L. Búa
A. Fernández Tojo
E. García Portugués
A. Gómez González

EDITORES

As matemáticas do veciño

Actas do Seminario de Iniciación á Investigación

2012

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Actas do Seminario

de

Iniciación á Investigación

ANO 2012

Editores:
Lucía Búa Devesa
Adrián Fernández Tojo
Eduardo García Portugués
Ana Gómez González

© 2012 Seminario de Iniciación á Investigación.
Instituto de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela

Coordina:
Seminario de Iniciación á Investigación (SII)
seminarios3c@gmail.com

Edita:
Instituto de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime:
DISERGAL S. Coop. Galega
C/ Panasqueira, 1-5
15895 Milladoiro - Ames
A Coruña

ISSN: 2171-6536
Depósito Legal: C 452-2013

A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

G. H. Hardy (1877–1947),
A Mathematician's Apology (1941).

Un matemático francés de tiempos pasados dijo: "Una teoría matemática no debe ser considerada completa hasta que sea tan clara de entender que pueda ser explicada al primer hombre que pase por la calle".

David Hilbert (1862–1943),
Discurso para el ICM de 1900.

Prefacio

"As ciencias teñen as raíces amargas,
pero moi doces os froitos".
Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.).

Esta oitava edición do Seminario de Iniciación á Investigación conta, unha vez máis, con extraordinarias achegas dos investigadores en formación da nosa Facultade. Nelas apreciamos o gusto polo traballo ben feito, a satisfacción polo esforzo realizado, o goce do descubrimento de novos resultados e o entusiasmo pola transmisión destes a outros investigadores.

A procura da verdade, a loita, a conquista, a perseveranza, son, entre outras, as sinais de identidade que definen a investigación matemática, pero ante todo a ilusión e as gañas de coñecer, comprender e predicir a realidade que nos rodea. A paixón coa que abordamos os problemas abertos, converténdoos en retos a superar, é a característica que define o traballo matemático. Os traballos aquí recompilados son unha boa mostra diso.

Na vida cotiá, ás ensinanzas dos nosos pais súmanse, xunto coa experiencia propia, as dos nosos irmáns e amigos e, máis tarde, as dos nosos fillos. Do mesmo xeito, a aprendizaxe científica, nun proceso sempre por rematar, comeza cos nosos mestres, segue cos nosos compañeiros e remata cos nosos estudantes. Sempre hai enfoques novos nos que non repararamos, problemas en aparencia pechados nos que xorden novos puntos de vista. Este intercambio de información entre os investigadores novos axuda a tender pontes entre as distintas liñas de investigación para que todos poidamos coñecer parte do traballo que estimula e motiva aos demais. Compartir estas experiencias é dunha gran axuda para manter viva a colaboración desde os distintos ámbitos da Matemática e para que os novos talentos poidan abordar con éxito os problemas abertos aos que a ciencia en xeral, e as matemáticas en particular, deberán dar resposta nun futuro máis ou menos inmediato.

Non me resta máis que felicitar a todos aqueles que dalgún xeito contribuíron á realización deste seminario e á edición destas actas. Deséxolles a todos eles unha longa e fructífera carreira científica. Sen dúbida, son estes os doces froitos dos que falaba Aristóteles, imaxino canto de amargas foron as súas raíces.

Santiago de Compostela, 10 de xaneiro de 2013.

Alberto Cabada Fernández

Índice xeral

Introdución **1**

Óscar Domínguez Bonilla
"Teoría de interpolación en espacios de Banach" **3**

Manuel Moreira
"Foliated cobordism and the Godbillon–Vey invariant" **7**

María Teresa Cao Rial
"Detección de grietas en estructuras con FEM y XFEM" **11**

María Oliveira Pérez
"Estimación núcleo da densidade circular" **15**

Pablo Venegas
"An a posteriori error estimator for an unsteady problem" **19**

Adrián Fernández Tojo
"Dinámica evolutiva en grafos" **23**

Pedro González de Alaiza Martínez
"Introducción al método de volúmenes finitos" **27**

Juan Carlos González Aguirre
"Simulación numérica de inundaciones en la ciudad de Villahermosa" **31**

Eduardo García Portugués
"Directional–linear kernel density estimator" **35**

Lucía Búa Devesa
"Simetrías y leyes de conservación en el formalismo Lagrangiano k–simpléctico" **39**

Borja Raúl Lafuente Rego
"Modelos de series de tiempo con covariables. Aplicación a datos financieros" **43**

Héctor Barge Yáñez
"Introducción al estudio topológico de flujos" **47**

Roger Casals
"Flexibility in geometric structures" **51**

Paula Saavedra Nieves
"Automatic set estimation methods" **55**

Miguel Domínguez Vázquez
"Ecuacións con simetría" **59**

Introdución

O presente volume contén os resumos das charlas que se impartiron ao longo do ano 2012 no Seminario de Iniciación á Investigación (SII). Tal seminario, organizado por alumnos de doutoramento, ten lugar na Facultade de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela e encádrase dentro das actividades do Instituto de Matemáticas.

O SII ten a súa orixe a comezos do ano 2005, como unha iniciativa dos alumnos de Terceiro Ciclo da Facultade e como resposta ás necesidades de crear un seminario que cumprise, cando menos, os seguintes obxectivos:

1. Fomentar o intercambio de coñecemento.
2. Proporcionar un lugar onde dar a coñecer os campos nos que cada un centra as súas investigacións.
3. Facilitar a práctica de falar en público, máis en concreto dar charlas e afacerse a escoitar e participar activamente neste tipo de eventos.
4. Proporcionar un marco onde se poidan levar a cabo as actividades necesarias para que cada quen saiba explicar as ideas fundamentais dos seus traballos incluso a persoas non especialistas no seu campo.

Por oitavo ano consecutivo o SII acadou estes obxectivos básicos e ademais proporcionou un marco de intercambio de coñecemento entre alumnos dos distintos departamentos da Facultade. As charlas desenvolvéronse, salvo algunhas excepcións, de forma quincenal ao longo de dous períodos: un primeiro desde marzo ata xullo, e un segundo desde outubro ata decembro.

No referente á organización do SII, en 2012 tivo un novo comité organizador, formado por catro estudantes de doutoramento, que se encargaron tanto da coordinación do evento en si: calendario de charlas, anuncio das mesmas, reserva de aula, proporcionar o material necesario ao poñente, etc.; como da publicación deste anuario, onde se recolle un resumo de cada unha das charlas impartidas. Este mesmo comité organizador encargouse da confección deste volume e figura nel como comité editorial. Ademais é importante salientar que cada un dos resumos aquí recollidos pasou un proceso de revisión por parte dun alumno de Terceiro Ciclo, polo xeral dun departamento distinto ao do autor, co obxectivo de que así os resumos sexan comprensibles por aqueles que non son expertos no campo correspondente.

Agradecementos

Quixeramos mencionar neste apartado que a organización do seminario tería sido, sen dúbida, moito máis difícil de non contarmos coa colaboración desinteresada de moita xente.

En primeiro lugar, os membros do comité organizador do SII deste último ano queremos agradecer aos membros do comité do ano anterior os consellos que nos prestaron, o empuxe para seguir organizando este seminario e o legado que nos deixaron.

Desexamos tamén dar as grazas a todos os que participaron no SII como oíntes, e moi especialmente aos poñentes e aos compañeiros que participaron no proceso de arbitraxe: Héctor Barge, Lucía Búa, Teresa Cao, Roger Casals, Miguel Domínguez, Oscar Domínguez, Adrián Fernández, Eduardo García, Ana Gómez, Juan Carlos González, Pedro González, Borja Lafuente, Manuel Moreira, María Oliveira, Paula Saavedra e Pablo Venegas.

Agradecémoslle de xeito moi especial a Alberto Cabada, director do Departamento de Análise Matemática, a súa desinteresada colaboración na elaboración destas actas mediante a redacción do prefacio.

Finalmente, queremos comentar que o comité organizador do SII vai ser renovado parcialmente este ano 2013. Gustaríanos aproveitar a ocasión, polo tanto, para desexarlle ao novo comité moita sorte na súa tarefa de seguir levando adiante este Seminario.

Santiago de Compostela, febreiro de 2013.

O Comité Editorial.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Teoría de interpolación en espacios de Banach

Óscar Domínguez Bonilla
Departamento de Análisis Matemático (Universidad Complutense de Madrid)

27 de marzo de 2012

Sea el operador integral

$$T_K f(x) := \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy$$

para $x \in \Omega$, siendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto. Supongamos que el núcleo integral K satisface ciertas propiedades de regularidad de modo que el operador T_K está definido

$$T_K : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \text{ y } T_K : L_1(\Omega) \to L_\infty(\Omega).$$

Surgen de este modo preguntas naturales, ¿podemos extender T_K a otros espacios L_p? y en caso afirmativo, ¿qué relación habrá entre ellos?

Teorema 1. (Teorema de Riesz–Thorin). *Sean (U,μ) y (V,ν) espacios de medida $\sigma-$finitos. Supongamos que $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ y sea T un operador lineal que envía $L_{p_0}(U) + L_{p_1}(U)$ en $L_{q_0}(V) + L_{q_1}(V)$ tal que las restricciones*

$$T : L_{p_0}(U) \to L_{q_0}(V) \text{ y } T : L_{p_1}(U) \to L_{q_1}(V)$$

son acotadas con normas M_0 y M_1, respectivamente. Tomemos $0 < \theta < 1$ y sean $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$. Entonces, el operador

$$T : L_p(U) \to L_q(V)$$

es acotado con norma $M \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Esencialmente, el teorema de Riesz–Thorin establece que teniendo información acerca del comportamiento en los puntos extremales $(1/p_0, 1/q_0)$, $(1/p_1, 1/q_1)$, nos proporcionan información sobre el comportamiento en todos los puntos del segmento rectilíneo que los conecta. Este resultado también recibe el nombre de teorema de convexidad, pues aserta que la aplicación

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \to \log \|T : L_p \to L_q\|$$

Palabras Clave: espacios $L_{p,\,q}$, K–funcional de Peetre, interpolación real, interpolación compleja.

es convexa.

La *reordenada no creciente* de una funcion medible $f : U \to \mathbb{R}$ es la función $f^* : (0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por

$$f^*(t) := \text{ínf}\{\delta > 0 : \mu(x : |f(x)| > \delta) \leq t\}.$$

Tomemos $1 \leq p \leq \infty$. Los espacios L_p*–débiles* o *espacios de Marcinkiewicz* $L_{p,\infty}(U) = L_{p,\infty}$ consisten en todas las (clases de equivalencia) funciones μ–medibles $f : U \to \mathbb{C}$ tales que la cuasi–norma

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{t \geq 0} \left\{ t^{1/p} f^*(t) \right\}$$

es finita. Es evidente que el espacio L_p está inyectado continuamente en el espacio $L_{p,\infty}$.

Ahora ya podemos establecer el

Teorema 2. (Teorema de Marcinkiewicz). *Supongamos dados* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ *con* $q_0 \neq q_1$ *y sea* T *un operador lineal tal que las restricciones*

$$T : L_{p_0} \to L_{q_0,\infty} \, y \, T : L_{p_1} \to L_{q_1,\infty}$$

son acotadas con normas M_0 *y* M_1*, respectivamente. Dado* $0 < \theta < 1$*, definimos los parámetros* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$*. Si* $p \leq q$ *entonces el operador* $T : L_p \to L_q$ *es acotado con norma* $M \leq c\, M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$*, siendo* c *una constante positiva que no depende de* T*.*

Esencialmente, el teorema de Marcinkiewicz establece que teniendo información acerca del comportamiento débil en los puntos extremales $(1/p_0, 1/q_0)$, $(1/p_1, 1/q_1)$, nos proporcionan información fuerte sobre el comportamiento en todos los puntos del segmento rectilíneo que los conecta.

A partir de 1960 la estrategia a seguir consistió en intentar extender estos teoremas de convexidad para espacios de funciones L_p a espacios de Banach arbitrarios. Es así cómo surge la teoría de interpolación en espacios de Banach, debida, esencialmente, a importantes resultados obtenidos por Aronszajn, Gagliardo, Calderón, Kreĭn, Lions y Peetre entre otros.

A continuación vamos a describir brevemente los dos métodos más populares en interpolación: el *método real* y el *método complejo*. Mientras que el primero extiende el teorema de Marcinkiewicz, el segundo extenderá el teorema de Riesz–Thorin.

Un *par compatible* $\overline{A} = (A_0, A_1)$ son dos espacios de Banach inyectados continuamente en un mismo espacio vectorial topológico separado $\mathcal{A}$. Pongamos

$$A_0 + A_1 := \{a \in \mathcal{A} : a = a_0 + a_1 \, , \, a_j \in A_j \, , \, j = 0, 1\}$$

y

$$A_0 \cap A_1 := \{a \in \mathcal{A} : a \in A_0 \, , \, a \in A_1\}$$

dotados de las normas usuales

$$\|a\|_{A_0+A_1} := \text{ínf}\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\,,\, a_j \in A_j\,,\, j = 0,1\}$$

y

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} := \text{máx}\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\},$$

respectivamente. Resulta evidente que $A_0 + A_1$ y $A_0 \cap A_1$ son espacios de Banach tales que

$$A_0 \cap A_1 \subseteq A_j \subseteq A_0 + A_1\,,\, j = 0,1.$$

Un espacio de Banach A es *intermedio* respecto al par $\overline{A}$ si

$$A_0 \cap A_1 \subseteq A \subseteq A_0 + A_1.$$

El *K–funcional de Peetre* viene dado por

$$K(t,a) := \text{ínf}\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\,,\, a_j \in A_j\,,\, j = 0,1\}$$

para $t > 0\,,\, a \in A_0 + A_1$. Nótese que $\{K(t,\cdot) : t > 0\}$ es una familia uniparamétrica de normas equivalentes en $A_0 + A_1$ y $K(1,\cdot) = \|\cdot\|_{A_0+A_1}$.

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, se define el *espacio de interpolación real* $\overline{A}_{\theta\,,q} = (A_0, A_1)_{\theta\,,q}$ como el espacio de todos los $a \in A_0 + A_1$ tales que la norma

$$\|a\|_{\theta\,,q} := \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,a))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

es finita. Ver [1], [2], [4].

Se verifica que $\overline{A}_{\theta\,,q}$ es un espacio de Banach intermedio respecto al par $\overline{A}$ que satisface la *propiedad de interpolación*, a saber, si $\overline{A} = (A_0, A_1)\,,\, \overline{B} = (B_0, B_1)$ son pares de espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(\overline{A}, \overline{B})$, esto es, $T \in \mathcal{L}(A_j\,, B_j)\,, j = 0,1$, entonces para cada $0 < \theta < 1\,\text{y}\,1 \leq q \leq \infty$ tenemos que

$$T : \overline{A}_{\theta,\,q} \to \overline{B}_{\theta,\,q}$$

es acotado con norma

$$\|T : \overline{A}_{\theta,\,q} \to \overline{B}_{\theta,\,q}\| \leq \|T : A_0 \to B_0\|^{1-\theta}\|T : A_1 \to B_1\|^{\theta}.$$

Para $1 < p < \infty\,,\, 1 \leq q \leq \infty$, el *espacio de funciones de Lorentz*, $L_{p,\,q}$, se define como

$$L_{p,\,q} := \left\{ f : U \to \mathbb{R} : f \text{ es } \mu\text{–medible},\, \|f\|_{p,\,q} := \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \right\}$$

Los espacios de Lorentz pueden obtenerse por interpolación real,

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,\,q} = L_{p,\,q}$$

con equivalencia de cuasi–normas, para $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ y $1/p = 1 - \theta$. En particular,

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,p} = L_p$$

para $0 < \theta < 1$ y $1/p = 1 - \theta$.

A continuación describimos de forma muy breve el *método de interpolación complejo*. Sea $\overline{A} = (A_0, A_1)$ un par compatible de espacios de Banach. Consideremos la banda $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ y denotemos por $\mathcal{F}(\overline{A})$ al conjunto de todas las funciones f definidas en S con valores en $A_0 + A_1$ tales que son acotadas y continuas en S, analíticas en el interior de S y cada función $t \to f(j+it)$ $(j = 0, 1)$ es continua de $\mathbb{R}$ en A_j y tiende a cero cuando $|t| \to \infty$. Podemos dotar a $\mathcal{F}(\overline{A})$ de estructura de espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} := \text{máx}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{A_0}\,,\, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{A_1}\right\}.$$

Dado $0 < \theta < 1$, definimos el *espacio de interpolación complejo* $[\overline{A}]_\theta$ como el conjunto formado por todos los $a \in A_0 + A_1$ tales que $a = f(\theta)$ para algún $f \in \mathcal{F}(\overline{A})$ y la norma

$$\|a\|_{[\theta]} := \text{ínf}\{\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} : f(\theta) = a\,,\, f \in \mathcal{F}(\overline{A})\}$$

es finita. Se verifica que $[\overline{A}]_\theta$ es un espacio de Banach intermedio respecto al par $\overline{A}$ que satisface la propiedad de interpolación.

A modo de ejemplo, para $1/p = 1 - \theta$ se satisface, con igualdad de normas,

$$[L_1, L_\infty]_\theta = L_p.$$

Más información acerca de la estructura y de las propiedades del método complejo puede verse en [2] y [4].

Finalmente, en [4] otros métodos de interpolación son descritos y comparados, mientras que en [3] se lleva a cabo un estudio detallado de la interpolación con parámetros funcionales en vez de numéricos.

