hemos comentado más arriba, acabarán haciéndolo de forma independiente.

Al comienzo de la segunda serie se observan dos partes bien diferenciadas. En primer lugar la que contiene información relativa a la Academia que menciona el personal que la integra, se publica también la memoria anual, que resume los hechos acontecidos a lo largo del año y, hasta su publicación de forma independiente, los discursos de los académicos entrantes y las respuestas oportunas. Le sigue la parte que contiene los artículos científicos y finalmente el índice. A partir de 1969 los artículos de investigación constituyen el contenido básico de la revista.

En relación con los contenidos específicos de la revista, no creemos necesario extendernos en el presente trabajo ya este aspecto aparece excelentemente tratado por Ausejo (1987) y Ausejo et al. (2016).

En cualquier caso, nos parece interesante dejar constancia de la variedad de temas que se han venido tratando a lo largo de sus cien años, pues no debemos olvidar que este aspecto puede haber sido determinante para su permanencia, dada la incipiente investigación y publicación de trabajos científicos, lo que hacía muy difícil el mantenimiento de revistas especializadas en una única materia.

El contenido de la primera serie se centra en las tres secciones iniciales de la RAC (Física y Química, Exactas y Ciencias Naturales).

En relación con esta última tenemos, en concreto con la Zoología y Entomología, destacan los trabajos del P. Longinos Navás y de Lapazarán, este último por sus estudios sobre la plaga de la Langosta, que fue un tema de gran interés en esa época, por los desastres que a principios de los años veinte estaba causando en la agricultura. Otros trabajos relacionados con este aspecto son los presentados por el Rvdo. D. Antonio Bercero y Joaquín Pitarque y Elío.

D. José Cuatrecasas Arumi (1903-1996). Se interesó desde muy joven por el mundo

⁸En el apartado de personal de la Academia aparecen en primer lugar los miembros de la Junta de Gobierno, seguidos por los académicos numerarios integrantes de cada sección y los denominados “correspondientes” nacionales y extranjeros.

de la investigación, publicando en 1924 sus primeros trabajos sobre Botánica⁹. Obtuvo la Cátedra en Biología Descriptiva por la Universidad Central de Madrid. Tras la Guerra Civil se trasladó a vivir a Colombia y de allí a Estados Unidos. Especialista, a nivel mundial, en flora colombiana, escribió en el tomo XVIII un artículo sobre la vegetación de los Andes, ilustrado con interesantes fotografías en blanco y negro.

A nivel divulgador, debemos mencionar la participación en la revista de otros expertos botánicos que se ocuparon de estudiar las plantas de Aragón, como es el caso de Manuel Escriche, D. Pedro Ferrando Mas (1879-1966) que destacó también por sus conocimientos en el campo de la Geología o el del Doctor Henri Gaussen (1891-1981), especialista en vegetación pirenaica. En Geología cabe mencionar también las aportaciones de José María Albareda.

En Biología destacan los artículos de D. Gregorio Calmarza, sobre la Pelagra (Tomo XI, pág. 14 y siguientes) y el de Antonio de Gregorio sobre la Pofilaxis de la difteria (Tomo XV, pág. 111 y siguientes).

La participación en la especialidad de Matemáticas corrió a cargo principalmente de Zoel García de Galdeano, destacando sus trabajos de Geometría y Topología; de Graciano Silván y González y Adoración Ruiz Tapiador.

En Física cabe destacar los trabajos iniciales de Juan Cabrera Felipe y Mariano Velasco Durantez en Óptica y en Química los de Gonzalo González Salazar y Jesús Camón Cano.

La revista, además de las materias relacionadas con las secciones que componen la Academia, publicaba artículos de otros temas como Arqueología, con trabajos de Vicente Bardaviu, académico y director del Museo de Huesca, que escribió sobre los talleres líticos del hombre prehistórico descubiertos en Alcañiz y en sus contornos, y sobre Poblados iberos de la misma zona. Siguiendo con este tipo de temas, podemos destacar el artículo del Rvdo. José Miguel Barandiarán sobre “*Los establecimientos humanos en el Pirineo Vasco*”. (Tomo XVI, pág. 38 y siguientes).

Respecto a puntos de vista históricos de diferentes temas científicos cabe mencionar el trabajo del Dr. Andrés Giménez Soler sobre Historia de los Pirineos (Tomo VIII, pág. 193 y siguientes) o el que trata sobre la Historia de los estudios botánicos en Aragón, de D. Pedro Ferrando Más (Tomo XX, pág. 84 y siguientes). Pedro Ramón y Cajal y José Cruz Lapazarán se ocupan de dar a conocer la obra médica y otros aspectos de la vida de Pasteur (Tomo VII, pág. 233 y 241).

Sobre Arte, Arquitectura escribieron Ricardo del Arco, un artículo titulado “*El arte románico en la región pirenaica aragonesa*” y José Valenzuela Larrosa sobre “*El embellecimiento de Zaragoza*”.

⁹Bueno, A. (1983). Datos biográficos y bibliográficos del Profesor José Cuatrecasas Arumi. *Lazaroo*, 5(11). Recuperado de <https://revistas.ucm.es/index.php/LAZA/article/viewFile/LAZA8383110011A/11026>

Como se puede observar ya desde sus números iniciales, la revista ofrece una amplia visión de la situación científica de diferentes disciplinas, más allá de las propias de las ciencias puras, resultando de gran interés por dar a conocer en todo momento la investigación en diferentes campos.

Respecto a la Segunda Serie, se observa una evolución en la que se aprecia como los temas van centrándose cada vez más en las diferentes secciones y como los autores que publican, son ya autores con cierto reconocimiento, lo que favorecerá el incremento del prestigio de la revista.

Pero este nivel no logra mantenerse siempre y a lo largo de los años sesenta y setenta se observan altibajos en la calidad de algunos trabajos.

En los sesenta apenas se publican artículos de Matemáticas y van en aumento los de Física y Química. En los setenta hay un aumento de los trabajos de Matemáticas, que en número se sitúan por detrás de los de Química, seguidos por los de Física y en cuarto lugar los de Naturales, que en otro tiempo tuvieron gran protagonismo en la revista. En los ochenta, la publicación de artículos sobre Matemáticas de nuevo adquiere mayor importancia, seguida por los trabajos de la sección de Naturales. Como señalan Ausejo et al. (2016, p. 67-69), el descenso en la publicación de artículos sobre Física y Química se explica porque los autores de estas especialidades tienden a publicar sus trabajos en revistas de mayor prestigio e impacto siguiendo la tendencia iniciada en la década anterior¹⁰.

Será con la colaboración de Rafael Cid, tras su ingreso en la RAC en 1979, cuando la revista irá alcanzando mayores cotas de calidad, no solo en cuanto a la selección de los trabajos sino también, como veremos a continuación, en el diseño. Todo ello tendrá su reflejo en la adquisición de una mayor importancia tanto en el contexto nacional como internacional. En este sentido, académicos como Rafael Usón plantean la necesidad de publicar un mayor número de artículos en lengua inglesa¹¹. Debemos destacar la importancia de este hecho ya que supone compaginar la difusión de la investigación no solo en el ámbito nacional sino también en el internacional, lo que habla por sí solo de la calidad de los trabajos que ha venido editando.

En 1985 Rafael Cid es elegido editor de la revista y una de sus primeras decisiones será crear la serie de monografías donde pasarán a publicarse los discursos. En 2001, al año siguiente de su ingreso en la RAC, se nombra a Antonio Elipe editor adjunto. Años más tarde, en 2015, con la renovación de la Junta directiva de la RAC, Antonio Elipe es

¹⁰ Ausejo, E., Gasca, M., Navarro, R. y Urieta, J. S. (2016). "100 años de Historia de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza". En Real Academia de Ciencias de Zaragoza: un siglo de servicio a la sociedad (pp. 1-128). Zaragoza: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza

¹¹Op. cit., p. 59

nombrado Presidente de la Academia y Enrique Artal editor de la revista.

No debemos olvidar, que además de la propia institución y de las personas que a lo largo de su trayectoria, han estado velando por el desarrollo y calidad de la revista, son los autores de los trabajos publicados los verdaderos responsables de su éxito. A lo largo de los cerca de setenta años de publicación de esta segunda serie son muchos, sino todos, los que cabría destacar. En este sentido, en el campo de la Química cabe mencionar los trabajos realizados por autores como Mariano Tomeo y D. Cipriano Aguilar, E. Blanchard, Juan Martín Sauras, Rafael Usón, Egon Wiberg, Julián Bernal, Luis Oro y Ángel López Molinero.

En Matemáticas cabe citar a autores como Pedro Abellanas, José Estevan Ciriquián, Antonio Plans, Alberto Galindo, Vicente Camarena, Félix Lahulla, Rafael Cid, José Luis Viviente, Javier Otal, Luis Rández, Mariano Gasca, Antonio Elipe, Alberto Abad y Luis Floría.

En Física debemos referirnos a los trabajos de Juan Cabrera Felipe, Justiniano Casas Peláez, Carmen Cuevas Redrado, A. Cordón, Miguel Angel Rebolledo, J. R. de F. Moneo, M. Quintanilla y M^a José Yzuel.

En Naturales, Biología y Medicina han publicado trabajos autores como Horacio Marco Moll, Jaime Pujiula, Fernando Cámara, Pilar Laguía Minguillón, Grande Covián, Alberto A. Makinistian, Juan Pablo Martínez Rica, M^a Luisa Peleato Sánchez, Luis Angel Inda Aramendía.

En Geología destacan los trabajos de Acero Salazar, Mateo Gutiérrez Elorza, Eladio Liñán Guijarro, Mandado Collado, Sanz Morales y Torrijo Echarri.

Como hemos señalado, esta es una pequeña muestra de los científicos que con la publicación de sus trabajos han ayudado a mantener el prestigio con el que actualmente cuenta esta publicación.

3.2. Aspectos formales de la revista

3.2.1. IMPRESIÓN Y TIPOGRAFÍA

A lo largo de todo este tiempo, han tenido lugar un importante número de cambios formales en relación con su impresión y diseño que merece la pena tratar, ya que en unos casos pueden ser un reflejo de los cambios estéticos, pero en otras ocasiones pueden ser testimonio de los problemas de financiación, cuya solución suele ir acompañada de una simplificación de materiales y eliminación de elementos que encarecen su edición.

En relación con la impresión hay que destacar que se llevó a cabo en talleres zaragozanos de gran importancia editorial a nivel local y nacional, como es el caso de la imprenta de D. G. Casañal¹², donde se imprimieron los dos primeros números o el de la tipografía

¹²Taller zaragozano donde en el primer tercio del siglo se imprimieron una importante cantidad de obras de carácter científico.

de F. Gambón que se ocupará de la impresión de la revista hasta 1936.

