

J. Albella Martínez
A. Fernández Tojo
E. García Portugués
L. Búa Devesa

EDITORES

As matemáticas do veciño

Actas do Seminario de Iniciación á Investigación

2013

2014

Décima Edición



INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

ACTAS DO SEMINARIO

DE

INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN

CURSO 2013 – 2014

Editores:

Jorge Albella Matínez

Lucía Búa Devesa

Adrián Fernández Tojo

Eduardo García Portugués

© 2013 Seminario de Iniciación á Investigación.
Instituto de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela

Coordina:

Seminario de Iniciación á Investigación (SII)
seminarios3c@gmail.com

Edita:

Instituto de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime:

Imprenta Universitaria
Pabellón de Servicios s/n
Campus Vida
15782 Santiago de Compostela
A Coruña

ISSN: 2171-6536

Depósito Legal: C 1971-2014

*If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated
life is.*

John Von Neumann (1903–1957),

Essentially, all models are wrong, but some are useful.

George E. P. Box (1919–2013).

Prefacio

Corría o ano 2005 cando un grupo de estudantes de doutoramento decidimos organizar un seminario que permitise que tódolos alumnos de tese daqueles tempos tivesen un foro para intercambiar ideas, expoñer a súa investigación a compañeiros doutras áreas, divulgar as matemáticas do seu traballo cotiá e practica-la exposición de conceptos complexos a non especialistas. Nun momento en que vocábulos como adquisición de competencias transversais, multidisciplinariedade ou popularización da ciencia non eran moi coñecidos para os participantes desta actividade, alzámonos como cándidos precursores destas bandeiras, coa ambición de acadar un tarefa que semellaba imposible na Facultade de Matemáticas.

Os comezos non son sinxelos aínda que os participantes fagan as cousas con ilusión. Nove anos despois de formar parte daquel pequeno grupo de estudantes con ideas utópicas, compráceme constatar que o SII goza hoxe de mellor saúde ca nunca, e proba disto é a grande cantidade de público que asiste a cada una das charlas.

Non esaxero nada se digo que na actualidade o SII é unha das actividades máis importantes que se realizan na Facultade de Matemáticas. Non forma parte da docencia regrada, e non sempre ten o recoñecemento institucional que debería, ou o apoio do profesorado, pero desempeña un papel esencial: o achegamento entre xente de distintas disciplinas. Neste aspecto, tanto os que organizades como colaborades no SII, sodes o exemplo claro de que todos podemos remar cara ó mesmo lado e que a convivencia interdepartamental é posible. De feito, nesta cuestión non sodes alumnos, se non os mestres, e os vosos titores e os membros desta facultade deberíamos aprender do voso traballo.

É un orgullo ter formado parte da primeira edición das actas do SII, pero moito mellor é ver como a pequena semente que un axudou a plantar e que un día timidamente brotou da terra, hoxe é xa unha árbore forte que dá sombra e abeiro ás novas xeracións de matemáticos de Galicia.

Vós si que podedes.

Santiago de Compostela, 23 de xullo de 2014.

Jose Carlos Díaz Ramos

Índice xeral

Introdución	1
Xabier García Martínez “Álgebras de Lie–Rinehart”	3
Jorge Losada Rodríguez “Distribucións: como e por que derivar funcións descontinuas”	7
Lorena Saavedra López “Introdución á teoría espectral: desigualdades integrais de Wirtinger”	13
Lucía Búa Devesa “Teoría de campos Lagrangiana para un fibrado $\pi: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ ”	19
Ana Mascato García “Teoría de Galois infinita”	25
Ángel Rial Silva “Simulación numérica de un problema térmico en elementos de acero durante un incendio”	31
Ramón Barral Lijó “Tipo de cuasi–isometría xenérico en espazos foliados”	37
Jose Ameijeiras Alonso “Contando montañas desde la ventana”	41
M^a Isabel Borrajo García “Estimación noparamétrica de la densidad: el estimador con núcleo variable”	47
Jorge Albella Martínez “Un paseo desde las ecuaciones en derivadas parciales hasta los elementos finitos.”	53
Mercedes Conde Amboage “Regresión cuantil: unha posición condicionada”	59

Francisco José González Diéguez “Modeling and simulation of gas networks”	65
Ángel Manuel González Rueda “Optimización de redes de transporte de gas”	71

Introdución

É imposible que unha área das matemáticas progrese se as achegas que se fan nela quedan esquecidas nos caixóns dos seus descubridores. A comunicación entre os investigadores é fundamental, pero tamén o é a interdisciplinaridade, sobre todo entre os que comezan as súas carreiras investigadoras.

Con este espírito nace o Seminario de Iniciación a Investigación (SII), unha entidade encadrada dentro do Instituto de Matemáticas. O SII ten por finalidade que aqueles que se están a dar os seus primeiros pasos como investigadores teñan a oportunidade de escoitar aos seus compañeiros que traballan noutros departamentos e de expoñer as súas ideas.

As actividades do SII consisten nun conxunto de charlas que teñen lugar durante todo o curso académico na Facultade de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela. Abertas a todo o mundo, estas reunións, en xeral quincenais, son un lugar para a discusión, o afloramento de ideas e a vida social na Facultade alén da rutina investigadora ou docente. Nelas, profesores, alumnos e investigadores teñen a oportunidade de coñecerse, emprender proxectos comúns e descubrir novos intereses. Ademais, para os poñentes supón unha oportunidade única de desenvolver competencias transversais fundamentais para as súas carreiras como son falar en público, a capacidade argumentativa e a adecuación á audiencia, pois cabe salientar que as charlas están destinadas a xente que non é especialista no tema do que tratan.

É imprescindible destacar ademais a riqueza da procedencia dos poñentes dos SII. Moi a miúdo temos o pracer de poder escoitar a xente chegada doutras facultades ou incluso doutras universidades, o cal da idea da capacidade de convocatoria e o alcance transversal das actividades do SII.

O Comité Organizador do SII, encargado de organizar as actividades do SII, facelas públicas e atender as necesidades loxísticas das mesmas, é tamén o responsable de elaborar estas actas que reflicten o enorme esforzo que, entre poñentes, oíntes e organizadores, estamos a realizar para que este proxecto sexa posible. Os propios poñentes foron os encargados que revisar os resumos das charlas, de xeito que cada quen tivo que corrixir un correspondente a unha área distinta á da súa especialidade, asegurando así que estes sexan comprensibles para todos.

Por último engadir que, como non podería ser doutra maneira, o curso que ven haberá cambios destinados a mellorar as actividades que o SII leva a cabo. Quizais o máis importante é a renovación da metade do Comité Organizador, de forma queos

membros máis experimentados darán paso as novas xeracións de investigadores para así manter vivo a espírito iniciador ao que previamente facíamos alusión.

Agradecementos

Non podemos esquecernos de todos aqueles aos que tanto lles debemos e que fan posible o SII. Aos anteriores organizadores do SII polo seu esforzo e consellos e por suposto aos poñentes: Jose Ameijeiras, Ramón Barral, M^a Isabel Borrajo, Mercedes Conde, Xabier García, Francisco José González, Ángel González, Jorge Losada, Ana Mascato, Ángel Rial, Lorena Saavedra e Antón Vázquez.

Tamén agradecemos sinceramente a elaboración do prefacio destas actas a Jose Carlos Díaz, quen hai nove anos comezou, xunto cos seus compañeiros do primeiro comité organizador, este proxecto.

Santiago de Compostela, outubro de 2014.

O Comité Editorial.

Álgebras de Lie–Rinehart

Xabier García Martínez

Departamento de Álgebra

9 de octubre de 2013

Resumen

En esta charla trataremos las definiciones y propiedades básicas de las álgebras de Lie y trataremos de extenderlas a una estructura algebraica más compleja (que generaliza a las álgebras de Lie) que son las álgebras de Lie–Rinehart.

Conceptos básicos de álgebras de Lie

Para hablar de álgebras de Lie–Rinehart, primero introduciremos los conceptos básicos de álgebras de Lie para luego extenderlos a un contexto más general.

Definición 1. *Un álgebra de Lie L sobre un anillo unital R , es un R -módulo con una operación interna bilineal que cumple las siguientes propiedades:*

1. $[x, x] = 0$,
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$,

para todo $x, y, z \in L$. La primera igualdad se conoce como la antisimetría (ya que implica que $[x, y] = -[y, x]$) y la segunda se conoce como la igualdad de Jacobi.

Diremos que un álgebra de Lie es abeliana, si $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in L$. Dada un R -álgebra A , podemos definir A_{Lie} , dotándola de una estructura de álgebra de Lie con corchete $[x, y] = xy - yx$.

Dada un R -álgebra, denotaremos por $\text{Der}_R(A)$ al álgebra de Lie de R -derivaciones de A . Esto es, el conjunto de morfismos R -lineales $D: A \rightarrow A$ tales que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b),$$

donde el corchete de Lie viene dado por $[D, D'] = DD' - D'D$.

Definición 2. *Dada un álgebra de Lie L , definimos los siguientes conceptos:*

1. *Conmutador:* $[L, L] = \{x \in L : x = [y, z] \text{ para algún } y, z \in L\}$.

PALABRAS CLAVE: álgebra de Lie; álgebra de Lie–Rinehart; álgebra envolvente universal

2. *Subálgebra:* $K \subset L$ R -submódulo tal que $[K, K] \subset K$.
3. *Ideal:* $I \subset L$ R -submódulo tal que $[I, L] \subset I$.
4. *Centro:* $Z(L) = \{x \in L : [x, L] = 0\}$.
5. *Morfismo:* $\varphi: L \rightarrow L'$ morfismo de R -módulos tal que $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$.

Con esta definición de morfismo, tenemos definida la categoría de álgebras de Lie sobre un anillo R .

Debido a que las álgebras de Lie no son asociativas, su estudio puede llegar a ser complicado y lioso. Para facilitararlo, tenemos definido un objeto en la categoría de álgebras asociativas que nos va a ayudar en esta tarea. Este objeto es el álgebra envolvente universal y vamos a definirlo de tres maneras equivalentes. La primera mediante una propiedad universal, en la segunda daremos su construcción explícita y en la tercera lo veremos como una adjunción de funtores.

Definición 3. *El álgebra envolvente universal de L es un par $(U(L), i)$ donde $U(L)$ es un R -álgebra asociativa unital y $i: L \rightarrow U(L)_{\text{Lie}}$ es un morfismo de álgebras de Lie tal que si tenemos otro par (B, j) que satisface lo anterior, existe un único morfismo f que hace el diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 & & U(L) \\
 & \nearrow i & \vdots \\
 L & & f \\
 & \searrow j & \vdots \\
 & & B
 \end{array}$$

La construcción explícita es la R -álgebra generada por los símbolos $i(x_1) \cdots i(x_r)$ con $x_i \in L$ sujeto a las relaciones:

- $i(rx) = ri(x)$,
- $i(x + y) = i(x) + i(y)$,
- $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$.

También se puede ver que el funtor $U: \text{Lie} \rightarrow \text{Ass}$ es adjunto por la izquierda al funtor $(-)_{\text{Lie}}: \text{Ass} \rightarrow \text{Lie}$, que dota de la estructura canónica de álgebra de Lie a un álgebra asociativa.

Existen dos teoremas clásicos muy importantes que dan estructura al álgebra envolvente universal:

Teorema 4. *Si L es R -libre con base $\{x_i\}_{i \in I}$, el conjunto*

$$\{x_{i_1}^{s_1} \cdots x_{i_r}^{s_r} : i_1 < \cdots < i_r, r \geq 0, s_i \geq 0\},$$

es R -base de $U(L)$.

Teorema 5. *El álgebra envolvente universal $U(L)$ tiene estructura de álgebra de Hopf.*

Generalización a álgebras de Lie–Rinehart

Definición 6. Consideremos ahora R un anillo unital, y A un R -álgebra unital. Diremos que L es un álgebra de Lie–Rinehart sobre A si L es álgebra de Lie sobre R a la vez que es A -módulo. Además, debemos tener un morfismo de Lie y de A -módulos $\alpha: L \rightarrow \text{Der}_R(A)$ y que se cumpla la siguiente relación entre las estructuras de módulo y Lie:

$$[x, ay] = a[x, y] + \alpha(x)(a)y,$$

donde $a \in A$ y $x, y \in L$.

El primer ejemplo sencillo son las propias derivaciones $\text{Der}_R(A)$, donde el corchete es el usual y la aplicación α es la identidad. Otro ejemplo sencillo es considerar $R = A$ por lo que tendremos un álgebra de Lie usual. La importancia de esta estructura viene de la geometría diferencial, ya que es la estructura subyacente de los algebroides de Lie.

Definición 7. Dada un álgebra de Lie–Rinehart L , definimos los siguientes conceptos:

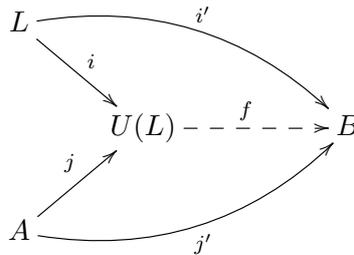
1. Conmutador: $\{L, L\} = A[L, L]$.
2. Subálgebra: $K \subset L$ R -submódulo de Lie y A -submódulo.
3. Ideal: $I \subset L$ ideal de Lie, A -módulo y $\alpha(I) = 0$.
4. Centro: $Z(L) = \{x \in L : [ax, L] = 0, \text{ para todo } a \in A\}$.
5. Morfismo: $\varphi: L \rightarrow L'$ morfismo de Lie, de A -módulos tal que $\alpha_{L'} = \alpha_L \circ \varphi$.

Ahora definiremos el álgebra envolvente universal en álgebras de Lie–Rinehart, que generaliza al álgebra envolvente universal en álgebras de Lie en el caso $R = A$.

Definición 8. Sea L un álgebra de Lie–Rinehart sobre A , el álgebra envolvente universal es un triple $(U(L), i, j)$ donde $U(L)$ es un R -álgebra asociativa unital, $i: L \rightarrow U(L)_{\text{Lie}}$ un morfismo de Lie y $j: A \rightarrow U(L)$ un morfismo de R álgebras, que cumplen que

$$\begin{aligned} i(ax) &= j(a)i(x), \\ j(x(a)) &= i(x)j(a) - j(a)i(x), \end{aligned}$$

con $a \in A$ y $x \in L$, tales que si existe un triple (B, i', j') cumpliendo lo anterior, existe un único morfismo de R -álgebras haciendo el siguiente diagrama conmutativo:



La construcción explícita del álgebra envolvente universal se puede ver como la R -álgebra generada por los símbolos $j(a_1) \cdots j(a_r)i(x_1) \cdots i(x_s)$, donde $a_i \in A$ y $x_i \in L$, sujetos a las relaciones:

- Relaciones usuales de R -bilinealidad,
- $j(1) = 1$,
- $j(ab) = j(a)j(b)$,
- $i(ax) = j(a)i(x)$,
- $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$,
- $i(x)j(a) - j(a)i(x) = j(x(a))$.

De manera análoga al caso de álgebras de Lie, se pueden plantear dos teoremas extendiendo los Teoremas 4 y 5.

Teorema 9. Si L es A -libre con base $\{x_i\}_{i \in I}$, el conjunto

$$\{x_{i_1}^{s_1} \cdots x_{i_r}^{s_r} : i_1 < \cdots < i_r, r \geq 0, s_i \geq 0\},$$

es A -base de $U(L)$.

Teorema 10. El álgebra envolvente universal $U(L)$ tiene estructura de algebroides de Hopf por la izquierda.

Distribucións: como e por que derivar funcións discontinuas

Jorge Losada Rodríguez

Departamento de Análise Matemática

23 de outubro de 2013

A teoría das distribucións do matemático francés Laurent Schwartz (Medalla Fields en 1950) foi unha das dúas grandes revolucións do século pasado no eido da análise matemática e, así como a outra gran revolución, a teoría da medida ou integral de Lebesgue, pode entenderse como unha xeneralización do cálculo integral, a teoría das distribucións é unha extensión do cálculo diferencial clásico.

Os resultados distribucionais gardan certa semellanza cos resultados da análise complexa, mais aquí son válidos para funcións de varias variables reais, e condúcenos a un mundo certamente utópico, no que *moitas funcións* son derivables.

A orixe desta teoría está relacionada coa mecánica cuántica, teoría física que chega á conclusión de que os fenómenos da Natureza ocorren, a lo menos en último termo, de maneira discontinua e imprevisible.

O espazo das funcións test

As funcións test ou funcións de proba son a ferramenta fundamental da teoría das distribucións; vexámos pois que son realmente.

Definición 1. *Diremos que unha función φ definida en todo \mathbb{R}^n que toma valores reais (poderíanse considerar tamén funcións que toman valores complexos) é unha función test, se φ pertence ao conxunto*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{sop } \varphi \text{ é un compacto}\},$$

onde $\text{sop } \varphi$ é o soporte da función φ , é dicir, a adherencia do conxunto de puntos de \mathbb{R}^n nos que φ non se anula. Referirémonos a tal conxunto como o conxunto das funcións test ou conxunto das funcións de proba.

Observación 2. *Nótese que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é un subespazo vectorial do espazo vectorial formado por tódalas funcións definidas en \mathbb{R}^n que toman valores reais, se consideramos as operacións usuais: suma de dúas funcións e produto dunha función por un escalar.*

PALABRAS CLAVE: teoría das distribucións, δ de Dirac; funcións test; convolución; ecuacións diferenciais.

A existencia de funcións test non nulas non é trivial. Non entanto, é doado comprobar que a función definida para cada $x \in \mathbb{R}^n$ como

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}}, & \text{se } r < 1, \\ 0, & \text{se } r \geq 1, \end{cases} \quad \text{onde } r = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

é unha función test. Convén darse conta de que toda función test φ non nula, en particular a que vimos de indicar para $n = 1$, é unha función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ que non é analítica. É curioso, como observan Richards e Youn en [4], que un contraexemplo básico da análise máis elemental resulte fundamental nesta teoría.

No conxunto das funcións test $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ defínese unha topoloxía, coa que pasa a ter unha estrutura de espazo vectorial topolóxico, é dicir, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ convértese nun espazo topolóxico no que as aplicacións suma e produto por un escalar son continuas. A construción de tal topoloxía, obra de Schwartz, é verdadeiramente complicada; trátase dun espazo topolóxico localmente convexo que non é Banach, xa que non é normado e tampouco é metrizable. Sen embargo, si é completo, Hausdorff, tonelado e bornolóxico (conceptos, estes dous últimos, introducidos polo grupo Bourbaki). Posto que o verdadeiramente útil de tal topoloxía é a noción de converxencia dunha sucesión de funcións test, é habitual dar tal concepto como unha definición.

Definición 3. Diremos que unha sucesión $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funcións test converxe (cando $j \rightarrow \infty$) a unha función $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se:

1. existe un conxunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para calquera $j \in \mathbb{N}$ o soporte de φ_j está contido en K ;
2. dado un multi-índice p de derivación parcial calquera, a sucesión funcións test $(\varphi_j^{(p)})_{j \in \mathbb{N}}$ converxe uniformemente en \mathbb{R}^n á función test $\varphi^{(p)}$.

É habitual referirse a esta converxencia como unha converxencia *de orde infinita*, pois esíxese a converxencia uniforme dunha infinidade de sucesións; trátase dunha noción de converxencia verdadeiramente esixente.

Definición 4. Notaremos por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (ou simplemente \mathcal{D}) ao conxunto $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dotado da estrutura de espazo topolóxico da que vimos de falar.

O espazo das distribucións

Definición 5. Unha distribución T é unha aplicación linear e continua definida sobre o espazo vectorial $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con valores en \mathbb{R} . Isto é, a cada función test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a distribución T asócialle un número real $T(\varphi)$, que é frecuente denotar como $\langle T, \varphi \rangle$, cumprindo as seguintes propiedades:

1. $\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$ e $\langle T, \lambda \varphi_1 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle$ para calquera $\lambda \in \mathbb{R}$ e calquera $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (linearidade);

2. se $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a φ no espazo topolóxico $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entón a sucesión de números reais $(\langle T, \varphi_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$ en \mathbb{R} (continuidade).

Observación 6. O conxunto das distribucións, ao que notaremos como $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ten estrutura de espazo vectorial coas seguintes operacións: suma de dúas distribucións ($\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$) e produto dun escalar por unha distribución ($\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$). Nótese ademais que en tal situación a aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T, \varphi &\longmapsto \langle T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

é unha aplicación bilinear. Empregando a notación usual da análise funcional, o espazo das distribucións $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nótase como $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R})$ e é un subespazo vectorial do dual alxébrico $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ formado por tódalas funcións lineais de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en \mathbb{R} . Convén saber que empregando o axioma de elección é posible definir funcións lineais que non son continuas, mais cabe dicir que nas aplicacións físicas xamais aparcan este tipo de aplicacións.

Exemplos de distribucións

1. Sexa f unha función localmente integrable ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$), é dicir, f é unha función integrable en todo conxunto limitado contido en \mathbb{R}^n . Tense logo que f define unha distribución. En efecto, basta poñer:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Nótese que a integral da definición anterior está ben definida, pois é en realidade unha integral sobre o conxunto $\text{supp } \varphi$, que é limitado. A linearidade da distribución T_f séguese facilmente a partires da linearidade da integral. Queda xustificar a continuidade de T_f ; supoñamos logo que a sucesión $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a φ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e sexa K un conxunto limitado que contén ao soporte de toda función da sucesión, tense logo:

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle - \langle T_f, \varphi_j \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_j(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi - \varphi_j)(x)f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi - \varphi_j)(x)||f(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x) - \varphi_j(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Proposición 7. Sexan f e g dúas funcións localmente integrables en \mathbb{R}^n . Cúmprese que $T_f = T_g$ se, e só se, $f(x) = g(x)$ para case todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Daquela, se temos a ben identificar dúas funcións localmente integrables f e g cando $f(x) = g(x)$ para case todo $x \in \mathbb{R}^n$, as distribucións son entón

unha xeneralización do concepto de función localmente integrable. É por isto que no que segue identificaremos unha función localmente integrable f coa distribución T_f e escribiremos:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

2. Non entanto, no conxunto das distribucións hai máis *cousas* ca funcións localmente integrables. Por exemplo, a distribución δ de Dirac (delta de Dirac), definida como:

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

non está asociada, no senso do exemplo anterior, a unha función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Derivación de distribucións

Empregando distribucións –ademais das operacións suma e produto por un escalar das que xa falamos– podemos definir diferentes operacións: produto por unha función $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, cambio de escala, translación... todas elas coa propiedade de consistencia seguinte: cando consideramos distribucións asociadas a funcións localmente integrables, a distribución obtida aplicando unha destas operacións coincide coa distribución asociada á función localmente integrable resultado de aplicar a operación correspondente ás funcións que definen ás distribucións.