Bibliografía

[1] Bennet, C. y Sharpley, R. (1988). *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston.

[2] Bergh, J. y Löfström, J. (1976). *Interpolation of Spaces. An Introduction*, Springer, Berlin.

[3] Brudnyî, Y. A. y Krugljak, N. Y. (1991). *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, North-Holland, Amsterdam.

[4] Triebel, H. (1978). *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Foliated cobordism and the Godbillon–Vey invariant

Manuel Moreira
Department of Geometry and Topology

10th April, 2012

Abstract

This paper studies how the Godbillon–Vey classes of a co–dimension one foliation $\mathcal{F}$ is related with a cobordant foliation. We also introduce a classical example of nonzero Godbillon–Vey characteristic class.

The Godbillon–Vey invariant

Let $(M, \mathcal{F})$ be a compact arcwise connected C^r co–dimension one foliated manifold with or without boundary. Hence $\mathcal{F}$ is given by an integrable nowhere vanishing differential one form ω in $\Omega^1(M^n)$. The form ω which is uniquely determine up to the multiplication by a nowhere vanishing smooth function f in $C^\infty(M^n)$; is integrable, i.e., if $d\omega \wedge \omega = 0$; the reader can observe that if $n = 2$, then any one form ω in $\Omega^1(M^2)$ is integrable. So it means that the condition $d\omega \wedge \omega = 0$ implies that there exist not uniquely determined closed and differentiable one form η. The reader can observe the natural following properties:

1. $d\eta \wedge \omega = 0$ and $d(\eta \wedge d\omega) = 0$,
2. the class $[d\eta \wedge \eta]$ in *Rham cohomology* $H^3_{dR}(M)$ is independent of the choice of η,
3. $gv(\omega) = gv(f\omega)$ for any nowhere vanishing smooth function f on M^n.

It follows the class $gv(\omega)$ depends only of the foliation $\mathcal{F}$ and not of the choice of ω or η. This class is called the *Godbillon–Vey class* of the foliation $\mathcal{F}$, and is denoted by

$$gv(\mathcal{F}) \in H^3_{dR}(M) \ .$$

We then define a C^{r-3} three–form Θ in $\Omega^*(M^n)$ defined by the rule

$$\Theta = d\eta \wedge \eta, \tag{1}$$

Keywords: Differential geometry, differential topology, cobordism, foliations, Godbillon–Vey invariant, characteristic classes.

and the integral of Θ over M^n by

$$G.V(M^n, \mathcal{F}) = \int_{M^n} \Theta.$$

The above integral are called the *Godbillon–Vey form* and the *Godbillon–Vey number* of $\mathcal{F}$ respectively. See Godbillon–Vey [1]. For standard work on foliations and cobordism and characteristic classes we refer to the reader to [2] and [3].

Example 1. Let $H = \{x + iy \in C : y > 0\}$ be upper half plane of the complex numbers, equipped with the Riemannian metric $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ and defined the Lie group by $SL(2,R) = \{A \in M(2,R) : \det(\mathrm{A})=1\}$, with projective group $PSL(2,R) = SL(2,R)/\{\pm I\}$ which can be identified with the group of isomentries preserving orientation by $Iso_+(H) = \{\tau\colon H \to H : \tau(z) = \frac{az+b}{cz+d}\}$, this a family of linear transformations in H, which maps a circle or a line onto a circle or a line in the half plane H, holds on $\langle \tau_*(u), \tau_*(v)\rangle_{\tau(z)} = \langle u, v\rangle_z$ for $u, v \in T_z(H)$, where $\langle u, v\rangle_z$ is the inner product defined by the Riemannian metric on H, and $\tau_*\colon T_z(H) \to T_{\tau(z)}(H)$ is C^∞ diffeomorphism. We then can define a C^∞, $S^1-bundle$, $\pi : T^1(H) \to H$, given by the rule $\pi(x, y, v) = (x, y)$, from the total space $T^1(H) = \{(x, y, v) \in T(H) : |\mathrm{v}|=1\}$ which is C^∞ diffeomorphic to $H \times S^1$ equipped with the Riemannian metric of H and the standard Riemannian metric on S^1. Let S_∞ be the Alexandroff compactification of the border of H which is the real line, i.e., the oriented circle at infinity. So the geodesics in hyperbolic geometry are just the intersections of the open half plane with oriented circles with S_∞ orthogonally. Consider two geodesics L and $L^{'}$ in the pencil $\mathcal{P}_p$ and the tangent unit vectors $v \in T_{(x,y)}(L)$ and $v^{'} \in T_{(x^{'},y^{'})}(L^{'})$ these vectors are said to be *parallel*. Now an equivalence relation in $T^1(H)$ can be defined as follows, $(x, y, v) \sim (x^{'}, y^{'}, v^{'})$ if and only if v and v' are parallel. If we consider the family $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in S_\infty}$ where each L_α denotes an equivalence class under $\sim$. Then we have a C^∞, co–dimension one foliated space $(T^1(H), \mathcal{F})$. If $(x, y, v) \in L_\alpha$ and θ is the angle between the imaginary axis in the positive direction of v, then $\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{y}{x-\alpha}$, so we define a C^∞ one form ω on $T^1(H)$ as the following expression

$$\omega = d\theta + \frac{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}{y}dx + \frac{\sin(\theta)}{y}dy.$$

Proposition 2. *If $\tau_*^{'}\colon T^1(H) \to T^1(H)$ is the C^∞ restricted diffeomorphism of τ_*, then $\tau_*^{'}(L_\alpha) \in \mathcal{F}$, and $(\tau_*^{'})^*(\omega) = \omega$, for all $L_\alpha \in \mathcal{F}$ and $\tau \in Iso_+(H)$, that is $\mathcal{F}$ and ω are $SL(2,R)$–invariant.*

Now we are going to compute the Godbillon–Vey form Θ with respect to ω, first we calculate the exterior derivative

$$d\omega = \frac{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}{y^2}dy \wedge dx + \frac{\sin(\theta)}{y}d\theta \wedge dx + \frac{\cos(\theta)}{y}d\theta \wedge dy.$$

Hence,

$$\eta = \frac{\sin(\theta)}{y}dx + \frac{\cos(\theta)}{y}dy,$$

so we have $d\omega = \omega \wedge \eta$. Therefore,

$$\Theta = \eta \wedge d\eta = \frac{-1}{y^2}dx \wedge dy \wedge d\theta.$$

Furthermore, ω is integrable since

$$d\omega \wedge \omega = 0.$$

Proposition 3. *If $\Theta = \eta \wedge d\eta$ is the Godbillon–Vey form with respect to ω, then for all $\tau \in Iso_+(H)$*

$$(\tau_*)^*(\eta) = \eta.$$

In other words, η is $SL(2,R)$–invariant.

Hence the Godbillon–Vey number of the foliation $\mathcal{F}$ is different from zero since the negative of Θ is the volume element of H with the Riemannian metric defined above.

Let $M = PSL(2,R)/\Gamma$ be the space of right cosets of Γ, where $PSL(2,R) = PSL(2,R)/\{\pm I\}$, is the projective space, and Γ is a discrete, co–compact subgroup. Let $H_\infty \subset SL(2,R)$ be the stabilizer subgroup of the *geodesic pencil* through the infinity ∞, $\mathcal{P}_\infty$. The cosets $H_\infty g$ are elements of $Iso_+(H)$ which sends the pencil $\mathcal{P}_\infty$ to $\mathcal{P}_p$, where $g(\infty) = p$. The section of $\pi\colon T^1(H) \to H$ consisting of the unit velocity vector along the pencil $\mathcal{P}_\infty$ can be easily seen as H_∞ and $H_\infty g$ is identified as the section of π consisting of the unit velocity vectors along the pencil $\mathcal{P}_p$, and so on for every $p \in S_\infty$. Thus we have completely described the leaves of $\mathcal{F}$ in $PSL(2,R)$, this foliation is carried to a foliation $\mathcal{F}_\Gamma$ in $PSL(2,R)/\Gamma$. This example was due to Rossarie [1].

Proposition 4. *If $\Gamma \subset SL(2,R)$ is a discrete subgroup such that Σ_g is a compact, orientable surface of genus $g \geq 2$ equipped with a Riemannian metric of constant curvature -1, then*

$$G.V(M, \mathcal{F}_\Gamma) = \int_M gv(\mathcal{F}_\Gamma) = \pm 4\pi(1-g).$$

Foliated cobordism

Definition 5. [3, Thurston] Let $(M_1^n, \mathcal{F}_1)$ and $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$ be two co–dimension q–foliations of n–dimensional closed oriented C^r manifolds. These foliated manifolds are said to be *foliated cobordant*, or simple *cobordant*, if there exist an (n+1)–dimensional compact oriented co–dimension q–foliated manifold $(W^{n+1}, \mathcal{F})$ for which the foliations are transverse to the boundary.

The family of an equivalence class under foliated cobordisms is called a *foliated cobordism class* and is denoted by $\mathcal{F}\Omega^r_{n,q}$ which constitutes an Abelian group.

Definition 6. Two closed oriented manifolds M^n_1 and M^n_2 are said to be *cobordant*, if there exist a compact oriented (n+1)–manifold W^{n+1} such that $\partial W^{n+1} = M^n_1 \cup -M^n_2$.

This is an equivalence relation whose equivalent classes are called *cobordant classes*, and the family of cobordant classes is an Abelian group denoted by Ω^r_n. Now we define a homeomorphism of Abelian groups $f\colon \mathcal{F}\Omega^r_{n,q} \to \Omega^r_n$, defined by the rule $f([(M^n, \mathcal{F})]) = [M^n]$, where $[(M^n, \mathcal{F})]$ and $[M^n]$ are the foliated cobordant and cobordant class respectively. For $n = 3$, $q = 1$, $r = \infty$, the cardinality of $f^{-1}(0)$ is at least the continuum.

Theorem 7. *Let $(M^3_1, \mathcal{F}_1)$ and $(M^3_2, \mathcal{F}_2)$ be two cobordant C^r–foliated three–dimensional closed oriented manifolds of co-dimension one. Then their Godbillon–Vey numbers are equal.*

Proof: Let $(W^4, \mathcal{F})$ be cobordant four–dimensional foliated manifold between $(M^3_1, \mathcal{F}_1)$ and $(M^3_2, \mathcal{F}_2)$. Let $\partial W^4 = M^3_1 \cup -M^3_2$ and $\partial\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ by the definition of cobordant manifold, and $\{U_i\}^n_{i=1}$ a finite open cover of W^4 and $\{\omega_i\}^n_{i=1}$ a C^{r-1} one–forms defined over $\{U_i\}^n_{i=1}$ which defines an integrable distribution $\mathcal{D}(\mathcal{F})$. Consider the finite open covers $U_{i_j} = U_j \cap M^3_i$ of M^3_i and the restrictions $\{\omega_{i_j}\}^n_{i=1}$ of $\{\omega_i\}^n_{i=1}$ for $j = 1, 2$, respectively. By the integrability condition, the family $\{\omega_i\}^n_{i=1}$ determines a C^{r-2} one–form η in $\Omega(W^4)$. Let $\Gamma = \eta \wedge d\eta$ be the Godbillon–Vey of $\mathcal{F}$. Let $i_j\colon M^3_j \to W^4$ be the inclusion maps, and by the integrability condition there exist one forms η_j, on M^3_j which are defined by $\{\omega_{i_j}\}^n_{i=1}$ such that for $i^*_j\colon \Omega^*(W^4) \to \Omega^*(M^3_j)$ defined by the rule $i^*_j(\eta) = \eta_j$ and the Godbillon–Vey form of $\mathcal{F}_j$ is $\Theta_j = \eta_j \wedge d\eta_j$, $i^*_j(\Theta) = \Theta_j$, subindiced for $j = 1, 2$ respectively. We then have

$$G.V(M_1, \mathcal{F}_1) - G.V(M_2, \mathcal{F}_2) = \int_{M^3_1} i^*_1(\Theta) - \int_{M^3_2} i^*_2(\Theta) = \int_{\partial W^4} i\Theta = \int_{W^4} d\Theta = 0.$$

□

References

[1] Godbillon, C. and Vey, J. (1971). *Un invariant des feuilletages de co–dimension 1*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **273**, pp. 92–95.

[2] Tamura, I. (1992). *Topology of Foliations, An Introduction*, Translations of Mathematical Monographs, **97**, American Mathematical Society, Providence, RI.

[3] Thurston, W. (1972). *Non–cobordant foliations on S^3*, Bull. Amer. Math. Soc., **78**, pp. 511–514.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Detección de grietas en estructuras con FEM y XFEM

María Teresa Cao Rial
Departamento de Matemática Aplicada

24 de abril de 2012

Introducción

La ruptura de una pieza o el colapso de una estructura pueden tener un elevado coste económico, cuando no un coste aún mayor en vidas humanas. Es por esto que la detección de defectos y grietas antes de que den lugar a fallo estructural es primordial. En ingeniería se denominan Técnicas de Evaluación No Destructivas (NDE, por sus siglas en inglés) a un conjunto de métodos y procedimientos usados para la detección y análisis de defectos en piezas, sin comprometer para ello la propia integridad de la pieza en sí. Por ejemplo, existen métodos que están basados en ondas guiadas, como las ondas de Lamb o de Rayleigh. Estas últimas se usan habitualmente para probar estructuras de geometrías simples, tales como vigas y placas.

En este trabajo estudiaremos el comportamiento, bajo excitación por ondas de Rayleigh, de estructuras con y sin grietas, suponiendo que éstas son imperfecciones superficiales o no penetrantes. La comparación de estos dos problemas permite determinar la existencia de imperfecciones en una estructura. Se mostrará la comparación entre la simulación numérica con el método de Elementos Finitos clásico (FEM) y el método de Elementos Finitos eXtendidos (XFEM).

Expresión de las ondas de Rayleigh.

Las ondas de Rayleigh presentan las siguientes propiedades:

- son ondas progresivas sinusoidales

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_l + \boldsymbol{u}_t, \quad \boldsymbol{u}_l = \nabla\phi, \quad \boldsymbol{u}_t = \mathrm{Rot}\,\mathbf{B}, \quad \ddot{\boldsymbol{z}} - c^2\Delta\boldsymbol{z} = \mathbf{0},$$

- son monocromáticas: frecuencia de fuente constante e independiente de $\mathbf{X}$ y amplitud independiente de t,
- Son superficiales y unidireccionales

$$\lim_{X_2\to-\infty} \boldsymbol{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{u}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{u}(X_1, X_2).$$

Palabras Clave: Ondas de Rayleigh, XFEM, FEM, condiciones de Signorini.

Asociados a la onda se tienen los siguientes parámetros: k es el número de onda, c_l y c_t son las velocidades de propagación longitudinal y transversal, $L = \frac{2\pi}{k}$ es la longitud de onda, ω es la frecuencia angular, $F = \frac{\omega}{2\pi}$ es la frecuencia central, $T_0 = \frac{1}{F}$ es el período, y $c_R = LF = c_t\xi$ es la velocidad de fase, siendo ξ la única raíz en el intervalo $(0, 1)$ de la ecuación

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8(3 - 2(c_l/c_t)^2)\xi^2 - 16(1 - (c_l/c_t)^2) = 0.$$

Denotaremos por: $\alpha = c_l/c_t$, $\eta_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}$, $\eta_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}$. Consideramos el dominio bidimensional $\Omega = (l_0, l_1) \times (-l_2, 0)$. La frontera de Ω, Γ, consta de tres partes, todas ellas correspondientes a abiertos unidimensionales: Γ_D, donde se aplica un material piezoeléctrico que produce una onda de Rayleigh, $\Gamma_D^\star$, frontera en la que los desplazamientos se suponen nulos por encontrarse ésta lejos del área de influencia de la onda y Γ_N donde el cuerpo está libre. Estas tres partes son, además, disjuntas dos a dos y tales que $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_D^\star \cup \bar{\Gamma}_N$, siendo $\bar{A}$ la adherencia del conjunto A. Además, Γ_D debe ser de medida estrictamente positiva.

Dada $k \in \mathbb{R}$, se buscará la expresión de las condiciones Dirichlet $\boldsymbol{u}^{DR}$ necesarias para reproducir una onda de Rayleigh, $\boldsymbol{u}$, verificando las condiciones anteriores y

$$\rho_0\ddot{\boldsymbol{u}} - \operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \text{ en } \Omega, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{DR}, \text{ sobre } \Gamma_D, \ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \mathbf{0}, \text{ sobre } \Gamma_N, \ \boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \text{ sobre } \Gamma_D^\star, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}(\mathbf{X}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\mathbf{X}), \ \dot{\boldsymbol{u}}(\mathbf{X}, 0) = \boldsymbol{u}_1(\mathbf{X}), \text{ en } \Omega, \tag{3}$$

siendo ρ_0 la densidad del material, $\ddot{\boldsymbol{u}}$ la aceleración, $\boldsymbol{\sigma}$ el campo de tensiones asociado al desplazamiento $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario exterior a Ω y $\boldsymbol{u}_0$ y $\boldsymbol{u}_1$ las condiciones iniciales.