Con la segunda serie, la revista pasó a imprimirse en los talleres de El Noticiero. A partir del 1960 lo hará la Librería General, y desde el volumen 68 del 2013, se imprime en los talleres gráficos de la Editorial Edelvives.

En cuanto al modo de impresión, a partir de 1978 se utiliza el sistema Offset, que supone un ahorro en gastos pero también una pérdida de calidad de la revista que se traduce en una tipografía menos clara (Véase Figura 2). Este aspecto se solucionará a partir del año 2001, con Antonio Elipe como responsable de la revista, que se ocupará de aplicar técnicas y programas informáticos de impresión, como es el caso de la edición a partir de documentos en formato PDF (*Portable Document Format*) y el programa \LaTeX , que permite la edición de complejas fórmulas y una gran calidad de impresión y maquetación (Véase Figura 3). A partir de entonces, la página inicial de cada artículo aparecerá, en la parte superior, con el nombre de la revista para facilitar su relación y cita.

Otro aspecto que ha ido cambiando a lo largo de su trayectoria ha sido el número de fascículos por revista. Así, a partir de la segunda serie (Tomo II, de 1947) la revista se publicó en dos cuadernillos, en 1962 se vuelve al sistema de un fascículo, pero desde 1971 a 1977 cada entrega consta de cuatro cuadernillos. La explicación puede tener relación, como señalan Ausejo et al. (2016), con el importante número de tesis que se defienden en esta época cuyo contenido se refleja en la revista, bien sea de forma íntegra o resumida. Desde 1978 se viene publicando un único cuaderno.

La tipografía es un aspecto importante, no solo por resultar más o menos atractivo al lector, sino, y esto es más relevante, por facilitar la lectura. Los cambios más importantes se observan a partir del volumen 33, de 1978, caracterizándose por una simplificación del tipo de letra además de una diversificación tipográfica en los distintos artículos¹³, lo que hace perder, en este sentido, algo de calidad a la revista. El problema se resolverá a partir del volumen 57, de 2002, con una mayor unificación del tipo de letra, siendo total en la actualidad.

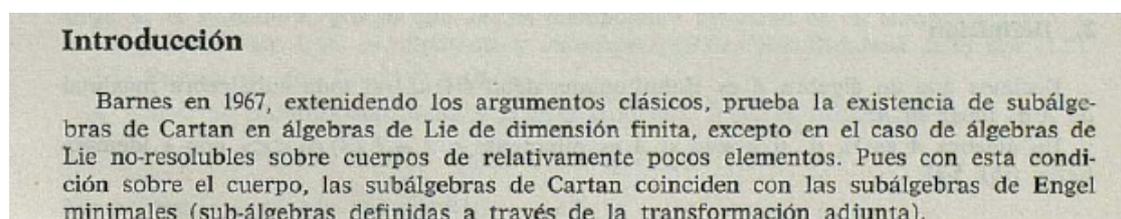


Figura 1: Tipo de letra Tomo XXXII, de 1977

¹³Como puede observarse en el volumen 43, de 1988.

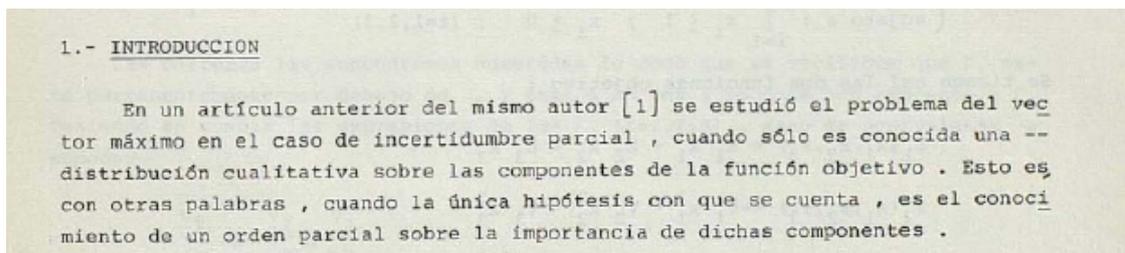


Figura 2: Tipo de letra Tomo XXXIII, de 1978

In particular, if we want to convert the *length of orbital arc* into a canonical element, say $\psi = \sigma$, we can take advantage of formulae established by Brumberg (1992; see also Floría 1997): fixing Cartesian coordinates in the orbital plane,

$$x(E) = a(\cos E - e), \quad y(E) = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (35)$$

$$(d\sigma)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = a^2(1 - e^2 \cos^2 E)(dE)^2, \quad (36)$$

$$dE/d\sigma = 1/a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}, \quad (37)$$

$$\tilde{f} = \mathcal{F}_\Psi r^{1/2}/\sqrt{2\mu - 2Lr} = \mathcal{F}_\Psi r^{1/2}/\sqrt{\mu(1 + e \cos E)}, \quad (38)$$

$$t = l + [\mu/(2L)^{3/2}][E - e \sin E] - (\mathcal{F}_L/\mathcal{F}_\Psi) \sigma. \quad (39)$$

Figura 3: Tipo de letra Volumen 56, de 2001

Otros cambios de menor importancia y que tienen lugar en este mismo periodo, están relacionados con su tamaño de la revista, que se reduce un centímetro, lo que incide en una disminución de la letra y reducción de los márgenes.

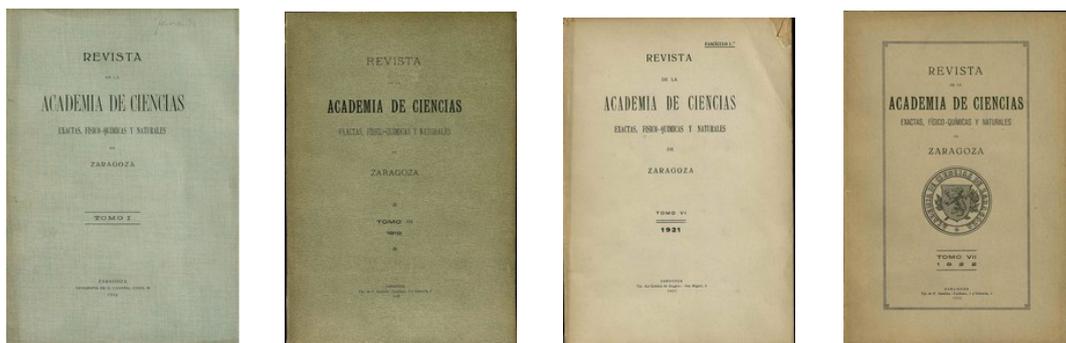
3.2.2. DISEÑO DE LAS CUBIERTAS E ILUSTRACIONES

Está claro que en las publicaciones periódicas la cubierta es el un elemento clave y que trata de, por así decirlo, atraer al lector. Este es un aspecto que los editores de la revista conocían y explica el gran número de cambios que afectan a su diseño. En la siguiente ilustración¹⁴ podemos apreciar la evolución gráfica en tan solo siete números.

Además de los cambios que podemos observar en la figura 4, posteriormente, en el tomo XII, desaparece el escudo de la cubierta y en el número XIII, se le da mayor realce al texto relativo a la Academia de Ciencias. Al comienzo de la segunda serie continúan este tipo de modificaciones, apareciendo el título en color azul e incluyendo de nuevo el escudo.

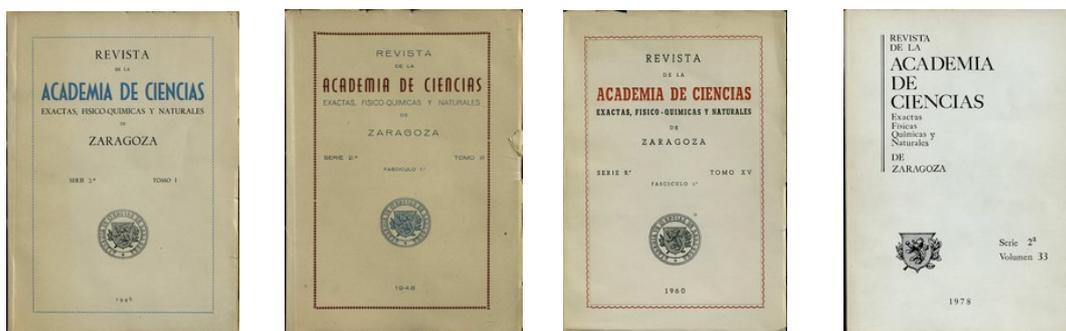
Un nuevo cambio se puede apreciar en el tomo III, de 1948, apareciendo el título

¹⁴ Las ilustraciones utilizadas se han extraído de los ejemplares digitalizados ubicados en el repositorio Zaguán, de la Universidad de Zaragoza, accesible en <http://zaguan.unizar.es>



(a) Cubierta del t. I (1916) (b) Cubierta del t. III (1918) (c) Cubierta del t. VI (1921) (d) Cubierta del t.VII (1922)

Figura 4



(a) Cubierta del t. I de la 2ª Serie (1946) (b) Cubierta del t. III de la 2ª Serie (1948) (c) Cubierta del t. XV de la 2ª Serie (1960) (d) Cubierta del vol. 33 de la 2ª Serie (1978)

Figura 5

de color rojo, aunque en el número siguiente volverá a aparecer en azul y los colores, en adelante, se irán alternando. Los cambios de la portada suelen afectar también a la tipografía, que trata de ser cada vez más atractiva. En su interior, la parte superior de las páginas comienzan a incluir tanto el título de la revista, en las páginas pares, como el del artículo en las impares.

El diseño que aparece a partir del volumen 33, de 1978 marca una tendencia que se mantendrá, con pocos cambios hasta la actualidad. Este número refleja además otros cambios como el que afecta al título, con motivo del desdoblamiento de la Sección de Físico-Químicas; se modifica la denominación de tomo por el de volumen, utilizándose la numeración arábica y el nuevo procedimiento de impresión en Offset, que hemos mencionado más arriba.

El interés por homogeneizar el aspecto de la revista hace que a partir del tomo XXII, de 1968, se incluyan normas de publicación, recomendando la inclusión de un resumen y la forma de citar la bibliografía.

En el tomo XXIV, de 1969, el índice aparece en la contracubierta, lo que hace más fácil y rápido localizar determinados trabajos y consultar el contenido de la publicación.

Desaparece de la portada interior el escudo de la Academia y la portadilla incluye el subtítulo de la revista como Órgano oficial de la Academia de Ciencias y de la Facultad de Ciencias de Zaragoza en vez de simplemente Revista de la Academia de Ciencias, que es como venía apareciendo.

En general podemos advertir que la ilustración de los artículos no ha planteado problemas en la revista, más si se tiene en cuenta la profesionalidad de sus impresores.