Plantexámonos pois como definir a derivada dunha distribución T definida en \mathbb{R} de xeito que se T é unha distribución asociada a unha función f de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, entón a distribución asociada á función derivada f' coincida coa derivada da distribución asociada á función f . É dicir, queremos que $T' = T_{f'}$.

Sexa logo unha función continuamente derivable en \mathbb{R} ; aplicando integración por partes tense que para calquera $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx = - \langle f, \varphi' \rangle. \end{aligned}$$

Polo tanto, o resultado anterior condúcenos a definir

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Máis xeralmente, se $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ é un multi-índice, escribiremos $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ e notaremos por D^p o operador diferencial

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{p_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{p_n}.$$

Daquela, se T é unha distribución en \mathbb{R}^n , é dicir se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p \varphi \rangle, \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

de onde se segue o seguinte resultado fundamental na teoría das distribucións.

Teorema 8. *Toda distribución T ten derivada parcial de calquera orde, que é unha distribución, e ademais pódese invertir a orde de derivación.*

En particular, toda función localmente integrable sobre \mathbb{R}^n (nótese que este conxunto é *moi grande*) ten derivadas de calquera orde, aínda que estas non son necesariamente funcións.

Topoloxía do espazo de distribucións

O espazo das distribucións $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pode dotarse tamén dunha estrutura de espazo topolóxico, no que se ten a seguinte noción de converxencia.

Proposición 9. *Unha sucesión de distribucións $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge á distribución T se para calquera $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que a sucesión $(\langle T_j, \varphi \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$.*

É habitual referirse a tal converxencia, como converxencia feble ou converxencia de distribucións. Ademais, se $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é unha sucesión de distribucións tal que $(\langle T_j, \varphi \rangle)_{j \in \mathbb{N}}$ converge en \mathbb{R} para calquera $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entón $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a unha distribución T en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. É dicir, o espazo topolóxico das distribucións é completo.

Un resultado que non ten análogo na teoría de funcións reais, aínda que si na teoría de funcións dunha variable complexa (Teorema de Weierstrass) é o seguinte.

Teorema 10. *A derivación parcial respecto de calquera multi-índice é unha operación linear e continua no espazo das distribucións $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. É dicir, se unha sucesión de distribucións $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge á distribución T entón a sucesión das derivadas parciais respecto dun multi-índice p , $(D^p T_j)_{j \in \mathbb{N}}$, converge á distribución derivada parcial de T respecto de tal multi-índice, isto é, á distribución $D^p T$.*

Demostración. É sinxela. Supoñamos por simplicidade $n = 1$ e $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converxente a T . Temos entón que

$$\langle T'_j, \varphi \rangle = -\langle T_j, \varphi' \rangle \rightarrow -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle. \quad \square$$

Un exemplo doado pero esencial

Sexa $H(x)$ a función de Heaviside; é dicir, $H(x)$ é a función definida como:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Daquela, para calquera función test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos que:

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle; \end{aligned}$$

de onde se segue que a derivada distribucional da función de Heaviside (que é unha función descontinua) é a mesmísima δ de Dirac.

Por outra parte, se consideramos a función rampa, definida como:

$$\text{ramp}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ x, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

temos que a derivada distribucional de tal función coincide con $H(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \text{ramp}', \varphi \rangle &= -\langle \text{ramp}, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \text{ramp}(x) \varphi'(x) \\ &= -\int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx = -x\varphi(x) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle H, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Antes de rematar dous comentarios. Primeiro, lembrar que, dadas dúas funcións $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, a función $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definida para case todo $x \in \mathbb{R}^n$ como

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) dt,$$

é a convolución de f e g . Dadas agora dúas distribucións S e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, cando menos unha de soporte compacto, podemos definir entón de maneira consistente coa operación anterior, a distribución convolución de S e T , notada como $S * T$.

Tal operación, xunto coa δ de Dirac, é fundamental na teoría das distribucións, proba delo é a seguinte proposición.

Proposición 11. *Sexan $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $p \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, tense logo:*

1. $D^p(S * T) = D^p S * T = S * D^p T$, 3. $D^p T = D^p \delta * T = D^p T * \delta$,
2. $T = T * \delta$, 4. $T(x - a) = \delta(x - a) * T(x)$.

Dicir finalmente que para o estudo das ecuacións en derivadas parciais é especialmente interesante poder definir a transformada de Fourier dunha distribución, mais para elo cómpre falar das distribucións schwartzianas, que se definen substituíndo a condición de soporte compacto en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ por unha condición máis lixeira.

Bibliografía

- [1] Schwartz, L. (1956). *Théories élémentaires de distribution*, Centre de Documentation Universitaire.
- [2] Schwartz, L. (1956). *Convolution*, Centre de Documentation Universitaire.
- [3] Schwartz, L. (1956). *L'Integrale de Fourier*, Centre de Documentation Universitaire.
- [4] Richards, J. I. e Youn, H. K. (1990). *Theory of distributions: a non technical introduction*, Cambridge University Press.

Introdución á teoría espectral: desigualdades integrais de Wirtinger

Lorena Saavedra López

Departamento de Análise Matemática

6 de novembro de 2013

Desigualdades de tipo Wirtinger

As desigualdades de tipo Wirtinger son desigualdades da forma seguinte $\|f\|_p \leq C(p, q, n) (b - a)^{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f^{(n)}\|_q$, con $C(p, q, n)$ unha constante que se tratará que sexa a menor posible e co expoñente $n - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ elixido de forma que a desigualdade sexa válida ó cambiar o intervalo $[a, b]$. f será unha función a que se lle imponen certas condicións para que existan estas desigualdades, xa que a función $f \rightarrow f^{(n)}$ non é inxectiva.

Desigualdade de Wirtinger

Unha das desigualdades máis coñecidas deste tipo, de feito é a que lle da o nome a estas desigualdades, é a desigualdade de Wirtinger.

Proposición 1. *Sexa $f \in H^1(0, 2\pi)$ unha función de período 2π , tal que $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Entón*

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx,$$

dándose a igualdade se, e só se, existen constantes reais, A e B tales que $f(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$.

Esta desigualdade próbase directamente usando a función $g(x) = f(x + \pi) - f(x)$ e tendo en conta as condicións de contorno e de regularidade de f .

Introdución á teoría espectral

Outras desigualdades deste tipo aparecen ó desenvolver a teoría espectral. O problema espectral sería do tipo: achar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os que existe un $w \in V$, un subespazo do subespazo de Hilbert H non identicamente nulo que satisfaga o problema $f(w) = \lambda w$. Vexamos ónde e cómo aparece a teoría espectral.

A ecuación da calor

Sexa $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conxunto aberto acotado con fronteira, Γ , C^1 a trozos. Para todo $t > 0$, defínense $Q_T = \Omega \times [0, T]$ e $\Sigma_T = \Gamma \times [0, T]$. Sexan as funcións dadas $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$.

O problema consiste en atopar unha función $u: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = f \quad \text{en } \Omega,$$

sendo $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ o operador de Laplace respecto á variable espacial. Débese verificar a seguinte condición de contorno

$$u(x, t) = 0 \quad (x, t) \in \Sigma_T,$$

e ademais, tamén tense que satisfacer a condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Para resolver o problema utilízase a técnica de separación de variables. Suponse, en principio, que $f = 0$ e ignoramos a condición inicial. Así búscase unha solución da forma $u(x, t) = w(x) \phi(t)$.

Chegamos á seguinte EDO que sempre terá solución en \mathbb{R}

$$\phi'(t) = \lambda \phi(t), \quad t \in \Omega, \quad \phi(t) = c e^{-\lambda t},$$

sendo $c \in \mathbb{R}$ unha constante arbitraria.

Tendo en conta as condicións de contorno tamén chegamos ó problema espectral.

Debemos atopar os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os que existe unha función $w \in H_0^1(\Omega)$ non idénticamente nula verificando

$$-\Delta w = \lambda w \quad \text{en } \Omega \quad \text{e} \quad w = 0 \quad \text{en } \Gamma.$$

Se existe esa función w sería, por definición, unha función propia relativa ó valor propio λ . Isto é o que se coñece como Problema Espectral.

Tendo en conta, agora, a fórmula de Green, aplicada á autofunción $w \in C^2(\Omega)$, como $v \in H_0^1(\Omega) \subset C^1(\Omega)$ e dado que $v = 0$ en Γ , por ser $v \in H^1(\Omega)$, obtense

$$\int_{\Omega} \Delta w v \, dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial w}{\partial \nu} \, ds_x - \int_{\Omega} (\Delta w, \Delta v) \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \, dx.$$

Polo que a formulación variacional do problema espectral consiste en buscar os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os que existe unha función $w \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \lambda \int_{\Omega} w v \, dx.$$

De aquí, se tomamos $v = w$, deducimos que $\lambda > 0$ xa que se cumpre

$$0 < \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 \, dx = \lambda \int_{\Omega} w^2 \, dx.$$

Traballando análogamente co problema das ondas.

Dadas as funcións: $u_0, u_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, buscamos unha función $u: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ que sexa solución da ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{en } Q_T,$$

coa condición de contorno $u(x, t) = 0$ en Σ_T e coas condicións iniciais $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$, $x \in \Omega$.

Chégase á formulación variacional do problema espectral asociado, que consiste en achar os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os que existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \lambda \int_{\Omega} w v dx.$$

Agora que xa se viu como aparece o problema espectral, imos tratar de caracterizar os autovalores.

Definición 2. *A aplicación bilinear $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, sendo V un subespazo do espazo de Hilbert, H , dise V -elíptica se existe $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ para todo $v \in V$.*

Teorema 3. *Supoñamos que a inclusión canónica de V en H é compacta e a aplicación bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica e V -elíptica. Entón os valores propios do problema*

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V,$$

forman unha sucesión crecente que tende a infinito $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$ e existe unha base hilbertiana ortonormal de H formada por vectores propios tales que

$$\forall v \in V, \quad a(w_m, v) = \lambda_m(w_m, v), \quad m = 1, 2, \dots$$

Ademais, a sucesión $(\lambda_m^{-1/2} w_m)$ forma unha base de Hilbert ortonormal do espazo V para o produto escalar $a(\cdot, \cdot)$.

Tendo en conta que (w_m) é base de Hilbert de H e $(v_m) = (\lambda^{1/2} w_m)$ é base de Hilbert de V co produto escalar $a(\cdot, \cdot)$. Para todo $v \in V$ tense $a(v, v) = \sum_{m \geq 1} a(v, v_m)^2 = \lambda^{-1} a(v, w_m)^2$. E como λ_m verifica o problema espectral para o autovector w_m tense que $a(v, v) = \sum_{m \geq 1} \lambda_m (v, w_m)^2$.

Cociente de Rayleigh

Defínese o cociente de Rayleigh co fin caracterizar os valores propios da seguinte maneira:

$$\forall v \in V, \quad v \neq 0, \quad \mathcal{R}(v) = \frac{a(v, v)}{|v|^2}.$$

Como os autovectores da base verifican o problema espectral tense $R(w_m) = \lambda_m$ se $m = 1, 2, \dots$. Para un $v \in V$ non nulo da forma $v = \sum_{m \geq 1} \alpha_m w_m$ chégase a

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\sum_{i \geq 1} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i \geq 1} \alpha_i^2} \geq \lambda_1,$$

Obtendo así unha caracterización para o primeiro autovalor: $\lambda_1 = \min_{v \in V, v \neq 0} \mathcal{R}(v)$. Sexa $V_m^\perp = \{v \in V : a(v, w_i) = 0, 1 \leq i \leq m\} = \{v \in V, (v, w_i) = 0, 1 \leq i \leq m\}$ sendo V_m o subespazo xerado polos primeiros m autovalores da base. Teriamos agora para un $v \in V_{m-1}^\perp$ a seguinte definición do cociente de Rayleigh

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\sum_{i \geq m} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i \geq m} \alpha_i^2} \geq \lambda_m.$$

Desigualdade de Poincaré

O seguinte resultado será útil para probar a V -elípticidade en certos casos.

Teorema 4. *Sexa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aberto acotado. Hai unha constante $C(\Omega) > 0$ tal que*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Problema de Dirichlet

O problema de Dirichlet unidimensional $u''(x) + \lambda u = 0$ con condición de contorno $u(a) = u(b) = 0$ ten como autovalores $\lambda_m = \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2$, $m = 1, 2, \dots$

Usando a desigualdade de Poincaré vese a V -elípticidade da función.

$$\|v\|_{0,(a,b)} \leq C(a,b) \|v'\|_{0,(a,b)} = C(a,b) \sqrt{a(v,v)}.$$

Temos polo tanto o seguinte resultado.

Teorema 5. *Sexa $v \in H_0^1(a,b)$, é dicir, $v: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ unha función absolutamente continua con $v' \in L^2(a,b)$ tal que $v(a) = v(b) = 0$. Tense a seguinte desigualdade*

$$\int_a^b (v(x))^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b (v'(x))^2 dx.$$

Problema de Neumann

Sexa agora $V = H^1(\Omega)$ consideramos o problema consistente en buscar os $\lambda \in \mathbb{R}$ para os que existe $u \neq 0$ tales que: $-\Delta u = \lambda u$ en Ω e $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ en Γ .

Temos a forma bilinear que se ve que non é V -elíptica

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x) \frac{\partial v}{\partial t}(x) dx.$$

Para todo $\bar{\lambda} > 0$ definimos $\bar{a}(u, v) = a(u, v) + \bar{\lambda}(u, v)$ que será V -elíptica

$$\bar{a}(v, v) = a(v; v) + \bar{\lambda} \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq \min \{1, \bar{\lambda}\} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Existe unha sucesión de autovalores μ_m verificando $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$. Nótese que os autovalores de $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ son unha translación dos de $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(u, v) + \bar{\lambda}(u, v) = \bar{a}(u, v) = \mu(u, v), \quad a(u, v) = (\mu - \bar{\lambda})(u, v).$$

Entón a sucesión de autovalores λ_m existe e verifica $-\bar{\lambda} < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \quad \forall \bar{\lambda} > 0$.

Restrinxímonos agora ó caso 1-dimensional. Tense o problema $u''(x) = -\lambda u$ tal que $u'(a) = u'(b) = 0$.

Os autovalores λ que satisfan o problema son da forma $\lambda_{m+1} = \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2$, para $m = 0, 1, 2, \dots$.

Por definición cúmprese $\lambda_1 = 0 = \inf_{v \in H^1(a,b), v \neq 0} \frac{\int_a^b (v'(x))^2 dx}{\int_a^b (v(x))^2 dx}$.

Sabemos, pola caracterización dos autovalores a partir do cociente de Rayleigh, que

$$\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 = \inf_{v \in H^1(a,b), v \neq 0, v \in V_1^\perp} \frac{\int_a^b (v'(x))^2 dx}{\int_a^b (v(x))^2 dx},$$

sendo

$$V_1^\perp = \left\{ v \in H_0^1(a, b) : \int_a^b v(x) \cdot 1 dx = 0 \right\}.$$

Podemos enunciar, agora o seguinte resultado para o caso 1-dimensional.

Teorema 6. *Sexa $v \in H^1(a, b)$ tal que $v'(a) = v'(b) = 0$ e $\int_a^b v(x) dx = 0$, entón*

$$\int_a^b (v(x))^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b (v'(x))^2 dx.$$

Apoiándonos neste resultado poderase probar o seguinte resultado de existencia de solución.

Teorema 7. *Sexa $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homeomorfismo crecente tal que $\phi(0) = 0$. Cumprindo a seguinte condición: existe unha constante $K > 0$ tal que para todo $u, v \in \mathbb{R}$ se verifica*

$$(\phi(u) - \phi(v)) (u - v) \geq K (u - v)^2.$$

Asumindo $M \in \left(-\infty, \frac{K\pi^2}{(b-a)^2}\right)$, entón, para calquera $\sigma \in L^1(a, b)$, o problema

$$-\frac{d}{dt}(\phi \circ u')(t) = M u(t) + \sigma(t), \quad u'(a) = u'(b) = 0,$$

ten ó menos unha solución.

Problemas de cuarta orde

Consideramos o problema espectral que modeliza o desprazamento dunha ponte coas vigas suxeitas respecto ó equilibrio:

$$\begin{aligned}u^{(4)}(x) &= \lambda u(x), \\u(a) &= u(b) = 0, \\u'(a) &= u'(b) = 0.\end{aligned}$$

Consideramos o espazo $V = \{v \in H^2(a, b) : v(a) = v(b) = 0, v'(a) = v'(b) = 0\}$. Próbase a V -elípticidade da función, calcúlanse os autovalores e chégase ó seguinte resultado.

Teorema 8. *Sexa u unha función de clase $H^2(a, b)$, cumprindo $u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0$ tense entón*

$$\int_a^b (u(x))^2 dx \leq \frac{(b-a)^4}{\mu_0^4} \int_a^b (u''(x))^2 dx,$$

sendo μ_0 a menor solución positiva da ecuación $\cos(\mu) \cdot \cosh(\mu) = 1$.

Para o problema que modeliza o desprazamento vertical dunha ponte colgante

$$\begin{aligned}u^{(4)}(x) &= \lambda u(x), \\u(a) &= u(b) = 0, \\u''(a) &= u''(b) = 0.\end{aligned}$$

tómase o espazo $V = \{v \in H^2(a, b) : v(a) = v(b) = 0, v''(a) = v''(b) = 0\}$.

Chégase ó resultado seguinte:

Teorema 9. *Sexa u unha función de $H^2(a, b)$ tal que $u(a) = u(b) = u''(a) = u''(b) = 0$. Entón tense*

$$\int_a^b (u(x))^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^4 \int_a^b (u''(x))^2 dx.$$

Combinando as condicións de contorno chégase a problemas mixtos.

Corolario 10. *Sexa u unha función de clase $H^2(a, b)$ cumprindo $u(a) = u(b) = u'(a) = u''(b) = 0$ entón*

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq \left(\frac{2(b-a)}{\pi}\right)^4 \int_a^b (u''(x))^2 dx.$$

Para probar este resultado faise unha extensión par respecto á recta $x = a$ e aplícaselle o resultado anterior no intervalo $[2a - b, b]$. Facendo outra serie de combinacións chégase a outros resultados deste tipo.

Teoría de campos Lagrangiana para un fibrado

$$\pi : E \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Lucía Búa Devesa

Departamento de Geometría y Topología

27 de noviembre de 2013

El objetivo de este resumen es dar una descripción geométrica de la Teoría de Campos Lagrangiana considerando una fibración $E \rightarrow \mathbb{R}^k$, donde E es una variedad $(k+n)$ -dimensional.

Las herramientas básicas para este desarrollo son: el fibrado de jets de primer orden, campos de k -vectores, SOPDEs (sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden) y la 1-forma S_{dx^α} definida en $J^1\pi$ para cada 1-forma en \mathbb{R}^k , véase [8].

Preliminares

Campos de k -vectores

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en una variedad M puede ser geoméricamente descrito como un campo de vectores en M . Del mismo modo, un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en M puede ser descrito geoméricamente como un campo de k -vectores en M , para algún $k > 1$.

Denotemos por $T_k^1 M$ la suma de Whitney $TM \oplus \dots \oplus TM$ de k copias de TM y $\tau_M : T_k^1 M \rightarrow M$ la proyección canónica.

Definición 1. *Un campo de k -vectores en una variedad arbitraria M es una sección $X : M \rightarrow T_k^1 M$ de la proyección canónica $\tau_M : T_k^1 M \rightarrow M$.*

Cada campo de k -vectores X define una familia de k campos de vectores $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ proyectando X sobre cada factor; esto es, $X_\alpha = \tau_\alpha \circ X$, donde $\tau_\alpha : T_k^1 M \rightarrow TM$ es la proyección canónica sobre TM de la α -ésima copia de $T_k^1 M$.

Definición 2. *Una sección integral del campo de k -vectores $X = (X_1, \dots, X_k)$, pasando por un punto $x \in M$, es una aplicación $\psi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$, definida en algún entorno abierto U de $0 \in \mathbb{R}^k$, tal que*

$$\psi(0) = x, \quad \psi_*(x) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_x \right) = X_\alpha(\psi(x)) \in T_{\psi(x)} M, \quad \forall x \in U, \quad 1 \leq \alpha \leq k. \quad (1)$$

Un campo de k -vectores $X = (X_1, \dots, X_k)$ en M es integrable si hay secciones integrales pasando por cada punto de M .

Por la Definición 2 deducimos que ψ es una sección integral de $X = (X_1, \dots, X_k)$ si y sólo si ψ es una solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden:

$$X_\alpha^i(\psi(x)) = \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial x^\alpha} \right|_x, \quad 1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq \dim M,$$

donde $X_\alpha = X_\alpha^i \partial / \partial y^i$ están en un sistema de coordenadas (U, y^i) en M , e $y^i \circ \psi = \psi^i$.

Para un campo de k -vectores $X = (X_1, \dots, X_k)$ en M se requiere la condición de integrabilidad $[X_\alpha, X_\beta] = 0, \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, k\}$.

La geometría del fibrado de jets

Sea $\pi: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ un fibrado, donde E es una variedad $(k+n)$ -dimensional, y ϕ una sección de π :

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^k &\rightarrow E \\ (x^\alpha) &\rightarrow (x^\alpha, \phi^i). \end{aligned}$$

Definición 3. Dos secciones locales ϕ, ψ de π se llaman 1-equivalentes en $x \in \mathbb{R}^k$ si:

$$\phi(x) = \psi(x), \quad \left. \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\alpha} \right|_x = \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial x^\alpha} \right|_x, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq k$$

para algún sistema de coordenadas adaptadas (x^α, q^i) en un entorno de $\phi(x)$.