Teorema 1. *Con las notaciones anteriores, si consideramos el problema de deformaciones planas sobre Ω con fuerzas de volumen y superficiales nulas y la siguiente condición sobre Γ_D:*

$$u_1^{DR}(X_2, t) = \left(-(2-\xi^2)k\sqrt{1-\xi^2}e^{\eta_t X_2} + 2\sqrt{1-\xi^2}ke^{\eta_l X_2}\right)\cos(kl_0 - \omega t),$$
$$u_2^{DR}(X_2, t) = \left((2-\xi^2)ke^{\eta_t X_2} - 2\sqrt{1-\xi^2}k\sqrt{1-\alpha^2\xi^2}e^{\eta_l X_2}\right)\operatorname{sen}(kl_0 - \omega t),$$

la correspondiente onda de Rayleigh está definida por

$$u_1(X_1, X_2, t) = \left(-(2-\xi^2)k\sqrt{1-\xi^2}e^{\eta_t X_2} + 2\sqrt{1-\xi^2}ke^{\eta_l X_2}\right)\cos(kX_1 - \omega t),$$
$$u_2(X_1, X_2, t) = \left(-(2-\xi^2)ke^{\eta_t X_2} + 2\sqrt{1-\xi^2}k\sqrt{1-\alpha^2\xi^2}e^{\eta_l X_2}\right)\operatorname{sen}(kX_1 - \omega t).$$

Vibración de un cuerpo elástico con fisura

A continuación introducimos una grieta superficial generada por una curva contenida en el plano OX_1X_2 en la placa Ω y denotamos por Γ_C la parte de la frontera

que se corresponde con los labios de la fisura, donde se impone una condición de contacto. Suponemos que Γ_C es una unión de dos curvas regulares y que en el instante inicial los labios de la fisura están pegados, si bien esta última restricción no es esencial. Además, ha de verificarse que $\overline{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_C = \emptyset$. Entonces, el desplazamiento $\boldsymbol{u}$ y la tensión asociada $\boldsymbol{\sigma}$ han de verificar (1)–(3) junto con las condiciones de contacto de Signorini

$$[\sigma_n] = 0;\ \boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{0};\quad [u_n] \leq 0;\ \sigma_n \leq 0;\ \sigma_n[u_n] = 0 \text{ sobre } \Gamma_C,$$

donde $[u_n] = \boldsymbol{u}^l \cdot \boldsymbol{n}^l + \boldsymbol{u}^r \cdot \boldsymbol{n}^r$ y $[\sigma_n] = \sigma_n^l - \sigma_n^r$ y los superíndices l y r denotan el labio izquierdo y derecho de la grieta respectivamente.

Mediante técnicas variacionales estándar y teoría de operadores maximales monótonos se obtiene el problema variacional discreto

$$\int_\Omega \rho_0 \ddot{\boldsymbol{u}}_h^j \cdot \boldsymbol{v}_h \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h^j : \boldsymbol{\varepsilon}_h(\boldsymbol{v}_h) \, dx = \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{v}_h) - \int_{\Gamma_C^l} p_h^j B(\boldsymbol{v}_h) \, d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h,$$

siendo $\boldsymbol{u}_h$ y $\boldsymbol{v}_h$ funciones del espacio de aproximación discreto dado por el método de elementos finitos (FEM o XFEM) considerado, p_h^j la solución de una ecuación no lineal del tipo $p_h^j = G_{\lambda_c}(B(\boldsymbol{u}_h^j) + \lambda_c p_h^j)$, con G un operador no lineal, $\lambda_c \in \mathbb{R}^+$ y B el operador definido como $B(\boldsymbol{v}_h) = \boldsymbol{v}_h^l \boldsymbol{n}^l + \boldsymbol{v}_h^r \boldsymbol{n}^r$ que representa el salto de la componente normal de $\boldsymbol{v}_h$ en la grieta.

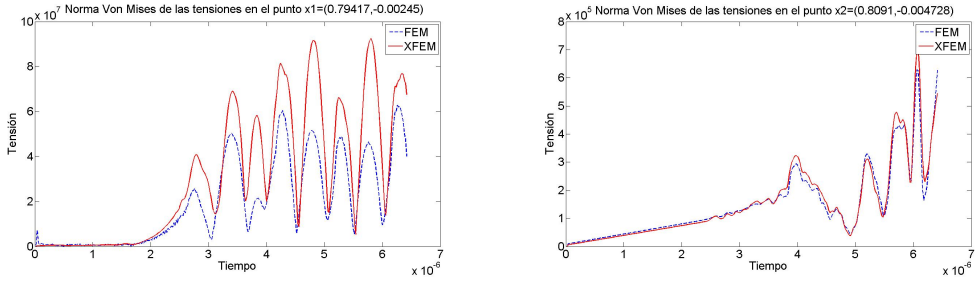


Figura 1: Norma de Von Mises de las tensiones en los puntos $X1$ y $X2$.

Debido a la presencia de la grieta, el método de elementos finitos clásicos puede proporcionar resultados inadecuados a la hora de capturar las singularidades que se producen cerca del vértice de la grieta. Además, este método representa las caras de la grieta mediante una colección de nodos dobles, lo que requiere que la malla del dominio se ajuste a la geometría de la grieta. La esencia del método de elementos finitos extendidos reside en la ampliación del espacio de aproximación con funciones particulares que presenten propiedades características de la solución esperada. En problemas de grietas se enriquece el espacio de aproximación teniendo en cuenta la discontinuidad del desplazamiento en la grieta y la singularidad de las tensiones cerca del vértice. En las Figuras 1 y 2 puede verse una comparación de los resultados obtenidos con los dos métodos. Para ello se toma un punto muy cercano al vértice,

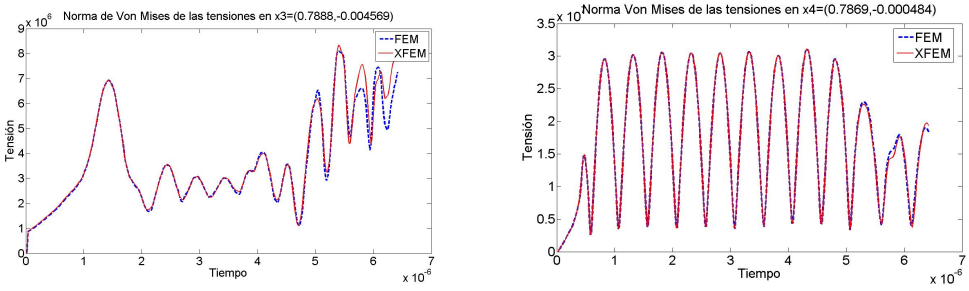


Figura 2: Norma de Von Mises de las tensiones en los puntos $X3$ y $X4$.

$X1$, un punto alejado situado después de la grieta, $X2$ y dos puntos alejados, situados antes de la grieta, $X3$ y $X4$. Éste último además está cerca de la superficie de la placa. Como era de esperar, en el punto $X1$ es donde se aprecian mayores diferencias entre las tensiones calculadas con XFEM y las tensiones calculadas con FEM puesto que el enriquecimiento cerca del vértice mejora la aproximación de la singularidad de las tensiones. Sin embargo, en el punto $X4$ las tensiones calculadas son prácticamente idénticas con los dos métodos.

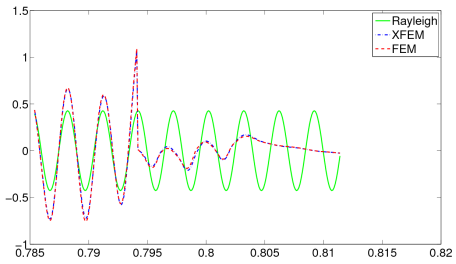


Figura 3: Desplazamientos en la superficie en el instante $t = 6 \times 10^{-6}$ s.

Finalmente, en la Figura 3 comparamos la propagación de la onda en una placa sin grieta (línea verde) y en una placa con grieta obtenida con los métodos XFEM (azul) y FEM (rojo). Como puede verse, una vez que la onda alcanza la grieta la amplitud constante se pierde, lo que permite determinar cuándo la estructura está dañada. Más detalles respecto de los métodos utilizados y los resultados pueden consultarse en [1].

Bibliografía

[1] Cao Rial, M. T. (2011). *Problemas de contacto en elasticidad dinámica con XFEM*, Memoria de Tesis Doctoral, Universidade de Santiago de Compostela.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Estimación núcleo da densidade circular

María Oliveira Pérez
Departamento de Estatística e Investigación Operativa

8 de maio de 2012

Introdución

En numerosos campos aplicados, como a ecoloxía, a meteoroloxía ou as ciencias medioambientais, as medidas son direccións. Para unha mostra de datos circulares, ao igual que en datos lineais, un problema fundamental da estatística é a estimación da función de densidade a partir da información proporcionada por dita mostra. A maioría dos traballos sobre datos direccionais en estatística centráronse en modelos paramétricos. Sen embargo, estes modelos soen ser unimodais e/ou simétricos, de modo que en moitas situacións reais os datos non se poden axustar adecuadamente usando estes modelos. Polo tanto, resulta interesante desenvolver outros procedementos alternativos máis flexibles e sen restriccións paramétricas. Con este obxectivo, na Sección 2 estúdase o estimador non paramétrico da densidade tipo núcleo para datos circulares. Este estimador depende dun parámetro de suavizado que debe ser coidadosamente seleccionado. Con este propósito, proponse unha nova regra de tipo plug–in para a selección de dito parámetro. O funcionamiento do novo método compárase, na Sección 3, con outros métodos de selección xa existentes nun estudo de simulación.

Estimación tipo núcleo da densidade circular

Dada $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n \in [0, 2\pi)$ unha mostra aleatoria simple dunha variable circular Θ, defínese o estimador tipo núcleo da densidade circular f como,

$$\hat{f}(\theta; \nu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} K_\nu(\theta - \Theta_i), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

onde K_ν é unha función núcleo con parámetro de concentración $\nu > 0$. Como núcleo circular, pode considerarse a distribución von Mises. A distribución von Mises, $vM(\mu, \kappa)$, é unha distribución simétrica caracterizada por unha dirección media $\mu \in [0, 2\pi)$ e un parámetro de concentración $\kappa \geq 0$, con función de densidade

$$g(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\left(\kappa \cos(\theta - \mu)\right), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

Palabras Clave: densidade circular, distribución von Mises, estimador núcleo, selección da ventá.

onde I_r denota a función de Bessel modificada de orde r. Con este núcleo específico, o estimador da densidade ten a seguinte expresión

$$\hat{f}(\theta;\nu) = \frac{1}{n2\pi I_0(\nu)} \sum_{i=1}^{n} \exp\{\nu \cos(\theta - \Theta_i)\}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \tag{1}$$

O problema principal do estimador tipo núcleo é a elección do parámetro ventá, xa que valores grandes de ν proporcionarán estimadores infrasuavizados e valores pequenos proporcionarán estimadores sobresuavizados. A ventá adoita calcularse de maneira que se minimice algún criterio de erro, como o erro cadrático medio integrado (MISE, $MISE(\nu) = (\int(f - \hat{f}^2))$. A expresión asintótica do MISE (AMISE) para o estimador tipo núcleo (1), cando $\nu \to \infty$ e $\sqrt{\nu}n^{-1} \to 0$, vén dado por

$$AMISE(\nu) = \left\{ \frac{1}{16} \left[1 - \frac{I_2(\nu)}{I_0(\nu)} \right]^2 \int_0^{2\pi} \left(f''(\theta) \right)^2 d\theta + \frac{I_0(2\nu)}{2n\pi \left(I_0(\nu) \right)^2} \right\}, \tag{2}$$

onde f'' denota a derivada segunda da densidade descoñecida (ver [2]).

Taylor [7], asumindo que os datos seguen unha distribución von Mises con parámetro de concentración κ, propón estimar o parámetro que minimiza o AMISE por

$$\hat{\nu}_{RT} = \left[\frac{3n\hat{\kappa}^2 I_2(2\hat{\kappa})}{4\pi^{1/2} I_0(\hat{\kappa})^2} \right]^{2/5},$$

onde $\hat{\kappa}$ se obtén por máxima verosimilitude. Este selector funciona razoablemente ben cando os datos son unimodais pero pode comportarse realmente mal cando os datos presentan máis dunha moda, como veremos na Sección 3.

Unha alternativa á regra proposta por Taylor consiste en estimar $\int_0^{2\pi} (f''(\theta))^2 \, d\theta$ tomando como densidade de referencia as mixturas de distribucións von Mises na minimización do $AMISE$ (2). Unha mixtura finita de M distribucións von Mises, $vM(\mu, \kappa)$ con proporcións α_i, $i = 1, \ldots, M$, ten densidade:

$$g(\theta) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \frac{\exp\{\kappa_i \cos(\theta - \mu_i)\}}{2\pi I_0(\kappa_i)}, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1. \tag{3}$$

O selector plug–in que se propón obtense seguindo os seguintes pasos (ver [5]):

1. Seleccionar o número de compoñentes M da mixtura para a distribución de referencia. Por exemplo, utilizando o criterio de información de Akaike (AIC).

2. Estimar os parámetros da mixtura (3), $(\mu_i, \kappa_i, \alpha_i)$ para $i = 1, \ldots, M$ utilizando o algoritmo EM (ver [1]). Calcular a integral $\int_0^{2\pi} (\hat{f}''(\theta))^2 d\theta$, onde $\hat{f}''$ denota o estimador da derivada segunda da mixtura cos parámetros estimados. Reemplazar esta cantidade na expresión do $AMISE$ (2) para obter $\widehat{AMISE}(\nu)$.

3. Minimizar $\widehat{\text{AMISE}}(\nu)$ con respecto a ν e obter $\hat{\nu}_{PI}$.

Outros métodos para seleccionar o parámetro de suavizado, son as regras de validación cruzada propostas por [3]. A ventá de validación cruzada de máxima verosimilitude obtense maximizando:

$$LCV(\nu) = \prod_{i=1}^{n} \hat{f}_{-i}(\Theta_i; \nu),$$

onde $\hat{f}_{-i}(\Theta_i; \nu)$ é a densidade estimada a partir dos datos extraendo da mostra o dato Θ_i. Os nosos experimentos mostraron un comportamento máis estable deste selector comparado coa regra de validación cruzada por mínimos cuadrados (ver tamén [7]).

Estudo de simulación

Consideráronse unha variedade de distribucións circulares: von Mises (M1), wrapped skew–normal (M2), mixtura de dúas von Mises (M3), mixtura de von Mises e wrapped Cauchy (M4), mixtura de Cardioide e wrapped Cauchy (M5) e mixturas de tres, catro e cinco von Mises (M6, M7 e M8). Ver Figura 1. Detalles destas distribucións poden atoparse en [4] e [6].

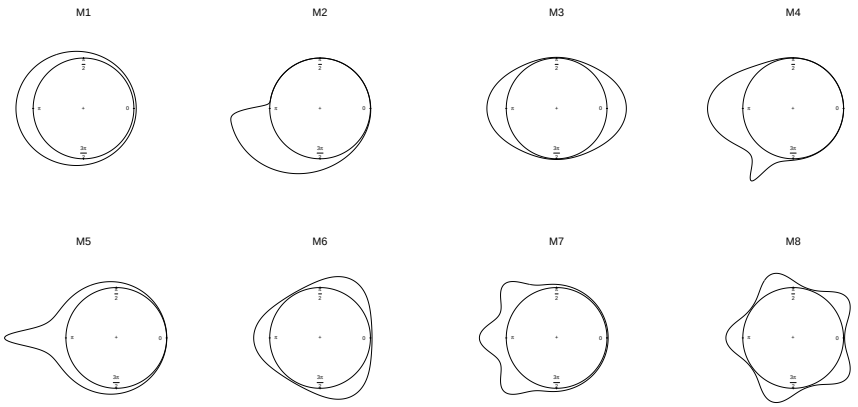


Figura 1: Modelos circulares.

Para cada modelo xeráronse 1000 mostras aleatorias de tamaño $n = 500$ e calculouse o promedio dos ISE sobre as 1000 réplicas (por simplicidade, denotado por $MISE$) cando ν se obtén, para cada conxunto de datos, a través de cada un dos métodos de selección de ventá propostos. Tamén se calculou o valor do parámetro de suavizado que minimiza o promedio dos ISE e que se denota por $MISE(\nu_0)$.

Para o modelo simple M1 todos os selectores se comportan de maneira similar. Sen embargo, o comportamento de $\hat{\nu}_{RT}$ é pouco satisfactorio para o modelo asimétri-

$n = 500$	$MISE(\nu_0)$	$MISE(\hat{\nu}_{RT})$	$MISE(\hat{\nu}_{PI}^{AIC})$	$MISE(\hat{\nu}_{LCV})$
M1	0.1622	0.1924 (0.1320)	0.1854 (0.1250)	0.2104 (0.1508)
M2	0.8244	1.6077 (0.3009)	0.9377 (0.3601)	0.9764 (0.3651)
M3	0.3259	10.7146 (0.1268)	0.3346 (0.1546)	0.3528 (0.1674)
M4	0.8562	1.5684 (0.2866)	0.9472 (0.3397)	1.4131 (0.4573)
M5	1.1769	5.7398 (0.5669)	1.3342 (0.5357)	2.0593 (0.7907)
M6	0.3932	6.4796 (0.0025)	0.4097 (0.1666)	0.4304 (0.1839)
M7	0.6654	2.5307 (0.2169)	0.7299 (0.2851)	0.8107 (0.3219)
M8	0.6434	7.8200 (0.0032)	0.6548 (0.2019)	0.6683 (0.2142)

Tabla 1: Promedio dos ISE para diferentes selectores do paramétro de suavizado, $MISE$ ($\times 100$), e desviacións típicas ($\times 100$, entre parénteses). Selectores: $\hat{\nu}_{RT}$ (regra de Taylor), $\hat{\nu}_{PI}^{AIC}$ (regra plug-in utilizando o criterio AIC), $\hat{\nu}_{LCV}$ (validación cruzada de máxima verosimilitude). $MISE(\nu_0)$: valor de referencia do erro cadrático integrado medio. Tamaño mostral: $n = 500$.

co M2. Para as mixturas, o comportamento de $\hat{\nu}_{RT}$ é moi pobre, especialmente nos modelos cun alto apuntamento (M5) e nos modelos con modas diametralmente opostas (M3). A regra plug–in $\hat{\nu}_{PI}$ proporciona bos resultados para todos os modelos mentras que $\hat{\nu}_{LCV}$ é un método competitivo agás para os modelos M4 e M5.