De este modo, ya en estos primeros números hay que destacar el uso de ilustraciones de gran calidad tanto en el artículo del P. Longinos Navás como en las láminas desplegadas del artículo de Mendizábal sobre el Sistema Radiotelegráfico. En el tomo IV destaca la inclusión de fotografías, en el artículo de Ricardo García Cañada sobre los torrentes de erosión aragoneses, y en el tomo XIV, se publica una lámina en el artículo de Geología pirenaica, con fondo blanco para resaltar mejor la ilustración.

La ilustración a color llega en el tomo XVIII, de 1934, en un artículo de Gregorio de Rocasolano.

En la segunda serie, partir del tomo VII, de 1952, aumenta la calidad en papel y láminas, como se puede constatar en las que acompañan al artículo titulado “*La Fantasía evolucionista*” de D. Fernando Cámara Niño, aspecto que ha ido en aumento, con el desarrollo de las artes gráficas, alcanzando un alto nivel en la actualidad.

3.2.3. DEPÓSITO LEGAL E ISBN

Una de las características importantes de las publicaciones es que a través de ellas, los autores dejan constancia de la aportación de ideas propias, de descubrimientos, etc. Esto, unido a la idea de conservación y difusión de la investigación y la cultura, da lugar a que, al igual que en otros países de nuestro entorno, se legisle para favorecer estos aspectos. Así en 1958 se publica el Decreto sobre el depósito legal¹⁵, que obliga a entregar en las delegaciones del servicio, varios ejemplares de cada obra impresa publicada. La revista de la RAC cumple con esta normativa y se le asigna inicialmente el número Z 79-1958, apareciendo por primera vez en el tomo XIV, de 1959, que será modificado a partir del de 1960 (Tomo XV) por el número Z 218-1960, manteniéndose hasta la actualidad. A esta referencia se le añadirá a partir del volumen 33, de 1978, el número internacional normalizado de publicación seriada (ISSN 0370-3207).

¹⁵Decreto de 23 de diciembre de 1957 por el que se aprueba el Reglamento del Servicio de Depósito Legal (BOE n. 17, de 20 de enero de 1958). Actualmente está regulado por la Ley 23/2011 de 29 de junio, de depósito legal (BOE n. 182 de 30 de julio de 2011).

3.2.4. LA REVISTA HOY

Como hemos visto, una revista científica no es fácil de mantener y podemos constatar que a lo largo de los cien años de historia ha atravesado por momentos muy complejos que han hecho necesario ir aplicando nuevos planteamientos para mantenerla viva. Estamos seguros de que la Academia ha tenido que hacer grandes esfuerzos en este sentido, pero está claro que han valido la pena. En la actualidad, la revista se autofinancia, ya que desde 2012 no recibe subvenciones, pero esto no ha influido, hasta la fecha, en un descuido de su calidad sino que hemos podido observar un gran cuidado, tanto en lo que se refiere a aspectos formales como en la selección del contenido.

La revista no deja de afrontar nuevos retos como es el caso de la de la digitalización para la que ha contó en 2009 con la ayuda del Gobierno de Aragón. Esto le permite estar accesible de forma libre y a texto completo en el Repositorio Zaguán, de la Universidad de Zaragoza (<http://zaguan.unizar.es>) y además, del 2002 en adelante, en web de la Real Academia de Ciencias (<http://www.raczar.es/webracz/seccion4.do?enlaceMenu=seccion4&cabeceraL=1>), facilitando su conservación y consulta, y adquiriendo una mayor difusión.

El sistema de evaluación de la ciencia ha dotado a las publicaciones científicas de un gran peso para el reconocimiento de méritos, pero a la vez requiere que las publicaciones ocupen puestos relevantes en los rankings de calidad. Cien años después de su aparición, podemos afirmar que no solo ha cumplido sus objetivos iniciales, de difusión nacional e internacional de la ciencia y la investigación en Aragón, sino que además ha contribuido al desarrollo de los conocimientos científicos a nivel mundial, como muestra la mejora de los últimos años, de su posición en los rankings de impacto de Scimago Journal Reports (SJR) o en el índice H5 que elabora Google Scholar Metrics.

Además es indexada por las bases de datos MathSciNet, zbMATH, Scopus, CA - CA Search (EEUU), Geoline, Georef (Proquest), Inspec y Zoological Record Online, ICYT (Índice Español de Ciencia y Tecnología) del CSIC y Dialnet. En esta última se puede buscar y acceder a los sumarios desde 2002 a 2011. Georef recoge los artículos sobre Geología publicados entre 1980 y 2005, y MathSciNet hace lo propio con los de Matemáticas publicados en la segunda serie.

Todo esto constata el nivel científico que ha ido adquiriendo la revista a lo largo de su trayectoria, aunque su meta nunca ha sido competir con las publicaciones especializadas dedicadas íntegramente a difundir los avances científicos, ni estar entre las revistas más citadas, sino difundir la investigación en las diferentes ramas de la Ciencia, no solo en España sino más allá de nuestras fronteras.

4. Conclusiones

Podemos decir que hace 100 años pasó por Aragón el tren del desarrollo científico y esta región no lo dejó pasar sin más, sino que aprovechó la ocasión para subirse a él y fortalecerlo mediante diversas acciones, entre las que podemos destacar la creación de una institución seria y rigurosa, como es la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza. Su creación y actividad a lo largo de estos 100 años constituye un importante hito para entender como se ha ido organizando y desarrollando la Ciencia en nuestro país, y más en concreto, en nuestra región. Su objetivo de divulgación de la Ciencia, de intercambio de ideas y de mejora y desarrollo de los planteamientos científicos, se ha visto cumplido a lo largo de toda su trayectoria.

A lo largo de este trabajo nos hemos referido a la importante labor de difusión y conocimiento de las Ciencias en nuestro país y más allá de él, fundamentalmente a través de la Revista de la Real Academia, pero, una vez analizada su trayectoria podemos afirmar, que esta publicación constituye una fuente de información indispensable para conocer la Historia de la Ciencia del siglo XX en nuestro país, y no dudamos que lo será también para la del siglo XXI. Porque son muchos los aspectos que dan importancia a una revista, siendo fundamental la calidad de los trabajos y por supuesto de sus autores. En este sentido hemos visto como la revista de la RAC ha publicado y publica artículos de investigadores de primera fila tanto a nivel local, nacional e internacional, cuyas aportaciones constituyen importantes pasos en el progreso de las ciencias experimentales.

La revista, en estos cien años ha sabido superar periodos delicados, adaptarse a las necesidades de la institución y de los científicos, a los cambios propios de este tipo de publicaciones; ha conseguido traspasar fronteras y, hacer frente a la competencia de otras publicaciones, contribuyendo con todo ello, a la evolución de la Ciencia.

Es cierto que la comunicación es el último eslabón en la cadena de la producción científica, que puede comenzar en laboratorios, en grupos de investigación o en investigaciones propias, pero hay que reconocer que no todo el mundo conoce la importancia que requiere dar bien este último paso. Los responsables de la Real Academia han sido conscientes de ello, como queda demostrado en la perduración de la revista, en su calidad y difusión actual.

5. Bibliografía

Algaba Calvo, A. (2000). La difusión de la innovación. Las revistas científicas en España, 1760-1936. *Scripta Nova: Revista Electrónica de Geografía y Ciencias Sociales*, 69(17). Recuperado de <http://www.ub.edu/geocrit/sn-69-27.htm>

Artal Bartolo, E., Bastero Eleizalde, J., Calvo Pinilla, M., Domínguez Murillo, E., Elduque Palomo, A., Elipe Sánchez, A., Gasca González, M., Lozano Imízcoz, M. T., Silva Suárez, M. (2016). Sección de Exactas. En *Real Academia de Ciencias de Zaragoza: un siglo de servicio a la sociedad* (pp. 135-166). Zaragoza: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza.

Ausejo, E. (1986). Las Matemáticas en la Academia de Ciencias de Zaragoza (1916-1936). *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 9(16-17), 5-34.

Ausejo, E. (1987). *La Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza (1916-1936)*. Universidad de Zaragoza, Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón.

Ausejo, E. y Hormigón, M. (Eds.). (1993). *Messengers of Mathematics: European Mathematical Journals (1800–1946)*. Madrid: Siglo XXI.

Ausejo, E., Gasca, M., Navarro, R. y Urieta, J. S. (2016). 100 años de Historia de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza . En *Real Academia de Ciencias de Zaragoza: un siglo de servicio a la sociedad* (pp. 1-128). Zaragoza: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza.

Bach, C., y Compte, A. (1997). La Entomología moderna en España. Su desarrollo: de los orígenes a 1960. *Boletín de la SEA*, 20, 367-392. Recuperado de http://www.sea-entomologia.org/PDF/BOLETIN_20/B20-036-367.pdf

Bueno, A. (1983). Datos biográficos y bibliográficos del Profesor José Cuatre Casas Arumi, *Lazarroa*, 5, 11. Recuperado de <https://revistas.ucm.es/index.php/LAZA/article/viewFile/LAZA8383110011A/11026>

Cebollada, J. L. (1988). Antonio de Gregorio Rocasolano y la Escuela Química de Zaragoza. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 11(21), 189–216.

Guerrero, R., López, R. (2003) A brief history of the SEM journal(s): staunchly resisting improbability. 1. From 1947 to 1997. *International Microbiology*, 6, 69-73.

Hormigón, M. (1981). El Progreso Matemático (1891-1900): Un estudio sobre la primera revista matemática española. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. 4(6-7), 87-115.

Discurso del Acto Central del Centenario de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas Químicas y Naturales de Zaragoza

Antonio Elipe Sánchez

Excelentísimo Sr. Presidente del Gobierno de Aragón,
Sr. Rector Magnífico de la Universidad de Zaragoza,
Excelentísimas e Ilustrísimas autoridades,
Excelentísimos e Ilustrísimos Académicos, Señoras y Señores,

Muchas gracias por acompañarnos en esta Sesión Solemne de celebración del Centenario de la Real Academia de Ciencias.¹

QVÆRO VERVM MENTE ET LABORE

Así reza el acertado lema que los fundadores eligieron para nuestra *Academia* y que figura en el reverso de la medalla que los académicos portamos con orgullo.

A principios del siglo pasado, en la llamada “Edad de Plata de la Ciencia”, varios catedráticos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, en este mismo edificio que hoy nos acoge, propusieron la creación de una Academia de Ciencias, a imagen de otras como la Nacional en Madrid o la de Barcelona. En esos momentos, las tesis doctorales tenían que defenderse en la Universidad de Madrid, por ello llamada Central, mientras que el resto de universidades solamente impartía licenciaturas. Para estos profesores de gran formación científica y motivación, el sistema cercenaba sus capacidades, y veían imprescindible una estructura que acogiese y motivase la investigación y la acercase a Aragón.