La clase de equivalencia que contiene a ϕ se llama 1-jet de ϕ en x y se denota por $j_x^1 \phi$. El conjunto de todos los 1-jets de secciones de π tiene una estructura natural de variedad diferenciable:

$$J^1 \pi = \left\{ j_x^1 \phi: x \in \mathbb{R}^k, \phi \text{ sección de } \pi \right\}.$$

Si (x^α) son coordenadas locales en \mathbb{R}^k y (x^α, q^i) en E , consideramos las coordenadas estándar de jets $(x^\alpha, q^i, v_\alpha^i)$ en $J^1 \pi$, tal que

$$x^\alpha(j_x^1 \phi) = x^\alpha(x) = x^\alpha, \quad q^i(j_x^1 \phi) = q^i(\phi(x)), \quad v_\alpha^i(j_x^1 \phi) = \left. \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\alpha} \right|_x.$$

Endomorfismos verticales

Cada 1-forma $dx^\alpha, 1 \leq \alpha \leq k$, define un campo de tensores canónico S_{dx^α} en $J^1 \pi$ de tipo $(1,1)$, véase Saunders [8], cuya expresión local es la siguiente

$$S_{dx^\alpha} \equiv (dq^i - v_\beta^i dx^\beta) \otimes \frac{\partial}{\partial v_\alpha^i}. \quad (2)$$

Estos campos de tensores se denominarán endomorfismos verticales.

SOPDEs

Ciertos SOPDEs pueden ser identificados con algún campo de k -vectores especial en la variedad $J^1\pi$, para algún $k > 1$.

Definición 4. *Un campo de k -vectores $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ en $J^1\pi$ se dice que es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE) si*

$$dx^\alpha(\Gamma_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad S_{dx^\alpha}(\Gamma_\beta) = 0, \quad \forall \alpha, \beta = 1 \dots k.$$

Por la Definición 4 y la expresión (2) de S_{dx^α} obtenemos que la expresión de un SOPDE $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ es la siguiente:

$$\Gamma_\alpha(x^\beta, q^i, v_\beta^i) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + v_\alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{\partial}{\partial v_\beta^i}, \quad 1 \leq \alpha \leq k, \quad (3)$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ son funciones en $J^1\pi$. Como consecuencia, deducimos que la familia de campos de vectores $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ son linealmente independientes.

Definición 5. *Sea $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ una sección de π , localmente dada por $\phi(x^\alpha) = (x^\alpha, \phi^i(x^\alpha))$, entonces la primera prolongación $j^1\phi$ de ϕ es la aplicación*

$$\begin{aligned} j^1\phi: \mathbb{R}^k &\longrightarrow J^1\pi \\ x &\longrightarrow j_x^1\phi \equiv \left(x^1, \dots, x^k, \phi^i(x^1, \dots, x^k), \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\alpha}(x^1, \dots, x^k) \right), \end{aligned}$$

para todo $\alpha = 1, \dots, k$ y para todo $x \in \text{Dom } \phi$.

Ahora caracterizaremos las secciones integrales de un SOPDE.

Proposición 6. *Sea $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ un campo de k -vectores integrable. Entonces las propiedades siguientes son equivalentes:*

- i) Γ es un SOPDE.
- ii) Las secciones integrales de Γ son prolongaciones de primer orden $j^1\phi$ de secciones ϕ de π .

Si $j^1\phi$ es una sección integral de un SOPDE Γ entonces ϕ se llama *solución de Γ* .

De (1) y (3) se deduce que ϕ es una solución de Γ si y solo si $q^i \circ \phi = \phi^i$ es una solución del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \Big|_x = \Gamma_{\alpha\beta}^i \left(x, \phi^i(x), \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\gamma} \right), \quad (4)$$

donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq \alpha, \beta \leq k$.

Las condiciones de integrabilidad para el sistema (4) requieren que la distribución k -dimensional inducida por el SOPDE Γ , $H_0 = \text{span}\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ sea integrable. La expresión local (3) para un SOPDE Γ_α muestra que $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = A_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma$ si y solo si $A_{\alpha\beta}^\gamma = 0$. Además, para un SOPDE Γ_α , asumiremos las siguientes condiciones de integrabilidad:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \Gamma_{\beta\alpha}^i, \quad \Gamma_\alpha(\Gamma_{\beta\gamma}^i) = \Gamma_\beta(\Gamma_{\alpha\gamma}^i),$$

las cuales son equivalentes a la condición $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = 0$ para todo $\alpha, \beta = 1, \dots, k$.

Teoría de campos Lagrangiana

1-formas de Poincarè–Cartan.

Un Lagrangiano $L: J^1\pi \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $J^1\pi$. Definimos las 1-formas de Poincarè–Cartan Θ_L^α en $J^1\pi$ correspondiente al Lagrangiano L como las 1-formas

$$\Theta_L^\alpha = Ldx^\alpha + dL \circ S_{dx^\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq k,$$

y cuya expresión local es

$$\Theta_L^\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} (dq^i - v_\beta^i dx^\beta) + Ldx^\alpha.$$

Observemos que el hecho de trabajar con un fibrado sobre \mathbb{R}^k nos permite introducir estas 1-formas.

Ecuaciones de campo de Euler–Lagrange

Sea $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ un SOPDE integrable. Por un cálculo directo, utilizando que $\Gamma_{\alpha\beta}^i = \Gamma_{\beta\alpha}^i$, obtenemos

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} \Theta_L^\alpha = dL + \left(\Gamma_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) (dq^i - v_\beta^i dx^\beta). \quad (5)$$

y prueba el siguiente lema.

Lema 7. *Sea $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ un SOPDE integrable que satisface*

$$\Gamma_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si $j^1\phi$ es una sección integral de Γ entonces ϕ es solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha \partial v_\alpha^i} \Big|_{j_x^1\phi} + \frac{\partial \phi^j}{\partial x^\alpha} \Big|_x \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_\alpha^i} \Big|_{j_x^1\phi} + \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \Big|_x \frac{\partial^2 L}{\partial v_\beta^j \partial v_\alpha^i} \Big|_{j_x^1\phi} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{j_x^1\phi}, \quad (6)$$

donde $x \in \text{Dom } \phi$. Las ecuaciones (6) se escriben normalmente como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_x \left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} \circ j^1\phi \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{j_x^1\phi}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

De (5) deducimos la siguiente proposición.

Proposición 8. *Sea Γ un SOPDE integrable entonces,*

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} \Theta_L^\alpha = dL \quad (7)$$

si y solo si

$$\Gamma_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 9. *Sea Γ un SOPDE integrable; si $j^1\phi$ es una solución para (7), esto es $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} \Theta_L^\alpha(j^1\phi) = dL(j^1\phi)$, entonces ϕ es solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange.*

Teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos probar un teorema que nos da una nueva formulación de campo Lagrangiano para un fibrado $E \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Teorema 10. *Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ un campo de k -vectores en $J^1\pi$ tal que*

$$dx^\alpha(X_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad i_{X_\alpha} \Omega_L^\alpha = (k-1)dL, \quad (8)$$

donde $\Omega_L^\alpha = -d\Theta_L^\alpha$ son las 2-formas de Poincaré–Cartan.

1. *Si L es regular, entonces $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ es un SOPDE. Si \mathbf{X} es integrable y $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow E$ es una solución de Γ entonces ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange (6).*
2. *Ahora, si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ es integrable y $j^1\phi$ es una sección integral de \mathbf{X} entonces ϕ una solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange (6).*

Por esta razón (8) puede verse como la versión geométrica de las ecuaciones de Euler–Lagrange.

Ejemplo 11. [7] *La ecuación de Klein–Gordon que actúa sobre el espacio–tiempo 4–dimensional es,*

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (9)$$

donde m es la masa de la partícula sobre la cual actúa el campo y \square es el operador dado por

$$\square\phi = \text{div grad}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial(x^4)^2}.$$

Consideremos el fibrado $\pi: E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, con coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4, q) en E y $(x^1, x^2, x^3, x^4, q, v_1, v_2, v_3, v_4)$ en $J^1\pi$. Y sea L el Lagrangiano $L: J^1\pi \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L(x^1, x^2, x^3, x^4, q, v^1, v^2, v^3, v^4) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - v_4^2) - \frac{1}{2}m^2q^2.$$

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ un campo de 4-vectores verificando (8), entonces X_α es un SOPDE y está localmente dado por $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial q} + X_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v_\beta}$, donde $X_{\alpha\beta}$ son unas funciones en $J^1\pi$ verificando

$$X_{11} - X_{22} - X_{33} - X_{44} = -mq^2. \quad (10)$$

Si $j^1\bar{\phi}$ es una sección integral del SOPDE \mathbf{X} , donde $\bar{\phi}(x) = (x, \phi(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$ es una sección de π , entonces evaluando (10) en $j_x^1\bar{\phi}$, $x \in \mathbb{R}^4$ obtenemos las ecuaciones de Klein–Gordon (9).

Observación 12. Para $k = 1$, esto es la fibración $E \rightarrow \mathbb{R}$ y obtenemos la ecuación dinámica $i_\Gamma d\Theta = 0$, donde Γ es una ecuación diferencial de segundo orden SODE, véase [2, 3].

En el caso $E = \mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, las ecuaciones (8) pueden ser escritas como las ecuaciones dinámicas, estas ecuaciones coinciden con la formulación cosimpléctica de la Mecánica no-autónoma, véase [1, 5].

Observación 13. Si consideramos el fibrado trivial $E = \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ entonces $J^1\pi$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$. En la variedad $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ se realiza el formalismo k -cosimpléctico, véase [4], que es un caso particular del desarrollado en el Teorema 10.

Bibliografía

- [1] Cantrijn, F., de Leon, M., Lacomba, E. A. (1992). *Gradient vector fields on cosymplectic manifolds*, Journal of Physics A, **25**, pp. 175–188.
- [2] Cariñena, J. F., Fernández–Núñez, J. (1993). *Geometric Theory of Time-Dependent Singular Lagrangians*, Fortschritte der Physik, **41** 6, pp. 517–552.
- [3] Cariñena, J. F., Fernández–Núñez, J., Martínez, E. (1992). *Noether’s Theorem in Time-Dependent Lagrangian Mechanics*, Reports on Mathematical Physics, **31** 2, pp. 189–203.
- [4] de León, M., Merino, E., Salgado, M. (2001). *k-cosymplectic manifolds and Lagrangian field theories*, Journal of Mathematical Physics, **42**(5), pp. 2092–2104.
- [5] de León, M., Rodrigues, P. R. (1989). *Methods of differential geometry in analytical mechanics*, North–Holland Mathematics Studies.
- [6] Olver, P. J. (1986). *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics.
- [7] José, J. V., Saletan, E. J. (1988). *Classical Dynamics, A Contemporary Approach*, Cambridge University Press.
- [8] Saunders, D. J. (1989). *The Geometry of Jet Bundles*, London Mathematical Society Lecture Note Series.

Teoría de Galois infinita

Ana Mascato García

Departamento de Álgebra

4 de diciembre de 2013

Introducción

De la teoría clásica de extensiones de cuerpos conocemos un resultado fundamental: *dada una extensión finita de Galois y dado su grupo de Galois existe una correspondencia biyectiva (un par de anti-isomorfismos inversos de retículos) entre las subextensiones intermedias y los subgrupos del grupo de Galois.*

Vamos a motivar el porqué tenemos que dar una generalización de este resultado para extensiones infinitas y diferenciar los resultados que se deducen directamente de él y para los que es necesario introducir un nuevo concepto, el de grupo profinito.

Motivación

Ejemplo 1. Consideramos $F = F_p$ el cuerpo finito de p elementos, $G = G(\tilde{F}|F)$ el grupo de Galois absoluto de F (\tilde{F} es la clausura algebraica de F) y $\langle \varphi \rangle (\cong \mathbb{Z})$ el subgrupo de G generado por $\varphi \in G$, el automorfismo de Frobenius: $\alpha^\varphi = \alpha^p$, $\alpha \in \tilde{F}$. De la teoría básica de cuerpos finitos sabemos que cada extensión finita de F es cíclica, y que su grupo de Galois está generado por el automorfismo de Frobenius φ . Por lo tanto $\tilde{F}^{\langle \varphi \rangle} = F = \tilde{F}^G$. Probemos que $\langle \varphi \rangle \subsetneq G$.

Sea $E \subsetneq \tilde{F}$ una subextensión infinita (por ejemplo, $E = \cup F_{p^{2^n}}$) y $\sigma = \varphi^n \in \langle \varphi \rangle \cap G(\tilde{F}|E)$. Así $\alpha = \alpha^\sigma = \alpha^{p^n}$ para cada $\alpha \in E$. Puesto que E es infinito, el polinomio $x^{p^n} - x$ debe ser cero, es decir, $n = 0$. Por lo tanto $\langle \varphi \rangle \cap G(\tilde{F}|E) = 1$, $\langle \varphi \rangle \subsetneq G$.

Así, con este ejemplo, vemos que el resultado de la teoría clásica falla cuando consideramos extensiones infinitas, pues hay un “exceso” de subgrupos. (Recuérdese que el grupo de Galois de una extensión $F|k$ es el siguiente subgrupo del grupo de automorfismos de F : $G(F|k) = \{\sigma \in \text{Aut}(F) / \sigma|_k = 1_k\}$). Para reestablecer la biyección en el caso infinito tenemos que restringir los subgrupos y para ello vamos a dotar al grupo de Galois de una topología.

El Teorema Fundamental de la teoría de Galois infinita

Por la teoría general, si tenemos $K|k$ una extensión de Galois de grupo G y F_1, F_2 dos subextensiones finitas de Galois, entonces $G(K|F_1) \cap G(K|F_2) \supset G(K|F_1F_2)$ y F_1F_2 es también una extensión finita de Galois.

Por lo tanto, la familia

$$\{G(K|F) : F|k \text{ subextensión finita de Galois de } K|k\}$$

constituye una base de entornos de 1 para una topología lineal de índice finito (es una topología formada por subgrupos de índice finito y la base de entornos de cualquier elemento distinto de 1 se obtiene por traslación) del grupo de Galois G , llamada *topología de Krull*. Veamos algunas propiedades del grupo de Galois dotado con esta topología:

Proposición 2. *Para una extensión de Galois de grupo G se tiene:*

- a) G discreto $\Leftrightarrow K|k$ finita.
- b) H subgrupo abierto de $G \Leftrightarrow H$ subgrupo cerrado de G y $(G : H) < \infty$.
- c) Si $F|k$ es una subextensión, son equivalentes:
 - i) $F|k$ es finita,
 - ii) $(G : G(K|F)) < \infty$,
 - iii) $G(K|F)$ es abierto de G .

Siempre que trabajamos con topologías, es interesante saber como se restringen a subespacios contenidos en el espacio total. En nuestro caso, para una subextensión F , la topología de Krull de $G(K|F)$ es la relativa de la de G , y los subgrupos (respectivamente normales) abiertos de $G(K|F)$ son, exactamente, los $G(K|F) \cap U$, U subgrupo (respectivamente normal) abierto de G .

Entonces, con estos ingredientes, podemos enunciar el Teorema Fundamental de la teoría de Galois infinita:

Teorema 3. *Sea $K|k$ una extensión de Galois de grupo G . Para un subgrupo H de G se tiene $G(K|K^H) = Cl(H)$. Así tenemos definidos anti-isomorfismos inversos de retículos entre las subextensiones de $K|k$ y los subgrupos cerrados de G :*

$$\text{Sub}(K|k) \xrightleftharpoons[R]{S} \text{Cl. Sub}(G) .$$

Veamos ahora algunas consecuencias directas del Teorema 3:

Corolario 4. *Las subextensiones finitas (finitas de Galois) de $K|k$ se corresponden a los subgrupos abiertos (respectivamente normales abiertos) de G .*

Corolario 5. *Sea $K|k$ una extensión de Galois de grupo G , (F_i) una familia de subextensiones de $K|k$ y (H_i) una familia de subgrupos de G .*

- a) $G(K \cap F_i) = Cl \langle G(K|F_i), i \rangle$.
- b) Si cada H_i es cerrado en G , entonces $K^{\cap H_i} = \prod K^{H_i}$.

Corolario 6. Si $K|k$ es una extensión de Galois de grupo G y F una subextensión normal de $K|k$ entonces la topología de Krull de $G(F|k)$ es la inducida por la de Krull de G vía $G \rightarrow G(F|k)$. Por lo tanto este homomorfismo es abierto, y se tiene un isomorfismo de grupos topológicos $G/G(K|F) \cong G(F|k)$.

Grupos profinitos

Para obtener más resultados acerca de las extensiones de Galois infinitas, hay que demostrar que el grupo de Galois es profinito. Un *grupo profinito* es un grupo topológico límite inverso de un sistema inverso de grupos finitos, estos con la topología discreta: $G = \varprojlim G_i$. Aclaremos los términos de la definición, para los cuales necesitamos un poco de álgebra categórica:

- Una *categoría* \mathcal{C} está constituida por una clase de objetos A, B, \dots , una clase de morfismos entre objetos, $f: A \rightarrow B$ y una operación externa de morfismos $A \rightarrow B \rightarrow C$ tales que:
 1. Cada $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) := \{\text{morfismos } f: A \rightarrow B\}$ es un conjunto.
 2. La operación externa es asociativa y tiene elemento neutro $1_A: A \rightarrow A$, para cada objeto A .
- Un *functor* $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{C}' es un par de aplicaciones, una entre las respectivas clases de objetos y otra entre las de morfismos, tal que:
 1. $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(FA, FB)$,
 2. F conserva la composición de morfismos y el elemento neutro.
- Un *esquema* (o categoría pequeña) es una categoría I cuya clase de objetos es un conjunto.
- Un *diagrama* de una categoría \mathcal{C} sobre un esquema I es un functor $F: I \rightarrow \mathcal{C}$.
- Se llama *límite de un diagrama* $F: I \rightarrow \mathcal{C}$, a un par $\lim F = (A; \varphi_i: A \rightarrow F_i, i \in I)$ compatible en el sentido siguiente: Si $\alpha: i \rightarrow j$ es un morfismo en I , entonces $F(\alpha)\varphi_i = \varphi_j$, de forma que sea “universal final” para esta configuración. En términos más explícitos, si $(B; \psi_i: B \rightarrow F_i, i \in I)$ es otro sistema compatible, entonces existe un único morfismo $h: B \rightarrow A$ tal que $\varphi_i h = \psi_i, i \in I$:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{h} & A = \lim F \\
 & \searrow \psi_i & \downarrow \varphi_i \\
 & & F_i \\
 & \searrow \psi_j & \downarrow \varphi_j \\
 & & F_j \\
 & & \xrightarrow{F(\alpha)}
 \end{array}$$

- Un *conjunto filtrante o dirigido* es un conjunto preordenado I en el que cada par de elementos está acotado superiormente.

- Un *sistema inverso o proyectivo* de una categoría \mathcal{C} es un diagrama $(A_i): I^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ donde I es filtrante (es decir, el funtor es contravariante). Explícitamente, es una familia doble $(A_i, \varphi_{ij}: A_i \rightarrow A_j, i \geq j)$ en \mathcal{C} tal que si $i \geq j \geq k$, se tiene $\varphi_{jk}\varphi_{ij} = \varphi_{ik}$, y $\varphi_{ii} = 1_{A_i}$.
- El límite de un sistema inverso $(A_i)_{i \in I}$ de una categoría \mathcal{C} se llama *límite inverso o proyectivo*, y se denota por $\varprojlim A_i$.

Veamos a continuación algunos ejemplos concretos de grupos profinitos.

Ejemplo 7. $I = \mathbb{N} = (\mathbb{N}, \leq)$. El límite inverso del sistema de grupos abelianos finitos $(\mathbb{Z}/p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un grupo profinito que se denota

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n$$

y se llama grupo (anillo) de los enteros p -ádicos.

Ejemplo 8. $I = (\mathbb{N}, |)$. El sistema inverso es la familia de todos los grupos cíclicos finitos $(\mathbb{Z}/m)_{m > 0}$. Su límite inverso se denota

$$\hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim \mathbb{Z}/m.$$

Centrémonos ahora en las propiedades de estos grupos profinitos, de las cuales podremos deducir resultados de Teoría de Galois.

Proposición 9 (Primera caracterización). Sea $G = \varprojlim G_i$, un límite inverso de grupos discretos G_i . Se tiene:

- a) $G = \varprojlim G/U_i$, siendo $U_i = \ker(G \rightarrow G_i)$, y (U_i) es una base de entornos de G .
- b) Por lo tanto, para un grupo G son equivalentes:
 - i) G es profinito.
 - ii) G es límite inverso de un sistema inverso sobreyectivo (cada $\varphi_{ij}: G_i \rightarrow G_j$ es sobreyectiva) de grupos finitos.

En las propiedades básicas de los grupos profinitos está involucrado el concepto de completación de estructuras uniformes. Esencialmente es una generalización del proceso de construcción de \mathbb{R} usando el valor absoluto usual de \mathbb{Q} . Sin embargo, como los grupos de Galois no verifican, en general, el primer axioma de numerabilidad, necesitamos considerar filtros en lugar de sucesiones. Cada sucesión (x_n) de un espacio X da lugar al filtro $\mathcal{F} = \{s_n = \{x_i, i \geq n\}\}$. Por tanto decimos que un espacio uniforme es *completo* si cada filtro de Cauchy es convergente.

Proposición 10 (Segunda caracterización). Para un grupo G son equivalentes:

- i) G es profinito.
- ii) G es compacto y totalmente desconexo.
- iii) G es compacto y 1 es la intersección de todos sus entornos abiertos compactos.

iv) G es compacto y 1 es la intersección de todos los subgrupos normales distintos de G .

v) G es compacto, Hausdorff y lineal.

vi) G es completo respecto a una topología lineal de subgrupos de índice finito.

vii) G es lineal, posee una base de entornos de subgrupos normales de índice finito y, para cualquier tal base de entornos (U_i) , se tiene: $G = \varprojlim G/U_i$.

viii) G es la completación de un grupo con una topología lineal de subgrupos de índice finito.

Proposición 11. *Se tiene:*

a) Cada subgrupo cerrado H de un grupo profinito G es profinito. Además $H = \varprojlim H/(H \cap U)$, U subgrupo normal abierto de G .

b) Cada grupo cociente de un grupo profinito G por un subgrupo normal cerrado H es profinito. Además $G/H = \varprojlim G/HU$, U subgrupo normal abierto de G .

c) El producto directo de grupos profinitos es profinito.

d) El límite inverso de un sistema inverso de grupos profinitos es profinito.