Bibliografía

[1] Banerjee, A., Dhillon, I. S., Ghosh, J. e Sra, S. (2005). *Clustering on the unit hypersphere using von Mises–Fisher distributions*, Journal of Machine Learning Research, **6**, pp. 1345–1382.

[2] Di Marzio, M., Panzera A. e Taylor, C. C. (2009). *Local polynomial regression for circular predictors*, Statistics and Probability Letters, **79**, pp. 2066–2075.

[3] Hall, P., Watson, G. P. e Cabrera, J. (1987). *Kernel density estimation for spherical data*, Biometrika, **74**, pp. 751–762.

[4] Mardia, K. V. e Jupp, P. E. (2000). *Directional Statistics*, Wiley, New York.

[5] Oliveira, M., Crujeiras, R. M. e Rodríguez–Casal, A. (2012). *A plug–in rule for bandwidth selection in circular density estimation*, arXiv:1202.6076.

[6] Pewsey, A. (2000). *The wrapped skew-normal distribution on the circle*, Communications in Statistics – Theory and Methods, **29**, pp. 2459–2472.

[7] Taylor, C. C. (2008). *Automatic bandwidth selection for circular density estimation*, Computational Statistics and Data Analysis, **52**, pp. 3493–3500.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

An a posteriori error estimator for an unsteady problem

Pablo Venegas
CI^{2}MA–Department of Mathematical Engineering (University of Concepción)

22nd May, 2012

In this work we introduce an a posteriori error estimator, of the residual type, for the unsteady advection–diffusion–reaction problem. For the discretization in time we use an implicit Euler scheme and a continuous, piecewise linear triangular finite elements for the space together with an unusual stabilized scheme. We show that the approximation error is bounded, by above and below, by the error estimator. Using that, an adaptive algorithm is proposed, analyzed and tested numerically to prove the efficiency of our approach.

Introduction

We deal with the unsteady advection–diffusion–reaction equation. This kind of problems arises in many applications, for instance the transport of pollutant in a river. We are interested in the convection–dominate regime where a characteristic feature of the solutions is the presence of sharp layers (zone with large slopes), for that reason we extended a stabilized method presented in [1], for the stationary case, to the parabolic framework.

The main result of this work is to exhibit a residual error estimator and establish upper and lower bounds for the error. The upper bounds are global in space and local in time; the lower bounds are local in space and time. Moreover, the local error indicator can be computed explicitly as a function of the discrete solution and the data.

Model problem

We consider the time–dependent advection–diffusion–reaction equation

$$\partial_t u - \varepsilon\Delta u + \boldsymbol{a}(x)\cdot\nabla u + b(x)u = f(t,x) \qquad \text{in} \quad]0,T[\times\Omega$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded polygonal domain with boundary $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$, $|\Gamma_D| > 0$, and $T > 0$. We denote by $\boldsymbol{n}$ the outer unit normal vector to $\partial\Omega$. We assume an appropriate initial condition $u(0,\cdot) = u_0$ and boundary conditions, $u = 0$ on Γ_D and $\varepsilon\nabla u\cdot\boldsymbol{n} = g(t,x)$ on Γ_N. Also we consider the following

Keywords: A posteriori error estimators, parabolic problems, stabilized methods.

assumptions: $\varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 < \varepsilon \ll 1,\ f \in C^0\left(]0,T[;L^2(\Omega)\right),\ g \in C^0(]0,T[;L^2(\Gamma_N))$, $\boldsymbol{a} \in W^{1,\infty}(\Omega)^2$ and $b \in L^\infty(\Omega)$ such that $-\frac{1}{2}\nabla \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$ and $b \geq 1$.

The usual variational formulation of (P) is: *Find* $u \in \{v \in L^2(]0,T[;H^1_D(\Omega)) : \partial_t v \in L^2(]0,T[;H^1_D(\Omega)')\}$ *such that, a.e.* $t \in]0,T[$

$$\text{(VP)} \quad \begin{cases} \langle \partial_t u, v\rangle + \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla u, v) + (b\,u\,, v) &= (f,v) + (g,v)_{\Gamma_N}, \\ u(0,\cdot) &= u_0, \end{cases}$$

for all $v \in H^1_D(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) :\ v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_D\}$, $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Space–time discretization

We introduce a partition $0 = t^0 < t^1 < ... < t^N = T$, with $N \geq 1$, not necessarily uniform and define $\tau_n := t^n - t^{n-1}, \quad 1 \leq n \leq N$. With each t^n, $0 \leq n \leq N$, we associate a regular family of partitions $\{\mathcal{T}_h^n\}_h$ (mesh size $h > 0$) of Ω into triangles. Since in practice the triangulation $\mathcal{T}_h^n$ is in general obtained from $\mathcal{T}_h^{n-1}$ by a combination of refinement and coarsening, we are in presence of finite element functions defined on different grides, for this reason we consider the following condition: For each $\mathcal{T}_h^n$, there exists a triangulation $\widetilde{\mathcal{T}}_h^n$ such that is a common refinement of $\mathcal{T}_h^{n-1}$ and $\mathcal{T}_h^n$ satisfying the *transition condition*: there exists a constant C such that

$$\sup_{1\leq n\leq N}\ \sup_{K\in\widetilde{\mathcal{T}}_h^n}\ \sup_{K'\in\mathcal{T}_h^n;\, K\subset K'} \frac{h_{K'}}{h_K} \leq C, \quad \text{here } h_K \text{ is the diameter of } K.$$

Remark 1. *The above assumption only restrict the coarsening. It must not be too abrupt nor too strong.*

Remark 2. *In many application the idea is to reach time T as soon as possible, for which is desirable to use large time steps. Because of this, implicit methods are selected because they do not have a CFL–type restriction like $\tau_n/h \leq$ constant. Also, is quite natural to assume that there exists $0 < \alpha_0$, such that $\tau_n^{-1} < \alpha_0$ for $1 \leq n \leq N$.*

Finally, for $k \geq 1$ let $H_h^n := \{\varphi \in H^1_D(\Omega) : \varphi\,|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall\, K \in \mathcal{T}_h^n\}$ be the finite element space of $\mathcal{T}_h^n$. It is well known that the standard finite element method yields to poor approximation when $\varepsilon \ll |\boldsymbol{a}|$ or $\varepsilon \ll b + \alpha_0$. A possible remedy is to add to the variational formulation some numerical diffusion terms to stabilize the finite element solution. However, there is still no method that has been proven to be a universal choice in applications. We use the following stabilized formulation, introduced in [1] for the stationary case: *Find* $u_h^n \in H_h^n$ *such that,*

$$\text{(SP)} \quad \begin{cases} B_S(u_h^n, v_h) &= F_S(v_h) \quad \forall v_h \in H_h^n, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u_h^0 &= u_{0h}, \end{cases}$$

where for all v_h, $w_h \in H_h^n$

$$F_S(v_h) := \int_\Omega d^{n,n-1}\, v_h + \int_{\Gamma_N} g^n\, v_h\, ds - \sum_{K\in\widetilde{\mathcal{T}}_h^n} \int_K \delta_K^n\, d^{n,n-1}(-\varepsilon\Delta v_h - \boldsymbol{a}\cdot\nabla v_h + b_n v_h),$$

$$B_S(w_h, v_h) := \int_\Omega \varepsilon \nabla w_h \cdot \nabla v_h + \int_\Omega (\boldsymbol{a} \cdot \nabla w_h) v_h + \int_\Omega b_n \, w_h \, v_h,$$
$$+ \sum_{K \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^n} \int_K \delta_K^n (\varepsilon \Delta w_h - \boldsymbol{a} \cdot \nabla w_h - b_n w_h)(-\varepsilon \Delta v_h - \boldsymbol{a} \cdot \nabla v_h + b_n v_h),$$

with $b_n := b + 1/\tau_n$, $d^{n,n-1} := f^n + u_h^{n-1}/\tau_n$, $f^n := f(t^n, \cdot)$, $g^n := g(t^n, \cdot)$ and δ_K^n an stabilization parameter that consider the physical data of the problem (see [1, equation (7)]).

Residual a posteriori error estimator

In this section our aim is to introduce a *residual a posteriori error estimator* for the stabilized scheme (SP). To this end, we consider the function $u_{h\tau}$, defined in $[0, T]$, such that, restricted to $[t^{n-1}, t^n]$ is given by

$$u_{h\tau} := u_h^{n-1} + \frac{t - t^{n-1}}{\tau_n}(u_h^n - u_h^{n-1}). \tag{1}$$

Let u be the solution of (VP), we define the error in $[0, T]$ as $e := u - u_{h\tau}$ and we measure it, in $[t^{n-1}, t^n]$, using the following norm: $\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\!|\!| e |\!|\!|^2$, where, $|\!|\!| v |\!|\!|_S := \{\varepsilon \|\nabla v\|_{0,S}^2 + \|v\|_{0,S}^2\}^{1/2} \; \forall \, v \in H^1(S)$, with $S \subset \Omega$. If $S = \Omega$ we write $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ instead of $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_\Omega$.

To carry on the analysis, we recall that u_h^n and u_h^{n-1} are defined on different meshes, however due to the *transition condition*, the following residuals, therefore the estimator, are well–defined. For $t \in [t^{n-1}, t^n]$, let R_K^n and R_E^n be the volumetric and edge residuals, respectively, defined by

$$R_K^n := \Pi_K^n f - \partial_t u_{h\tau} + \varepsilon \Delta u_{h\tau} - \boldsymbol{a} \cdot \nabla u_{h\tau} - b u_{h\tau} \qquad \forall \, K \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^n,$$

and for all $E \in \widetilde{\mathcal{E}}_{h,\Omega}^n \cup \widetilde{\mathcal{E}}_{h,N}^n \cup \widetilde{\mathcal{E}}_{h,D}^n$, where $\widetilde{\mathcal{E}}_{h,\Omega}^n$, $\widetilde{\mathcal{E}}_{h,N}^n$ and $\widetilde{\mathcal{E}}_{h,D}^n$ denote the edges in the interior, on the Neumann boundary Γ_N and on the Dirichlet boundary Γ_D, respectively

$$R_E^n := \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon}{2} \Big[\!\Big[\nabla u_{h\tau} \cdot \boldsymbol{n}_E \Big]\!\Big]_E & \text{if} \quad E \in \widetilde{\mathcal{E}}_{h,\Omega}^n, \\ \Pi_E^n g - \varepsilon \nabla u_{h\tau} \cdot \boldsymbol{n}_E & \text{if} \quad E \in \widetilde{\mathcal{E}}_{h,N}^n, \\ 0 & \text{if} \quad E \in \widetilde{\mathcal{E}}_{h,D}^n, \end{cases}$$

where $[\![\cdot]\!]$ is the jump across E, and Π_K^n (respectively Π_E^n) are the $L^2(]t^{n-1}, t^n[\times K)$ (repectively $L^2(]t^{n-1}, t^n[\times E)$) projection onto the constants.

We use the residuals R_K^n and R_E^n, to define an *a posteriori error estimator*, in the interval $[t^{n-1}, t^n]$, $1 \le n \le N$, as follows:

$$(\eta_K^n)^2 := \int_{t^{n-1}}^{t^n} \Big\{ \alpha_K^2 \|R_K^n\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \widetilde{\mathcal{E}}_K} \varepsilon^{-1/2} \alpha_E \|R_E^n\|_{0,E}^2 \Big\}, \tag{2}$$

with $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ the set of edges of K, $\alpha_K := \min\{h_K\varepsilon^{-1/2}, 1\}$ and $\alpha_E := \min\{h_E\varepsilon^{-1/2}, 1\}$.

The main result of this work is stated in the following theorem.

Theorem 3. *Let u and u_h^n be the solutions of* (VP) *and* (SP)*, respectively. Consider $e = u - u_{h\tau}$ for all $t \in [t^{n-1}, t^n]$, with $u_{h\tau}$ defined as in* (1)*. Let η_K^n be the a posteriori error estimator defined in* (2)*, then there exists $0 < C \in \mathbb{R}$ independent of h and τ_n, such that*

$$\|e(t^n,\cdot)\|_{0,\Omega}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\!|\!| e |\!|\!|^2 \leq C\Big\{ \|e(t^{n-1},\cdot)\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K\in\widetilde{\mathcal{T}}_h^n} (\eta_K^n)^2 + \text{h.o.t.} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^n} \frac{\tau_n}{3} |\!|\!| u_h^n - u_h^{n-1} |\!|\!|_K^2 (1 + \varepsilon^{-1/2}\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,K}(1+\alpha_K) + \|b\|_{\infty,K})^2 \Big\}$$

where h.o.t *(higher order terms) depends on f, g and its approximations. Moreover,*

$$\eta_K^n \leq C \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\!|\!| e |\!|\!|_{\omega_K}^2 \right)^{1/2} \Big\{ 1 + \|b\|_{\infty,\omega_K} + \varepsilon^{-1/2}\|\boldsymbol{a}\|_{\infty,\omega_K}\alpha_K + \alpha_K\alpha_0 \Big\} + \text{h.o.t}$$

where ω_K is the set of elements that share K.

Adaptive procedure and example

The adaptive procedure in space is such that for each n, $1 \leq n \leq N$, we compute the space–time local error estimator η_K^n for K in $\widetilde{\mathcal{T}}_h^n$ and $t \in [t^{n-1}, t^n]$, and refine those elements $K \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^n$ such that $\eta_{h,K}^n \geq \theta_h \max\left\{\eta_{h,K}^n : K \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^n\right\}$, where $\theta_h \in]0,1[$ is a prescribed parameter. This procedure is repeated a fixed number of iterations or until a stop criteria is fulfilled.

The following example consists of solving (P) with $T = 150$, $\boldsymbol{a} = (1,0)$, $b = g = 0$ and $f = 1$ in the circle of center (25,25) and ratio 0.5. We consider $\varepsilon = 10^{-5}$. Figure 1 show the refined meshes and the level sets of the computed solution at $t = 150$.

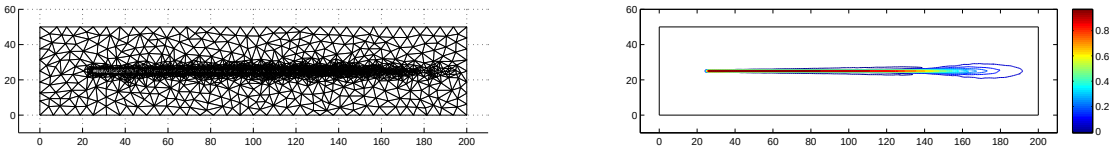


Figure 1: Advection–diffusion problem: Mesh and level set at time $t = 150$.

References

[1] Franca, L. P. and Valentin, F. (2000). *On an improved unusual stabilized finite element method for the advective–reactive–diffusive equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **190**(13–14), pp. 1785–1800.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Dinámica evolutiva en grafos

Adrián Fernández Tojo
Departamento de Análisis Matemático

5 de junio de 2012

Introducción

A menudo nos encontramos con que, en la naturaleza, seres individuales se agrupan formando redes más o menos complejas, desde árboles y bacterias hasta cosas más propias de los seres humanos, como gobiernos o redes sociales. La dinámica evolutiva, que hasta hace poco estudiaba situaciones desprovistas de estructura, se enfrenta a la necesidad de incluir dichas estructuras en su estudio.

Para plantear este problema matemáticamente, se considerará una población con estructura en la que, originariamente, sólo había un tipo de individuo (fenotipo) y que, en un momento dado, apareció un nuevo tipo *mutante*. Modelizaremos el proceso de evolución como un proceso estocástico y la estructura de la población como un grafo. En particular, centraremos este estudio en el proceso de Moran y en un grafo dirigido con pesos en las aristas. Sobre dicho grafo definiremos una **coloración** (de dos colores) que nos indicará qué vértices son "mutantes" y cuales no.

El **proceso de Moran** para grafos consta de tres fases: *selección para la reproducción* de un vértice, durante la cual la probabilidad de un vértice de ser seleccionado depende de su color; *selección para la muerte* (al azar) de un vecino de dicho vértice y *sustitución* del color del segundo por el color del primero.

Distintos autores han estudiado este tipo de procesos sobre grafos hasta la fecha. Martin Nowak publicó en 2005 *"Evolutionary dynamics"* [6] y Mark Broom y Jan Rychtář publicaron entre 2008 y 2011 una serie de artículos [2, 3, 1] formalizando los conceptos introducidos por Nowak [5].

A sus trabajos tenemos que añadir aportaciones propias como la formalización del proceso de Moran sobre grafos, la introducción de los grafos reducidos, la esperanza de vida y algunas aplicaciones de estos conceptos.

Formalización del problema

En el contexto en el que vamos a trabajar, un **grafo** será un par ordenado $\{V, A\}$ donde V es un conjunto finito y $A \subset V \times V$. Los elementos de V se llaman **vértices** y

Palabras Clave: grafos, dinámica evolutiva, procesos estocásticos.

los de A **aristas**. Sin embargo, definiremos el proceso de Moran directamente sobre matrices estocásticas y no sobre el grafo. A partir de estas matrices se construye la matriz de la cadena de Markov.