Los fines de la Academia, debían ser complementarios a los de la Universidad, actuando como foro de comunicación y discusión científica, ofreciendo posibilidades de relación nacional e internacional, así como de incidencia en la sociedad.

¹Discurso pronunciado por el Excmo. Sr. Presidente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, D. Antonio Elipe, en el Acto Central del Centenario, que tuvo lugar el 25 de mayo de 2016 en la Sala Paraninfo de la Universidad de Zaragoza.

En 1914, el insigne matemático Zoel García de Galdeano recibió del decano de la Facultad de Ciencias, Paulino Savirón, el encargo de ejecutar el acuerdo de su Junta para definir y crear la Academia, iniciativa que él mismo había propuesto junto con José Ríos y Casas. Con este ánimo, García de Galdeano coordinó a un grupo de catedráticos de la Facultad al que, además de José Ríos por la sección de Exactas, se unieron Antonio de Gregorio Rocasolano, destacado miembro de la “escuela de Química zaragozana”, Manuel Martínez-Risco, físico con talla de Nobel, y Pedro Ferrando Más, naturalista aragonés experto en Mineralogía y Biología.

Eran conscientes de que fuera de la Facultad de Ciencias había profesionales con sus mismas inquietudes que desarrollaban una intensa actividad científica en institutos de enseñanza media, en colegios, o en otras facultades. Una institución no sujeta al corsé universitario permitiría la incorporación de estas personas. Así, lo hicieron a la hora de invitar a los miembros fundadores y ha seguido desde entonces incorporado en estos cien años a catedráticos de Ciencias, pero también de Medicina, Veterinaria y de otros centros de la Universidad de Zaragoza, a ilustres profesores de enseñanzas medias, a ingenieros de distintas ramas y a militares, que han sentido suyo el lema de la Academia.

Los trabajos de este grupo terminaron exitosamente redactando un reglamento que se aprobó el 27 de marzo de 1916. La Academia se denominó de *Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales* por sus tres secciones e invitaron a otros dieciséis académicos fundadores (21 en total). Eligieron la primera junta de gobierno de la Academia recayendo la presidencia en Zoel García de Galdeano. El solemne acto inaugural se celebró el 28 de mayo de 1916 en esta misma sala Paraninfo.

La pequeña Universidad de Zaragoza tenía entonces, poco más de cuatro decenas de catedráticos que daban vida a sus Facultades de Filosofía y Derecho en la plaza de la Magdalena y a las de Medicina y Ciencias en su nueva sede, donde nos encontramos, en las afueras de la ciudad. Todos se conocían y tenían un enorme prestigio social a nivel local. Por ello, no fue difícil integrar en la Academia de Ciencias a profesores de otras Facultades y de Institutos de Enseñanza Media, así como a prestigiosos profesionales con el ánimo de crear un núcleo fuerte y vigoroso donde estuvieran representadas todas las fuerzas científicas de Aragón. A la iniciativa fundacional se sumaron, entre otros, catedráticos de la Facultad de Ciencias como Calamita y Savirón, de la de Medicina (Bastero Lerga, Pedro Ramón y Cajal), Hilarión Gimeno de la Escuela de Artes y Oficios, catedráticos del Instituto Goya como Ruiz-Tapiador, ingenieros de caminos como Lorenzo Pardo, de montes, Pedro Ayerbe, o el gran biólogo, el jesuita Longinos Navás. Muchos de estos nombres figuran en el callejero de Zaragoza.

La inclusión de estas relevantes figuras fuera del ámbito científico convirtió muy pronto a la Academia en la élite de las Ciencias en Aragón en un sentido amplio y le dio una fuerte

proyección social. Además de congresos con interés estrictamente científico, se celebraron otros de gran utilidad para la sociedad aragonesa, como los que versaban sobre regadíos y política hidráulica, sobre la riqueza del subsuelo de Aragón, o acerca del Seguro de Previsión Social en los años 20. No en vano fueron académicos el impulsor y Presidente de la Confederación Hidrográfica del Ebro (Manuel Lorenzo Pardo), el Presidente del Seguro de Previsión (General Marvá), o el Presidente de la Caja de Ahorros de Zaragoza (Lasierra Purroy). Este servicio de la Ciencia a la sociedad no se limitó a la capital, sino que se realizaron cursos y congresos en numerosas ciudades y pueblos de Aragón, con temas como el control de plagas en el campo, la producción del campo aragonés o la contribución de Aragón a la riqueza de España. Donde había un tema candente en la sociedad, en el que pudiera aportar su saber, ahí estaba la Academia dando su contribución.

Aparte de los altos cargos mencionados, el académico Gonzalo González Salazar fue alcalde de Zaragoza (1925-27), varios académicos fueron Teniente de Alcalde en distintas épocas, Directores Generales, y hasta un Director de la Academia General Militar. En el ámbito universitario, en estos cien años, la Academia ha contado con 15 Decanos de Ciencias, 3 de Veterinaria, 3 Directores de la EINA (en sus tres denominaciones diferentes), 3 Directores de Institutos de Investigación, y con nada menos que 6 Rectores (Giménez Soler, de Gregorio Rocasolano, Savirón Caravantes, Cabrera Felipe, Calamita y Casas Peláez).

Además de la implicación en la vida social aragonesa, el aspecto científico nunca se descuidó. Conviene resaltar que en los comienzos de la Academia, los académicos tuvieron un contacto directo y personal con los grandes científicos europeos. A pesar de que hoy en día parece aceptado que la internacionalización de la Ciencia española arranca en los pasados años 80, la realidad es que se olvida la “**Edad de plata**” en la que muchos científicos españoles, y entre ellos la mayor parte de los académicos fundadores, habían realizado estancias en laboratorios y universidades europeos —mediante ayudas de la Junta de Ampliación de Estudios principalmente— y algunos trabajaron en estrecha colaboración en temas y con científicos que lograron el Nobel. La tan conocida visita de Albert Einstein a Zaragoza se debió a contactos de varios académicos, y en especial a Jerónimo Vecino.

Entre los académicos correspondientes hay cinco Premios Nobel (Ramón y Cajal, Einstein, Perrin, Sabatier y Zsigmondy) y un Medalla Fields (Yefim Zelmanov); pues bien, los cinco Nobel fueron académicos correspondientes antes de la Guerra Civil, y es digno de reseñar que dos de ellos eran ya académicos correspondientes cuando la Academia sueca les otorgó tan preciado galardón y previamente ya habían publicado en la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, que vio la luz en 1916 y continúa viva.

Precisamente, la Revista vino a impulsar la difusión de la Ciencia realizada en España dada la escasez en nuestro país de este tipo de publicaciones especializadas. El abrir sus

páginas a colegas nacionales e internacionales proporcionó los contactos científicos tan necesarios para el avance de la Ciencia. Pero la revista no se limitó a artículos científicos, sino que sus páginas acogieron referencias a jornadas y congresos de carácter social o económico, así como los discursos de ingreso de los nuevos recipiendarios, que reflejan el “estado del arte” del tema elegido para ingresar como académico. Actualmente, la Real Academia publica la Revista, Monografías y los Discursos de ingreso. Dichas publicaciones se intercambian con revistas de prestigiosas Academias y Sociedades internacionales, incrementando así los fondos bibliográficos de la Universidad de Zaragoza, sin coste alguno para esta.

Los cien años de vida de la Academia han estado marcados por la historia reciente de España, y las vicisitudes de nuestro país en este siglo han marcado profundamente su devenir. A los años iniciales y florecientes de la Academia les sucedió una etapa triste y casi agónica de posguerra, llegando incluso a proponerse la disolución de la Academia. Sin embargo, esta supo recuperarse y, al igual que la sociedad española, se sobrepuso a esos momentos difíciles, para después progresar en épocas más favorables, aportando su mejor conocimiento y trabajo a una sociedad que ha cambiado radicalmente.

Hoy en día, la Ciencia no se hace en las Academias, sino en Laboratorios e Institutos de investigación. ¿Qué papel debe jugar pues la Academia? Creo que el original. Atesora un conocimiento en sus miembros que debe ser puesto al servicio de la sociedad desde la imparcialidad y el rigor científico, divulgando el conocimiento que hace progresar a la sociedad moderna. Paradójicamente, en un mundo inmerso en la Ciencia y la Tecnología, cada día están más extendidas la superchería y la superstición en forma de pseudociencias y que tienen efecto multiplicador por las nuevas tecnologías e intereses económicos. Debemos salir al paso de ello, desde el compromiso social, con la independencia y espíritu crítico que nos proporciona la luz de la razón y de la ciencia, pues una sociedad mejor formada es más libre.

La unión de la Ciencia con la Sociedad forma parte de la esencia de la Academia. Debemos hacer Ciencia, sí, pero que sirva para el desarrollo y bienestar de la Sociedad a la que pertenecemos. Paradigma de esta unión es nuestro Académico correspondiente, Carlos López Otín, una vida dedicada al estudio y a la investigación para descubrir las claves de temibles enfermedades y sus posibles soluciones. Felicidades y muchísimas gracias por la brillante conferencia que ha impartido, profesor.

Con motivo de la efemérides que estamos celebrando, pareció conveniente recopilar en un libro la historia de la Academia, recogiendo cómo ha contribuido al desarrollo de la Ciencia y de la sociedad aragonesa. A esta labor se han entregado con entusiasmo los académicos. Se trata, por tanto, de una obra conjunta de la Real Academia y que ustedes tienen en sus manos.

La primera parte está dedicada a la vida de la Academia desde su fundación hasta nuestros días, puesta además en el contexto social de cada momento. Para ello, los autores han tenido la laboriosa tarea de revisar las actas de la Academia, donde se relatan los distintos asuntos tratados en las sesiones, los nombramientos, las preocupaciones existentes, las acciones emprendidas. Por fin se dispone de una lista completa de todos los académicos, qué medallas poseyeron, quiénes les sustituyeron, los títulos de los Discursos de ingreso y sus respectivas Contestaciones. También se ha investigado en la actividad de los académicos y su reflejo en publicaciones de la Revista.

La segunda parte recoge la contribución de la Academia al último siglo de desarrollo de la Ciencia en Aragón y está dispuesta en cuatro apartados, uno por cada una de sus secciones, de modo que con ciertas pautas comunes, cada una ha sido libre de mostrar su contribución. Leyendo sus páginas, podrán darse cuenta de que la historia de nuestra Real Academia es casi coincidente con el último siglo de la Facultad de Ciencias. Parecía pues de justicia que la **Primera Medalla de Honor** que la Academia otorga fuera destinada a esta Facultad por los lazos tan estrechos e históricos y como sentimiento de gratitud a la misma.