Ahora estamos en condiciones de decir que el grupo de Galois de una extensión de Galois es profinito, luego verifica todas las propiedades de estos. Por consiguiente, de este hecho se obtienen los siguientes resultados:

Corolario 12. *Sea $K|k$ una extensión de Galois de grupo G y $F|k$ una extensión arbitraria. Se tiene un isomorfismo canónico (de grupos profinitos):*

$$G(KF|F) \cong G(K|K \cap F).$$

Corolario 13. *Si dos encajes $\sigma, \tau: K, F \rightarrow \Omega$ sobre k , Ω cuerpo algebraicamente cerrado, $K|k$ de Galois, coinciden en $K \cap F$, entonces admiten una extensión común a KF .*

Corolario 14. *Sea $K = \prod K_i$, compuesta de extensiones de Galois $K_i|k$ de grupos G y G_i , respectivamente. Entonces G es (isomorfo a) un subgrupo cerrado de $\prod G_i$. Si, además, $K_i \cap \prod_{i \neq j} K_j = k$ para cada i , entonces $G \cong \prod G_i$. Y recíprocamente.*

Por tanto, hemos conseguido adaptar numerosos resultados de la teoría de Galois clásica a teoría de Galois infinita separando los resultados que necesitan la hipótesis de que el grupo de Galois sea profinito de los que no lo necesitan. Además toda la teoría clásica es una particularización de esta, pues cuando estamos con extensiones finitas, el grupo de Galois es discretos, por lo que la topología de Krull es discreta lo que conlleva a la no distinción de los abiertos y cerrados. Nótese también que un grupo finito es profinito, pues es límite inverso de sí mismo.

Esta teoría tiene aplicación en teoría de números y teoría de cuerpos de clases, pues en estos dos ámbitos es habitual tener que trabajar con extensiones infinitas, por lo que es muy provechoso el estudio de las mismas, para poder aplicar después los resultados a teorías matemáticas con mayor recorrido.

Bibliografía

- [1] Atiyah, M. F. and MacDonald, I. G. (1989). *Introducción al álgebra conmutativa*. Reverté.
- [2] Lang, S. (1965). *Algebra*. Addison-Wesley.
- [3] MacLane, S. (1971). *Categories for the working mathematician*. Springer.
- [4] Milne, J. S. *Fields and Galois Theory* (v4.50). Disponible en www.jmilne.org.
- [5] Ribes, L. and Zalesski, P. (2010). *Profinite groups*. Springer.
- [6] Serre, J. P. (1979). *Local fields*. Springer.
- [7] Weiss, E. (1998). *Algebraic number theory*. New York Dover.

Simulación numérica de un problema térmico en elementos de acero durante un incendio

Ángel Rial Silva

Departamento de Matemática Aplicada

18 de diciembre de 2013

Introducción

La modelización y simulación numérica del campo de temperaturas en los elementos de un edificio durante un incendio es un tema muy importante en ingeniería civil. Saber cómo varía la temperatura y cómo ésta influye en la estructura son aspectos relevantes a la hora de determinar el tiempo de evacuación y el daño sufrido por un edificio.

Para modelar este problema es importante tener en cuenta la dependencia de los parámetros térmicos respecto de la temperatura, la transferencia de calor en la superficie por convección y radiación y el cambio de estructura cristalina que sufre el acero a altas temperaturas.

El modelo propuesto se resuelve numéricamente mediante técnicas de operadores maximales monótonos y un método de elementos finitos. El algoritmo resultante se validó con varios test académicos con solución analítica. En este trabajo, los resultados se comparan con los obtenidos con el método de cálculo simplificado introducido en el Eurocódigo (ver [1]).

Problema físico

Bajo ciertas condiciones especiales un sistema puede absorber o ceder calor sin variar su temperatura; los ejemplos más comunes son los de evaporación–condensación y fusión–solidificación. Sin embargo, existen otros cambios de estructura que pueden ocurrir en un sólido y que, generalmente, reflejan algún reagrupamiento de su estructura atómica o molecular con efectos similares a un cambio de fase. Este es el caso del acero Fe–C, que dependiendo del porcentaje de C presente en la aleación puede transformarse de perlita+cementita (Fe_3C) en austenita (γ) o en austenita(γ)+cementita(Fe_3C). Estos cambios de la microestructura del acero producen una singularidad en el calor específico que proponemos tener en cuenta por medio de una formulación en entalpía no lineal. Por esta razón, se propone modelar el proceso de cambio de microestructura de acero como un cambio de fase.

PALABRAS CLAVE: simulación numérica; austenización; elementos finitos.

Modelo matemático

Sea $(0, t_f]$ el intervalo de tiempo de interés y $\Omega \in \mathbb{R}^2$ el dominio computacional, que se supone suficientemente regular. Nuestro objetivo es calcular la temperatura absoluta $\theta(\mathbf{x}, t)$ en cada punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ y en cada tiempo $t \in (0, t_f]$.

Ecuación del calor

Una manera usual de modelar los cambios de fase en problemas térmicos es usando una formulación en entalpía (ver [4]). En este trabajo se propone emplear esta metodología para modelar el cambio de microestructura.

Para este propósito se considera la siguiente formulación en entalpía no isoterma para la temperatura en el dominio completo Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\theta(\mathbf{x}, t)) \nabla \theta(\mathbf{x}, t)) &= f(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, t_f], \\ h(\mathbf{x}, t) &= H(\theta(\mathbf{x}, t)) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, t_f], \end{aligned}$$

donde k es la conductividad térmica del metal, que depende de la temperatura, f es la densidad de fuente de calor y h es la entalpía por unidad de volumen. La función H se define para cada $r \in \mathbb{R}$ como:

$$H(r) = \begin{cases} \int_0^r \rho(s) c(s) ds, & \text{si } r < \theta_{la}, \\ \int_0^r \rho(s) c(s) ds + \frac{L_c}{\theta_{ua} - \theta_{la}} \int_{\theta_{la}}^r \rho(s) ds, & \text{si } \theta_{la} \leq r \leq \theta_{ua}, \\ \int_0^r \rho(s) c(s) ds + \frac{L_c}{\theta_{ua} - \theta_{la}} \int_{\theta_{la}}^{\theta_{ua}} \rho(s) ds, & \text{si } r > \theta_{ua}, \end{cases}$$

donde $\rho(s)$ es la densidad del material, $c(s)$ es su calor específico, L_c es el calor latente del cambio de microestructura por unidad de masa, θ_{la} es temperatura inicial de la transformación de ferrita a austenita y θ_{ua} es la temperatura a la cual toda la ferrita se ha transformado en austenita.

Condiciones de contorno

Se denota por Γ la frontera del dominio Ω , que se descompone como $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_R$, donde Γ_D y Γ_R denotan la parte de la frontera donde la temperatura o el flujo de calor son conocidos, respectivamente. La condición de contorno sobre Γ_R es:

$$k(\theta(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = q_0(\mathbf{x}, t) + \alpha_c (\theta_c(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, t)) + \alpha_r \left((\theta_r(\mathbf{x}, t))^4 - (\theta(\mathbf{x}, t))^4 \right).$$

Sobre Γ_D se considera la condición Dirichlet $\theta(\mathbf{x}, t) = \theta_D(\mathbf{x}, t)$.

Formulación en entalpía

Para completar el modelo matemático se considera sobre Ω la condición inicial $\theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x})$, que se introduce en el modelo como $h(\mathbf{x}, 0) = h_0 = H(\theta_0(\mathbf{x}))$. En resumen, el problema que debemos resolver es el siguiente.

Problema \mathcal{P}_θ : encontrar (θ, h) en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ en cada instante de tiempo $t \in (0, t_f]$ verificando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} - \text{Div}(k(\theta) \nabla \theta) &= f && \text{en } \Omega \times (0, t_f], \\ h &= H(\theta) && \text{en } \Omega \times (0, t_f], \\ \theta &= \theta_D && \text{sobre } \Gamma_D \times (0, t_f], \\ k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} &= q_0 + \alpha_c (\theta_c - \theta) + \alpha_r (\theta_r^4 - \theta^4) && \text{sobre } \Gamma_R \times (0, t_f], \\ h(0) &= h_0 = H(\theta_0) && \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Transformación de Kirchhoff

Para eliminar la no linealidad debido a la dependencia con la temperatura de la conductividad, se usa el cambio de variable de Kirchhoff. Esta técnica consiste en reemplazar la incógnita θ por una nueva variable $u = \beta(\theta)$:

$$\beta(r) = \int_0^r k(s) ds, \quad r \in \mathbb{R}.$$

De este modo el Problema \mathcal{P}_θ se escribe equivalentemente como sigue.

Problema \mathcal{P}_u : encontrar (u, h) para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$, y en cada instante de tiempo $t \in (0, t_f]$, verificando:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{en } \Omega \times (0, t_f], \quad (1)$$

$$h = (H \circ \beta^{-1})(u) \quad \text{en } \Omega \times (0, t_f], \quad (2)$$

$$u = u_D \quad \text{sobre } \Gamma_D \times (0, t_f], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= q_0 + \alpha_c (\theta_c - \beta^{-1}(u)) \\ &+ \alpha_r (\theta_r^4 - (\beta^{-1}(u))^4) \quad \text{sobre } \Gamma_R \times (0, t_f], \end{aligned} \quad (4)$$

$$h(0) = h_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (5)$$

donde $u_D = \beta(\theta_D)$.

Formulación variacional

Denotamos $H = L^2(\Omega)$ y $V = H^1(\Omega)$. Definimos el subespacio de V como: $V_0 = \{v \in V : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}$. Multiplicando la ecuación (1) por una función test $v \in V$, integrando sobre Ω , usando una fórmula de Green y teniendo en cuenta las

condiciones de contorno (3) y (4), se obtiene la siguiente formulación variacional del problema continuo.

Problema \mathcal{PV}_u : encontrar $u \in L^\infty(0, t_f; V)$, $h \in W^{1,\infty}(0, t_f; H)$, verificando para casi todo $t \in (0, t_f)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_R} \left(\alpha_c \beta^{-1}(u) + \alpha_r |\beta^{-1}(u)| (\beta^{-1}(u))^3 \right) v \, d\gamma \\ & = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_R} (q_0 + \alpha_c \theta_c + \alpha_r \theta_r^4) v \, d\gamma, \quad \forall v \in V; \quad h = (H \circ \beta^{-1})(u), \end{aligned}$$

con $u = u_D$ sobre Γ_D y $h(0) = h_0$ en Ω .

Resolución numérica

Discretización temporal

El Problema \mathcal{PV}_u se discretiza en tiempo mediante un esquema de Euler implícito como sigue.

Problema \mathcal{PV}^{n+1} : dados u^0 y h^0 por la condición inicial y asumiendo que u^n y h^n son conocidos por el paso de tiempo previo, encontrar $u^{n+1} \in H^1(\Omega)$ y $h^{n+1} \in L^2(\Omega)$ verificando:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} h^{n+1} v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_R} \left(\alpha_c \beta^{-1}(u^{n+1}) \right. \\ & + \alpha_r |\beta^{-1}(u^{n+1})| (\beta^{-1}(u^{n+1}))^3 \left. \right) v \, d\gamma = \int_{\Omega} f^{n+1} v \, dx + \int_{\Gamma_R} (q_0^{n+1} \\ & + \alpha_c \theta_c^{n+1} + \alpha_r (\theta_r^{n+1})^4) v \, d\gamma + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} h^n v \, dx, \quad \forall v \in V, \\ & h^{n+1} = (H \circ \beta^{-1})(u^{n+1}) \quad \text{en } \Omega, \quad u^{n+1} = u_D^{n+1} \quad \text{sobre } \Gamma_D. \end{aligned} \tag{6}$$

Formulación con multiplicadores de Lagrange

El cálculo de u^{n+1} y h^{n+1} , solución del Problema \mathcal{PV}^{n+1} , implica resolver un sistema de ecuaciones no lineales debido a la presencia de los operadores: $\mathcal{A} = H \circ \beta^{-1}$, $\mathcal{B} = \alpha_c \beta^{-1}$, $\mathcal{C} = \alpha_r |\beta^{-1}| (\beta^{-1})^3$. Para ello necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 1. Sea E un espacio de Hilbert y $\mathcal{G} : E \rightarrow E$ un operador maximal monótono se define:

- El operador perturbado de \mathcal{G} de parámetro $\omega \in \mathbb{R}^+$ como $\mathcal{G}^\omega = \mathcal{G} - \omega \mathcal{I}$, $u \in E$.
- La aproximación de Yosida de \mathcal{G}^ω de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$ como $\mathcal{G}_\lambda^\omega = (\mathcal{I} - \mathcal{J}_\lambda(\mathcal{G}^\omega)) / \lambda$.

Sea $p \in \mathcal{G}^\omega(u)$, con $u \in E$. En [3] se demuestra que si $\lambda\omega < 1$, entonces $p \in \mathcal{G}^\omega(u) \Leftrightarrow p = \mathcal{G}_\lambda^\omega(u + \lambda p)$. Para aplicar esta metodología a las no linealidades del

problema, introducimos los multiplicadores: $p = \mathcal{A}^\omega(u)$, $q = \mathcal{B}^\gamma(u)$, $r = \mathcal{C}^\nu(u)$, con $\omega, \gamma, \nu \in \mathbb{R}^+$ de modo que reescribimos la ecuación (6) como:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1} v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \cdot \nabla v \, dx + (\gamma + \nu) \int_{\Gamma_R} u^{n+1} v \, d\gamma \\ & = \int_{\Omega} f^{n+1} v \, dx + \int_{\Gamma_R} \left(q_0^{n+1} + \alpha_c \theta_c^{n+1} + \alpha_r (\theta_r^{n+1})^4 \right) v \, d\gamma \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} h^n v \, dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^{n+1} v \, dx - \int_{\Gamma_R} (q^{n+1} + r^{n+1}) v \, d\gamma, \quad \forall v \in V, \\ & h^{n+1} = (H \circ \beta^{-1})(u^{n+1}) \quad \text{en } \Omega, \quad u^{n+1} = u_D^{n+1} \quad \text{sobre } \Gamma_D, \end{aligned}$$

donde los multiplicadores se actualizan con las siguientes expresiones:

$$p^{n+1} = \mathcal{A}_\lambda^\omega(u^{n+1} + \lambda p^{n+1}), \quad q^{n+1} = \mathcal{B}_\xi^\gamma(u^{n+1} + \xi q^{n+1}), \quad r^{n+1} = \mathcal{C}_\zeta^\nu(u^{n+1} + \zeta r^{n+1}),$$

con $\nu, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^+$, tales que $\lambda\omega < 1$, $\gamma\xi < 1$, $\nu\zeta < 1$.

Discretización espacial

El problema anterior se discretiza mediante un método de elementos finitos de grado uno. El código resultante se denomina **FEMter** (ver [2]).

Test

Esta sección reproduce uno de los test que figuran en el Eurocódigo [1]. Se trata de calcular la temperatura de una viga de acero en forma de I con una losa de hormigón en la parte superior sometida a fuego estándar.

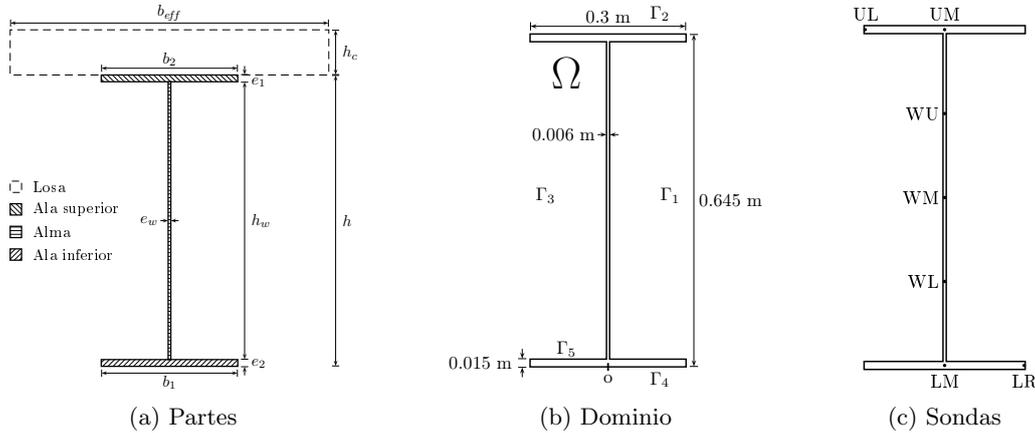
Para calcular la distribución de temperatura se resuelve el problema \mathcal{P}_θ con:

$f = 0, q_0 = 0,$	Parámetros	Valores
$\alpha_c = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Gamma_2, \\ \alpha_c^T \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \end{cases}$	ρ	7850 kg/m ³
	c	641 J/kg K
	k	$k(\theta)$ (W/m K)
	θ_{ta}	727 °C
	θ_{ua}	867 °C
$\alpha_r = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Gamma_2, \\ \alpha_r^T \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \end{cases}$	L_c	67521 J/Kg
	α_c^T	25 W/m ²
	α_r^T	4.536e-7 W/m ² k ⁴
$\theta_c = \theta_r = \theta_g.$	$\theta_c = \theta_r = \theta_g(t)$	$20 + 345 \log_{10} \left(\frac{8t}{60} + 1 \right)$

En el Eurocódigo se propone un método de resolución simplificado sobre las alas de la viga y se asume que la temperatura en el alma es igual a la del ala inferior.

En la siguiente tabla están recogidos los valores de la temperatura obtenidos mediante el cálculo simplificado del Eurocódigo y FEMter para diferentes valores de tiempo (en minutos). Se aprecia que los resultados para el Eurocódigo en ala superior e inferior son similares a los obtenidos con FEMter, siendo más evidente este parecido una vez transcurridos al menos 45 min. En el caso del alma, aunque

los valores también son similares a partir de 45 min, entre 5 y 15 min la diferencia es sustancial. Por ello, se propone un método de cálculo simplificado (ver Propuesta en la tabla) que mejora la estimación del Eurocódigo en la fase inicial del incendio.



		1	5	10	15	30	45	60	90	120	
Ala Sup	Eurocódigo	28.26	125.00	305.45	494.61	805.16	889.27	937.09	1001.38	1045.94	
	FEMter	UL	31.93	139.73	329.09	520.64	790.32	881.49	937.85	1001.92	1046.32
		UM	29.01	146.71	347.74	529.76	784.26	876.88	936.28	1000.94	1045.60
Alma	Eurocódigo	35.62	209.40	481.52	665.77	830.23	896.12	941.21	1003.63	1047.44	
	Propuesta	56.17	389.99	644.44	725.66	837.35	899.83	943.65	1005.01	1048.37	
	FEMter	WU	53.83	373.36	637.01	723.83	832.92	899.61	943.50	1004.92	1048.31
		WM	53.80	374.21	638.65	724.30	832.92	899.61	943.50	1004.92	1048.31
		WL	53.80	373.52	637.56	724.08	832.92	899.61	943.50	1004.92	1048.31
Ala Inf	Eurocódigo	35.62	209.40	481.52	665.77	830.23	896.12	941.21	1003.63	1047.44	
	FEMter	LM	35.33	215.90	487.61	664.60	817.53	895.18	940.86	1003.40	1047.27
		LR	38.68	217.54	487.59	668.08	820.62	896.25	941.56	1003.84	1047.59

Bibliografía

- [1] Asociación Española de Normalización y Certificación (1996). *UNE-ENV 1994-1-2: Proyecto de estructuras sometidas al fuego. Reglas generales*, AENOR.
- [2] Barral, P., Coronado, E., Quintela, P. y Rial, A. *Numerical solution of austenization in steel components during building fires*, preprint.
- [3] Bermúdez, A. y Moreno, C. (1981). *Duality methods for solving variational inequalities*, Computers & Mathematics with Applications, **7**(1), pp. 43 – 58.
- [4] Bermúdez, A. y Otero, M. V. (2004). *Numerical solution of a three-dimensional solidification problem in aluminium casting*, Finite Elements in Analysis and Design, **40**(13–14), pp. 1885 – 1906.

Tipo de cuasi-isometría xenérico en espazos foliados

Ramón Barral Lijó

Departamento de Xeometría e Topoloxía

22 de xaneiro de 2013

Resumo

Intuitivamente un espazo foliado é un espazo topolóxico dotado dunha partición na que as clases de equivalencia (as *follas*) son variedades de dimensión fixada e ademais estas se pegan localmente coma un feixe de hiperplanos no espazo euclídeo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a familia de clases de isometría de variedades riemannianas completas e punteadas é un conxunto, que denotaremos por $\mathcal{M}_*(n)$. Se dotamos a este conxunto dunha topoloxía adecuada poderíamos utilizalo para comparar e estudar ditas variedades. Os nosos esforzos van ir entón encamiñados a intentar atopar dita topoloxía.

Entre variedades de Riemann existe a seguinte noción de converxencia, denominada *converxencia smooth* (suave) ou *converxencia C^∞* .

Definición 1. *Unha sucesión (N_i, y_i) converge smooth a (M, x) se e só se para calquera $R > 0, \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ existen mergullos $C^\infty \phi_i: B(x, R) \rightarrow (N, y_i)$ definidos para i suficientemente grande tales que $|\nabla^j(g_M - \phi_*^{-1}(g_{N_i}))| < \epsilon$ para todo $0 \leq j \leq n$.*

Xorde entón a pregunta de se se pode topoloxizar dita noción de converxencia no espazo $\mathcal{M}_*(n)$. A resposta é que usando unha noción que denotaremos *cuasi-isometría* podemos obter unha uniformidade adecuada coa que podemos ver que este espazo é separable e admite unha métrica completa, é dicir, é un *espazo polaco*.

Dados dous espazos de Banach $(V, \|\cdot\|)$ e $(V', \|\cdot\|')$, un morfismo $\phi: V \rightarrow V'$ é unha cuasi-isometría de dilatación $\lambda \geq 1$ se e só se satisfai a seguinte ecuación para todo $v \in V$:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \|v\| \leq \|\phi(v)\|' \leq \lambda \cdot \|v\|.$$

Deste xeito, vemos que a condición de cuasi-isometría ven a dicir que ambos espazos son parecidos desde un punto de vista métrico. Este concepto podémolo xeneralizar de xeito obvio a variedades de Riemann: un difeomorfismo $C^\infty \phi: M \rightarrow N$ é unha cuasi-isometría de dilatación $\lambda \geq 1$ se e só se a aplicación tanxente $T\phi_x: TM_x \rightarrow TN_x$ é unha cuasi-isometría de dilatación λ para todo $x \in M$.

A noción de cuasi-isometría aparece de maneira natural no estudo dos espazos foliados. Consideremos un espazo foliado compacto X , que sexa C^∞ na dirección das follas. X ten un fibrado tanxente horizontal TX , que é diferenciable na dirección horizontal e continuo na dirección vertical. Se dotamos a TX dunha métrica de Riemann g , esta induce en cada folla a métrica correspondente a “desenvolver” dita folla. Non existe en xeral unha elección natural da métrica g , pero non obstante temos o seguinte resultado.