Sea $\mathcal{W}_n := \{W = (w_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_n([0,1]) \mid \sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1 \quad \forall i = 1,\dots,n\}$ el conjunto de las **matrices estocásticas n–dimensionales**.

Dada $W \in \mathcal{W}_n$, sea $V = \{1,\dots,n\}$ el **conjunto de los vértices** del grafo con pesos determinado por W, donde w_{ij} es el **peso de la arista** orientada que va del vértice i al vértice j.

Sea $\mathcal{P}(V)$ el conjunto potencia de V. Definimos la **aptitud relativa** r como el cociente entre la capacidad de reproducción de los mutantes frente a los no mutantes. Para que este concepto quede bien definido, tenemos que definir la **función de probabilidades de transición** como

$$\begin{aligned} p_W : \mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (S, S') &\longmapsto p_W(S, S'), \end{aligned}$$

cuya expresión es:

$$p_W(S,S') = \begin{cases} \frac{r \sum\limits_{i \in S} w_{ij}}{n+(r-1)|S|} \text{ si } S' \backslash S = \{j\}, \\ \\ \frac{\sum\limits_{i \in V \backslash S} w_{ij}}{n+(r-1)|S|} \text{ si } S \backslash S' = \{j\}, \\ \\ \frac{r \sum\limits_{i,j \in S} w_{ij} + \sum\limits_{i,j \in V \backslash S} w_{ij}}{n+(r-1)|S|} \text{ si } S = S', \\ \\ 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de transición es entonces $A = (a_{SS'}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}(V)}([0,1])$ donde $a_{SS'} = p_W(S,S')$ para todo $S, S' \in \mathcal{P}(V)$. La matriz A define una **cadena de Markov** sobre el grafo de vértices V y aristas con pesos W. El sistema $Ax = x$ tiene por solución un vector cuya componente S–ésima es la probabilidad de alcanzar el estado V partiendo del estado inicial S.

Sea $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ el proceso estocástico asociado a la matriz de transición A. Definimos la **probabilidad de fijación** como la función

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{R}^+ \times \mathcal{W}_n \times \mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V) & \longrightarrow & [0,1] \\ & (r, W, S, S') & \longmapsto & \rho(r, W, S, S') = P(S'|S), \end{array}$$

donde $P(S'|S) := 1 - P(X_t \neq S' \quad \forall t \in \mathbb{N} \mid X_0 = S)$.

Decimos que W es una **circulación** si $\sum\limits_{j=1}^{n} w_{kj} = \sum\limits_{i=1}^{n} w_{ik}$ para todo $k \in \{1,\dots,n\}$

y que es **equivalente al proceso de Moran** si:

$$\rho(r,W,S,V)=\rho(r,W,S',V)=\frac{1-r^{-|S|}}{1-r^{-n}}\quad \forall S,S'\in\mathcal{P}(V),\ |S|=|S'|.$$

En tal caso, para $\alpha\in\{0,\dots,n\}$, definimos $\overline{\rho}(r,W,\alpha,n)=\rho(r,W,S,V)$ tal que $|S|=\alpha$. Así, definimos la **probabilidad de fijación de un mutante** como $\rho_n=\rho(r,W,1,n)$.

Podemos enunciar ahora de manera formal el siguiente teorema de Nowak.

Teorema 1 (Teorema de la circulación, [5])**.** *Dada $W\in\mathcal{W}_n$, son equivalentes:*

1. *W es equivalente al proceso de Moran.*
2. *$\overline{\rho}(r,W,\alpha,\beta)=\frac{1-r^{-\alpha}}{1-r^{-\beta}}\quad\forall\beta\geq\alpha$.*
3. *W es una circulación.*

Grafos reducidos

El concepto de grafo reducido nos ayudará a simplificar el cálculo de la probabilidad de fijación en el caso de grafos con alta simetría.

Sea $W\in\mathcal{W}_n$, decimos que los vértices $i,j\in\{1,\dots,n\}$ son **indistinguibles** para la matriz W si $w_{ik}=w_{jk}$, $w_{ki}=w_{kj}$ para todo $k\neq i,j$, $w_{ii}=w_{jj}$ y $w_{ij}=w_{ji}$. Además, si $w_{ij}=w_{ji}=p\in[0,1]$, decimos que i y j son vértices ***p*–indistinguibles**.

Sólo "ser vértices p–indistinguibles" es una relación de equivalencia.

Consideremos un grafo con pesos en aristas y vértices dado por (W,Ω) donde Ω es el vector de pesos de los vértices. El **grafo reducido** asociado consta de tres elementos: los **vértices cuánticos**, que son las clases de equivalencia dadas por la relación "ser p–indistinguibles", los **pesos de las aristas**, que son los mismos que los pesos de las aristas entre los vértices originales y los **pesos de los vértices** cuánticos, cuyos respectivos pesos son la suma de los pesos de los vértices que componen cada uno de ellos.

Llamaremos **estado cuántico** del vértice (cuántico) $\overline{v}$ a una variable aleatoria que toma valores en el conjunto $Q_{\overline{v}}:=\{0,\frac{1}{|\overline{v}|},\frac{2}{|\overline{v}|},\dots,1\}\subset[0,1]^{|\overline{v}|}$ y definimos el conjunto de estados cuánticos del grafo reducido como $Q_{\overline{V}}:=\prod_{\overline{v}\in\overline{V}}Q_{\overline{v}}$. A los elementos de $Q_{\overline{V}}$ los llamamos **vectores cuánticos**.

La **función de estados cuánticos** nos permitirá pasar de los estados originales del grafo con sus correspondientes pesos a los estados cuánticos. Viene dada por:

$$\begin{array}{rccc} q_{(W,\Pi)}\equiv q: & \mathcal{P}(V) & \longrightarrow & Q_{\overline{V}} \\ & S & \longmapsto & \left(\frac{|S\cap\overline{v}|}{|\overline{v}|}\right)_{\overline{v}\in\overline{V}}. \end{array}$$

Por último, el proceso de Moran sobre el grafo reducido queda determinado por la siguiente función. Definimos la **función de probabilidades de transición** entre

vectores cuánticos de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccc} \overline{p}_W: & Q_{\overline{V}} \times Q_{\overline{V}} & \longrightarrow & [0,1] \\ & (x,y) & \longmapsto & \sum_{S,S' \in (q \times q)^{-1}(x,y)} p_W(S,S'). \end{array}$$

Ejemplo: La estrella.

El grafo de la Figura 1 se conoce como **estrella** de n vértices (6 en el caso de la Figura 1). Podemos usar la teoría desarrollada hasta ahora para calcular la función de probabilidades de transición para este grafo en función del número de vértices n y en particular la probabilidad de fijación de un mutante en dicho caso, que resulta ser

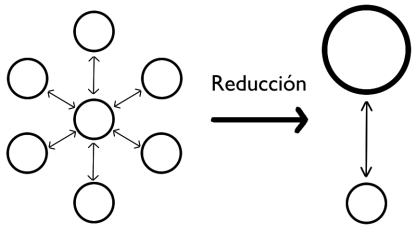


Figura 1: La estrella.

$$\rho_n = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{j} \gamma_k} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 - r^{-2},$$

donde γ_k es el cociente entre la probabilidad de disminuir el número de vértices en el siguiente instante de tiempo y la de aumentarlos cuando en el grafo ya hay k vértices. Este resultado concuerda con los resultados obtenidos por Nowak, Broom y Rychtář [6, 1].

Para concluir, invitamos a consultar en [4] un desarrollo en profundidad de este tema y las demostraciones de los resultados mencionados en este resumen.

Bibliografía

[1] Broom, M. y Rychtář, J. (2008). *An analysis of the fixation probability of a mutant on special classes of non–directed graphs*, Proc. R. Soc. A, 464.

[2] Broom, M., Rychtář, J. y Standler, B. (2009). *Evolutionary Dynamics on Small–Order Graphs*, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 12, 129–140.

[3] Broom, M., Rychtář, J. y Standler, B. (2011). *Evolutionary dynamics on graphs–the effect of graph structure and initial placement on mutant spread*, Journal of Statistical Theory and Practice. **5**(3).

[4] Fernández Tojo, F. A. (2010). *Reflexiones sobre dinámica evolutiva y grafos*, Trabajo Académico Dirigido. Directores: Fernando Alcalde Cuesta y Antonio Gómez Tato.

[5] Lieberman E., Hauert C. y Nowak, M. A. (2005). *Evolutionary dynamics on graphs*, Nature, **433**, pp. 312–316.

[6] Nowak, M. A. (2006). *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*, The Belknap Press.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Introducción al método de volúmenes finitos

Pedro González de Alaiza Martínez
Departamento de Matemática Aplicada

12 de junio de 2012

Las *ecuaciones hiperbólicas* modelan leyes de conservación en las que la información se propaga a velocidad finita, en ramas de la física tan variadas como pueden ser, por ejemplo, la mecánica de fluidos (ecuaciones de Euler, ecuaciones de Navier–Stokes, ecuaciones de las aguas someras) y la astrofísica (ecuaciones de la magnetohidrodinámica). Los *volúmes finitos* son ampliamente utilizados en la investigación numérica para su simulación. El éxito de sus discretizaciones, que van más allá de las clásicas *diferencias finitas*, radica en que armonizan la física con las matemáticas, convergiendo a la solución débil *entrópica* (aquella solución débil —cualquier función que satisfaga la formulación integral (2), pudiendo ser discontinua o no derivable en algunos puntos— que mejor aproxima la realidad).

Ecuaciones hiperbólicas: conceptos generales

Consideremos el siguiente problema de valor inicial:

Definición 1. *(PVI) Encontrar $w(x,t) \in \mathcal{R} \times (0,+\infty)$ que verifique:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x} f(w(x,t)) = 0, & x \in \mathcal{R},\, t > 0 \\ w(x,0) = w_0(x), & x \in \mathcal{R},\, t = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

donde $w(x,t)$ se llama ***variable conservativa****, $f(w)$* ***flujo físico****, $\lambda(w) := f'(w)$* velocidad de propagación *y $w_0(x)$* ***condición inicial****.*

En particular, vamos a estudiar dos ecuaciones muy importantes: la *ecuación del trasporte* (lineal) y la *ecuación de Burgers* (no lineal).

Definición 2. *(Ecuación del transporte) Aquélla con $f(w) = \lambda w,\ \lambda \in \mathcal{R}$.*

Definición 3. *(Ecuación de Burgers) Aquélla con $f(w) = \frac{w^2}{2}$.*

Las *curvas características* son muy importantes de cara a la resolución de (1):

Palabras Clave: Volúmenes Finitos, ecuaciones hiperbólicas.

Definición 4. *(Curvas características de (1)) Familia uniparamétrica de curvas:*

$$x(t) = \xi + \lambda(w_0(\xi))t, \qquad t \geq 0,$$

donde el parámetro ξ se denomina ***pie de la característica****.*

Proposición 5. *A lo largo de las características, $w(x(t), t)$ permanece constante:*

$$w(x(t), t) = w_0(\xi), \qquad t \geq 0.$$

Las características se representan en el plano xt. La solución en un punto (x, t) se calcula evaluando la condición inicial en el pie de la característica que pasa por él. Así, la solución de la ecuación del transporte es:

$$w(x, t) = w_0(x - \lambda t), \qquad t \geq 0.$$

No siempre existe una solución clásica. En el caso no lineal puede haber zonas donde las características se solapen. Además, es muy habitual considerar condiciones iniciales discontinuas (problema de Riemann: (3)). De entre todas las soluciones débiles de la formulación integral, se buscará la *entrópica* (ver Sección 4.4 de [3]).

Definición 6. *(Forma integral de la ley de conservación (1) en $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$)*

$$\int_{x_1}^{x_2} w(x, t_2)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} w(x, t_1)\, dx - \int_{t_1}^{t_2} f(w(x_2, t))\, dt + \int_{t_1}^{t_2} f(w(x_1, t))\, dt. \quad (2)$$

Definición 7. *(Problema de Riemann) Es el PVI con condición inicial:*

$$w_0(x) = \begin{cases} w_L, & x \leq 0 \\ w_R, & x > 0 \end{cases}. \quad (3)$$

La solución del problema de Riemann para la ecuación de Burgers se divide en una *onda de choque* si $w_L > w_R$ y una *onda de expansión* discontinua si $w_L \leq w_R$ (ver págs. 6-9 en [4], Sección 4.3 en [3]):

$$w(x, t) = \begin{cases} \text{si } w_L > w_R & \begin{cases} w_L, & x \leq st \\ w_R, & x > st \end{cases} \\ \text{si } w_L \leq w_R & \begin{cases} w_L, & x < w_L t \\ \dfrac{x}{t}, & w_L \leq \dfrac{x}{t} \leq w_R \\ w_R, & x > w_R t \end{cases} \end{cases}, \quad (4)$$

donde $s = \frac{w_L + w_R}{2}$ es la velocidad de avance del frente de ondas dada por (5).

Definición 8. *(Condición de salto de Rankine–Hugoniot)*

$$s = \frac{f(w_R) - f(w_L)}{w_R - w_L}. \quad (5)$$

Métodos de volúmenes finitos

Vamos a discretizar (1) en un mallado espacio-temporal uniforme. Dividimos el espacio en *celdas* o *volúmenes finitos* C_i de longitud Δx. Sus puntos medios x_i se llaman *nodos* y sus fronteras izquierda y derecha se representan, respectivamente, por $x_{i-\frac{1}{2}}$ y $x_{i+\frac{1}{2}}$. Tomaremos instantes de tiempo t_n, con paso de tiempo Δt. Y en cada instante t_n, consideraremos a la variable conservativa constante a trozos: $w(x, t_n) = w(x_i, t_n) \equiv w_i^n$, $\forall x \in C_i$.

Los métodos de volúmenes finitos más sencillos son los siguientes:

Definición 9. *(Esquema de volúmenes finitos de tres puntos)*

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\phi(w_i^n, w_{i+1}^n) - \phi(w_{i-1}^n, w_i^n)\right], \tag{6}$$

donde $\phi(u, v)$ se denomina ***flujo numérico****.*

Visto como esquema en diferencias finitas, el esquema dado por (6) debe tener las propiedades de *convergencia* (la solución discreta converge a la continua cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$) y *estabilidad* (los errores permanecen controlados a medida que se itera en tiempo). Además, los métodos de volúmenes finitos deben verificar, al menos, dos propiedades más:

- *Conservación.* La estructura dada por (6) imita la ley de conservación (2), ya que la suma de los w_i^{n+1} es igual a la suma de los w_i^n salvo los valores en los dos extremos del intervalo.
- *Consistencia.* Viene dada por $\phi(u, u) = f(u)$ y garantiza que el método sea capaz de calcular soluciones estacionarias.

Uno de los métodos de volúmenes finitos más importantes y conocidos es el esquema de Godunov:

Proposición 10. *El flujo numérico de Godunov $\phi(u, v)$ es igual al flujo físico evaluado en la solución en la frontera del problema de Riemann asociado a u y v.*

Así, el flujo numérico de Godunov para la ecuación del transporte es:

$$\phi_{\text{transporte}}(u, v) = \begin{cases} \lambda u, \, \lambda > 0 \\ \lambda v, \, \lambda < 0 \end{cases},$$

En el caso lineal, la estabilidad del esquema de Godunov viene garantizada por la condición de Courant–Friedrichs–Lewy (condición CFL), que determina que la velocidad a la que se propaga la información, λ, sea comparable a la velocidad con la que se propaga la malla, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Definición 11. *La condición CFL para la ecuación del transporte viene dada por:*

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\lambda|}.$$

El flujo numérico de Godunov para la ecuación de Burgers es (hay siete casos distintos, según (4)):

$$\phi_{\text{Burgers}}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{u^2}{2}, & \text{si } u > v > 0 \qquad \text{(choque supersónico)} \\ \dfrac{u^2}{2}, & \text{si } u \leq v \text{ y } u, v > 0 \quad \text{(expansión supersónica)} \\ \dfrac{v^2}{2}, & \text{si } 0 > u > v \qquad \text{(choque subsónico)} \\ \dfrac{v^2}{2}, & \text{si } u \leq v \text{ y } u, v < 0 \quad \text{(expansión subsónica)} \\ \dfrac{u^2}{2}, & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} u > 0 \geq v \\ u \geq 0 > v \end{array} \right\} \text{ y } u + v > 0 \quad \text{(choque transónico I)} \\ \dfrac{v^2}{2}, & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} u > 0 \geq v \\ u \geq 0 > v \end{array} \right\} \text{ y } u + v < 0 \quad \text{(choque transónico II)} \\ 0, & \text{si } u \leq 0 \leq v \qquad \text{(expansión transónica)} \end{cases} .$$

En este caso, la condición de estabilidad que calcula el paso de tiempo máximo entre los instantes t_n y t_{n+1} es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\text{máx}_i \, |w_i^n|}.$$

El esquema de Godunov que se ha presentado, el cual es de primer orden (es decir, el error es del orden $\mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t)$), es capaz de calcular siempre la solución entrópica, puesto que resuelve *entrópicamente* los problemas de Riemann. La complejidad está, pues, en conocer la solución exacta del problema de Riemann para cualquier ecuación hiperbólica. En la literatura se pueden encontrar varias familias de métodos de volúmenes finitos que aproximan dichos problemas. Puede consultarse cualquiera de las referencias bibliográficas para profundizar en el tema.