En estas páginas, también leerán que la situación económica de la Academia ha sido desde su fundación una preocupación constante. Actualmente, no recibe ninguna subvención institucional continua, a pesar de las actividades desarrolladas y el impulso para la sociedad española y en particular aragonesa que ha supuesto —y sigue suponiendo— la Real Academia. Por ello, queremos agradecer públicamente el apoyo que para la celebración de los actos del centenario han hecho diversas instituciones y empresas, que esperamos tenga continuidad en el futuro.

El que la Real Academia, siendo centenaria, goce de buena salud, se debe a la labor callada y continuada de todos sus integrantes, pero especialmente de los Presidentes, y sus equipos, que nos han precedido. Unos tuvieron el encargo de fundar la Academia y de guiarla en sus primeros pasos, otros de consolidarla en la sociedad zaragozana, otros de mantener encendido el pábilo en los difíciles años de la posguerra, otros de conseguir financiación, otros de completar la nómina de académicos. Todos, a la postre, han dedicado años de su vida para que la Real Academia perviviera y se mantuviera fiel a los ideales de los fundadores.

Han transcurrido cien años desde la fundación de la Academia, y esta **búsqueda de la verdad a través de la mente y del trabajo** ha sido permanente, tal como pretendían sus fundadores.

Feliz Centenario, y larga vida a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza.

He dicho

**Actividades de la Real Academia de Ciencias Exactas,
Físicas, Químicas y Naturales
durante el año 2016, Año del Centenario**



Sesiones celebradas

La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza (en adelante Academia) en 2016, año de su Centenario, ha celebrado once sesiones; una solemne y cinco extraordinarias, que se desarrollaron con presencia de autoridades y público, y cinco ordinarias con asistencia sólo de los académicos de número.

El 25 de mayo a las 12 horas y en el mismo lugar que vio nacer a la Academia, actual Salón Paraninfo de la Universidad de Zaragoza sito en la Plaza Basilio Paraíso, se celebró una sesión solemne conmemorativa del Centenario. La sesión estuvo presidida por el Excmo. Sr. Presidente del Gobierno de Aragón D. Javier Lambán Montañés, estando acompañado en la mesa por el Excmo. Sr. Presidente de la Academia D. Antonio Elipe Sánchez, el Excmo. Sr. Rector Magnífico de la Universidad de Zaragoza D. José Antonio Mayoral Murillo, el Ilmo. Sr. académico correspondiente y conferenciante D. Carlos López Otín y el Ilmo. Sr. Secretario de la Academia D. Rafael Navarro Linares. En la tarima presidencial estuvieron presentes el Sr. Delegado del Gobierno en Aragón D. Gustavo Alcalde Sánchez, el Sr. Justicia de Aragón D. Fernando García Vicente, el Sr. Alcalde Presidente del

Ayuntamiento de Zaragoza D. Pedro Santiesteve Roche y el Sr. Rector de la Universidad de San Jorge D. D. Carlos Pérez Caseiras entre otras autoridades autonómicas y locales, benefactores, representantes de la sociedad civil, presidentes de academias hermanas y la práctica totalidad de los académicos de número y electos.

En esta sesión se entregó la primera Medalla de Honor de la Academia concedida a la Facultad de Ciencias, que en su nombre recogió y agradeció su Ilmo. Sr. Decano Luis Teodoro Oriol Langa. La conferencia central, *“Confluencia de las Ciencias”*, fue impartida por el Dr. Carlos López Otín, catedrático de Bioquímica y Biología Molecular en la Facultad de Medicina de la Universidad de Oviedo, Premio Rey Jaime I a la investigación básica 2004, Premio Nacional de Investigación Santiago Ramón y Cajal y entre otros muchos premios y reconocimientos Doctor honoris causa por la Universidad de Zaragoza y académico correspondiente de esta Academia.

El Presidente de la Academia presentó el libro *“Academia de Ciencias de Zaragoza. Un siglo de servicio a la sociedad”*, que se repartió entre los asistentes a la sesión conmemorativa. Igualmente, las autoridades y académicos presentes recibieron además una medalla en bronce conmemorativa del centenario. Terminada la sesión con discursos del Rector de la Universidad de Zaragoza, del Presidente de la Academia y del Presidente del Gobierno de Aragón, en el propio Edificio Paraninfo se celebró una comida de hermandad de los académicos, invitados y autoridades.

Las cinco sesiones extraordinarias se desarrollaron en la Sala de Grados de la Facultad de Ciencias a las 19 horas. En las correspondientes de 3 y de 10 de noviembre se entregaron los Premios de Investigación Centenario de las secciones de Exactas y Físicas, en la primera, y Químicas y Naturales, en la segunda. En las sesiones de 16 de junio, 27 de octubre y de 19 de diciembre ingresaron tres nuevos académicos.

Las cinco sesiones ordinarias: 25 de febrero, 3 de marzo, 8 de junio, 21 de septiembre y 15 de diciembre se celebraron en la Sala de Profesores de la Facultad de Ciencias a las 19:00 horas, salvo la última que fue a las 13:00 horas. Al acabar la sesión de 15 de diciembre, en los locales de la Academia se descubrió una fotografía del anterior Presidente de la Academia Excmo. Sr. D. Luis Joaquín Boya incorporándola a la galería que hay con las fotografías de los anteriores presidentes y se cerró el año de celebración del Centenario con una comida de hermandad de los académicos.

Altas y bajas de académicos numerarios y correspondientes

En sesión de 25 de Febrero se aceptó la petición de cese del académico de número Ilmo. Sr. D. Joaquín Villena Morales de la Sección de Naturales y fue nombrado académico correspondiente de la misma. En sesión de 21 de marzo el pleno de la Academia y por mayoría cualificada cesó, por reiterado incumplimiento de sus deberes de asistencia a las

sesiones sin dar explicación, a los académicos numerarios de la sección de Naturales Ilmos. Srs. Doña María Jesús Azanza Ruiz y D. José Manuel González López.

Este año han causado baja por fallecimiento los académicos correspondientes Sr. D. José Antonio Madariaga Zamacona de la Sección de Físicas (†29 de enero de 2016) y Sr. D. José Joaquín Barluenga Mur de la sección de Químicas (†7 de septiembre de 2016). Igualmente, se hace constar que falleció (†11 de enero de 2016) el Sr. D. Rafael Usón Lacal, académico de número desde 19 de enero de 1969 a 27 de noviembre 1984, en que se aceptó su dimisión.

El 16 de junio el académico electo Ilmo. Sr. D. Eustoquio Molina Martínez, presentó su discurso de ingreso “*Eventos de extinción desde el Cretácico hasta la actualidad: Patrones causas y efectos*” siendo respondido por el Ilmo. Sr. D. Juan Pablo Martínez Rica. El 27 de octubre el Ilmo. Sr. D. Juan Bartolomé Sanjoaquín presentó su discurso de ingreso “*Dicroísmo Magnético Circular con Rayos X y sus aportaciones al Magnetismo de la Materia Condensada*” siendo respondido por el Ilmo. Sr. D. Pablo Alonso Gascón. El 19 de diciembre el Ilmo. Sr. D. Ricardo Manuel Ibarra García presentó su discurso de ingreso: “*Magnetismo y un camino hacia lo pequeño*” siendo respondido por el Ilmo. Sr. D. Rafael Navarro Linares.

En sesión de 15 de diciembre se eligió como nuevo académico por la Sección de Naturales al Sr. D. Andrés Pocoví Juan que, en su caso, recibirá la medalla número 28 que antes ocupara el Sr. D. Joaquín Villena.

Aprovechando la participación en los actos organizados por la Academia en Zaragoza en este año se entregaron las acreditaciones de académicos correspondientes previamente concedidas a los Srs. D. Juan Luis Vázquez Suárez, D. Ignacio Cirac Sasturain, D. Francisco García Novo, D. Avelino Corma Canós y D. Fernando Cossío Mora.

Tras presentar su dimisión el Presidente de la Sección de Naturales Ilmo. Sr. D. Juan Pablo Martínez Rica en sesión de dicha sección de 14 de noviembre fue elegida nueva Junta con la Ilma. Sra. Doña María Victoria Arruga Laviña como Presidenta, el Ilmo. Sr. D. Eustoquio Molina Martínez como Vicepresidente y la Ilma. Sra. Doña María Luisa Peleato Sánchez como Secretaria.

Publicaciones de la academia, referencias en prensa y otros

La Academia ha publicado el volumen 70 de la *Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza* correspondiente a 2015 y el libro “*Academia de Ciencias de Zaragoza. Un siglo de servicio a la sociedad*” (depósito legal Z 558-2016). Este libro de 312 páginas elaborado por sus académicos comienza con un prefacio del Sr. Presidente y tiene dos partes diferenciadas: Una primera dedicada a la vida de la Academia desde su fundación con un listado completo de todos los académicos de número y correspondientes que han sido, así como sus actividades e hitos más reseñables durante sus cien años, dando el contexto

social de los acontecimientos que se produjeron en de cada momento. Una segunda parte recoge cuáles han sido las contribuciones de los académicos al desarrollo científico de las Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales con artículos respectivos de revisión de cada una de sus cuatro secciones. En ellas se recogen las contribuciones que se han hecho desde su fundación y las interrelaciones con sus maestros y discípulos dando una imagen bastante completa de las contribuciones de la Universidad de Zaragoza y de Aragón en esos campos.

Con motivo del Centenario de la Academia, han aparecido en prensa distintos artículos alusivos a la efeméride glosando su actividad: 5 de marzo –Heraldo de Aragón– “*Un siglo de la Academia de Ciencias*” por D. Antonio Elipe, 27 de marzo –el Periódico–, “*El misterio de la pizarra de Einstein*” de su redacción, 6 de Abril –Heraldo de Aragón–, “*La Academia de Ciencias y sus fundadores*” por D. Rafael Navarro. La prensa zaragozana del 26 de mayo; Periódico de Aragón y Heraldo de Aragón y algunas emisoras de radio, se hicieron eco de la celebración del acto Centenario a destacar el artículo más extenso del Heraldo. Con el artículo, “*Academia para el avance de la Ciencia y el desarrollo de la sociedad*” de nuestro Presidente publicado en el Suplemento tercer milenio de El Heraldo de Aragón el 19 de abril se inició una colaboración con la Academia para incluir posteriormente biografías de académicos. Dentro de este acuerdo se publicaron: el 10 de mayo “*Longinos Navás Ferrer, El Naturalista incansable (1858-1938)*” por D. Juan Pablo Martínez Rica, el 24 de mayo “*Francisco Grande Covián, nutricionista precursor (1909-1995)*” por D. Miguel Pocoví, el 14 de junio “*Mariano Tomeo Lacrué (1900-1990). El biógrafo de la Universidad.*” por D. José Luis Marqués y el 28 de noviembre “*Zoel García de Galdeano y Yanguas (1846-1924) primer presidente de la Academia*” por Doña María Teresa Lozano.