Proposición 2. *O tipo de cuasi-isometría dunha folla en X non depende da elección da métrica g .*

O xeito de proceder para definir a topoloxía adecuada en \mathcal{M}^∞ é o seguinte: para que as derivadas das diferencias entre as métricas estén acotadas, temos que ampliar a noción de cuasi-isometría a espazos tanxentes de orde superior. Consideremos unha variedade de Riemann M de dimensión n e o seu fibrado tanxente TM . O espazo TTM ten dimensión $4n$ e se pode descompoñer nunha compoñente horizontal e outra vertical. A compoñente horizontal ven dada polos jets das curvas de TM que son o transporte paralelo dun vector sobre unha curva de M . A parte vertical é a dada polas curvas de TM cuxa proxección sobre M é un único punto. A métrica de Sasaki en TM é aquela que fai que tanto a compoñente horizontal coma a vertical sexan canónicamente isométricas a TM . Deste xeito temos métricas de Riemann definidas sobre os sucesivos fibrados tanxentes, que denotaremos por $T^i M$.

Definición 3. *Unha $(1, R, \lambda)$ -cuasi-isometría é unha aplicación parcial $\phi: M_x \rightarrow N_y$ satisfacendo:*

1. $\text{Dom}(M, x)$ é un aberto contendo $\overline{B(x, R)}$.
2. $\phi(x) = y$.
3. ϕ é unha cuasi-isometría de dilatación menor ou igual que λ .

Definición 4. *Unha aplicación punteada parcial $\phi: M_x \rightarrow N_y$ é unha (i, R, λ) -cuasi-isometría se e só se $T^j \phi: T^j M \rightarrow T^j N$ é unha $(j + 1, R, \lambda)$ -cuasi-isometría para todo $0 \leq j \leq i - 1$.*

Agora pasamos a definir a topoloxía mediante a familia de conxuntos $U_{R,r}^i \subset \mathcal{M}_*(n) \times \mathcal{M}_*(n)$, con $i \in \mathbb{N}$ e $R, r > 0$.

Definición 5. *$(M_x, N_y) \in U_{R,r}^i$ se e só se existen (i, R, λ) -cuasi-isometría de M_x en N_y e viceversa, con $\lambda < e^r$.*

Estos conxuntos forman a base dunha uniformidade metrizable en $\mathcal{M}_*(n)$, é dicir, existe unha métrica completa en $\mathcal{M}_*(n)$ tal que a topoloxía que define é a mesma que a que determinan os conxuntos $U_{R,r}^i$. Mirando como se relacionan o levantamento das métricas aos espazos tanxentes e as derivadas de orde superior, chegamos ao seguinte resultado.

Proposición 6. *A converxencia na uniformidade que determinan os conxuntos $U_{R,r}^i$ é a converxencia smooth.*

Ademáis se pode comprobar tamén que o espazo $\mathcal{M}_*(n)$ é separable. Podemos resumir os resultados anteriores no seguinte.

Teorema 7. *A converxencia smooth en $\mathcal{M}_*(n)$ determina unha topoloxía de espazo polaco.*

Contando montañas desde la ventana

Jose Ameijeiras Alonso

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

5 de febrero de 2014

Las funciones de densidad describen plenamente el comportamiento de las variables aleatorias a estudiar, si bien en numerosas ocasiones no es necesario tener una caracterización completa y el interés principal reside en determinar qué valores de la variable son los más probables. En el caso de las variables continuas, esto se reduce a la identificación de las modas (máximos locales de la función de densidad).

Nuestro objetivo será el de hacer inferencia sobre el número de modas de una distribución cuando ésta es totalmente desconocida y solo se posee una muestra procedente de ella.

Preliminares

Un ejemplo en el que puede ser de interés analizar cuales son las tendencias de una variable aleatoria es cuando se tienen el tiempo que transcurre entre dos erupciones de géiser en una región y se quiere determinar si solo hay una tendencia principal, donde lo más probable es que todos los tiempos de espera se agrupen en torno a un valor determinado, o si, en cambio, hay dos tendencias, unos tiempos de espera largos y otros cortos.

En el caso de estar ante una variable aleatoria continua X , el determinar qué valores de la variable aleatoria son los más probables se reduce a localizar las modas. Se definirá como moda el valor en el que se alcanza un máximo local en la función de densidad. Si hay una sola moda, entonces la función de densidad (o la distribución asociada) es unimodal, en cambio, si la función de densidad presenta más de una moda se dirá que esta es multimodal (en particular, si la función de densidad tiene dos modas esta será bimodal; si tiene tres, será trimodal,...). En la Figura 1 se ilustran distintos ejemplos de funciones de densidad unimodales y multimodales.

Con el fin de hacer inferencia sobre el número de modas de una distribución cuando esta es totalmente desconocida y solo se posee una muestra procedente de ella, en primer lugar, se puede pensar en abordar este problema de forma paramétrica, por ejemplo, a través del ajuste de una mixtura de densidades circulares. Pero esto puede conllevar el riesgo de cometer un error de especificación del modelo. Esto hace que se aborde este problema desde un punto de vista no paramétrico.

PALABRAS CLAVE: bootstrap; contraste de hipótesis; estimación tipo núcleo; moda; test de multimodalidad.

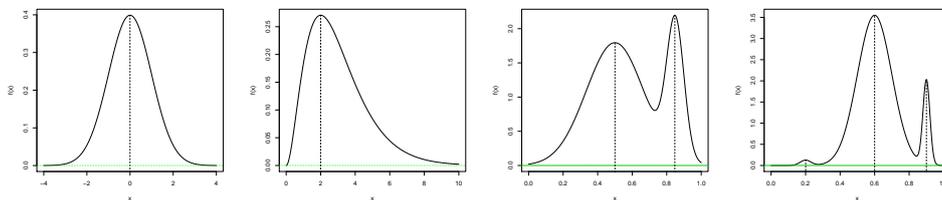


Figura 1: De izquierda a derecha: dos funciones de densidad unimodales, función de densidad bimodal y función de densidad trimodal. Las líneas discontinuas muestran la localización de las modas.

Una forma de estimar la función de densidad f , de forma no paramétrica, viene dada por la estimación tipo núcleo de f (véase [7]). Dada una muestra aleatoria $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de X se define el estimador tipo núcleo de f en el punto x como

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1)$$

donde $h > 0$ se denomina parámetro ventana y K es una función de densidad unimodal simétrica respecto al origen, denominada núcleo. Un ejemplo de núcleo es la densidad gaussiana, esta es $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$, con $u \in \mathbb{R}$.

En función del valor que tome el parámetro de ventana h , se pueden obtener distintas estimaciones acerca del número de modas. En los dos primeros gráficos de la Figura 2 se puede apreciar que, utilizando la estimación de la función de densidad dada en (1), usando el núcleo gaussiano, para una muestra de 272 observaciones de los tiempos de espera entre la ocurrencia de dos géiseres en el parque nacional de Yellowstone, Wyoming (EEUU), para valores bajos de h ($h = 1$ y $h = 5$) se tiene una estructura multimodal. Mientras que para valores altos de este parámetro ventana ($h = 10$ y $h = 20$) se observa una estructura unimodal.

El inconveniente de esta estimación, además de llegar a distintas estimaciones del número de modas en función del valor que tome el parámetro de ventana, es que ésta no proporciona un test formal. El objetivo será, pues, el de proporcionar un test que permita analizar si se puede rechazar o no la hipótesis de que la verdadera distribución asociada a una muestra aleatoria simple tiene a lo sumo un número determinado de modas. Para ello, dada una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con función de densidad f , denotando por j al número de modas de f , se planteará el contraste de hipótesis

$$H_0 : j \leq k, \text{ frente a } H_1 : j > k, \quad (2)$$

siendo $k \in \mathbb{Z}^+$ el número de modas que se quieren contrastar.

Con el objetivo de presentar los distintos métodos para realizar el contraste dado en (2), se han estudiado dos grandes bloques de test. Los primeros emplean

la estimación tipo núcleo dada en (1), mientras que los segundos son los basados en el dip (por su nombre en inglés, esto se puede traducir como test basados en la inmersión) o en el exceso de masa y emplean la función de distribución empírica, esta es, $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq x)$, donde la función indicatriz $\mathbb{1}(A)$ es la función que toma el valor 1 si se verifica A y 0 en otro caso.

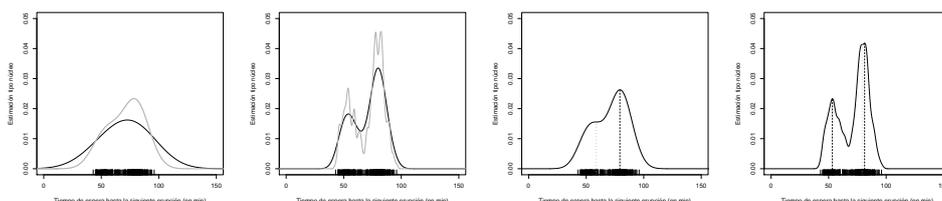


Figura 2: Estimación tipo núcleo empleando el núcleo gaussiano. Primer gráfico: parámetros de ventana $h = 20$ (negro) y $h = 10$ (gris). Segundo: parámetros de ventana $h = 5$ (negro) y $h = 1$ (gris). Tercero: ventana crítica para $k = 1$ ($h_1 = 8,065$). Cuarto: ventana crítica para $k = 2$ ($h_2 = 1,833$). Líneas discontinuas (negro): localización de los máximos relativos. Trazo punteado (gris): localización donde surgirán las nuevas modas para parámetros de ventana menores que h_k .

Test basados en la ventana crítica

Como la estimación \hat{f}_h , y por tanto la estimación del número de modas de f , depende en gran medida del parámetro ventana que se emplee, la idea que se propone en [7] es la de considerar como estadístico de contraste para (2) cuando $k \in \mathbb{Z}^+$ a la ventana h_k más pequeña de forma que la estimación \hat{f}_{h_k} para ese parámetro de ventana tenga k modas. Esto es, se definirá la ventana crítica como $h_k = \min\{h : \hat{f}_h \text{ tiene a lo sumo } k \text{ modas}\}$. En la Figura 2 se muestra la estimación tipo núcleo cuando se toma como h a la ventana crítica para $k = 1$ y para $k = 2$.

Con el objetivo de saber cuándo rechazar la hipótesis nula, en [7] se propone recurrir a la metodología de remuestreo bootstrap (véase [2]) para aproximar la distribución de h_k bajo la hipótesis nula. Ésta, para cada $b = 1, \dots, B$, consiste en generar réplicas bootstrap de tamaño n , $\mathcal{X}^{*b} = (X_1^{*b}, \dots, X_n^{*b})$, a partir de la distribución asociada a \hat{f}_{h_k} . A partir de cada réplica \mathcal{X}^{*b} se calculará el valor de la ventana crítica, h_k^{*b} , para la estimación tipo núcleo obtenida a partir de cada muestra \mathcal{X}^{*b} . Para un nivel de significación α , se rechazará la hipótesis nula H_0 , si $\mathbb{P}(h_k^* \leq h_k | \mathcal{X}) \geq 1 - \alpha$.

En [4] se demuestra que el test dado en [7] no está correctamente calibrado, en el sentido de que para un tamaño muestral grande (cuando $n \rightarrow \infty$), bajo la hipótesis nula, debería ocurrir que el p -valor $U_n = \mathbb{P}(h_k^* \leq h_k | \mathcal{X})$ se aproximase a una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y esto no es cierto para el caso

del test proporcionado en [7]. El problema es que el calibrado del test depende de la verdadera distribución de donde proceda la muestra, que es desconocida. Para el caso $k = 1$, acotando el soporte de la variable aleatoria, en [4] se prueba que se puede calibrar el test dado en [7] independientemente de la distribución que tenga la variable aleatoria. Esta acotación del soporte obligará a redefinir el contraste del siguiente modo:

$$H_0 : j = 1 \text{ y no tiene mínimos locales en el intervalo } I. \quad (3)$$

El estadístico que se propone en [4] será $h_{\text{HY}} = \text{mín}\{h : \hat{f}_h \text{ tiene exactamente una moda en } I\}$. Se tomará como test el que, para un valor apropiado de λ_α (el cual es independiente de la verdadera función de densidad f), rechaza, para un nivel de significación α , la hipótesis nula definida en (3), si se verifica que $\mathbb{P}(h_{\text{HY}}^* \leq \lambda_\alpha h_{\text{HY}} | \mathcal{X}) \geq 1 - \alpha$, donde h_{HY}^* denota la versión bootstrap de h_{HY} . En [4] se demuestra que, en este caso, los p -valores obtenidos con este test se aproximan de forma asintótica a una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

Con el fin de extender el contraste (2) cuando $k > 1$, en [3] se propone un método basado en el criterio de Cramér–von Mises, el cual permite realizar el contraste:

$$H_0 : F(x) = \hat{F}_{h_k}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ vs. } H_1 : F(x) \neq \hat{F}_{h_k}(x), \text{ para algún } x.$$

Para ello, dada la muestra ordenada $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, se emplea el estadístico

$$T_k = \sum_{i=1}^n \left(\hat{F}_{h_k}(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n}.$$

De nuevo, para conocer la distribución del estadístico T_k bajo H_0 , en [3] se propone emplear la metodología bootstrap. De esta forma, para un nivel de significación α , se rechazará H_0 si $\mathbb{P}(T_k^{*b} \leq T_k | \mathcal{X}) \geq 1 - \alpha$, donde T_k^{*b} denota la versión bootstrap del estadístico de Cramér–von Mises.

Test basados en el exceso de masa y dip

En [5] se propone un test basado en el estadístico dip para el contraste (2) cuando $k = 1$, el cuál mide la máxima distancia entre la función de distribución F de la que proviene la muestra y la función de distribución unimodal más próxima a ésta. De este modo el dip de F , que se denotará como $D(F)$, se define como:

$$D(F) = \inf_{G \in \mathcal{U}} \{\rho(F, G)\},$$

donde $\rho(F, G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|F(x) - G(x)|\}$ y \mathcal{U} es la clase de funciones de distribución unimodales.

En [5] se prueba que asintóticamente, el valor de $D(F)$ coincidirá con el valor de $\rho(F_n, V)$, donde $V(x)$ será una función que es constante para valores de x menores

que 0 y para valores mayores que 1, y que para algún valor de $m \in [0, 1]$ será convexa en $[0, m]$ y cóncava en $[m, 1]$. En la Figura 3 (izquierda) se muestran las funciones F_n , V y el valor del dip para una muestra de 30 datos procedente de la $N(0, 1)$.

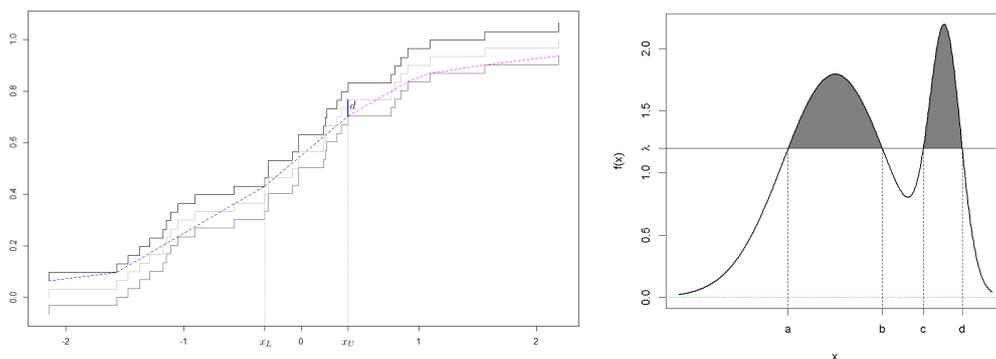


Figura 3: Izquierda: dip para una muestra de 30 datos obtenida a partir de una $N(0, 1)$, se muestra con trazo continuo de color gris claro la distribución empírica de esta muestra y de color más oscuro esta distribución cuando se le suma y resta el valor del dip, con trazo discontinuo la función con un único máximo relativo más próxima a F_n . Derecha: en gris se representa el exceso de masa para dos λ -conglomerados, los cuales son el intervalo $[a, b]$ y el $[c, d]$.

Para obtener la distribución del dip bajo H_0 , en [5] se propone obtener los valores críticos κ_α haciendo uso de la metodología de Monte Carlo. Para ello se generan M muestras de tamaño n procedentes de una distribución normal y se calcula el dip asociado a cada una de estas muestras. A partir de ellos se generarán los valores críticos κ_α , de forma que dada una muestra \mathcal{X} de tamaño n , para un nivel de significación α , se rechazará H_0 si $\mathbb{P}(\kappa_\alpha \leq D(F_n) | \mathcal{X}) \geq 1 - \alpha$.

Una extensión del dip para realizar el contraste (2) cuando $k \in \mathbb{Z}^+$ es el test de exceso de masa que se presenta en [6]. Dado un valor λ , la idea detrás del exceso de masa, se basa en encontrar j conjuntos conexos (en el caso lineal j intervalos cerrados), a los que se le conocerá como λ -conglomerados, de forma que se maximice la diferencia entre la probabilidad asociada a estos conjuntos y λ por la medida de dichos conjuntos (en el caso lineal la diferencia entre el extremo superior y el inferior del intervalo). Se muestra en la Figura 3 (derecha) el exceso de masa para 2 conjuntos conexos en una función de densidad bimodal.

El estadístico dado en [6], para realizar el contraste (2) cuando $k \in \mathbb{Z}^+$, se obtendrá a partir de la máxima diferencia (cuando se hace variar el valor de λ) entre el exceso de masa de $k + 1$ y k λ -conglomerados.

En la práctica, el estadístico dado en [6] se obtendrá de la siguiente forma:

$$\Delta_{n,k+1} = \max_{\lambda} \{E_{n,k+1}(\mathbb{P}_n, \lambda) - E_{n,k}(\mathbb{P}_n, \lambda)\},$$

donde se tiene que $E_{n,k}(\mathbb{P}_n, \lambda) = \sup_{C_1, \dots, C_k} \left\{ \sum_{l=1}^k \mathbb{P}_n(C_l) - \lambda \|C_l\| \right\}$, siendo k un número máximo de modas prefijado y con $\mathbb{P}_n(C_l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \in C_l)$.

Este estadístico se trata de una extensión del dip ya que cuando $k = 1$, se tiene que $\Delta_{n,2} = 2D(F_n)$. La regla que se da en [6] para rechazar H_0 cuando $k = 1$ es la misma que la dada en [5].

De nuevo, se puede ver que el test proporcionado en [5] no está bien calibrado. En [1] se demuestra que la distribución de $\Delta_{n,2}$ es independiente de la distribución desconocida de X excepto por el factor $c = \left(\frac{f^3(x_0)}{|f''(x_0)|} \right)^{1/5}$, donde x_0 denota la localización de la única moda de f .

Ante esta situación, con el fin de obtener una distribución de referencia con la que poder generar réplicas para obtener la distribución de $\Delta_{n,2}$, en [1] se propone tomar para cada posible valor de $d = c^{-5}$ una función de densidad $\psi(x)$.

Como el valor de d depende de la verdadera distribución, lo que se propone en [1] es estimar su valor sustituyendo f y f'' por su estimación tipo núcleo. En función del valor que tome el valor de \hat{d} se escogerá la función de densidad $\psi(x)$ y a partir de su distribución asociada se generan réplicas \mathcal{X}^* , y se calculan para cada una de ellas el estadístico proporcionado en [6], $\Delta_{n,2}^*$. Para un nivel de significación α , el test que se propone en [1] rechazará la hipótesis nula de que la verdadera función de densidad f es unimodal si $\mathbb{P}(\Delta_{n,2}^* \leq \Delta_{n,2} | \mathcal{X}) \geq 1 - \alpha$.

Bibliografía

- [1] Cheng, M. Y. y Hall, P. (1998). *Calibrating the excess mass and dip tests of modality*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B, **60**, pp. 579–589.
- [2] Efron, B. (1979). *Bootstrap methods: another look at the jackknife*, The Annals of Statistics, **7**, pp. 1–26.
- [3] Fisher, N. I. y Marron, J. S. (2001). *Mode testing via the excess mass estimate*, Biometrika, **88**, pp. 419–517.
- [4] Hall, P. y York, M. (2001). *On the calibration of Silverman's test for multimodality*, Statistica Sinica, **11**, pp. 515–536.
- [5] Hartigan, J. A. y Hartigan, P. M. (1985). *The dip test of unimodality*, Journal of the American Statistical Association, **86**, pp. 738–746.
- [6] Muller, D. W. y Sawitzki, G. (1991). *Excess mass estimates and tests for multimodality*, The Annals of Statistics, **13**, pp. 70–84.
- [7] Silverman, B. W. (1981). *Using kernel density estimates to investigate multimodality*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B, **43**, pp. 97–99.

Estimación noparamétrica de la densidad: el estimador con núcleo variable

M^a Isabel Borrajo García

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

5 de marzo de 2014

Resumen

La estimación de la densidad ha sido un tema estudiado en gran profundidad a lo largo de los años, tratando con especial interés el problema de selección de la ventana. En este trabajo se aborda la estimación noparamétrica de la densidad desde un punto de vista que difiere del habitual, y que plantea nuevos retos y desafíos.

El objetivo de esta charla es hacer un breve repaso sobre la teoría clásica de estimación noparamétrica de la densidad, y presentar una nueva metodología centrada exclusivamente en la elección de la función núcleo.

El estimador tipo núcleo

Dada una muestra aleatoria simple (m.a.s.) X_1, \dots, X_n de la variable de interés X con densidad f , el método más habitual en estimación noparamétrica de la densidad es el denominado estimador tipo núcleo. Su expresión viene dada por:

$$\hat{f}_{nh}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1)$$

siendo $h > 0$ la ventana (o parámetro de suavizado) y K una función núcleo, esto es, una función real, no negativa, integrable con $\int_{\mathbb{R}} K = 1$, unimodal y simétrica respecto al origen.

El estimador (1) tiene dos elementos desconocidos. Por una parte está el parámetro ventana, cuya importancia en la estimación de la densidad es conocida. Y por la otra está la función núcleo K , que suele ser fijada antes de iniciar el estudio por el investigador, pero sobre la que también se ha desarrollado teoría de optimización.