Bibliografía

[1] LeVeque, R. J. (2002). *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems: Vol. 31. Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press.

[2] Toro, E. F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (3rd ed.), Springer-Verlag.

[3] Vázquez-Cendón, M. E. (2008). *Introducción al Método de Volúmenes Finitos*, Universidad de Santiago de Compostela.

[4] Vázquez-Cendón, M. E. (Ed.) (2011). *Lecture Notes on Numerical Methods for Hyperbolic Equations: Short Course Book*, CRC Press, Taylor and Francis Group.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Simulación numérica de inundaciones en la ciudad de Villahermosa

Juan Carlos González Aguirre
División Académica de Ciencias Básicas
(Universidad Juárez Autónoma de Tabasco)

24 de julio de 2012

Ecuaciones de Saint–Venant

Las ecuaciones de Saint–Venant son un sistema cuasi lineal de leyes hiperbólicas que rigen el comportamiento de las aguas poco profundas (*shallow water*). La forma de deducir estas ecuaciones se puede ver en la Figura 1.

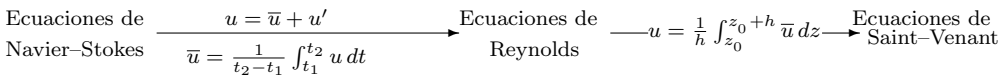


Figura 1: Esquema de la deducción de las ecuaciones de Saint–Venant.

Forma conservativa de las Ecuaciones

Las ecuaciones de Saint–Venant en forma conservativa pueden ser escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{G}_k, \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ \frac{q_1^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{q_1 q_2}{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_1 q_2}{h} \\ \frac{q_2^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial z_b}{\partial x} \\ -gh\frac{\partial z_b}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{b,x}}{\rho} \\ -\frac{\tau_{b,y}}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{t1} \\ S_{t2} \end{pmatrix},$$

donde $q_1 = hu$ y $q_2 = hv$, con h la profundidad del agua y u y v las velocidades en las direcciones $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respectivamente. g es la la aceleración de la fuerza de gravedad,

Palabras Clave: Inundaciones, Villahermosa, Volúmenes finitos, seco–mojado, Iber.

$\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ los vectores del flujo en las direcciones $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respectivamente, $\mathbf{G}_1$ toma en cuenta la pendiente del fondo, $\mathbf{G}_2$ contiene la pendiente de fricción y $\mathbf{G}_3$ toma en cuenta los términos turbulentos y viscosos. En las discretizaciones del término fuente no se empleará el vector $\mathbf{G}_3$ ya que para el caso de inundaciones éste no juega un papel relevante.

Volúmenes finitos

Discretización del dominio

Los nodos de los volúmenes tipo arista son colocados en las aristas de los triángulos de la discretización original. Este tipo de volúmenes facilita la definición del vector normal a la frontera de la geometría y permite una fácil implementación de la condición de frontera tipo Dirichlet. Estos volúmenes se pueden apreciar en la Figura 2. Los puntos N_i y N_j son los nodos i y j, L_{ij} es la frontera común a la celda i y j, $\mathbf{r}_{ij}$ es el vector que va del nodo i al nodo j y $\mathbf{n}_{ij}$ es el vector normal a la frontera L_{ij}. Los detalles de la construcción de estos volúmenes finitos se pueden consultar en [1].

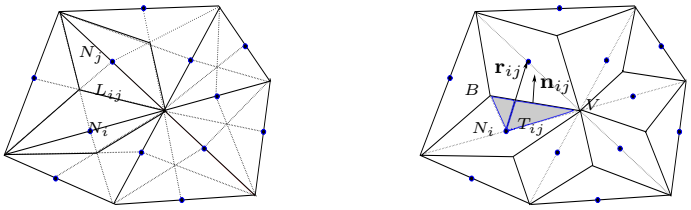


Figura 2: Visualización de los volúmenes finitos tipo arista.

Discretización de las Ecuaciones

Discretización temporal y espacial

La discretización temporal de primer orden de (1) es

$$\frac{\mathbf{W}^{n+1}-\mathbf{W}^n}{\Delta t}+\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x}(\mathbf{W}^n)+\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y}(\mathbf{W}^n)=\sum_{k=1}^{2}\mathbf{G}_k^n. \tag{2}$$

Luego, integrando (2) en cada celda de volumen finito C_i, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a la integral del flujo convectivo y despejando $\mathbf{W}_i^{n+1}$ el esquema numérico queda como

$$\mathbf{W}_i^{n+1}=\mathbf{W}_i^n+\frac{\Delta t}{A_i}\left[\sum_{k=1}^{2}\int_{C_i}\mathbf{G}_k^n dA-\int_{L_i}(\mathbf{F}_1\widetilde{n}_x+\mathbf{F}_2\widetilde{n}_y)dL\right],$$

con A_i y L_i el área y la frontera de la celda C_i, respectivamente. En términos de la condición CFL el paso del tiempo es implementado como [2]

$$\Delta t = \min_i \left\{ CFL \frac{d_i}{|\mathbf{U}|_i + \sqrt{g h_i}} \right\}.$$

Discretización del flujo convectivo

Para aproximar el flujo real en la frontera de la celda C_i, se define una función flujo numérico $\mathbf{\Phi}$, tal que el flujo convectivo es aproximado como

$$\int_{L_{ij}} (\mathbf{F}_1 \widetilde{n}_x + \mathbf{F}_2 \widetilde{n}_y) dL \approx \mathbf{\Phi}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{n}_{ij}).$$

En la familia de los Q–esquemas el flujo numérico se calcula como

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{W}_i, \mathbf{n}_{ij}) + \mathbf{Z}(\mathbf{W}_j, \mathbf{n}_{ij})}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{n}_{ij})| (\mathbf{W}_j - \mathbf{W}_i).$$

En esta expresión la parte centrada es un aproximación de segundo orden del flujo en la frontera L_{ij} y la parte descentrada da la estabilidad al esquema numérico. El vector $\mathbf{Z}(\mathbf{W}_i, \mathbf{n}_{ij})$ es $\mathbf{F}_1 \widetilde{n}_x + \mathbf{F}_2 \widetilde{n}_y$ y la matriz Q es la matriz jacobiana del flujo evaluado en un estado intermedio, ya sea el estado del Q–esquema de van Leer o el del esquema de Roe. La matriz $|\mathbf{Q}|$ es calculada como

$$|\mathbf{Q}(\mathbf{W})| = \mathbf{X}(\mathbf{W}) |\mathbf{D}(\mathbf{W})| \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{W})$$

donde $|\mathbf{D}|$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores absolutos de los valores propios de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{X}$ es la matriz formada por los vectores propios de $\mathbf{Q}$.

Discretización del término fuente – pendiente del fondo

La discretización de la fuente depende de los valores de las variables a cada lado de la celda y del vector normal. El término fuente se discretiza como

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{A_i} \int_{C_i} \mathbf{S} dA = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in K_i} \int_{\mathbf{T}_{ij}} \mathbf{S} dA \approx \frac{1}{A_i} \sum_{j \in K_i} A_{\mathbf{T}_{ij}} \mathbf{\Psi}_{ij}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \widetilde{\mathbf{n}}_{ij}),$$

donde $A_{\mathbf{T}_{ij}}$ es el área del subtriángulo T_{ij}. Nótese que $\mathbf{\Psi}_{ij}$ depende del vector normal unitario a la frontera L_{ij}, mientras que $\mathbf{\Phi}_{ij}$ depende del vector normal unitario a la frontera L_{ij}.

La función $\mathbf{\Psi}$ fuente numérica, es evaluada en cada subcelda como

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \widetilde{\mathbf{n}}_{ij}) = (\mathbf{I} - |\mathbf{Q}|_{ij} \mathbf{Q}_{ij}^{-1}) \widetilde{\mathbf{S}}_{ij}.$$

En esta última expresión $\widetilde{\mathbf{S}}_{ij}$ es una aproximación del término fuente en la subcelda T_{ij} con dependencia de las variables $\mathbf{W}_i$ y $\mathbf{W}_j$.

Frentes de seco–mojado

Suponiendo una elevación constante del fondo en cada celda, hay dos condiciones impuestas en el frente seco–mojado, la primera es una redefinición de la pendiente de la elevación del fondo y la segunda es la condición de reflexión. Si el frente seco–mojado ocurre entre la celdas C_i y C_j, el incremento $\Delta z_{b,ij}$ de la elevación del fondo en el frente es definido como

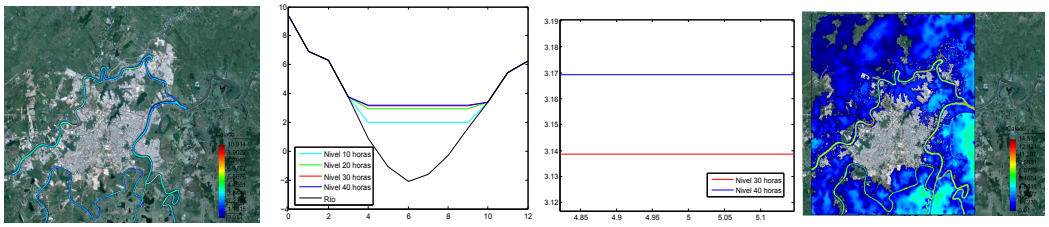
$$\Delta z_{b,ij} = \begin{cases} h_i - h_j & \text{si} \quad h_j \leq \epsilon_{sm} \text{ y } \ h_i < z_{b,j} - z_{b,i}, \\ z_{b,j} - z_{b,i} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con ϵ_{sm} el parámetro de seco–mojado, ver [2].

Simulaciones numéricas de inundaciones

Las simulaciones se llevaron a cabo con el código Iber, el cual está disponible para descargar en la página `www.iberaula.es`.

En las simulaciones se recrean las condiciones del día 1 y 30 de octubre de 2007 en la ciudad de Villahermosa. En la Figura 3 (a) se observa el resultado del día 1 de octubre. El nivel alcanzado en la estación hidrometeorológica Gaviotas se observa en la Figura 3 (b) y en la (c), el cual es 3.1681 *msnm*, mientras que el reportado por CONAGUA (Comisión Nacional del Agua) es de 3.18 *msnm*. La figura (d) muestra el estado final de la simulación del día 30 de octubre.



(a) (b) (c) (d)

Figura 3: Resultados de las simulaciones.

Bibliografía

[1] Bermúdez, A., Dervieux, A., Desideri, J. A. y Vázquez-Cendón, M. E. (1998). *Upwind scheme for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **155**, pp. 49–72.

[2] Cea, L. (2005). *An unstructured finite volume model for unsteady turbulent shallow water flow with wet-dry front: Numerical solver and experimental validation*, Tesis doctoral, Universidade de A Coruña.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SEMINARIO DE INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN
Instituto de Matemáticas

Directional–linear kernel density estimator

Eduardo García Portugués
Department of Statistics and Operations Research

26th September, 2012

This work presents a nonparametric kernel density estimator for directional–linear data. The proposal is based on a product kernel accounting for the different nature of both (directional and linear) components of the random vector. The bias, variance and asymptotic normality of the estimator are obtained and, finally, the estimator is used to explore the relation between the position of double stars and their color index in the Hipparcos astronomical dataset.

The estimator

Consider a directional–linear random variable $(\mathbf{X}, Z)$, taking values into $\Omega_q \times \mathbb{R}$, where Ω_q denotes the q–sphere in $\mathbb{R}^{q+1}$. For the simple case of circular data ($q = 1$), the support of the variable is the cylinder. The joint density of $(\mathbf{X}, Z)$, i.e. the function that characterizes the behaviour of this random vector, will be denoted by f. Following the ideas of the linear kernel estimator and the directional estimator (see [3] and [2], respectively), given a random sample $(\mathbf{X}_1, Z_1), \dots, (\mathbf{X}_n, Z_n)$, the directional–linear kernel density estimator can be defined as:

$$\hat{f}_{h,g}(\mathbf{x}, z) = \frac{c_{h,q}(L)}{ng} \sum_{i=1}^{n} LK\left(\frac{1 - \mathbf{x}^T\mathbf{X}_i}{h^2}, \frac{z - Z_i}{g}\right), \quad (\mathbf{x}, z) \in \Omega_q \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

where LK stands for a directional–linear kernel, g is the bandwidth parameter for the linear component, h the bandwidth parameter for the directional component and $c_{h,q}(L)$ is the normalizing constant for the directional part, defined in [4]. For the sake of simplicity, a product kernel $LK(\cdot, \cdot) = L(\cdot) \times K(\cdot)$, where L is the directional kernel (essentially, an exponentially decaying function) and K is a linear density, will be considered along this work.

Some asymptotic results

Before stating the main results for this estimator, it is necessary to introduce some notation. Denote the gradient vector and Hessian matrix of f, with respect to

KEYWORDS: Kernel density estimation, directional–linear data, directional statistics.

both components (directional and linear) by:

$$\nabla f(\mathbf{x},z)=\left(\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x},z),\nabla_z f(\mathbf{x},z)\right)^T,\mathcal{H}f(\mathbf{x},z)=\left(\begin{array}{c|c}\mathcal{H}_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x},z) & \mathcal{H}_{\mathbf{x},z}f(\mathbf{x},z)\\ \hline \mathcal{H}_{\mathbf{x},z}f(\mathbf{x},z)^T & \mathcal{H}_z f(\mathbf{x},z)\end{array}\right),$$

where subscripts $\mathbf{x}$ and z are used to denote the derivatives with respect to the directional and linear components, respectively. The Laplacian of f restricted to the directional component is denoted by $\nabla^2_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x},z)=\sum_{i=1}^{q+1}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},z)}{\partial \mathbf{x}_i^2}$.

The following conditions will be required to derive the results of this section:

DL1. Extension of f from $\Omega_q\times\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^{q+2}\backslash A$, $A=\left\{(\mathbf{x},z)\in\mathbb{R}^{q+2}:\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}$, by defining $f(\mathbf{x},z)\equiv f\left(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||},z\right)$ for all $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ and $z\in\mathbb{R}$, where $||\cdot||$ denotes the Euclidean norm. Assume that $\nabla f(\mathbf{x},z)$ and $\mathcal{H}f(\mathbf{x},z)$ exist, are continuous and square integrable.

DL2. Assume that $L:[0,\infty)\to[0,\infty)$ is a bounded and Riemann integrable function such that $0<\int_0^\infty L^k(r)r^{\frac{q}{2}-1}\,dr<\infty$, $\forall q\geq 1$, for $k=1,2$. Assume also that the linear kernel K is a symmetric around zero and bounded linear density function having finite second moment.

DL3. Assume that $h=h_n$ and $g=g_n$ are sequences of positive numbers such that $h_n\to 0$, $g_n\to 0$ and $nh_n^q g_n\to\infty$ as $n\to\infty$.

The next two propositions provide the expressions for the bias and the variance of the estimator (3).

Proposition 1. *Under conditions **DL1**–**DL3**, the expected value of the directional–linear kernel density estimator (3) in a point $(\mathbf{x},z)\in\Omega_q\times\mathbb{R}$ is given by*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{f}_{h,g}(\mathbf{x},z)\right]=&f(\mathbf{x},z)+b_q(L)\Psi_{\mathbf{x}}(f,\mathbf{x},z)h^2+\frac{1}{2}\mu_2(K)\mathcal{H}_z f(\mathbf{x},z)g^2\\&+o\left(h^2\right)+o\left(g^2\right),\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{x}}(f,\mathbf{x},z)&=-\mathbf{x}^T\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x},z)+q^{-1}\left(\nabla^2_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x},z)-\mathbf{x}^T\mathcal{H}_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x},z)\mathbf{x}\right),\\ b_q(L)&=\int_0^\infty L(r)r^{\frac{q}{2}}\,dr\Big/\int_0^\infty L(r)r^{\frac{q}{2}-1}\,dr\,,\quad \mu_2(K)=\int_{\mathbb{R}}t^2K(t)\,dt.\end{aligned}$$

Proposition 2. *Under conditions **DL1**–**DL3**, the variance for the directional–linear kernel density estimator (3) in a point $(\mathbf{x},z)\in\Omega_q\times\mathbb{R}$ is given by*

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\hat{f}_{h,g}(\mathbf{x},z)\right]=\frac{c_{h,q}(L)}{ng}R(K)d_q(L)f(\mathbf{x},z)+o\left((nh^qg)^{-1}\right),$$

where

$$d_q(L)=\int_0^\infty L^2(r)r^{\frac{q}{2}-1}\,dr\Big/\int_0^\infty L(r)r^{\frac{q}{2}-1}\,dr\,,\quad R(K)=\int_{\mathbb{R}}K^2(t)\,dt.$$

It can be also proved that the directional–linear kernel density estimator (3) is asymptotically normal, under the same conditions as those ones used for deriving the expected value and the variance, and a further smoothness property on the product kernel.

Theorem 3. *Under conditions **DL1**–**DL3**, if* $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} LK^{2+\delta}(r,v)\, r^{\frac{q}{2}-1}\, dv\, dr < \infty$ *for some* $\delta > 0$*, then the directional–linear kernel density estimator (3) is asymptotically normal:*

$$\sqrt{nh^q g}\left(\hat{f}_{h,g}(\mathbf{x},z) - f(\mathbf{x},z) - \text{ABias}\left[\hat{f}_{h,g}(\mathbf{x},z)\right]\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, R(K)d_q(L)f(\mathbf{x},z)\right),$$

pointwise in $(\mathbf{x},z) \in \Omega_q \times \mathbb{R}$*, where* $\text{ABias}\left[\hat{f}_{h,g}(\mathbf{x},z)\right] = b_q(L)\Psi_{\mathbf{x}}(f,\mathbf{x},z)h^2 + \frac{1}{2}\mu_2(K)\mathcal{H}_z f(\mathbf{x},z)g^2$.