Se ha acuñado una medalla en bronce conmemorativa del Centenario en cuyo anverso se presenta el edificio Paraninfo no simplificado con una orla circular en la que figura el texto “*CENTENARIO REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE ZARAGOZA*”. En el reverso están los escudos circulares alegóricos de las 4 secciones (triángulo de Pitágoras, pilas de Volta, alambique y planta) con el escudo de la Academia y una orla con el lema

de la Academia que figura en las medallas “*QUÆRO VERUM MENTE ET LABORE*” (*Busco la verdad en la mente y el trabajo*) 1916-2016.

La Web de la Academia (<http://www.raczar.es/webracz/>) ha incluido un apartado destacado dedicado a las actividades del Centenario. En él se han anunciado previamente las distintas actividades y se han reflejando con puntualidad todas las noticias y fotografías generadas. Tanto los artículos citados y el libro publicado están en acceso libre como ficheros tipo pdf.

Organización de conferencias y eventos

La Academia con motivo de su Centenario organizó un ciclo de cuatro conferencias que se impartieron en el Salón Rioja del Patio de la Infanta de la Obra Social de Ibercaja en horario de 19:30 h con el siguiente orden:

7 de marzo, “*El poder de las matemáticas en la ciencia moderna. El Laplaciano y sus sorprendentes aplicaciones*” impartida por el Dr. Juan Luis Vázquez Suárez, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid, Académico Numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid y premio Nacional Rey Pastor.

4 de abril, “*Ecología Humana y Cambio Global*” impartida por el Dr. Francisco García Novo, profesor de la Universidad de Sevilla, académico Numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, Premio Rey Jaime I de Medio ambiente 1995 y Cruz de la Orden de Alfonso X el Sabio.

25 de abril, “*La Química al Servicio de la Sociedad*” impartida por el Dr. Avelino Corma Canós, Catedrático en el Instituto de Tecnología Química de la Universidad Politécnica de Valencia, Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica 2014 y Premio Rey Jaime I a las nuevas tecnologías 2000.

16 de mayo, “*Simulación Cuántica de problemas complejos*” impartida por el Dr. Ignacio Cirac Sasturain, investigador del Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching (Alemania) y Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica 2006 y Académico Numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

La Academia realizó un viaje cultural y turístico a la ciudad de Daroca (Zaragoza) el **25 de Noviembre**. Su Alcalde, Ilmo. Sr. D. Miguel García Cortés recibió a una representación en el Ayuntamiento y le entregó una placa conmemorativa del 650 aniversario de nombramiento de Daroca como Ciudad. Esta gentileza fue correspondida por la Academia con la entrega de un ejemplar del libro editado con motivo del Centenario y un ejemplar de la medalla conmemorativa. En el viaje se visitaron los principales monumentos de la localidad y la fábrica de Pastas Romero.

Participación en la organización de conferencias y congresos

El académico Sr. D. Enrique Artal Bartolo ha sido miembro del comité organizador del congreso *IUMA Day on knots*, que tuvo lugar en Zaragoza, mayo, y del comité científico del *Fourteenth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications*, celebrado en Jaca, septiembre.

El académico Sr. D. Juan Bartolomé San Joaquín ha sido responsable de la organización del Congreso, *20th International Conference on Solid Compound of transition elements* que tuvo lugar en Zaragoza, abril. En el comité organizador de este congreso también participó el académico Sr. D. Rafael Navarro Linares.

El académico Sr. D. Alberto Elduque ha sido miembro del comité científico del congreso, *Les Deuxièmes Journées de Géométrie, et Algèbres Non associatives* que tuvo lugar en la Faculté des Sciences de Meknès (Marruecos), octubre.

El académico Sr. D. Antonio Elipe ha sido miembro del comité organizador del congreso *DESEi+d 2016. IV Congreso Nacional de i+d en Defensa y Seguridad* que tuvo lugar en San Javier, Murcia, noviembre, y del comité científico de las *XV Jornadas de trabajo en mecánica celeste*, Manresa. junio.

El académico Sr D. Rafael Núñez-Lagos Roglá ha sido Secretario del comité Organizador de las *IX Jornadas sobre Calidad en el Control de la Radiactividad Ambiental* celebrado en Sitges, junio.

El académico Sr. D. Manuel Silva Suárez ha sido miembro del comité del programa de los congresos, *International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'16)* que tuvo lugar en Xi'an (China) Mayo-Junio, *37th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Other models for Concurrency (ICATPN)* que tuvo lugar en Torun (Polonia), junio.

Impartición de conferencias y cursos por los académicos

El académico Sr. D. Enrique Artal Bartolo ha impartido:

- *Arithmetic Zariski pairs of line arrangements y Resonant characters for rational arrangements*, conferencias invitadas en el congreso: “*Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics*” Hiroshima (Japón), marzo.
- *Computational Methods in the Topology of Algebraic Varieties*, conferencia plenaria en el encuentro “*Álgebra Computacional y Aplicaciones, EACA*” Logroño, junio.
- *Bernstein-Sato polynomial and Yano's conjecture*, conferencia plenaria el congreso “*Third Mini-Workshop IMAC-SINGACOM in La Plana: Topics in Singularities and*

Valuations” Castellón, septiembre, que también se impartió en una sesión especial de la conferencia “*Fourteenth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications*”, Jaca, septiembre.

- *Wirtinger curves, hypocycloids and Artin groups* en las jornadas “*Topologie pyrénéenne*”, Pau, diciembre.

El académico Sr. D. Juan Francisco Cacho Palomar ha impartido la conferencia *El vino y su crianza* en el ciclo de conferencias “Los martes del Paraninfo” y como miembro de la Academia Aragonesa de Gastronomía ha contestado a los discursos de ingreso de los Srs. D. Víctor Guelbenzu Morte, *Yo el Vino* y D. Isidro Sierra Alfranca, *El Ternasco de Aragón. (Historia, Producción y Calidad)*.

El académico Sr. D. Alberto Elduque Palomo ha impartido las conferencias:

- *Octonions* en el Coloquio del Departamento de Matemáticas en la Universidad de Chile, enero.
- *Gradings on simple Lie algebras*, en Algebra Seminar, Chalmers University of Technology and the University of Gothenburg (Suecia), marzo.
- *Octonions*, en Colloquium Talk of the Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and the University of Gothenburg (Suecia), marzo.
- *Octonions*, en Colloquium Talk of the Department of Mathematics, Uppsala University (Suecia), septiembre

El académico Sr. D. Alberto Elduque Palomo ha impartido además en simposios y congresos las conferencias:

- *Fine gradings and gradings by root systems on simple Lie algebras*, conferencia invitada en “*Infinite Dimensional Lie Superalgebras and Their Representations*”, IPM Isfahan (Irán), mayo.
- *Graded modules over simple Lie algebras Groups and Rings*, conferencia plenaria en “*Theory and Applications (GRiTA2016)*”, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofía (Bulgaria), julio.
- *Octonions in low characteristics*, conferencia plenaria del “*XXI Coloquio Latinoamericano de Álgebra*”, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (Argentina), julio.
- *Okubo algebras*, conferencia invitada en honor de Ernst Dieterich y de Karl-Heinz Fieseler, Department of Mathematics. Uppsala University (Suecia), septiembre.

- *Octonions in low characteristics*, conferencia invitada en “*Les Deuxièmes Journées de Géométrie, et Algèbres Non associatives*”, Faculté des Sciences de Meknès (Marruecos), octubre.
- *Gradings on simple Lie algebras*, conferencia invitada en “*Workshop on Graded Algebra, Geometry and Related Topics*”, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida (México), noviembre.
- *Graded simple algebras and module*, conferencia invitada en “*Workshop on Non associative Algebras and Related Structures*”, Universidad de Málaga, diciembre

El académico Sr. D. Antonio Elipe ha impartido la conferencia invitada “*Frozen orbits for a solar sail around Mercury*” en el congreso “*10th International Workshop and Advanced School – Spaceflight Mechanics and Control*”, Universidad de Beira Interior, Covilha (Portugal), marzo.

El académico Sr. D. Eustoquio Molina Martínez ha impartido la conferencia invitada Eventos de extinción en los últimos 100 millones de años en el encuentro “*Libertad por el saber (Pensar la Muerte)*”, Colegio Nacional de México, México DF, octubre.

El académico Sr. D. Víctor Orera Clemente ha impartido las conferencias:

- *Tailoring Microstructures and Interfaces for Improving Functionalities in Ceramics* en IMDEA, Madrid, Febrero.
- *Membranas líquidas: Materiales Macroporosos y Burbujas Danzarinas* en las *Jornadas de Materia Condensada*, en Zaragoza. junio.
- *Nuevos Materiales para Nuevos retos tecnológicos* dentro del ciclo “*Qué sabemos de... Charlas con el CSIC*” en Zaragoza, noviembre.

El académico Sr. D. Luis Antonio Oro Giral ha impartido las conferencias:

- *Hydrofunctionalization of Alkynes Promoted by Rhodium Catalysts* conferencia invitada en “*XX International Symposium on Homogenous Catalysis*”, Kyoto (Japón), julio.
- *Mechanistic Studies on Rhodium-N-Heterocyclic Carbene Catalyst* conferencia plenaria en “*11th Inorganic Chemistry Conference*”, Sintra (Portugal), octubre.
- *Playing Around with Alkynes and Late Transition Homogeneous Catalysts* conferencia invitada en “*6th EuCheMS Chemistry Congress*” Sevilla, septiembre.

- *Rhodium-N-Heterocyclic Carbene Complexes: From Organometallic Chemistry to Homogeneous Catalysis* conferencia plenaria en “14th EURASIA Conference on Chemical Sciences”, Karachi (Pakistán), diciembre.

D. Miguel Pocoví Mieras ha impartido las conferencias:

- *Seven-Ketocholesterol and other biomarkers for Niemann-Pick disease Type C (NP-C) detection*, conferencia invitada en “Biomarkers Workshop”, Roma (Italia), mayo.
- *The complex genetics of Niemann-Pick type C disease* conferencia invitada en “LATAM NP-C FORUM”, Cancún (México), septiembre.
- *La regulación intracelular de los lípidos, cuestión de genes*, conferencia invitada en “X Congreso Nacional del Laboratorio Clínico”, Zaragoza octubre.

La académica Sra. Doña Caridad Sánchez Acedo como académica de la Real Academia de Medicina de Zaragoza presentó la conferencia del Dr. Jesús de la Osada García: *Animales modificados genéticamente. Una herramienta para el avance del conocimiento biomédico*, abril.

El académico Sr. D. Manuel Silva Suárez ha impartido las conferencias:

- *Some five decades of Petri Nets (1962-2016)* en la Tsinghua University (Pekin), junio.
- *Petri Nets: A modelling paradigm for Discrete Event Systems*, conferencia plenaria en el “17th Simposio Turco sobre Control Automático”, Eskişehir (Turquía), septiembre.