Para analizar los procedimientos de estimación es necesario disponer de mecanismos que midan la bondad de ajuste de los mismos, comúnmente denominados criterios de error. Existen diversas posibilidades para medir este ajuste. En este

trabajo se empleará en general, como criterio de error, el Error Cuadrático Integrado (ISE; *Integrated Squared Error*) que se define para un estimador de la densidad $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ como:

$$\text{ISE}(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx.$$

La principal característica del ISE es que es un criterio de error global, es decir, que no depende del punto en el que se evalúa el estimador. Sin embargo, sí depende de la muestra, y por tanto se está introduciendo una cierta variabilidad intrínseca a los datos y no al estimador. Para paliar esta deficiencia se define el Error Cuadrático Medio Integrado (MISE; *Mean Integrated Squared Error*) que suprime la aleatoriedad procedente de cada muestra individual a través del promedio:

$$\text{MISE}(\hat{f}) = \mathbb{E} [\text{ISE}(\hat{f})] = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} [(\hat{f}(x) - f(x))^2] dx.$$

En general, para el estimador (1) no se puede obtener una expresión exacta del MISE. Por ello es necesario emplear una aproximación del mismo que se obtiene mediante desarrollos de Taylor asumiendo ciertas condiciones de regularidad sobre f . La expresión, supuesto que h depende de n , que $h \rightarrow 0$ y que $nh \rightarrow \infty$, es:

$$\text{AMISE}(\hat{f}_{nh}) = \frac{1}{nh} R(K) + \frac{1}{4} h^4 \mu_2(K) R(f''),$$

donde R es una aplicación que asigna a cualquier función de $L_2(\mathbb{R})$ la integral de su cuadrado y μ_2 es otra aplicación definida como $\mu_2(g) = \int x^2 g(x) dx$, siempre que este valor sea finito.

Es el AMISE el que se emplea como criterio de error a minimizar en el desarrollo de la expresión de la ventana óptima, obteniendo

$$h_{\text{AMISE}} = \left(\frac{R(K)}{\mu_2(K)^2 R(f'') n} \right)^{1/5}.$$

Es inmediato darse cuenta que esta expresión no es aplicable en la práctica puesto que depende de la densidad teórica f , que es desconocida. Es de este hecho de donde surgen los distintos procedimientos de selección de la ventana, entre los que cabe destacar la regla del pulgar de Silverman, el método plug-in de [4] y la validación cruzada de [1]. Este último es de especial relevancia en nuestro trabajo puesto que en él se inspiran las ideas de la nueva metodología que hemos desarrollado.

El estimador con núcleo variable

El estimador de la densidad con núcleo variable se propone en [5], y su expresión es

$$\hat{f}_{nK}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(x - X_i), \quad (2)$$

donde la única condición que se exige sobre la función núcleo es que $K \in L_2(\mathbb{R})$.

Éste es un estimador más general que el estimador tipo núcleo definido en (1), pues podemos obtener este último sin más que tomar como núcleo $K = K_h(\cdot) = \frac{1}{h}K(\frac{\cdot}{h})$. Por consiguiente, la teoría desarrollada para (2) es más amplia e incluye al estimador (1). Además, una gran ventaja de este estimador es que se puede calcular, como veremos más adelante, una expresión exacta del MISE óptimo.

Watson y Leadbetter (1963) obtienen la expresión óptima en términos de MISE para el estimador (2), que se construye bajo la única condición de que las funciones $K, f \in L_2(\mathbb{R})$, y que depende de la función característica de f y de K , φ_f y φ_K , respectivamente. Minimizando en φ_K , se obtiene la expresión de la función característica del núcleo óptimo, K^* :

$$\varphi_{K^*}(t) = \frac{n|\varphi_f(t)|^2}{1 + (n-1)|\varphi_f(t)|^2}. \quad (3)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier, se puede determinar el núcleo óptimo

$$K^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi_{K^*}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \frac{n|\varphi_f(t)|^2}{1 + (n-1)|\varphi_f(t)|^2} dt,$$

que al sustituirla en (2), da lugar al estimador que se denomina óptimo, \hat{f}_{nK^*} .

Se ha aplicado el desarrollo detallado anteriormente al modelo 10 de [3], es decir, se ha calculado el núcleo óptimo K^* (que en este caso sí se puede obtener puesto que se trata de un escenario controlado en el que se conoce la densidad teórica), y se ha sustituido en la expresión (2) para obtener el estimador óptimo. De esta manera podemos visualizar cómo sería el mejor estimador posible para un tamaño muestral dado. En la Figura 1 podemos ver la representación del núcleo óptimo junto con el estimador óptimo, \hat{f}_{nK^*} , para muestras de tamaño $n = 100$ de dicho modelo.

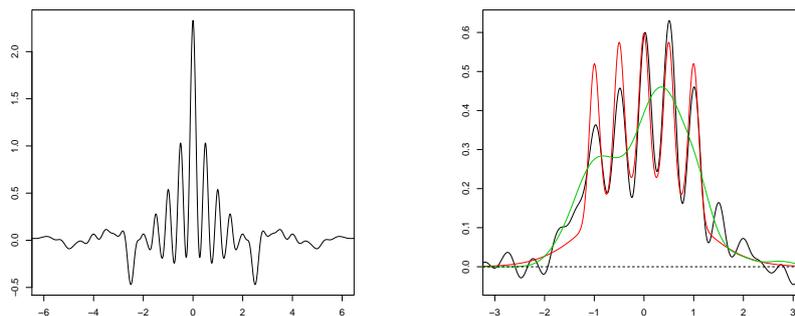


Figura 1: A la izquierda se ve la representación del núcleo óptimo con tamaño muestral $n = 100$, a la derecha se presenta el estimador óptimo (línea negra) para una muestra dada de ese modelo con dicho tamaño, el estimador tipo núcleo con ventana h_{AMISE} (línea verde) y la densidad teórica (línea roja).

Una desventaja clara que presenta el estimador (2) es que puede tomar valores negativos, lo que implica que no es una densidad y que no será posible emplearlo,

por ejemplo, en un proceso de generación de datos. Este problema se resuelve fácilmente utilizando la teoría propuesta en [2], que consiste básicamente en anular las partes negativas del estimador y reescalar las positivas para que la función resultante integre uno. Además, el estimador que se obtiene es siempre mejor que el anterior en términos de ISE.

Selectores del núcleo

Se ha obtenido en (3) la expresión de la función característica del núcleo óptimo para el estimador con núcleo variable. La principal dificultad existente es que depende de la función característica de la densidad teórica, que es desconocida.

El primer intento de estimación es claramente intuitivo y consiste en sustituir $\rho_f = |\varphi_f|^2$ por su estimador empírico, esto es, $\rho_n(t) = |\varphi_n(t)|^2$, donde $\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itX_j}$, y así obtener una estimación de la característica del núcleo óptimo:

$$\hat{\varphi}_{K^*}(t) = \frac{n\rho_n(t)}{1 + (n-1)\rho_n(t)}. \quad (4)$$

Es interesante visualizar la representación gráfica de los valores teóricos y la estimación correspondiente, en este caso se ha escogido el modelo 9 de las densidades de [3], que se recoge en la Figura 2.

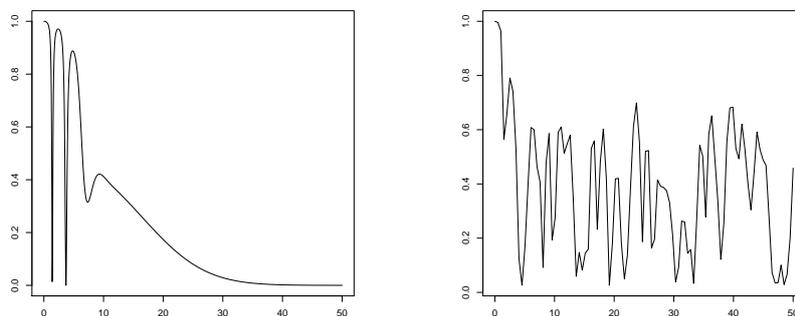


Figura 2: Función teórica y estimación empírica de la característica del núcleo óptimo para una muestra de tamaño $n = 100$ del modelo 9 de [3].

Al comparar ambas gráficas, se observa que esta estimación de la función característica para el núcleo óptimo no es demasiado buena, pues presenta muchas más oscilaciones que la función teórica. A pesar de que este es un ejemplo para un modelo concreto, el problema de las oscilaciones es un hecho generalizado, por lo que se desecha la función característica empírica como estimador, y se debe intentar determinar un nuevo procedimiento que lo mejore.

Este hecho modifica el objetivo inicial de conseguir una buena estimación de la función núcleo, pues dicho problema pasa por obtener una buena estimación de la característica de la densidad teórica. Presentamos ahora el nuevo procedimiento que hemos desarrollado y que permitirá, dada una muestra, realizar una adecuada elección del núcleo.

Validación cruzada

Para el desarrollo de este método se ha tenido en cuenta que la función teórica ρ_f es una función suave de integral finita, esto es, $\rho \in L_1(\mathbb{R})$; además, según el teorema de Riemann–Lebesgue, se sabe que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$. El estimador empírico no verifica ninguna de estas propiedades, por lo que se estaría tratando de aproximar una función que tiende a cero para valores grandes de t , por una que presenta numerosas oscilaciones, de manera que la discrepancia entre ambas sería excesiva.

El problema que se plantea entonces es como conseguir que ρ_n no presente tanto ruido. La solución que proponemos consiste en cortar la función en un punto a determinar, es decir, elegir un valor T de abscisa (e implícitamente su opuesto), a partir del cual el estimador empírico de ρ_f se define como nulo. De este modo se suprimen las oscilaciones en las colas, obteniendo una función con soporte compacto e integral finita. Así, la nueva propuesta de estimador para ρ_f es

$$\hat{\rho}_T = \rho_n(t) \mathbb{1}_{[-T, T]}(t) = \rho_n(t) \mathbb{1}_{\{|t| \leq T\}}.$$

Resta por determinar un método que nos permita obtener un valor de T apropiado únicamente con la información muestral. Para ello hemos procedido mediante la aplicación del procedimiento estándar de validación cruzada.

Dada una m.a.s. es necesario disponer del ISE del estimador:

$$\text{ISE}(\hat{f}_{nT}) = \int (\hat{f}_{nT}(x) - f(x))^2 dx = \int \hat{f}_{nT}^2(x) dx + \int f^2(x) dx - 2 \int \hat{f}_{nT}(x) f(x) dx, \quad (5)$$

teniendo en cuenta que f es un elemento fijo en T , minimizar (5) equivale a:

$$\min_{T \geq 0} \left[\int \hat{f}_{nT}^2(x) dx - 2 \int \hat{f}_{nT}(x) f(x) dx \right]. \quad (6)$$

El primer sumando lo podemos determinar sin dificultad ya que únicamente depende del estimador, que es conocido. La dificultad está con el segundo, puesto que depende de f , pero se puede aproximar del siguiente modo:

$$\int \hat{f}_{nT}^2(x) f(x) dx = \mathbb{E}_f \left[\hat{f}_{nT}^2(X) \right] \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{nT}^{-i}(X_i),$$

donde \hat{f}_{nT}^{-i} denota el estimador obtenido extrayendo de la muestra el i -ésimo dato.

El hecho de tener que extraer un dato se debe a que se dispone de una única muestra de la variable aleatoria, que se emplea para hacer dos estimaciones. Por una parte el estimador de la densidad, y por otra la media de la variable transformada mediante el estimador con núcleo variable. Por tanto, la solución pasa por, en cada uno de los sumandos de la media muestral de la variable transformada, $\hat{f}_{nT}(X)$, extraer ese dato, de manera que no se use la misma información en ambas estimaciones.

En definitiva, T se obtiene minimizando la siguiente expresión:

$$\min_T \left[\frac{1}{2\pi} \int \rho_n(t) \left(\frac{n\rho_n(t)\mathbb{1}_{\{|t|\leq T\}}}{1 + (n-1)\rho_n(t)\mathbb{1}_{\{|t|\leq T\}}} \right)^2 dt - 2\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{nT}^{-i}(X_i) \right].$$

Determinando de esta manera el valor de T , tendríamos un estimador de la densidad que se puede aplicar en la práctica, y que además proporciona resultados comparables con los obtenidos por otros métodos existentes para la resolución de este mismo problema.

Bibliografía

- [1] Bowman, A. W. (1984). *An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates*. Biometrika, **71**(2), pp. 353–360.
- [2] Glad, I. K., Hjort, N. L. y Ushakov, N. G. (2003) *Correction of density estimators that are not densities*. Scandinavian Journal of Statistics, **30**(2), pp. 415–427.
- [3] Marron, J. S. y Wand, M. P. (1992). *Exact mean integrated squared error*. Annals of Statistics, **20**(2), pp. 712–736.
- [4] Sheather, S. J. y Jones, M. C. (1991). *A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, **53**, pp. 683–690.
- [5] Watson, G. S. y Leadbetter, M. R. (1963). *On the estimation of the probability density*. Annals of Mathematical Statistics, **34**, pp. 480–491.

Un paseo desde las ecuaciones en derivadas parciales hasta los elementos finitos.

Jorge Albella Martínez

Departamento de Matemática Aplicada

19 de marzo de 2014

Una de las complicadas tareas de las matemáticas, es enfrentarse a los problemas que surgen del estudio de fenómenos naturales. Éstos vienen con frecuencia descritos a través de ecuaciones en derivadas parciales, y a menudo no existe una solución tan regular como este planteamiento exige.

El objetivo de este trabajo, es dar algunas pinceladas acerca del concepto de formulación variacional y cómo esta idea hace posible encontrar soluciones menos regulares o débiles, para finalmente explicar las bases del método de elementos finitos, una de las principales herramientas numéricas para resolver dichos problemas.

Motivación

Consideremos como ejemplo el siguiente problema formulado sobre un dominio Ω acotado en \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ tal que:} \\ u - \Delta u = f \text{ en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

En muchos casos, no es posible encontrar una solución clásica del problema (1), por eso nos interesaría poder reformular el problema reduciendo la regularidad.

Supongamos entonces que $\exists u \in C^2(\bar{\Omega})$ solución clásica de (1) y tomamos una “función test” $v \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que $v|_{\partial\Omega} = 0$. A continuación multiplicamos la ecuación del problema por esta función test, e integramos en todo el dominio para obtener:

$$\int_{\Omega} u v dV - \int_{\Omega} \Delta u v dV = \int_{\Omega} f v dV.$$

Si ahora aplicamos la fórmula de Green y que $v|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\int_{\Omega} u v dV + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dV = \int_{\Omega} f v dV. \quad (2)$$

Notemos que (2) tiene sentido si $u \in C^1(\bar{\Omega})$. De hecho, si logramos obtener una generalización de la derivada para funciones en $L^2(\Omega)$, (2) tendría sentido cuando $u, \nabla u \in L^2(\Omega)$. Pero resulta que esta generalización ya existe, de hecho para funciones de $L^1_{loc}(\Omega)$, y en este mismo libro de actas se puede encontrar un trabajo al respecto en el acta de Jorge Losada Rodríguez.

PALABRAS CLAVE: distribuciones; derivada distribucional; solución débil; formulación variacional; elementos finitos.

Este trabajo no pretende ser un curso de cálculo diferencial, solo intenta dotar al lector de ciertas nociones acerca de los conceptos de *solución débil*, *formulación variacional* y *método de elementos finitos*, que son claves en el área de la matemática aplicada. A los lectores interesados se les recomienda consultar [1, 2, 3, 4].

Derivada en el sentido de las distribuciones

Comenzaremos presentando el concepto de derivada distribucional, que extiende la definición clásica de derivada. Para ello empezamos definiendo el *espacio de las distribuciones* $\mathcal{D}'(\Omega)$, como un subespacio del dual algebraico de $\mathcal{D}(\Omega)$, formado por las funciones lineales $\phi : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{ \phi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(\phi) := \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}} \text{ compacto} \right\},$$

dotado de estructura de espacio topológico. La construcción de esta topología es realmente complicada. Los lectores interesados, pueden acudir a [4].

Observación 1. *No es complicado ver que $\forall f \in L^1_{loc}(\Omega)$, es posible definir un elemento $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, que la representa a ella y solo a ella. En efecto, sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, existe $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definido como:*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Si suponemos que $\exists g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $T_g = T_f$, podemos ver que:

$$\int_{\Omega} (f - g)\phi dx = \int_{\Omega} f\phi dx - \int_{\Omega} g\phi dx = \langle T_f, \phi \rangle - \langle T_g, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

es decir, que $f(x) = g(x)$ en casi todo Ω .

Ahora introduciremos la definición de *derivada en el sentido de las distribuciones*, que es el concepto que nos interesa para este trabajo. Es importante que esta operación, al igual que cualquier otra definida sobre el espacio de distribuciones, sea coherente con la correspondiente operación en el sentido clásico, es decir, nos interesa que operar con elementos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, sea equivalente a operar con los correspondientes $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Por tanto, como

$$\langle f', \phi \rangle = \int_{\Omega} f'\phi dx = f|_{\partial\Omega}\phi|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} f\phi' dx = - \int_{\Omega} f\phi' dx = - \langle f, \phi' \rangle,$$

lo natural es definir:

$$T'(\phi) = \langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle = -T(\phi').$$

De una forma más general, si consideramos para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}^n$ el operador

$$\begin{aligned} D^\alpha : C^{\|\alpha\|_1}(\Omega) &\longrightarrow C^0(\Omega) \\ \phi &\longmapsto D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\|\alpha\|_1} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \end{aligned}$$

podemos definir para todo $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$D^\alpha T(\phi) = \langle D^\alpha T, \phi \rangle = -(1)^{\|\alpha\|_1} \langle T, D^\alpha \phi \rangle = -(1)^{\|\alpha\|_1} T(D^\alpha \phi).$$

Formulación variacional: solución débil

Una vez hemos generalizado el concepto de derivada a elementos de $L^2(\Omega)$, podemos volver sobre (2), considerando $u, v \in H^1(\Omega) := \{\varphi \in L^2(\Omega) : \nabla\varphi \in L^2(\Omega)\}$ espacio de Hilbert, donde el gradiente se entiende en sentido distribucional. Atendiendo ahora a las condiciones de contorno que hemos tomado, concluimos que lo apropiado sería considerar para u y v el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$. Como consecuencia (2) solo tiene sentido cuando f pertenece al dual de $H_0^1(\Omega)$.

Así pues, la *formulación variacional* del problema (1) es:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} u v \, dV + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (3)$$

Observación 2. Si u es *solución clásica* de (1), acabamos de ver que u satisface (3), por tanto también es lo que se llama, *solución débil* del problema. Recíprocamente, si u es *solución débil*, es decir si u satisface (3), y además es regular, esto es $u \in C^2(\Omega)$, entonces es posible seguir los mismos pasos a la inversa, para concluir que $u \in C^2(\Omega)$ es *solución clásica* de (1).

Cabe remarcar que dependiendo del problema clásico que estemos intentando extender, llegaremos a diferentes formulaciones variacionales. Como consecuencia, existen distintos resultados sobre existencia y unicidad de solución según las características del problema. Los lectores interesados pueden acudir a [1, 2].

Nosotros nos centraremos en problemas que encajan en el siguiente marco:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que:} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (4)$$

donde V es un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal definida en $V \times V$ y $L(\cdot)$ es un funcional lineal definido en V .

La existencia y unicidad de solución para los problemas de este tipo, es consecuencia del siguiente resultado:

Lema 3 (de Lax–Milgram [1]). Sean V , $a(\cdot, \cdot)$ y $L(\cdot)$ como antes, si además:

$$\begin{array}{ll} L \text{ continua:} & \exists C > 0 \text{ tal que } |L(v)| \leq C\|v\|_V, \quad \forall v \in V, \\ a \text{ continua:} & \exists M > 0 \text{ tal que } |a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall u, v \in V, \\ a \text{ coerciva:} & \exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \end{array}$$

Entonces, (4) tiene solución, es única y además $\|u\|_V = \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha}$.

Elementos finitos

Métodos de Galerkin

El método de los elementos finitos es un método de tipo Galerkin. Éstos consisten en resolver (4) en un subespacio V_N de V de dimensión finita, es decir:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_N \in V_N \text{ tal que:} \\ a(u_N, v_N) = L(v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{array} \right. \quad (5)$$

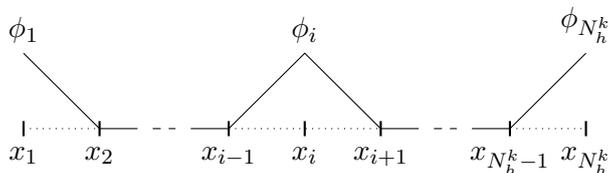


Figura 1: Grados de libertad 1D

dos puntos de K . Como además hay que garantizar la continuidad de v_h en todo Ω , estos dos puntos han de ser precisamente los extremos del elemento K . De similar forma para polinomios de orden dos $v_{h|_K} = a_0 + a_1x + a_2x^2$, por tanto necesitamos dar el valor de $v_{h|_K}$ en tres puntos de K . Para garantizar la continuidad, dos de ellos deben ser los extremos de K , y el tercero, que a priori podría ser cualquier otro, siempre se considera el punto medio, para que al pasar al elemento de referencia, siempre se mantenga como punto medio del elemento.

Con esto identificamos un conjunto de nodos $\{P_j\}_{j=1}^{N_h^k}$ de forma que sea $W \in \mathbb{R}^{N_h^k}$ existe una y solo una función $w_h \in V_h^k$ tal que $w_h(P_j) = W_j$. Hemos por tanto identificado un conjunto de grados de libertad, que son los valores de la función en N_h^k puntos distintos, que sirven para identificar una función de V_h^k . Esto nos permite construir una base $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_h^k}$ de V_h^k tal que $\phi_i(P_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N_h^k$ (Figura 1).

Esto además nos permite definir un operador de interpolación, al menos para las funciones en $C^0(\bar{\Omega})$ como:

$$\begin{aligned} \Pi_h^k : C^0(\bar{\Omega}) &\longrightarrow V_h^k \\ v &\longmapsto \Pi_h^k(v) = \sum_{i=1}^{N_h^k} v(P_i)\phi_i. \end{aligned} \tag{11}$$

Pero como $C^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ la definición anterior es extensible a elementos de $H^1(\Omega)$. Lo cual nos conduce al siguiente resultado para el error de interpolación.