The detailed proofs of these and other results can be found in [1].

Data application

In 1989, the European Space Agency (ESA) launched the Hipparcos satellite. The satellite captured information about 100,000 stars until the end of the mission, in 1993. Among other variables, the satellite measured the stars position, color index B–V and brightness. Particularly, the color index B–V is a continuous variable between −0,50 and 1,50 that represents the temperature of the star, with three mainly kinds of stars: blue ones (the hottest and youngest), with color index B–V, white ones, with B–V=0,50 and red ones (coldest and oldest), with B–V=1,00.

The proposed estimator (3) can be used to analyze the relation between the star position (measured as a location in the celestial sphere) and the color index of the stars (a linear variable). The visualization of the estimated spherical–linear densities is done via the conditional directional density (see Figure 4). The directional density conditioned to the linear variable is defined as $f(\mathbf{x}|z) = f(\mathbf{x},z)/f_Z(z)$ and can be estimated as $\hat{f}_{h,g}(\mathbf{x}|z) = \hat{f}_{h,g}(\mathbf{x},z)/\hat{f}_{Z,g}(z)$ by substituting the unknown densities by the well–known linear estimator $\hat{f}_{Z,g}$ and the estimator (3). The pair of bandwidths (h,g) is selected by the Likelihood Cross Validation (LCV) criterion, defined by

$$(h,g)_{\text{LCV}} = \arg\max_{h,g>0}\text{LCV}(h,g), \quad \text{LCV}(h,g) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{h,g}^{-i}(\mathbf{X}_i, Z_i),$$

where $f_{h,g}^{-i}$ represents the estimator (3) computed without the i–th sample point.

The density of the double stars conditioned to the value of the color index B–V=0,00, which corresponds to the blue stars, is shown in Figure 4. The density has been drawn in 2D by the Aitoff projection. As it can be seen, the blue double

stars are more concentrated in two areas: the Orion's arm and the Gould's Belt. If the condition is done in the color index values 0,50 and 1,00, that corresponds to the white and red stars, the concentration in the Orion's arm vanishes whereas it remains in the Gould's Belt.

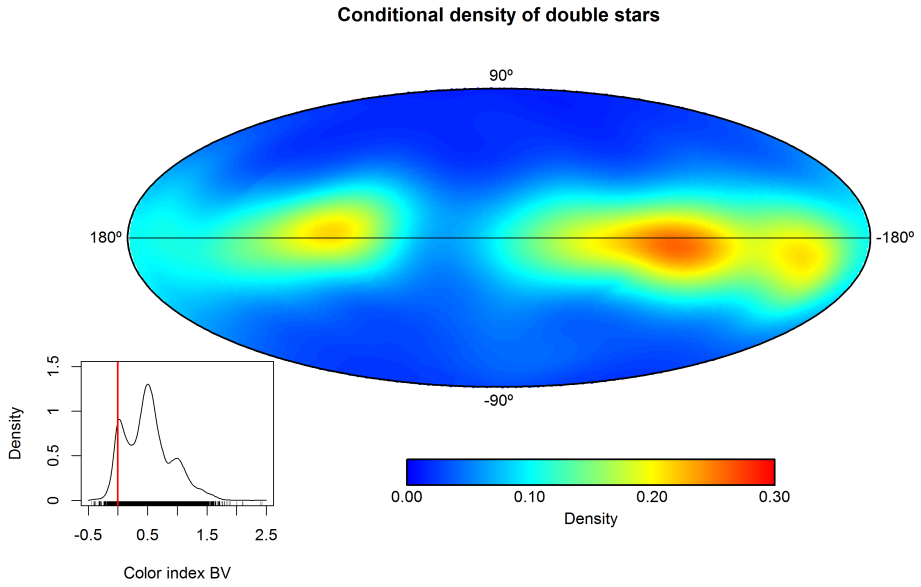


Figure 4: Aitoff projection of the density of the double starts conditioned to the color index B–V=0,00 (blue stars). The highly concentrated area in the left represents the stars associated to the Orion's arm whereas the left one is related to the the Gould's Belt. The bandwidth parameters have been chosen by LCV.

References

[1] García–Portugués, E., Crujeiras, R. M. and González–Manteiga, W. (2012). *Kernel density estimator for directional–linear data*, arXiv:1210.3214.

[2] Hall P., Watson, G. S. and Cabrera, J. (1987). *Kernel density estimation with spherical data*, Biometrika, **74**, pp. 751–762.

[3] Wand, M. P. and Jones, M. C. (1995). *Kernel smoothing*, Chapman and Hall Ltd., London.

[4] Zhao, L. and Wu, C. (2001). *Central limit theorem for integrated square error of kernel estimators of spherical density*, Sci. China Ser. A, **44**, pp. 474–483.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Simetrías y leyes de conservación en el formalismo Lagrangiano k–simpléctico

Lucía Búa Devesa
Departamento de Geometría y Topología

10 de octubre de 2012

Introducción

Para el caso $k = 1$ es sabido que las simetrías de Cartan inducen y son inducidas por constantes de movimiento, y esos resultados son conocidos como el Teorema de Noether y su inverso. Para $k > 1$, el Teorema de Noether también se verifica, por lo tanto cada simetría de Cartan induce una ley de conservación. Además se estudiará bajo qué hipótesis, el inverso del Teorema de Noether es cierto. Se tratan ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales para ilustrar cuando este es el caso y cuando no.

Formalismo Lagrangiano k–simpléctico

Sea M una variedad y $T^1_k M = TM \oplus \overset{k}{\ldots} \oplus TM$ su fibrado tangente de k^1–velocidades.

Definición 1. *Un* campo de k–vectores *es una sección de* $\tau_M : T^1_k M \to M$.

Un campo de k–vectores X define una familia de k campos de vectores $(X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$ proyectando sobre cada factor.

Definición 2. *Una* sección integral *de X pasando por un punto $x \in M$, es una aplicación $\psi \colon U \subset \mathbb{R}^k \to M$, definida en un entorno abierto U de $0 \in \mathbb{R}^k$, tal que*

$$\psi(0) = x,\ \psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = X_\alpha(\psi(t)) \in T_{\psi(t)}M, \quad \text{para todo t} \in \text{U},\ 1 \leq \alpha \leq \text{k}.$$

Un campo de k–vectores es *integrable* si existe una sección integral pasando por todo punto de M.

Definición 3. *Un* sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden *(*SOPDE*) en Q es un campo de k–vectores $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ en $T^1_k Q$, que es sección de la proyección $T^1_k \tau_Q \colon T^1_k(T^1_k Q) \to T^1_k Q$, es decir $T^1_k \tau_Q \circ \xi = \mathrm{Id}_{T^1_k Q}$.*

Palabras Clave: Simetrías, leyes de conservación, teorema de Noether, variedades k–simplécticas, formalismo Lagrangiano.

Localmente un SOPDE $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ está dado por:

$$\xi_\alpha = v^i_\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v^i_\beta}, \quad 1 \leq \alpha \leq k.$$

Si $\psi : U \subset \mathbb{R}^k \to T^1_k Q$ es una sección integral de un SOPDE ξ entonces $\psi = \phi^{(1)}$, donde $\phi^{(1)}$ es la primera prolongación de la aplicación $\phi = \tau_Q \circ \psi$ y está definida por $\phi^{(1)}(t) = \left(\phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\Big|_t\right), \dots, \phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^k}\Big|_t\right)\right)$ y ϕ es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}(t) = \xi^i_{\alpha\beta}\left(\phi^j(t), \frac{\partial \phi^j}{\partial t^\gamma}(t)\right). \tag{1}$$

Recíprocamente, si $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to Q$ es cualquier aplicación verificando (1), entonces $\phi^{(1)}$ es una sección integral de $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$.

Observación 4. *Si $\psi(t) = (\psi^i(t))$, entonces localmente $\psi^{(1)}(t) = \left(\psi^i(t), \frac{\partial \psi^i}{\partial t^\alpha}(t)\right)$.*

Definición 5. *Un* Lagrangiano *es una función diferenciable $L\colon T^1_k Q \to \mathbb{R}$.*

Se dice que el Lagrangiano $L\colon T^1_k Q \to \mathbb{R}$ es *regular* si la matriz $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i_\alpha v^j_\beta}\right)$ es regular para todo punto de $T^1_k Q$.

Sea L un Lagrangiano. Las ecuaciones de Euler–Lagrange generalizadas para L son

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\Big|_{\phi^{(1)}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\phi^{(1)}} = 0 \tag{2}$$

cuyas soluciones son aplicaciones $\phi\colon \mathbb{R}^k \to Q$.

Introducimos las formas de Poincaré–Cartan: la 1-forma $\theta^\alpha_L = dL \circ J^\alpha$ y la 2–forma $\omega^\alpha_L = -d\theta^\alpha_L$; y la función energía Lagrangiana $E_L = \mathbb{C}(L) - L \in C^\infty(T^1_k Q)$, donde $\mathbb{C}$ es el campo de vectores de Liouville y $(J^1, \dots, J^k)$ la estructura canónica k–tangente. Localmente,

$$\theta^\alpha_L = \frac{\partial L}{v^i_\alpha} dq^i, \quad \mathbb{C} = v^i_\alpha \frac{\partial}{\partial v^i_\alpha}, \quad J^\alpha = \frac{\partial}{\partial v^i_\alpha} \otimes\ dq^i.$$

Recordemos la definición de estructura k–simpléctica.

Definición 6. *Una* estructura k–simpléctica *en una variedad $k + nk$–dimensional M está dada por una familia de k 2–formas cerradas $(\omega^1, ..., \omega^k)$ y una distribución kn–dimensional V en M tal que*

$$i) \cap_{\alpha=1}^k \operatorname{Ker}(\omega^\alpha) = \{0\}, \quad ii) \omega^\alpha_{|_{V\times V}} = 0, \quad \alpha \in \{1, ..., k\}.$$

Sea $\mathfrak{X}^k_L(T^1_kQ)$ el conjunto de campos de k–vectores $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ en T^1_kQ, que son soluciones de la ecuación

$$i_{X_\alpha}\omega^\alpha_L = dE_L. \tag{3}$$

Proposición 7. *Si L es regular entonces la solución de la ecuación* (3) *es un* SOPDE *y si es integrable sus secciones son soluciones de las ecuaciones de Euler–Lagrange.*

A partir de ahora asumiremos que el Lagrangiano L es regular.

Simetrías y leyes de conservación

Definición 8. *Una aplicación $(f^1, \dots, f^k)\colon T^1_kQ \to \mathbb{R}^k$ se llama* ley de conservación *(o* cantidad conservada*) para las ecuaciones de Euler–Lagrange si*

$$0 = \frac{\partial(f^\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^\alpha}\Big|_t \quad \textit{para toda solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange } \phi.$$

Lema 9. *Sea $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ un* SOPDE *integrable en $\mathfrak{X}^k_L(T^1_kQ)$. Entonces si $f = (f^1, \dots, f^k)\colon T^1_kQ \to \mathbb{R}^k$ es una ley de conservación entonces $\xi_\alpha(f^\alpha) = 0$.*

El inverso del Lema 9 puede no ser cierto ya que existen soluciones de las ecuaciones de Euler–Lagrange que no son secciones integrales de algun elemento de $\mathfrak{X}^k_L(T^1_kQ)$.

Lema 10. *Sea X un campo de vectores en T^1_kQ tal que*

$$i_X\omega^\alpha_L = df^\alpha \tag{4}$$

para algunas funciones $f^\alpha\colon T^1_kQ \to R$. Entonces $f = (f^1, \dots, f^k)$ es una ley de conservación si, y sólo si $\xi_\alpha(f^\alpha) = 0$ para todo SOPDE *integrable $\xi \in \mathfrak{X}^k_L(T^1_kQ)$.*

Definición 11. *[3] Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ se llama* simetría de Cartan *para el Lagrangiano L, si $\mathcal{L}_X\omega^\alpha_L = 0$ para todo $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ y $\mathcal{L}_X E_L = 0$.*

De la condición $\mathcal{L}_X\omega^\alpha_L = 0$ se obtiene que localmente $i_X\omega^\alpha_L = df^\alpha$. Entonces si X es una simetría de Cartan, el Lema 10 se verifica localmente.

Teorema 12. *(Teorema de Noether, [3]) Consideremos un Lagrangiano L en T^1_kQ y $X \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ una simetría de Cartan para L. Entonces, existen (localmente definidas) unas funciones g^α en T^1_kQ tal que $\mathcal{L}_X\theta^\alpha_L = dg^\alpha$ y las siguientes funciones $f^\alpha = \theta^\alpha_L(X) - g^\alpha$ definen una ley de conservación para las ecuaciones de Euler–Lagrange.*

Ejemplo: Leyes de conservación no inducidas por simetrías de Cartan

Sea la ecuación de la cuerda vibrante $\sigma\partial_{11}\phi - \tau_{22}\phi = 0$ que es la ecuación de Euler–Lagrange para el Lagrangiano $L\colon T_2^1\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $L(q, v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\sigma v_1^2 - \tau v_2^2)$.

Sabemos que $f^1(q, v_1, v_2) = -2\sigma v_1 v_2$ y $f^2(q, v_1, v_2) = \sigma(v_1)^2 + \tau(v_2)^2$ define una ley de conservación para la cuerda vibrante. Esta ley de conservación no está inducida por ninguna simetría de Cartan.

Consideremos $X \in \mathfrak{X}(T_2^1\mathbb{R})$, localmente $X = Z\frac{\partial}{\partial q} + Z_1\frac{\partial}{\partial v_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial v_2}$. La ecuación (4) para $\alpha = 1$ implica que $\frac{\partial f^1}{\partial v_2} = 0$, que no es cierto, ya que en nuestro caso $\frac{\partial f^1}{\partial v_2} = -2\sigma v_1$.

Proposición 13. *Sea L un Lagrangiano, $f^\alpha\colon T_k^1Q \to \mathbb{R}$ unas funciones, y $X \in \mathfrak{X}(T_k^1Q)$ un campo de vectores tales que $i_X\omega_L^\alpha = df^\alpha$. Entonces f^α define una ley de conservación para L si y solo si X es una simetría de Cartan.*

Ejemplo: Leyes de conservación inducidas por simetrías de Cartan

Para el Lagrangiano $L : T_2^1\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(q^1, q^2, v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2) = \left(\frac{1}{2}\lambda + \nu\right)[(v_1^1)^2 + (v_2^2)^2] + \frac{1}{2}\nu[(v_2^1)^2 + (v_1^2)^2] + (\lambda + \nu)v_1^1v_2^2,$$

el campo de vectores $X = \partial/\partial q^1 + \partial/\partial q^2$ es una simetría de Cartan y la ley de conservación inducida es

$$f^1 = (\lambda + 2\nu)v_1^1 + \nu v_1^2 + (\lambda + \nu)v_2^2, \quad f^2 = (\lambda + \nu)v_1^1 + \nu v_2^1 + (\lambda + 2\nu)v_2^2.$$

Las ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes son las ecuaciones de Navier.

Bibliografía

[1] Búa, L., Bucataru, I. y Salgado, M. (2012). *Symmetries, Newtonoid vector fields and conservation laws on the Lagrangian k-symplectic formalism*, Reviews in Math. Physics, **24**(10).

[2] Marmo, G. y Mukunda, N. (1986). *Symmetries and constants of the motion in the Lagrangian formalism on TQ: beyond point transformations*, Il Nuovo Cimento B, **92**(1), pp. 1–12.

[3] Román-Roy, N., Salgado, M. y Vilariño, S. (2007). *Symmetries and Conservation Laws in Günter k-symplectic formalism of Field Theory*, Rewiews in Mathematical Physics, **19**(10), pp. 1117–1147.

[4] Muñoz-Lecanda, M. C., Salgado, M. y Vilariño S. (2010). *k-symplectic and k-cosymplectic Lagrangian field theories: some interesting examples and applications*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **7**(4), pp. 669–692.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Modelos de series de tiempo con covariables. Aplicación a datos financieros

Borja Raúl Lafuente Rego
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

24 de octubre de 2012

Introducción

Trabajar con datos obtenidos de forma secuencial en el tiempo es muy común. Por ejemplo, en meteorología todos los días se observa la temperatura, los índices de precipitación y la velocidad del viento; en economía se estudia la evolución diaria de activos financieros, etc.

El propósito del análisis de series temporales es modelizar el mecanismo estocástico que da lugar a la serie observada y predecir los valores futuros basados en la historia de esa serie.

Una primera aproximación a la modelización de series de tiempo la dan los modelos autorregresivos y de medias móviles, ARMA(p,q),

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}$$

donde c, $\phi_1, ..., \phi_p$ y $\theta_1, ..., \theta_q$ son parámetros desconocidos que hay que estimar y $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$, es decir, son variables independientes e idénticamente distribuidas de media cero y varianza σ^2.

Casos particulares de este modelo serían los procesos autorregresivos AR(p) y los procesos de medias móviles MA(q). Estos tipos de procesos son modelos lineales de series temporales. En los últimos años ha habido mucho interés en el análisis de series temporales no lineales. La mayoría de modelos y métodos utilizados se basan en modelos paramétricos no lineales o modelos no paramétricos. Los modelos paramétricos no lineales pueden ser muy restrictivos en muchos casos, mientras que los modelos no paramétricos son más flexibles.