El académico Sr. D. José Santiago Urieta Navarro ha impartido en la Universidad Jaume I de Castellón como profesor invitado el curso *Fotoquímica y Electroquímica Ambiental*, enero.

Premios de investigación entregados y concedidos

En la sesión extraordinaria de 3 de noviembre se entregaron los Premios de investigación Centenario de la Academia:

Por la sección de Exactas fue premiado D. Francisco Javier Sayas González, profesor titular de la Universidad de Zaragoza en excedencia y actualmente profesor de la Universidad de Delaware (USA), que presentó su trabajo: “*La vida matemática y numérica de los potenciales de capa simple, de Coulomb a Huygens*”.

Por la sección Físicas fue premiado D. Luis Martín Moreno, profesor de investigación del CSIC en el Instituto de Ciencia de Materiales de Aragón, Instituto Universitario mixto CSIC – Universidad de Zaragoza, que presentó su trabajo: *“Óptica en la nano-escala: conceptos y aplicaciones”*.

En la sesión extraordinaria de 10 de noviembre se entregaron los otros dos Premios de investigación Centenario de la Academia:

Por la sección Químicas fue premiado D. Fernando Cossío Mora, ex alumno de la Universidad Zaragoza, catedrático de la Universidad del País Vasco y director científico de Ikerbasque que presentó su trabajo: *“Tres décadas de investigación en Química experimental y teórica: del enlace químico al diseño de fármacos epigenéticos”*.

Por la sección Naturales fue premiado: D. Rodolfo Gozalo Gutiérrez, profesor titular de Paleontología en el Departamento de Botánica y Geología de la Universidad de Valencia que presentó su trabajo *“El yacimiento Cámbrico de Murero (Zaragoza) ejemplo de convergencia entre Ciencia y Patrimonio”*.

Los trabajos presentados por los premiados se recogerán en el número 41 de la segunda serie de las Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza que se publicará en 2017.

En sesión ordinaria de 15 diciembre, se aprobaron los Premios de Investigación de la Academia correspondientes a 2017, reanudando así el ciclo bienal por secciones que se acordó interrumpir en 2016 para dar realce a los Premios de investigación del año del centenario. En la sección de Exactas el premio de investigación Academia se concedió al Sr. D. David Alonso Gutiérrez y en la sección de Físicas al Sr. D. Carlos Sánchez Somolinos.

Honores, distinciones y nombramientos

La Academia, recibió el título de Amigo de la Facultad de Ciencias, de manos de su decano en el acto solemne realizado el 18 de Noviembre con motivo de la festividad de su patrón San Alberto Magno.

Los académicos Srs. D. José Fernando Cariñena Marzo y Doña María Teresa Lozano Imízcoz fueron nombrados profesores eméritos de la Universidad de Zaragoza para el curso 2016-17 y siguientes. Igualmente fueron nombrados miembros del Senatus científico de la Facultad de Ciencias.

El académico Sr. D. Enrique Artal Bartolo fue nombrado director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

La académica Sra. Doña María Teresa Lozano Imízcoz, fue galardonada con la medalla de la Real Sociedad Matemática Española (RSME).

La académica Sra. Doña María Caridad Sánchez Acedo ha sido nombrada miembro de las Juntas directivas de la Real Academia de Medicina de Zaragoza y de la Asociación de Profesores Eméritos de la Universidad de Zaragoza. Así mismo ha sido nombrada Presidenta de la Sección de Medicina Preventiva y Microbiología.

El académico Sr. D. Luis Antonio Oro Giral recibió el premio Heraldo 2016 a los Valores Humanos y el Conocimiento y ha sido nombrado miembro del Consejo Rector de la Agencia Estatal de Investigación.

El académico Sr. D. Miguel Pocoví Mieras fue nombrado Académico de Honor de la Academia Española de Nutrición.

El académico Sr. D. Ángel García de Jalón Comet en junio fue nombrado Presidente del Grupo San Valero y de la Universidad San Jorge.

Comité De Honor Actos Del Centenario

Presidencia del Comité de Honor: SU MAJESTAD EL REY

Comité de Honor:

Presidente del Gobierno de Aragón

Excmo. Sr. Francisco Javier Lambán Montañés

Ministro de Educación, Cultura y Deporte

Excmo. Sr. Íñigo Méndez de Vigo

Consejera de Innovación, Investigación y Universidad de Aragón

Excma. Sra. Pilar Alegría Contiente

Rector Universidad de Zaragoza

Excmo. Sr. José Antonio Mayoral Murillo

Rector Universidad San Jorge

Excmo. Sr. Carlos Pérez Caseiras

Presidente de la Junta Rectora del Instituto de España

Excmo. Sr. D. Joaquín Poch Broto

Presidente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Excmo. Sr. José Elguero Bertolini

Presidente de la Real Sociedad Española de Matemáticas

Excmo. Sr. Francisco Marcellán Español

Presidente de la Real Sociedad Física Española

Excmo. Sr. José Adolfo de Azcárraga Feliu

Presidente de la Real Sociedad Química Española

Excmo. Sr. Jesús Jiménez Barbero

Entidades Colaboradoras En Actos Del Centenario

El mecenazgo y ayuda de distintas empresas e instituciones aragonesas y nacionales han hecho posible la financiación de los actos y actividades del centenario, siendo estas:

- Obra Social de Ibercaja
- Industrias Químicas del Ebro-IQE
- Edelvives
- SAICA
- Gobierno de Aragón
- Fundación Ramón Areces
- Fundación San Valero
- Universidad de Zaragoza
- Centro Universitario de la Defensa

Composición de la Academia a 1 de Enero de 2017

Junta de Gobierno

<i>Presidente:</i>	D. Antonio Elipe Sánchez
<i>Vicepresidente:</i>	D. Miguel Pocoví Mieras
<i>Académico Editor:</i>	D. Enrique Artal Bartolo
<i>Académico Web:</i>	D. Pablo Alonso Gascón
<i>Académico Tesorero:</i>	D. Miguel Ángel Rebolledo Sanz
<i>Académico Secretario:</i>	D. Rafael Navarro Linares

Académicos Numerarios

Distribución por secciones, número de medalla y fechas de lectura del discurso

Sección de Exactas

<i>Presidente:</i>	D. Mariano Gasca González	(medalla 1)	1 diciembre 1988
<i>Académicos:</i>	Doña María Teresa Lozano Imízcoz	(medalla 22)	22 enero 1998
	D. Manuel Calvo Pinilla	(medalla 25)	10 marzo 1998
	D. Eladio Domínguez Murillo	(medalla 27)	25 marzo 1999
	D. Antonio Elipe Sánchez	(medalla 16)	30 marzo 2000
	D. Jesús Bastero Eleizalde	(medalla 17)	9 noviembre 2000
	D. Alberto Elduque Palomo	(medalla 29)	23 febrero 2006
	D. Enrique Artal Bartolo	(medalla 4)	24 noviembre 2009
	D. Manuel Silva Suárez	(medalla 19)	20 octubre 2014
	D. José Esteban Galé Gimeno		<i>Electo el 15 de diciembre de 2015</i>

Sección de Físicas

<i>Presidente:</i>	D. Pablo Javier Alonso Gascón	(medalla 35)	16 mayo 2002
<i>Académicos:</i>	D. Luis Joaquín Boya Balet	(medalla 18)	26 noviembre 1996
	D. Rafael Núñez Lagos Roglá	(medalla 7)	22 enero 1997
	D. Miguel Ángel Rebolledo Sanz	(medalla 14)	11 mayo 2000
	D. José Fernando Cariñena Marzo	(medalla 33)	6 noviembre 2001
	D. Víctor Orera Clemente	(medalla 39)	14 junio 2007
	D. Fernando Solsona Motrel	(medalla 23)	14 febrero 2008
	D. Rafael Navarro Linares	(medalla 40)	4 junio 2009
	D. Juan Bartolomé Sanjoaquín	(medalla 3)	27 octubre 2016
	D. Ricardo Ibarra García	(medalla 20)	19 diciembre 2016

Sección de Químicas

<i>Presidente:</i>	D. Luis Antonio Oro Giral	(medalla 11)	4 junio 1981
<i>Académicos:</i>	D. José Santiago Urieta Navarro	(medalla 5)	2 diciembre 1997
	D. Carlos Gómez-Moreno Calera	(medalla 6)	21 octubre 1999
	D. Juan Forniés Gracia	(medalla 24)	26 junio 2000
	D. Ángel García de Jalón Comet	(medalla 30)	29 noviembre 2001
	D. Juan Francisco Cacho Palomar	(medalla 13)	2 diciembre 2003
	D. Miguel Pocoví Mieras	(medalla 32)	20 mayo 2004
	D. José Luis Marqués Insa	(medalla 37)	24 noviembre 2005
	D. José Luis Serrano Ostáriz	(medalla 26)	12 diciembre 2006
	D. Fernando Lahoz Díaz		<i>Electo el 11 de junio de 2014</i>

Sección de Naturales*

<i>Presidente:</i>	Doña María Victoria Arruga Laviña	(medalla 34)	10 diciembre 2015
<i>Académicos:</i>	D. Juan Marín Velázquez	(medalla 15)	10 abril 1997
	D. Mateo Gutiérrez Elorza	(medalla 8)	21 mayo 1998
	Doña María Caridad Sánchez Acedo	(medalla 9)	12 diciembre 2000
	D. Juan Pablo Martínez Rica	(medalla 36)	24 octubre 2002
	Doña María Luisa Peleato Sánchez	(medalla 21)	4 junio 2011
	D. Eustoquio Molina Martínez	(medalla 12)	16 junio 2016
	D. Andrés Pocoví Juan		<i>Electo el 15 de diciembre de 2016</i>

*En esta sección hay dos vacantes.