Proposición 6. *Sea $v \in H^s(\Omega)$, $1 \leq s \leq k + 1$, entonces:*

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h^k(v)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^s \|v\|_{H^s(\Omega)}, \\ \|v - \Pi_h^k(v)\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^{s-1} \|v\|_{H^s(\Omega)}. \end{aligned}$$

Observación 7. *El resultado anterior, unido al lema de Céa determinan la convergencia del método. Si $u \in H^s(\Omega)$, $1 \leq s \leq k + 1$ es solución de (4), entonces:*

$$\begin{aligned} \|u - u_h^k(v)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^s \|u\|_{H^s(\Omega)}, \\ \|u - u_h^k(v)\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)}. \end{aligned}$$

Resultados

Como hemos visto, los métodos variacionales permiten reducir la regularidad de una determinada ecuación diferencial de forma que incluso problemas que con el concepto de derivada clásica no tenían sentido, ahora sí lo tienen. Además hemos visto como el método de los elementos finitos permite resolver esta nueva formulación

variacional. Veamos ahora como ejemplo, un problema que nunca hubiese podido ser abordado con las herramienta clásicas del cálculo diferencial.

$$\text{Encontrar } u \in C^2([0, 1]) \text{ tal que: } \begin{cases} u'' = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } (0, \frac{1}{2}), \\ 2 & \text{en } [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Pero así formulado este problema no tiene sentido, pues la solución que nos da la física del problema no es derivable: $u(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{2} & \text{en } [0, \frac{1}{2}], \\ x^2 + \frac{1}{8} & \text{en } [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

Sin embargo su formulación variacional sí que lo tiene:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} u v dV + \int_{\Omega} u' v' dV = \int_{\Omega} f v dV, \quad \forall v \in H_0^1([0, 1]). \end{array} \right. \quad (13)$$

En la Figura 2 podemos ver la solución aproximada obtenida por elementos finitos para distintos mallados cada vez más finos y en la Figura 3 se puede observar como el orden de convergencia es el que esperábamos.

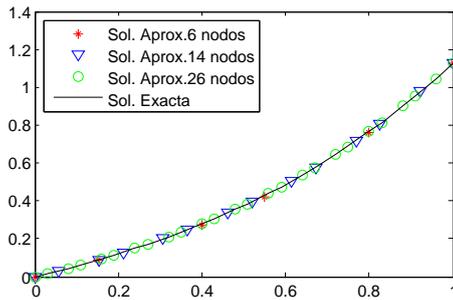


Figura 2: Solución aproximada usando un mallado con 26 nodos.

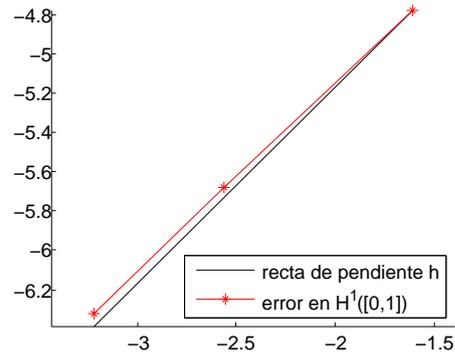


Figura 3: Orden de convergencia.

Bibliografía

- [1] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.
- [2] Casas Rentería, E. (1992). *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Cantabria.
- [3] Johnson, C. (1987). *Numerical solution of partial differential equations by finite element method*, Cambridge University Press.
- [4] Schwartz, L. (1960). *Théories élémentaires de distribution*, Centre de Documentation Universitaire.

Regresión cuantil: unha posición condicionada

Mercedes Conde Amboage

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

2 de abril de 2014

A regresión cuantil pode ser vista como unha opción natural na análise de regresión á hora de utilizar distintas medidas de tendencia central e dispersión, para obter así unha análise máis completa e robusta dos datos. Outra das vantaxes deste tipo de regresión radica na posibilidade de estimar calquera cuantil, podendo valorar así o que ocorre con valores extremos da poboación.

Por todo isto, a regresión cuantil é unha técnica estatística moi útil en diversos ámbitos de aplicación, como por exemplo a Ecoloxía, a Economía ou a Medicina.

A regresión cuantil

Definición 1. Dada calquera variable aleatoria X , para cada $0 < \tau < 1$ pódese definir o **cuantil de orde** τ , que denotaremos por c_τ , como o valor que verifica que:

$$\mathbb{P}(X \leq c_\tau) \geq \tau \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X \geq c_\tau) \geq 1 - \tau.$$

Aparece así a **función cuantil** dunha distribución de probabilidade, que se define como a inversa da función de distribución (que habitualmente denotamos por F), é dicir:

$$F^{-1}(\tau) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \tau \leq F(x)\}.$$

Dentro dos cuantís destaca o que ocupa a posición $\tau = 0.5$ que se coñece co nome de **mediana** e representa o valor da variable que ocupa a posición central nun conxunto de datos ordenados. É coñecido que a mediana se pode expresar como:

$$c_{0.5} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[|X - x|]$$

, é dicir, o valor que fai mínima unha perda esperada, sendo neste caso a función de perda o valor absoluto. Estendendo esta propiedade a calquera cuantil de interese τ teríase que:

$$c_\tau = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\rho_\tau(X - x)], \tag{1}$$

onde ρ_τ é a coñecida **función de perda cuantílica** que vén dada por:

$$\rho_\tau(u) = u(\tau - \mathbb{1}(u < 0)) = \begin{cases} u\tau, & \text{se } u \geq 0, \\ u(\tau - 1), & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Para que quede máis claro o comportamento das funcións ρ_τ , a Figura 1 recolle as representacións para diferentes valores do cuantil τ .

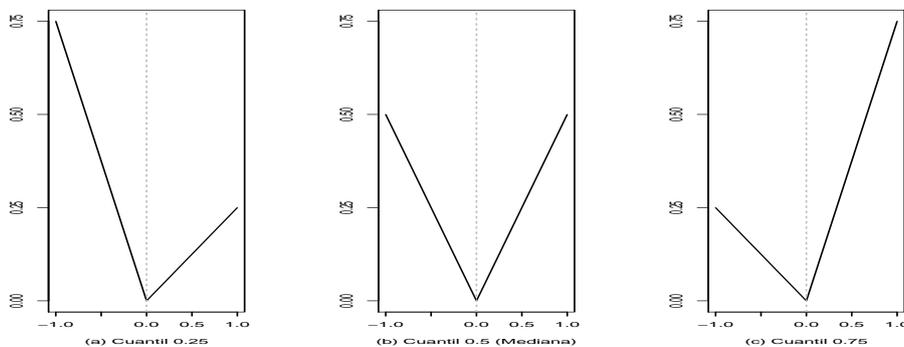


Figura 1: Representación das funcións de perda cuantílica asociadas aos cuantís $\tau = 0.25$ (a), $\tau = 0.5$ (b) e $\tau = 0.75$ (c).

O problema (1) pódese reformular como un problema de programación lineal se introducimos $2n$ variables artificiais $\{u_i, v_i$ con $i = 1, \dots, n\}$ que representan as partes positivas e negativas de $X_i - c$, respectivamente. Temos entón o novo problema:

$$\min_{(c, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{2n}} \left\{ \tau 1_n' u + (1 - \tau) 1_n' v : 1_n c + u - v = X \right\},$$

onde 1_n denota o vector n -dimensional de uns, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $X = (X_1, \dots, X_n)$. É dicir, estamos minimizando unha función lineal nun conxunto poliédrico de restricións formado pola intersección de hiperplanos $(2n + 1)$ -dimensionais determinados polas restricións lineais impostas dentro de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{2n}$.

Agora imos estender o razoamento anterior ao problema de regresión. Consideremos unha variable aleatoria Y escalar que pretendemos explicar en función de p covariables que denotaremos por X . Supoñamos coñecida $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ unha mostra aleatoria simple das variables X e Y sendo $\mathbf{X}_i = (1, X_i) = (1, X_{i,1}, \dots, X_{i,p})$.

Se o cuantil de orde τ da mostra é a solución do problema (1) e a función cuantil condicional vén dada por $Q_\tau(x) = x' \beta(\tau)$, consideraremos $\hat{\beta}$ o elemento que resolva o seguinte problema:

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{i=1}^n \rho_\tau(Y_i - \mathbf{X}_i' \beta), \quad (2)$$

sendo este o punto de partida da idea desenvolvida por [3]. Isto permítemos establecer un modelo da forma:

$$Y_i = \mathbf{X}_i' \beta + \varepsilon_i,$$

onde os erros verifican que $\mathbb{P}(\varepsilon_i \leq 0 | X) = \tau$, é dicir, o cuantil condicional de orde τ do erro é cero (análogo ao establecido no contexto da regresión en media).

Ademais, ao igual que ocorre coa estimación do cuantil, o problema (2) asociado a un modelo de regresión cuantil pódese formular como un problema de programación lineal da seguinte maneira:

$$\min_{(\beta, u, v) \in \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}_+^{2n}} \left\{ \tau 1_n' u + (1 - \tau) 1_n' v : \mathbb{X} \beta + u - v = Y \right\}$$

onde \mathbb{X} denota a matriz de deseño. Ademais, descompuxemos o vector residual $Y - \mathbb{X} \beta$ nas súas partes positivas e negativas (u e v respectivamente).

A formulación anterior do problema permítenos propoñer métodos para o cálculo dos estimadores de regresión cuantil empregando o método do Símplex. [2] propoñen unha simplificación da forma estándar deste método para resolver o problema do cálculo dos estimadores no caso da regresión en mediana. Posteriormente, [4] estenderon este razoamento a calquera cuantil $0 < \tau < 1$.

Debemos ter en conta que os estimadores asociados á regresión cuantil non teñen expresión explícita polo que sería necesario recorrer a expresións asintóticas como a representación de Bahadur proposta por [1]. De todas formas si se verifican resultados sobre a distribución asintótica dos estimadores como o seguinte:

Teorema 2. *Consideremos un modelo lineal para explicar unha variable resposta escalar Y en función dunha variable explicativa X da forma:*

$$Y_i = \mathbf{X}_i' \beta + \varepsilon_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

onde os erros verifican que $\mathbb{P}(\varepsilon_i \leq 0 \mid X) = \tau$. Supoñamos ademais, que se verifican as seguintes condicións:

A1. *As funcións de distribución condicionais F_i (de Y_i condicionada a X_i) son absolutamente continuas e con densidades f_i continuas e uniformemente acoutadas lonxe de 0 e ∞ nos cuantís condicionais $c_{\tau, i}$.*

A2. *Existen matrices D_0 e $D_1(\tau)$ definidas positivas tales que:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i' = D_0$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum f_i(c_{\tau, i}) \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i' = D_1(\tau)$,
3. $\max_{i=1, \dots, n} \|\mathbf{X}_i\| / \sqrt{n} \rightarrow 0$.

Entón tense que

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \tau(1 - \tau) D_1^{-1} D_0 D_1^{-1}\right).$$

Á vista do Teorema 2, a precisión da regresión cuantil depende da inversa da función de densidade avaliada no cuantil de interese. Dita función [5] denominouna **función “sparsity”**, que vén dada por:

$$s(\tau) = [f(F^{-1}(\tau))]^{-1}$$

Tendo isto en conta, concluímos que as estimacións do cuantil serán máis precisas cantas máis observacións aparezan en torno ao cuantil de estudo. Notar que a función “sparsity” non é máis que a derivada da función cuantil, o que nos proporciona un modo de estimala.

No caso de que os erros da regresión sexan independentes e identicamente distribuídos, a función “sparsity” xoga un papel análogo ao da desviación típica no caso da regresión por mínimos cadrados neste mesmo escenario.

Aplicación a datos reais

A Unidade de Producción Térmica (U.P.T.) de As Pontes, situada no nordés da provincia da Coruña, constitúe un dos centros produtivos propiedade de Endesa Generación S.A. na Península Ibérica. Está formada por unha central térmica e outra de ciclo combinado de gas natural.

Ambas centrais teñen implantado un sistema de control suplementario da contaminación atmosférica que inclúe a adquisición de datos de calidade de aire en tempo real, o seu tratamento e a realización de operacións específicas que nos axuden á redución de emisións.

O noso obxectivo será predicir os niveis de óxidos de nitróxeno (NO_x), a partir da información que se recibe en continuo das estacións de mostraxe e a información pasada de ditas medidas. Axustaremos entón un modelo de regresión cuantil asociado á mediana para explicar as concentracións minutais de NO_x .

Para construír a mostra de traballo empregaremos os datos correspondentes a un día completo (1440 observacións minutais), que dividiremos en bloques de seis observacións. As cinco primeiras medicións de cada bloque están asociadas a cinco variables explicativas que denotaremos por X_i , mentres que o derradeiro valor de cada bloque representará a variable resposta que denotaremos por Y . Evitamos desta forma unha certa correlación entre as variables de distintos bloques.

Traballaremos entón cunha mostra da forma $\{(x_i, y_i) \text{ con } i = 1, \dots, 240\}$ onde $x_i = (x_{1,i}, \dots, x_{5,i})$, é dicir, a variable resposta representará a medición de NO_x nun certo minuto e as variables explicativas representarán as medicións de NO_x nos cinco minutos anteriores. A partir deste momento referirémonos a $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{240}$ como **mostra base** e denotaremos por $n = 240$ ao tamaño da mostra.

Co cal axustaríamos o seguinte modelo de regresión cuantil ao noso conxunto de datos:

$$\hat{Y} = 0.0968 + 0.0689X_1 - 0.1845X_2 + 0.3028X_3 - 0.6002X_4 + 1.4039X_5 \quad (3)$$

que nos permite facer predicións para os datos minutais correspondentes aos cinco días seguintes ao día que constitúe a mostra base, que denotaremos por Día 1, Día 2, Día 3, Día 4 e Día 5. Este segundo conxunto de datos tamén o dividiremos en bloques de seis observacións.

Días	Erro absoluto medio		Erro cadrático medio	
	Reg. en mediana	Reg. en media	Reg. en mediana	Reg. en media
Día 1	1.1862	1.5424	7.2397	9.0471
Día 2	2.1723	2.8741	19.0459	26.1099
Día 3	2.8939	4.0431	67.4976	95.0486
Día 4	0.5594	1.7036	2.3484	4.8587
Día 5	0.3829	1.5046	0.8155	2.8479

Táboa 1: Erros de predición asociados ao modelo (3) de regresión en mediana e ao modelo análogo de regresión en media.

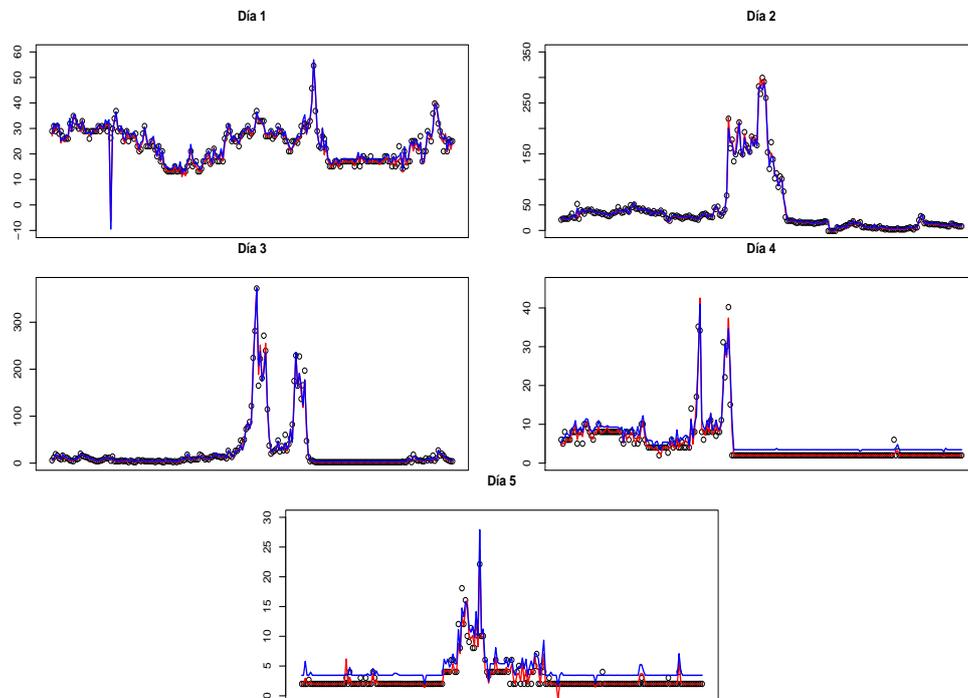


Figura 2: Representación da variable resposta Y xunto coas correspondentes predicións calculadas co modelo (3) de regresión en mediana (en cor vermella) e o modelo análogo de regresión en media (en cor azul) para cada un dos días de predición.

Na liña de coñecer como de ben se axusta o modelo (3) ao noso conxunto de datos, imos calcular o Erro Cadrático Medio (ECM) e o Erro Absoluto Medio (EAM) asociados ás predicións calculadas para os cinco días posteriores ao día sobre o cal se constrúe a mostra base. Recordemos que coñecida $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ unha mostra da variable resposta Y e $\{\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n\}$ as predicións calculadas grazas a un modelo de

regresión, entón pódense definir os erros de predición como:

$$\text{EAM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i - \hat{Y}_i| \quad \text{e} \quad \text{ECM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2.$$

Na Táboa 1 incluímos ademais os resultados análogos calculados para un modelo de regresión en media e poder así comparar ambos procedementos. Á vista da Táboa 1, é claro que o modelo de regresión en mediana aporta mellores resultados fronte á regresión en media, incluso en termos do erro cadrático medio. Outro aspecto que chama a atención é que se aprecian claras diferenzas entre os erros calculados para os diferentes días, isto depende en gran medida das concentracións de NO_x rexistradas no aire ao longo dos cinco días de estudo.

Para rematar co estudo do modelo (3), mostramos os valores medidos de concentración de NO_x xunto coas correspondentes predicións calculadas en base aos modelos de regresión en mediana e en media para os días: Día 1, Día 2, Día 3, Día 4 e Día 5. As representacións obtidas para cada uno dos días de estudo móstranse na Figura 2.

Bibliografía

- [1] Bahadur, R. R. (1966). *A note on quantiles in large samples*, The Annals of Mathematical Statistics, **37**, pp. 577–580.
- [2] Barrodale, I. e Roberts, F. D. K. (1973). *An improved algorithm for discrete L_1 linear approximation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **10**, pp. 839–848.
- [3] Koenker, R. e Bassett, G. (1978). *Regression quantiles*, Econometrica, **46**, pp. 33–50.
- [4] Koenker, R. e D'Orey, V. (1987). *Computing regression quantiles*, Journal of the Royal Statistical Society. Series C, **36**, pp. 383–393.
- [5] Tukey, J. W. (1965). *Which part of the sample contains the information*, Proceedings of the National Academy of Sciences, **53**, pp. 127–134.

Modeling and simulation of gas networks

Francisco José González Diéguez

Department of Applied Mathematics

30th April, 2014

Introduction

Due to their nature, gas transmission networks occupy vast expanses of land, which can be up to transnationals. They are generally managed by the technical system manager by means of different elements, namely, compressor stations, pressure control valves, flow control valves, closing valves, regasification plants, international connections, underground storages and deposit fields.

Consequently, efficient network management is not an easy task and it is therefore necessary to use a simulator. In this work we present the basis of a mathematical model which reproduces the physical behavior of the gas network in steady-state, as well as the technical features of the aforementioned elements, in order to develop this software tool.

Topology of the network

The first step is to model the topology of the network as a *direct graph*:

Definition 1. A *direct graph* \mathcal{G} is a pair of finite sets $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$, so that $\mathcal{E} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Thus, each element from \mathcal{E} is an ordered pair of elements from \mathcal{N} .

The elements from \mathcal{N} are called *nodes* and the ones from \mathcal{E} *edges*. Let us denote by n the number of nodes and by e the number of edges. Then, we can introduce the notation N_i for the node number i and E_j for the edge number j .

From this point forward we will use the *incidence matrix* of the direct graph, which is the matrix \mathcal{A} , with order $n \times e$, defined as follows:

$$\mathcal{A}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if the node } N_i \text{ does not belong to the edge } E_j, \\ 1 & \text{if the node } N_i \text{ belongs to the edge } E_j \text{ and is also the initial node,} \\ -1 & \text{if the node } N_i \text{ belongs to the edge } E_j \text{ and is also the final node.} \end{cases}$$

On one hand, the nodes will be: gas supply points; gas consumption points; underground storages; suction points or discharge points in a compressor station;

KEYWORDS: gas networks; simulation; compressible fluids models.

interconnection points among gas pipes; and points where the section of the gas pipe changes.

On the other hand, the edges will be: structural pipes between nodes; compressors, where each compressor links the suction node and the discharge node by a ratio of pressures of these nodes; Flow Control Valves (F.C.V.), where the mass flow of the pipe is imposed; closed closing valves, where the mass flow is zero; bypass or opened closing valves; and Pressure Control Valves (P.C.V.), which link the two nodes of the edge by a ratio of pressures of these nodes.

Mathematical model of gas transmission networks

The second step is to build the mathematical model which allows us to simulate the gas transmission through the network. Initially, the *unknowns* of the model could be:

1. The *square pressure* [Pa²] at **nodes**: $\{u_i : i = 1, \dots, n\}$. Let us denote by \mathbf{u} the column vector of n components:

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^t.$$

2. The *exchanged mass flow rate* [kg/s] with the exterior at **nodes**: $\{c_i : i = 1, \dots, n\}$. Let us denote by \mathbf{c} the column vector of n components:

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^t.$$

3. The *mass flow rate* [kg/s] at **edges**: $\{q_j : j = 1, \dots, e\}$. Let us denote by \mathbf{q} the column vector of e components:

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_e)^t.$$

Remark 2. *The kinds of unknowns at nodes are reciprocally; that is to say, one of them can be computed but the other one must be imposed. For example: if the pressure is imposed at a certain node, the unknown will be the exchanged mass flow with the exterior. If the exchanged mass flow with the exterior is imposed at a certain node, the unknown will be the pressure at this node.*

At this point, there are two families of equations to be applied: the *conservation of mass* at the nodes and the *pressure loss* at the edges.

Conservation of mass

It establishes that, at any node, the sum of the ingoing mass flows must be equal to the sum of outgoing mass flows. Thanks to the incidence matrix of the graph which represents the network, \mathcal{A} , it is written in compact form as,

$$\mathcal{A}\mathbf{q} = \mathbf{c}, \tag{1}$$

Since it is a steady-state model, notice that $\sum_i^n c_i = 0$.