Académicos Correspondientes

Distribución por secciones y ordenados por fechas de nombramiento

Sección de Exactas

D. Henry Mascart	(19 junio 1967)
D. José M. Montesinos Amilibia	(7 abril 1992)
D. Claude Brezinski	(9 mayo 2002)
D. Charles A. Micchelli	(9 mayo 2002)
D. José Luis Fernández Pérez	(24 septiembre 2002)
D. Gilles Pisier	(24 septiembre 2002)
D. José Ángel Docobo Duránte	(21 abril 2005)
D. Sylvio Ferraz Mello	(21 abril 2005)
D. Francisco Marcellán Español	(4 noviembre 2004)
D. Santos González Jiménez	(27 abril 2006)
D. José Luis Viviente Mateu	(5 octubre 2006)
D. Efim Zelmanov	(5 octubre 2011)
D. Manuel Doblaré Castellano	(13 febrero 2013)
D. Jesús Carlos Fernández Asensio	(7 junio 2013)
D. José Garay Pablo	(3 junio 2015)
D. Juan Luis Vázquez Suárez	(3 junio 2015)

Sección de Físicas

D. Alberto Galindo Tisaire	(1 octubre 1967)
D. Eusebio Bernabeu Martínez	(1982)
D. Giuseppe Marmo	(9 mayo 2002)
Doña María Josefa Yzuel Giménez	(9 mayo 2002)
D. José Adolfo de Azcárraga	(25 septiembre 2008)
D. Albert Figueras Dagá	(25 septiembre 2008)
D. Fernando María Legarda Ibáñez	(25 septiembre 2008)
D. Javier Llorca Martínez	(25 septiembre 2008)
D. Miguel V. Andrés Bou	(23 marzo 2009)
D. Javier Sesma Bienzobas	(7 mayo 2014)
D. Juan Ignacio Cirac Sasturaín	(3 junio 2015)

Sección de Químicas

D. Pascual Royo Gracia	(7 abril 1992)
D. Ekkehardt Hahn	(13 junio 2002)
D. Pierre Braunstein	(13 junio 2002)
D. José María Ordovás Muñoz	(13 febrero 2008)
Doña M ^a Carmen Orosia Claver Cabrero	(13 febrero 2008)
D. Avelino Corma Canós	(15 octubre 2015)
D. Fernando Cossío Mora	(15 octubre 2015)

Sección de Naturales

D. Leandro Sequeiros Sanromán	(9 mayo 2002)
D. Emiliano Aguirre Enríquez	(9 mayo 2002)
D. Pedro Montserrat Recoder	(16 mayo 2003)
D. Luis Villar Pérez	(9 mayo 2002)
D. Adrian Michael Harvey	(13 junio 2002)
D. Mario Panizza	(13 junio 2002)
D. Carlos López Otín	(19 diciembre 2006)
D. Peter Carls	(8 mayo 2007)
D. Miguel Delibes de Castro	(23 febrero 2011)
D. Eladio Liñán Guijarro	(3 junio 2015)
D. Francisco García Novo	(15 octubre 2015)
D. Joaquín Villena Morales	(25 febrero 2016)

Zaragoza, diciembre de 2016

INSTRUCCIONES PARA LOS AUTORES

Resumen

The *Revista de la Real Academia de Ciencias* publishes original research contributions in the fields of Mathematics, Physics, Chemistry and Natural Sciences. All the manuscripts are peer reviewed in order to assess the quality of the work. On the basis of the referee's report, the Editors will take the decision either to publish the work (directly or with modifications), or to reject the manuscript.

1. Normas generales de publicación

1.1. Envío de los manuscritos.

Para su publicación en esta Revista, los trabajos deberán remitirse a

Académico-Director de Publicaciones
Revista de la Academia de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza

o bien electrónicamente a la cuenta `artal@unizar.es`.

La Revista utiliza el sistema de *offset* de edición, empleando el texto electrónico facilitado por los autores, que deberán cuidar al máximo su confección, siguiendo las normas que aquí aparecen.

Los autores emplearán un procesador de texto. Se recomienda el uso de \LaTeX , para el que se han diseñado los estilos `academia.sty` y `academia.cls` que pueden obtenerse directamente por internet en <http://www.raczar.es> o por petición a la cuenta de correo electrónico: `artal@unizar.es`.

1.2. Dimensiones

El texto de los trabajos, redactados en español, inglés o francés, no deberá exceder de 16 páginas, aunque se recomienda una extensión de 6 a 10 páginas como promedio. El texto de cada página ocupará una caja de 16×25 cm., con espacio y medio entre líneas.

2. Presentación del trabajo.

Los trabajos se presentarán con arreglo al siguiente orden: En la primera página se incluirán los siguientes datos:

- a) *Título del trabajo*: Conciso, pero ilustrativo, con mayúsculas.
- b) *Autor*: Nombre y apellidos del autor o autores, con minúscula.
- c) *Centro*: Centro donde se ha realizado, con su dirección postal.
- d) *Abstract*: En inglés y con una extensión máxima de 200 palabras.
- e) *Texto*

- A) Los encabezamientos de cada sección, numerados correlativamente, serán escritos con letras **minúsculas** en negrita. Los encabezamientos de subsecciones, numerados en la forma 1.1, 1.2, . . . , 2.1, 2.2, . . . , se escribirán en *cursiva*.
- B) Las fórmulas estarán centradas y numeradas correlativamente.
- C) Las referencias bibliográficas intercaladas en el texto, deben ser fácilmente identificables en la lista de referencias que aparecerá al final del artículo, bien mediante un número, bien mediante el nombre del autor y año de publicación.
- D) Las figuras y tablas, numeradas correlativamente, se intercalarán en el texto. Las figuras se enviarán en formato **EPS**, o que se pueda convertir a éste con facilidad. Los apéndices, si los hay, se incluirán al final del texto, antes de la bibliografía.
- E) Las referencias bibliográficas de artículos deberán contener: Autor: año de publicación, "Título del artículo", revista **número**, páginas inicial-final. En el caso de libros, deberá incluirse: Autor: año de publicación, *Título del libro*. Editorial, lugar de publicación.

3. Notas finales

La Revista permite la inclusión de fotografías o figuras en color, con un coste adicional que correrá a cargo de los autores.

Enrique Artal
Académico Editor

Intercambio de Publicaciones

RELACIÓN DE REVISTAS NACIONALES QUE RECIBE EN INTERCAMBIO LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

1. ACTA BOTANICA BARCINONENSIA – Dep Biología Vegetal. Univ. Barcelona.
2. AFINIDAD: REVISTA QUÍMICA TEÓRICA Y APLICADA – Asociación de Químicos del Instituto Químico de Sarrià
3. ANIMAL BIODIVERSITY AND CONSERVATION – Museu de Zoologia
4. ANALES DEL JARDÍN BOTÁNICO DE MADRID
5. ANALES DE LA REAL ACADEMIA DE DOCTORES
6. ANUARIO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA
7. BIODATOS BASICOS – Universidad de Oviedo
8. BOLETÍN DE LA ACADEMIA MALAGUEÑA DE CIENCIAS
9. BOLETÍN DE LA ASOCIACION HERPETOLÓGICA ESPAÑOLA
10. BOLETÍN GEOLÓGICO Y MINERO – Instituto Geológico y Minero de España
11. BOTANICA COMPLUTENSIS - Madrid
12. COLLECTANEA BOTANICA – Institut Botànic (Barcelona)
13. COLLECTANEA MATHEMATICÆ – Universitat de Barcelona
14. EXTRACTA MATHEMATICÆ - Universidad de Extremadura
15. GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
16. LUCAS MALLADA: REVISTA DE CIENCIAS – Inst. Est. Altoaragoneses.
17. MEMORIAS DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA
18. MEMORIAS DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE HISTORIA NATURAL
19. NATURALEZA ARAGONESA – Sociedad de Amigos del Museo Paleontológico de la Universidad de Zaragoza.
20. REVISTA DE LA ACADEMIA CANARIA DE CIENCIAS
21. REVISTA / REAL ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS
22. REVISTA ESPAÑOLA DE HERPETOLOGÍA
23. REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
24. STUDIA GEOLOGICA SALMANTICENSIA – Universidad de Salamanca
25. TRABAJOS DE GEOLOGÍA – Universidad de Oviedo
26. ZOOLOGIA BÆTICA. UNIVERSIDAD DE GRANADA.

RELACIÓN DE REVISTAS INTERNACIONALES QUE RECIBE EN
INTERCAMBIO LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

1. ACTA ENTOMOLOGICA MUSEI NATIONALIS PRAGÆ
2. ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES
3. ANNALEN DES NATURHISTORISCHEN MUSEUMS IN WIEN. SERIE A
4. ANNALEN DES NATURHISTORISCHEN MUSEUMS IN WIEN. SERIE B
5. ANNALES ACADEMIÆ SCIENTARUM FENNICÆ - MATEMATICA
6. ANNALES ACADEMIÆ SCIENTIARUM FENNICÆ. MATHEMATICA DISSERTATIONES – Helsinki, Suomalainen Tiedeakatemia
7. ANNALES HISTORICO NATURALES – Musei Nationalis Hungarici
8. ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER – Université de Grenoble
9. ANNALI DEL MUSEO CIVICO DI STORIA NATURALE “Giacomo Doria”
10. ARCHIVIO GEOBOTANICO: INTERNATIONAL JOURNAL OF GEOBOTANY PLANT ECOLOGY AND TAXONOMY – Univ. de Pavia.
11. ARKIV FÖR MATEMATIK
12. ATTI DELLA ACCADEMIA LIGURE DI SCIENZE E LETTERE
13. BOLETÍN DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES – Caracas
14. BOLETÍN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA. TERCERA SERIE.
15. BRENESIA - Museo Nacional de Costa Rica
16. BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. NEW SERIES
17. CALIFORNIA AGRICULTURE – University of California
18. COMMENTATIONES MATHEMATICÆ : ANNALS OF THE POLISH MATHEMATICAL SOCIETY, SERIES I
19. DÆDALUS - JOURNAL OF THE AMERICAN ACADEMY OF ARTS AND SCIENCES
20. DORIANA - SUPPLEMENTA AGLI ANNALI DEL MUSEO CIVICO DI STORIA NATURALE “G. Doria” – Genova
21. FACTA UNIVERSITATIS - SERIES: MATHEMATICS AND INFORMATICA – University of Nis, Serbia
22. FILOMAT – University of Nis, Serbia
23. FOLIA ZOOLOGICA - Czechoslovak Academy of Sciences

24. FUNCTIONES ET APPROXIMATIO COMMENTARII MATHEMATICI - Poznań
25. GLASNIK MATEMATICKI SERIJA III- Zagreb
26. HIROSHIMA MATHEMATICAL JOURNAL
27. HOKKAIDO MATHEMATICAL JOURNAL
28. JAHRBUCH DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GÖTTINGEN.
29. KALIUM
30. KOCHI JOURNAL OF MATHEMATICS
31. MATHEMATICAL JOURNAL OF OKAYAMA UNIVERSITY
32. NOTULÆ NATURÆ
33. PALÆODIVERSITY AND PALÆOENVIRONMENTS – Senckenberg Research
Institute
34. PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF NATURAL SCIENCES OF PHILA-
DELPHIA
35. PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY
36. PUBLICACIONES MATEMÁTICAS DE URUGUAY
37. REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
38. SÃO PAULO JOURNAL OF MATHEMATICAL SCIENCES
39. SMITHSONIAN CONTRIBUTIONS TO PALEOBIOLOGY
40. SUT JOURNAL OF MATHEMATICS - Science University of Tokio