Pressure loss

It establishes that it exists a pressure loss lengthwise of a pipe, mainly due to viscous stress (friction with the walls of the pipe), which can be computed with the following function:

$$G_j(u_{ini(j)}, u_{fin(j)}, q_j) = \frac{16L_j R}{\pi^2 D_j^5} \theta_a Z(\sqrt{u_a}, \theta_a) \lambda(|q_j|) |q_j| q_j \\ + \frac{2g}{R\theta_a} \frac{u_a}{Z(\sqrt{u_a}, \theta_a)} (H_{fin(j)} - H_{ini(j)}),$$

where $u_{ini(j)}$ and $u_{fin(j)}$ are, respectively, the square pressure at beginning and at the end of the pipe, u_a is the *average square pressure*, q_j is mass flow rate of the pipe, θ_a is the *average absolute temperature* [K], $H_{ini(j)}$ and $H_{fin(j)}$ are, respectively, the heights [m] at the beginning and at the end of the pipe, g is the force of gravity [m/s²], R is the *gas constant* [J/(kg K)], L_j and D_j are, respectively, the length [m] and the diameter [m] of the section of the pipe, $\lambda(|q_j|)$ is the *Darcy friction factor* [dimensionless], and $Z(\sqrt{u_a}, \theta_a)$ is the *compressibility factor* [dimensionless] of the gas.

In other words, the first term of the above function tells how the physical parameters of the pipe (that is, diameter, length and roughness) affect to the pressure loss, whereas the second term adds the pressure loss due to the difference of heights at the ends. Implicitly, the properties of the gas appear in both terms.

For the sake of simplicity, we are going to use a change of variable $\mu(q_j) = \lambda(|q_j|) |q_j| q_j$ [kg²/s²], yielding

$$G_j(u_{ini(j)}, u_{fin(j)}, q_j) = \frac{16L_j R}{\pi^2 D_j^5} \theta_a Z(\sqrt{u_a}, \theta_a) \mu(|q_j|) \\ + \frac{2g}{R\theta_a} \frac{u_a}{Z(\sqrt{u_a}, \theta_a)} (H_{fin(j)} - H_{ini(j)}). \quad (2)$$

Let us now define the elements used in the equation and not presented above. The average square pressure u_a and the average absolute temperature θ_a are recommended to be computed as follows:

$$u_a := \frac{2}{3} \left(u_{ini(j)} + u_{fin(j)} - \frac{u_{ini(j)} u_{fin(j)}}{u_{ini(j)} + u_{fin(j)}} \right), \quad \theta_a := \frac{\theta_{ini(j)} + \theta_{fin(j)}}{2}.$$

The gas constant is defined by

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M},$$

where \mathcal{R} is the universal gas constant, $\mathcal{R} = 8314.34$ [J/(k-mol K)], and M is the molar mass [kg/k-mol].

The compressibility factor Z can be determined using different equations. The AGA8 model is an empirical equation proposed by the American Gas Association [4]:

$$Z = Z(p, \theta) = 1 + p_r 0.257 - 0.533 \frac{p_r}{\theta_r},$$

being $p_r := p/p_c$ and $\theta_r := \theta/\theta_c$, and p_c and θ_c the *critical pressure* and the *critical temperature*. Another model to calculate the compressibility factor is known as SGERG88, which is contained in the ISO 12213–3:2006 [5].

Finally, our modified version of the Darcy friction factor is computed with two different equations depending on the regime of the fluid (notice that the gas is modeled as *compressible fluid* [1]). The *laminar regime* equation is a direct consequence of the *Poiseuille equation*

$$\mu = \lambda |q| q = 16\pi D \eta q,$$

and the Colebrook equation [2] is employed for the *turbulent regime*:

$$\frac{|q|}{\sqrt{|\mu|}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51 \pi D \eta}{4 \sqrt{|\mu|}} + \frac{k}{3.7D} \right),$$

where η the dynamic viscosity [Pa · s] of the gas and k is the roughness coefficient [m] of the pipe.

As we have seen, the edges can be different type of pipes. Above we have presented the pressure loss equation for structural pipes and below we will define the pressure loss equations for the others types.

- Compressors or pressure control valves:

$$G_j(u_{ini(j)}, u_{fin(j)}, q_j) = u_{ini(j)} \left(1 - \frac{u_{fin(j)}}{u_{ini(j)}} \right). \quad (3)$$

- Bypasses or opened closing valves:

$$G_j(u_{ini(j)}, u_{fin(j)}, q_j) = 0. \quad (4)$$

Remark 3. *The mass flow rate at the flow control valves and at the closed closing valves is imposed. Therefore, the pressure loss at these edges is free and it will be given as result of the pressure computed at the nodes by means of the other edges.*

Matrix system

All the equations of the model that we have just defined are collected in a matrix system. Notice that it is a nonlinear system because of the term involving the pressure loss:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ G(\mathbf{u}, \mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Remark 4. *In order to guarantee uniqueness of solution, it is mandatory to impose the pressure at least at one node.*

Solver

Due to the nonlinearity of the matrix system, it can be solved with iterative methods. In our case we use a Newton-like algorithm, represented by

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{m+1} &= \mathbf{u}^m - \delta\mathbf{u}^m, \\ \mathbf{q}^{m+1} &= \mathbf{q}^m - \delta\mathbf{q}^m,\end{aligned}\quad (6)$$

where $\delta\mathbf{u}^m$ and $\delta\mathbf{q}^m$ are the solution of the linear system with symmetric matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{u}^m, \mathbf{q}^m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{u}^m \\ \delta\mathbf{q}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\mathbf{q}^m - \mathbf{c} \\ \mathcal{A}\mathbf{u}^m - G(\mathbf{u}^m, \mathbf{q}^m) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Thanks to the matrix properties of this linear system, it can be solved with *LU factorization*.

Compressor stations

The compressor stations need a source of energy to work, which is generally the gas itself that is in the network. Then, on top of the mathematical model, we have built another model to reproduce the self-consumption in the compressor stations. This model mainly refers to the following equation:

$$Q = \frac{1}{\varepsilon LCV} \frac{\gamma}{\gamma - 1} Z(\sqrt{u_{ini}}, \theta_{ini}) R\theta_1 \left(\left(\frac{u_{fin}}{u_{ini}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) q \quad [\text{kg/s}], \quad (8)$$

being *LCV* [J/kg] the lower calorific value, γ the ratio of specific heats [dimensionless] and ε a factor of efficiency involving the isentropic efficiency of the process and the mechanical efficiency of the compressor.

Conclusions

We have just presented a way to build a mathematical model which reproduces the physical behavior of the gas network in steady-state. On top of that, we have developed a procedure to calculate the self-consumption in the compressor stations.

The computer implementation of this work, along with a graphical user interface and an input/output data file system, yields the simulation module of a software called GANESOTM, which stands for *GAs Network Simulation and Optimization*.

References

- [1] Bermúdez, A. (2005). *Continuum Thermomechanics*, Birkhäuser.

- [2] Colebrook, C. F. (1939). *Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between smooth and rough pipe laws*, Journal of the Institution of Civil Engineers.
- [3] Osiadacz, A. J. (1987). *Simulation and Analysis of Gas Networks*, Gulf Publishing Company.
- [4] American Gas Association (1992). *AGA Report 8: Compressibility Factors of Natural Gas and Other Related Hydrocarbon Gases*.
- [5] ISO 12213-3 (2006). *Natural gas – Calculation of compression factor – Part 3: Calculation using physical properties*.

Optimización de redes de transporte de gas

Ángel Manuel González Rueda

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

14 de mayo de 2014

Resumen

La gestión eficiente de las redes de transporte de gas es uno de los objetivos promovidos por la Unión Europea con sus políticas energéticas. La presión del gas que fluye por la red disminuye debido a la fricción con las tuberías por lo que para contrarrestar la pérdida de presión, se emplean compresores que consumen cierta proporción del gas.

Se formalizará el problema de optimización asociado al transporte de gas por la red garantizando la seguridad de suministro atendiendo a diversos objetivos, como minimizar los autoconsumos de los compresores. Para ello se presentarán dos enfoques, uno basado en técnicas de programación lineal sucesiva y otro en técnicas de teoría de control.

Problemas de programación matemática

Los elementos fundamentales en un problema de optimización son: la función objetivo o función de coste, las variables y las restricciones. La formulación general de un problema de optimización es:

minimizar $f(\mathbf{x})$ bajo las restricciones:

de cota, $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n;$

funcionales de desigualdad, $g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, m;$

funcionales de igualdad, $h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, l,$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ es el vector de las variables.

Cuando las funciones f , g y h son funciones lineales (no lineales) diremos que se trata de un problema de programación lineal (no lineal). Los problemas lineales son fáciles de resolver y se suele emplear para ello el método del simplex. Si además imponemos que $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$, entonces tendremos un problema de programación lineal entera, el cual ya resulta más complejo de resolver.

PALABRAS CLAVE: optimización; redes de gas; programación lineal sucesiva; teoría de control.

Optimización de redes de transporte de gas

En esta sección presentaremos todos los elementos necesarios para modelar el problema asociado a la optimización de redes de transporte de gas, que asumiremos se encuentra en estado estacionario. Modelaremos la red mediante un grafo dirigido $G = (N, A)$, donde N representa el conjunto de nodos y A el conjunto de aristas.

Denotaremos por N^c los nodos de consumo y por N^s los nodos de suministro. En cuanto a las aristas, que representarán los gasoductos de la red, tendremos los siguiente tipos: A^n (aristas normales), A^c (aristas compresoras), A^{pcv} (aristas con válvulas de control de presión), A^{vc} (aristas con válvulas de cierre) y A^{vr} (aristas con válvula de regulación).

Los parámetros que conoceremos asociados a cada nodo $i \in N$ son: la presión mínima y máxima (\underline{p}_i y \bar{p}_i), el consumo o capacidad fijo (c_i , si es positivo denota consumo sino emisión), las cotas del consumo/capacidad variable (\underline{c}_i y \bar{c}_i), la altura geográfica a la que está ubicado (h_i) y la temperatura (T_i).

En cada nodo tendremos una variable p_i^{sq} , que denotará la presión (al cuadrado) a la que circula el gas en el nodo $i \in N$.

Por otro lado, los parámetros conocidos asociados a cada arista $k \in A$ son los siguientes: la longitud (L_k), el diámetro (D_k), la fricción efectiva (λ_k , que se puede calcular con la ecuación de Weymouth o Colebrook) y el caudal mínimo y máximo que puede circular (\underline{q}_k , \bar{q}_k). Además, para cada arista compresora $k \in A^c$, conoceremos su eficiencia (e_k). Denotaremos por $p_{m_k} = \frac{p_i + p_j}{2}$ la presión media en la arista $k = (i, j) \in A$.

Las variables que tendremos asociadas a las aristas son: q_k , $k \in A$ (el caudal que circula por cada arista), g_k , $k \in A^c$ (el consumo de gas en cada arista compresora) y $\alpha_k^2 = \frac{p_j^{sq}}{p_i^{sq}}$, $k = (i, j) \in A^c$ (la razón de compresión de cada arista compresora).

En cuanto a las propiedades del gas es necesario tener en cuenta las siguientes: constante de nuestro gas (R), la presión y temperatura crítica (p^c y T^c), el coeficiente adiabático (γ) y el factor de compresibilidad ($Z(p, T)$, que se puede calcular según AGA8 o SGERG-88).

En el problema de optimización asociado a redes de transporte de gas pueden considerarse diferentes criterios a la hora de optimizar. Lo más habitual es minimizar el autoconsumo de los compresores. Otras posibles funciones objetivo podrían ser: minimizar el autoconsumo de las plantas de regasificación (boil-off) o maximizar la exportación/importación en una determinada zona de la red. Cabe destacar que siempre se debe garantizar la seguridad de suministro (es decir, que a los consumidores les llegue el gas requerido).

Las restricciones que intervienen en el problema de forma general son las siguientes: cotas superiores e inferiores sobre los caudales y presiones, restricción de conservación de la masa, restricción de pérdida de carga, restricciones asociadas a las estaciones de compresión (razón de compresión y rangos de operación) y restricciones asociadas a las válvulas (razón de descompresión).

Programación lineal sucesiva

El problema de optimización de redes de transporte de gas, formulado como un problema de programación no lineal, sería el siguiente:

Objetivo : $\min \sum_{k \in A^c} g_k$.

Restricciones de cota:

$$p_i^2 \leq p_i^{sq} \leq \bar{p}_i^2, \quad \forall i \in N \text{ (cotas para las presiones),}$$

$$\Delta_k \geq 0, \quad \forall k \in A^c \text{ (incrementos de presión no negativos),}$$

$$q_k \leq q_k \leq \bar{q}_k, \quad \forall k \in A \text{ (cotas para los caudales).}$$

Restricciones de conservación de flujo:

$$\sum_{k \in A_i^{ini}} q_k - \sum_{k \in A_i^{fin}} q_k = c_i, \quad \forall i \in N^C \text{ (conserv. flujo nodos consumo),}$$

$$c_i \leq \sum_{k \in A_i^{ini}} q_k - \sum_{k \in A_i^{fin}} q_k \leq \bar{c}_i, \quad \forall i \in N^S \text{ (restric. flujo nodos suministro).}$$

Restricción de pérdida de carga:

$$p_i^{sq} - p_j^{sq} = \frac{16L_k \lambda_k}{\pi^2 D_k^5} Z(p_{m_k}, T_m) RT_m |q_k| q_k \quad \forall k = (i, j) \in A^n \text{ (pérdida de carga),}$$

$$+ \frac{2g}{RT_m} \frac{p_i^{sq} + p_j^{sq}}{2Z(p_{m_k}, T_m)} (h_j - h_i), \quad \text{(sum. relativo dif. de alturas).}$$

Restricciones de compresores:

$$g_k = \frac{1}{e_h H^c} \frac{\gamma}{\gamma - 1} Z(p_{m_k}, T_i) RT_i \left(\left(\frac{p_j^{sq}}{p_i^{sq}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) q_k, \quad \forall k = (i, j) \in A^c \text{ (gas cons.),}$$

$$\Delta_k = p_j^{sq} - p_i^{sq}, \quad \forall k = (i, j) \in A^c \text{ (Inc. presión).}$$

Además de estas restricciones faltarían por incluir aquellas asociadas a las válvulas y los rangos de operación, las cuales requieren la inclusión de variables binarias en el problema.

Una técnica muy utilizada en la literatura para resolver problemas de programación no lineal es la programación lineal sucesiva (S.L.P., Sequential Linear Programming). Dicho algoritmo nos permite, partiendo de un punto inicial, ir linealizando el problema de partida sucesivamente de forma que en cada iteración tengamos que resolver un problema de programación lineal, el cual puede ser resuelto de forma eficiente.

Supongamos que partimos de un valor conocido para las variables x^{it} (it denota la iteración). Se trata de ir resolviendo sucesivamente el problema de programación

lineal $LP(x^{it})$:

minimizar $\nabla f(x^{it})^t x$ bajo las restricciones:

de desigualdad, $g_j(x^{it}) + \nabla g_j(x^{it})^t (x - x^{it}) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$,

de igualdad, $h_j(x^{it}) + \nabla h_j(x^{it})^t (x - x^{it}) = 0$, $j = 1, \dots, l$,

lineales, $x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Denotemos por x_{sol}^{it} la solución del problema $LP(x^{it})$. El siguiente paso sería actualizar el punto con el que linealizaremos las restricciones,

$$x^{it+1} = \gamma x^{it} + (1 - \gamma) x_{sol}^{it}, \quad \gamma \in [0, 1]$$

y resolveríamos $LP(x^{it+1})$. El algoritmo continuaría iterativamente hasta que se alcanzase el número máximo de iteraciones preestablecido o se verificase algún criterio de convergencia. Un criterio habitual de convergencia es que $\|x_{sol}^{it} - x^{it}\|_2 < \epsilon$, siendo ϵ un valor pequeño.

En nuestro problema tendríamos $x = (p, q, g)$, donde $p = (p_i^{sq})_{i \in N}$ serían el cuadrado de las presiones, $q = (q_k)_{k \in A}$ los caudales y $g = (g_k)_{k \in A^c}$ los autoconsumos en los compresores. En nuestro caso tendríamos dos grupos de restricciones no lineales de igualdad, las restricciones de pérdida de carga y las del autoconsumo en los compresores. Aplicando el desarrollo de Taylor de orden 1 en torno a $x^0 = (p^0, q^0, g^0)$ las restricciones quedarían:

$$p_j^{sq} - p_i^{sq} + 2C_1 |q_k^0| q_k - C_1 |q_k^0| q_k^0 + C_2 = 0, \quad \forall k = (i, j) \in A^n \quad (\text{pérdida de carga}),$$

$$C_3 \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) |q_k^0| ((p_i^{sq})^0)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} ((p_j^{sq})^0)^{\frac{-1-\gamma}{2\gamma}} p_j^{sq} + C_3 \left(\frac{1-\gamma}{2\gamma} \right) |q_k^0| ((p_i^{sq})^0)^{\frac{1-3\gamma}{2\gamma}} ((p_j^{sq})^0)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} p_i^{sq} \\ + \text{signo}(q_k^0) C_3 \left(\left(\frac{(p_j^{sq})^0}{(p_i^{sq})^0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) q_k - g_k = 0, \quad \forall k = (i, j) \in A^c \quad (\text{gas consumido}),$$

donde $C_1 = \frac{16L_k \lambda_k^0}{\pi^2 D_k^5} Z(p_{m_k}^0, T_{m_k}) RT_{m_k}$, $C_2 = \frac{2g}{RT_m} \frac{(p_{m_k}^0)^2}{Z(p_{m_k}^0, T_{m_k})} (h_j - h_i)$ y $C_3 = \frac{1}{\epsilon_k H^c} \frac{\gamma}{\gamma-1} Z(p_i^0, T_i) RT_i$.

Teoría de control

Este enfoque es habitualmente empleado cuando la optimización se aplica a un sistema físico cuyo estado está caracterizado por los valores de ciertas magnitudes llamadas variables de estado. En este modelo matemático tendremos la denominada ecuación de estado que nos permite calcular las variables de estado en función de una elección concreta de las variables de diseño. Dicho de forma simplificada, conocido un pequeño número de variables, la ecuación de estado nos permite saber cómo se propagan las presiones y caudales por el resto de la red.

Se consideran como variables de diseño en nuestro problema: la razón de compresión en cada estación de compresión (α), la razón de descompresión en las válvulas

de control de presión (β), los caudales máxicos suministrados a la red (C_S), la presión fijada en ciertos nodos del grafo (π , al menos se debe imponer la presión en un nodo de cada componente conexas) y el caudal máxico en cada válvula de control de flujo (q_V).

Por otro lado, las variables de estado del problema son: las presiones en los nodos donde no se impone la presión ($p = \hat{p}(\alpha, \beta, \pi, C_S, q_V)$), los caudales máxicos en las aristas salvo donde se impone el flujo ($q = \hat{q}(\alpha, \beta, \pi, C_S, q_V)$) y los caudales máxicos intercambiados con el exterior en los puntos donde se impone la presión ($c = \hat{c}(\alpha, \beta, \pi, C_S, q_V)$).

La ecuación de estado comprende las restricciones de conservación de la masa, de pérdida de carga y las que regulan los saltos de presiones en la red (compresores y válvulas). Se puede representar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F(p_i, p_j, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde \mathcal{A} es la matriz de incidencia del grafo y $F(\cdot)$ representa las restricciones:

$$\begin{aligned} F(p_i, p_j, q_k) = p_i^{sq} - p_j^{sq} &= \frac{16L_k\lambda_k}{\pi^2 D_k^5} Z(p_{m_k}, T_m) RT_m |q_k| q_k \\ &+ \frac{2g}{RT_m} \frac{p_{m_k}^{sq}}{Z(p_{m_k}^{sq}, T_m)} (h_j - h_i) \quad (\text{pérdida de carga}), \\ F(p_i, p_j, q_k) = p_i^{sq} - p_j^{sq} &= (1 - \alpha^2) p_i^{sq} \quad (\text{compresor o válvula de control de presión}). \end{aligned}$$

El problema de optimización resultante sería:
Minimizar el consumo energético necesario para la compresión en términos de gas consumido (ψ):

$$\text{mín } \psi(\alpha, \beta, \pi, C_S, q_V) = \phi(\alpha, \hat{p}(\alpha, \beta, \pi, C_S, q_V), \hat{q}(\alpha, \beta, \pi, C_S, q_V)).$$

Restricciones de cota:

$$\begin{aligned} \underline{p}^2 &\leq p^{sq} \leq \bar{p}^2, & (\text{cotas para las presiones}), \\ \underline{q} &\leq q \leq \bar{q}, & (\text{cotas para los caudales}), \\ \underline{c} &\leq c \leq \bar{c}, & (\text{cotas para los caudales}). \end{aligned} \tag{1}$$

Restricciones generales:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^2)q &\leq 0, & (\text{compresión a favor de caudal}), \\ (\beta^2 - 1)q &\leq 0, & (\text{descompresión a favor de caudal}). \end{aligned}$$

Faltarían por incluir las restricciones adicionales referidas a los rangos de operación de las estaciones de compresión que determinan cómo debe actuar cada compresor.

Además, merece la pena mencionar que este enfoque posee un modelado más preciso de las restricciones físicas asociadas.

Aplicación sobre la red de gas española

Se ha desarrollado un software llamado Ganeso (GAs NETwork Simulation and Optimization) que permite la optimización de redes de transporte de gas empleando las metodologías presentadas. La forma habitual de proceder es combinando ambas metodologías. En una primera etapa se aplica el enfoque de programación lineal sucesiva, lo cual proporciona una cierta configuración inicial de la red. Posteriormente se utiliza el enfoque de teoría de control para refinar la solución obtenida y garantizar que la solución verifique con exactitud las restricciones físicas del problema.

En la figura 1 se puede ver un ejemplo sobre la red de gas española, donde hemos considerado un reparto de consumos de acuerdo a un día laborable de enero de rango bajo. A la izquierda se presenta la red sin optimizar mientras que a la derecha aparece la red optimizada.



Figura 1: Ejemplo sobre la red de transporte de gas española.

Como podemos observar mientras que en la red sin optimizar se activaban hasta 4 estaciones de compresión (en color morado), en la red optimizada sólo se activa la estación de Almendralejo. En la tabla 2 se puede comprobar cómo se han reducido los costes de compresión (en términos de gas consumido) cuando se gestiona la red de forma optimizada.

[GWh/día]	Sin opt.	Con opt.
Alcazar	0.2909	0
Almendralejo	0.2650	0.1587
Tivisa	0.2229	0
Zamora	0.1516	0
TOTAL	0.9304	0.1587

Tabla 2: Autoconsumos en las estaciones de compresión.

Cabe destacar que las emisiones de los puntos de suministro también han variado la cantidad de gas introducido en la red.