Nos vamos a centrar en dos modelos de series temporales no lineales paramétricos (TAR y BM) y dos modelos semiparamétricos (FAR y AFAR).

Palabras Clave: ARMA, TAR, BM, FAR, AFAR.

Modelos con covariables

Modelos de Umbral Autorregresivos

Los modelos TAR fueron introducidos por [4]. Estos modelos están motivados por varias características no lineales comúnmente observadas en la práctica, tales como la asimetría en la disminución y aumento de los patrones de un proceso.

Los modelos de umbral autorregresivos (TAR) asumen diferentes formas lineales en distintas regiones del espacio de estados. La división del espacio de estados viene determinada por una variable umbral, X_{t-d}, con $d \geq 1$.

Un modelo TAR con $k \geq 2$ regiones y k covariables, viene definido por

$$X_t = \sum_{i=1}^{r} \left[b_{i0} + \sum_{j=1}^{p_i} b_{ij} X_{t-j} + \sum_{l=1}^{k} d_{il} Z_{tl} + \sigma_i \epsilon_t \right] I\left(X_{t-d} \in A_i\right),$$

con $\epsilon_t \sim IID(0,1)$, d, p_1,..., p_k enteros positivos desconocidos, σ_i, b_{ij} y d_{il} parámetros desconocidos y $\{A_i\}$ es una partición de la recta real tal que $\cup A_i = (-\infty, \infty)$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$. I es la función indicadora que toma valor 1 cuando $X_{t-d} \in A_i$ y 0 en otro caso.

Se van a considerar particiones de la recta real del tipo $A_i = (r_{i-1}, r_i]$ con $-\infty = r_0 < r_1 < ... < r_k = \infty$. Comúnmente, a los r_i se les denota por umbrales.

Modelos Bilineales

Los modelos bilineales fueron introducidos por [3]. Son una generalización de los modelos ARMA a los que se le añade una parte de interacción entre los instantes pasados y las innovaciones.

El modelo bilineal con covariables es de la forma:

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} b_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} a_j \epsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} c_{ij} X_{t-i} \epsilon_{t-j} + \sum_{l=1}^{k} d_l Z_{tl} + \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$, b_i, a_j, c_{ij} y d_l parámetros desconocidos y Z_{tl} la covariable l–ésima en el instante t.

Estos modelos son útiles para captar picos ocasionales en series de tiempo. Por tanto, pueden ser útiles para el modelado de datos sismológicos, tales como registros de explosiones y terremotos.

Modelos Autorregresivos con Coeficiente Funcional

El modelo FAR fue introducido por primera vez por Chen y Tsay (1993) [1]. Tiene la forma de un proceso autorregresivo sin constante en el que los parámetros del modelo son funciones evaluadas en la variable X_{t-d}.

Se dice que una serie temporal X_t sigue un modelo FAR(p,d) con k covariables si satisface,

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} f_i(X_{t-d})X_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} g_j(X_{t-d})Z_{tj} + \sigma(X_{t-d})\epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ y son independientes de $X_{t-1}, X_{t-2}, ...$ y Z_{tj} el valor de la j–ésima covariable en el instante t. Las funciones $f_1(\cdot), ..., f_p(\cdot)$ son desconocidas.

El principal objetivo de la especificación del modelo es inferir las funciones $f_i(\cdot)$ a partir de los datos, es decir, estimar la funciones $f_i(\cdot)$ en los puntos X_{t-d}. Además de esto, también habría que estimar el valor de la varianza de los residuos, σ^2.

Todos los modelos paramétricos y no paramétricos pueden ser considerados como modelos de regresión, por tanto, se pueden aplicar esas técnicas a modelos de series temporales.

Modelos Autorregresivos con Coeficiente Funcional Adaptado

Una posible generalización del modelo FAR sería considerar que las funciones estén evaluadas en una combinación lineal de p instantes anteriores en lugar de estar evaluadas en la variable con retardo d. Este modelo se conoce como Modelo autorregresivo con coeficiente funcional adaptado (AFAR) y se puede consultar en [2].

Diremos que una serie temporal X_t sigue un modelo AFAR($p, \boldsymbol{\beta}$) con k covariables si cumple que

$$X_t = f_0(\beta^T \mathbf{X}_{t-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} f_i(\beta^T \mathbf{X}_{t-1})X_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} g_j(\beta^T \mathbf{X}_{t-1})Z_{tj} + \epsilon_t$$

con $\mathbf{X}_{t-1} = (X_{t-1}, ..., X_{t-p})$ y $\boldsymbol{\beta}$ una dirección en el espacio p–dimensional $\mathbb{R}^p$ tal que $\|\boldsymbol{\beta}\| = 1$ y Z_{tj} el valor de la j–ésima covariable en el instante t.

Los residuos ϵ_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de media cero y varianza σ^2. Además, se asume que ϵ_t es independiente de $\mathbf{X}_{t-1}$. Todo modelo TAR se puede reescribir como un modelo AFAR.

Aplicación a datos reales

En este apartado se van a aplicar los modelos comentados con anterioridad al estudio de una base de datos reales. Se analizarán unos datos del ámbito financiero tomados mensualmente entre enero de 2004 y diciembre de 2010. Para este análisis se tomaran 9 covariables. En este caso, como la serie original presenta tendencia y heterocedasticidad (la varianza no es constante a lo largo del tiempo), se opta por trabajar con la serie logarítmica diferenciada.

Para comparar los modelos se calculan los errores de predicción en valor absoluto (EP1) y cuadrático medio (EP2).

La siguiente tabla recoge los errores cometidos en los distintos modelos:

	TAR	BM	FAR	AFAR
EP1	0.0728	0.1039	0.1006	0.0932
EP2	0.0110	0.0171	0.0166	0.0143

Se ve que el menor error de predicción se obtiene en el modelo TAR.

En la Figura 1 se muestran los valores reales frente a los valores ajustados por ese modelo.

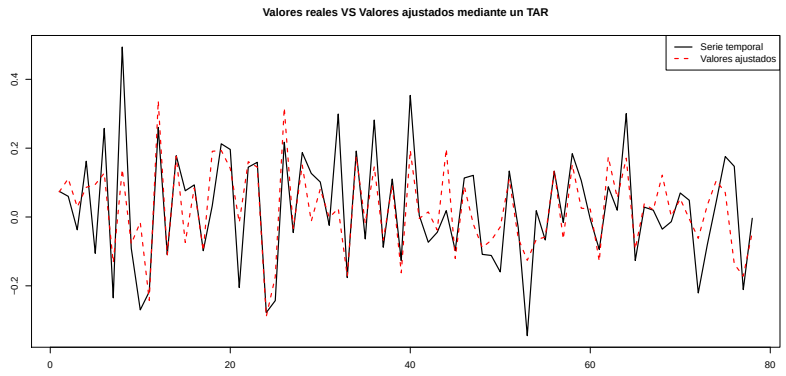


Figura 1: Valores reales frente a valores ajustados por un modelo TAR.

Bibliografía

[1] Chen, R. y Tsay, R. S. (1993). Functional–coefficient autoregressive models, *Journal of the American Statistical Association*, **88**, pp. 298–308.

[2] Fan, J. y Yao, Q. (2003). *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*, Springer.

[3] Granger, C. W. J. y Anderson, A. P. (1978). *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Van derhoeck & Ruprecht, Gottingen.

[4] Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series: A Dynamical Systems Approach*, Oxford University Press, Oxford.

[5] Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3ª edición), Wiley, New York.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Introducción al estudio topológico de flujos

Héctor Barge Yáñez
Departamento de Geometría y Topología

7 de noviembre de 2012

La teoría de homotopía clásica no es eficiente para profundizar en la estructura topológica de los atractores para flujos continuos. En este trabajo haremos una breve introducción a la teoría de la forma de Borsuk, que extiende en cierta medida a la teoría de homotopía clásica y que, además, es una herramienta natural para el estudio de la estructura topológica de los atractores, que son objetos de gran importancia en sistemas dinámicos.

Teoría de la forma

La teoría de la forma, introducida por el matemático polaco Borsuk en [2], es una generalización de la teoría de homotopía clásica, que no es efectiva para estudiar espacios con mal comportamiento local. Borsuk extendió la teoría clásica a un contexto más general, dando así nacimiento a la teoría de la forma, para más detalles ver [3, 8]. Al igual que ocurre con la teoría clásica, existe una teoría de homología adaptada a la teoría de la forma, esta teoría es la llamada *(co)homología de Čech*, de la cual se puede encontrar una descripción completa en [4], aunque para las ideas básicas de la cohomología de Čech, por su simplicidad, se recomienda [9].

Aunque ya se ha dicho antes que las referencias básicas para la teoría de la forma son [3, 8], presentaremos de modo esquemático una breve introducción basada en la realizada por Kapitanski y Rodnianski en [7].

Sea X un subconjunto cerrado de un ANR (Absolute Neighborhood Retract, ver Observación 2), M e Y un subconjunto cerrado de un ANR N. Denotaremos por $\mathbb{U}(X;M)$ y $\mathbb{U}(Y;N)$ al conjunto de todos los entornos abiertos de X en M y de Y en N, respectivamente.

Sea $\mathbf{f} = \{f : U \to V\}$ una colección de aplicaciones continuas entre los entornos $U \in \mathbb{U}(X;M)$ y $V \in \mathbb{U}(Y;N)$. Diremos que $\mathbf{f}$ es una mutación si satisface las siguientes condiciones:

(*i*) Para todo $V \in \mathbb{U}(Y;N)$ existe (al menos) una aplicación $f : U \to V$ en $\mathbf{f}$.

(*ii*) Si $f : U \to V$ está en $\mathbf{f}$, entonces la restricción $f_{|U_1} : U_1 \to V_1$ también está en $\mathbf{f}$ para todo entorno $U_1 \subset U$ y todo entorno $V_1 \supset V$.

Palabras Clave: *shape*, flujo, atractor, mutación, región de atracción.

(*iii*) Si dos aplicaciones $f, f' : U \to V$ están en $\mathbf{f}$, entonces existe un entorno $U_1 \subset U$ tal que las restricciones $f_{|U_1}$ y $f'_{|U_1}$ son homotópicas.

Un ejemplo trivial de mutación es la mutación identidad $\mathbf{id}_{\mathbb{U}(X;M)}$, consistente en las aplicaciones identidad $id_U : U \to U$. Las nociones de composición y homotopía de mutaciones se definen de un modo natural y por tanto no se incluirán los detalles (ver [7]).

Dados dos espacios métricos X e Y, diremos que el *shape* (forma) de Y domina al *shape* de X, y se denotará por $Sh(Y) \geq Sh(X)$, si X e Y pueden ser embebidos como subespacios cerrados de ANR's M y N respectivamente, de modo que existan mutaciones $\mathbf{f} = \{f : U \to V\}$ y $\mathbf{g} = \{g : V \to U\}$, tales que la composición $\mathbf{gf}$ es homotópica a la mutación $\mathbf{id}_{\mathbb{U}(X;M)}$. Si además $\mathbf{fg}$ es homotópica a la mutación $\mathbf{id}_{\mathbb{U}(Y;N)}$, diremos que X e Y tienen el mismo *shape* y se denotará por $Sh(X) = Sh(Y)$.

Las nociones de dominación *shape* y *shape* están bien definidas y no dependen ni de los ANR's ni de los embebimientos escogidos. El *shape* es un invariante del tipo de homotopía, es decir, si dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía, entonces tienen el mismo *shape*. Además, dos ANR's tienen el mismo *shape* si y sólo si tienen el mismo tipo de homotopía. Esto pone de manifiesto que la teoría de la forma es una generalización de la teoría de homotopía clásica, utilizada para el estudio de espacios con malas propiedades locales en los que la teoría de homotopía clásica no aporta suficiente información.

Observación 1. *Recuérdese que dadas dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ entre espacios topológicos, se dice que f y g son homotópicas si existe una aplicación continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A dicha F se le denomina* homotopía *entre f y g.*

Observación 2. *Un espacio metrizable X se dice que es un* ANR *si para todo embebimiento h, que lleva homeomórficamente X en un subconjunto cerrado $h(X)$ de un espacio metrizable Y, existe un entorno U de $h(X)$ en Y y una aplicación $r : U \to h(X)$ continua tal que $r_{|h(X)} = id_{h(X)}$, es decir, $h(X)$ es un retracto de U. Los ANR's son espacios con buenas propiedades locales y además tienen el mismo tipo de homotopía que los poliedros [8]. Algunos ejemplos de ANR's son: los abiertos de espacios euclídeos, las variedades topológicas y los CW–complejos. Además, todo espacio métrico se puede embeber en un ANR como un subespacio cerrado. Para profundizar en la teoría de ANR's se recomienda [6].*

Sistemas Dinámicos

Definición 3. *Sea X un espacio métrico localmente compacto. Una aplicación continua $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ se denomina* flujo *(sistema dinámico continuo), si verifica:*

(*i*) $\varphi(x,0) = x$ *para todo* $x \in X$, *y*

(*ii*) $\varphi(\varphi(x,t),s) = \varphi(x,t+s)$ *para cualesquiera* $s, t \in \mathbb{R}$.

A la vista de la definición se observa que, fijado un $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\varphi_t : X \to X$ definida por $\varphi_t(x) = \varphi(x,t)$ es un homeomorfismo con inversa φ_{-t}. Para profundizar en la teoría de sistemas dinámicos se recomienda [1].

Un subconjunto compacto K se dice invariante si para todo $x \in K$, $\varphi(x,t) \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, diremos que un compacto invariante K es un *atractor* si existe un entorno U de K tal que

$$\limsup_{t\to\infty} d(\varphi(x,t), K) = 0, \quad \text{para todo } x \in U,$$

y además se tiene que para cualquier entorno W de K existe un entorno $V \subset W$ de K tal que para todo $x \in V$, $\varphi(x,t) \in V$ para todo $t \geq 0$. Si K es un atractor se define su *región de atracción*

$$\mathcal{A}(K) = \{x \in X \mid \limsup_{t\to\infty} d(\varphi(x,t), K) = 0\}.$$

Si K es un atractor se prueba que $\mathcal{A}(K)$ es un abierto de X (ver [1]).

Teoría de la forma y sistemas dinámicos

La teoría de la forma es una herramienta muy adecuada para hacer un estudio de carácter topológico de los sistemas dinámicos. En particular, esta teoría permite profundizar en ciertos aspectos de la estructura topológica de los atractores (repulsores). En esta sección haremos una breve exposición de algunos resultados relativos al *shape* de los atractores. Las referencias fundamentales para esta parte son lo expuesto por Kapintanski y Rodnianski [7] y el trabajo de Sanjurjo [12].

El siguiente resultado relaciona el *shape* del atractor K con el *shape* de su región de atracción $\mathcal{A}(K)$. De esta relación se deducen interesantes propiedades sobre la estructura topológica de los atractores.

Teorema 4. *Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ un flujo definido en un espacio métrico X y sea K un atractor para φ. Entonces la inclusión $i : K \hookrightarrow \mathcal{A}(K)$ es una equivalencia* shape*. En particular se deduce que $Sh(K) = Sh(\mathcal{A}(K))$.*

Como consecuencia del Teorema 4 se puede deducir el siguiente resultado, que fue probado por Günter y Segal para X una variedad topológica [5], y por Sanjurjo para X un ANR arbitrarios [11, 10].

Teorema 5. *Sea $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ un flujo definido en un ANR localmente compacto X, y sea K un atractor para φ. Entonces K tiene el* shape *de un poliedro finito. En particular, su homología y cohomología de Čech es finitamente generada, y tanto $\check{H}^q(K)$ como $\check{H}_q(K)$ son triviales para q suficientemente grande.*

Recíprocamente, si consideramos como ANR $X = \mathbb{R}^n$ se tiene el siguiente resultado

Teorema 6. *Supongamos que K es un compacto finito dimensional con el* shape *de un poliedro finito. Entonces K puede ser embebido en $\mathbb{R}^n$ para un cierto n de tal modo que existe un flujo en $\mathbb{R}^n$ que tiene a K como un atractor.*

Bibliografía

[1] Bhatia, N. P. y Szego, G. P. (1970). *Stability Theory of Dynamical Systems*, Grundlheren der Mat. Wiss. 16, Springer, Berlín.

[2] Borsuk, K. (1968). *Concerning homotopy properties of compacta*, Fund. Math., **62**, pp. 223–254.

[3] Borsuk, K. (1975). *Theory of Shape*, Monogr. Mat., vol. 59, Polish science publication, Warsaw.

[4] Eilenberg, S. y Steenrod, N. (1952). *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, NJ.

[5] Günter, B. y Segal, J. (1993). *Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedrom*, Proc. Amer. Math. Soc., **119**, pp. 321–329.

[6] Hu, S. T. (1965). *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit.

[7] Kapitanski, L. y Rodnianski, I. (2000). *Shape and Morse theory of attractors*, Comm. Pure. Appl. Math., **53**, pp. 218–242.

[8] Mardesic, S. (1982). *Shape Theory. The Inverse System Approach*, North-Holland Math. Library, vol. 26, North-Holland Publishing Co., Amsterdam/New York.

[9] Munkres, J. R. (1984). *Elements of Algebraic Topology*, Westview Press.

[10] Sanjurjo, J. M. R. (1994). *Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape groups*, Proc. London. Math. Soc., **69**, pp. 330–334.

[11] Sanjurjo, J. M. R. (1995). *On the structure of uniform attractors*, J. Math. Anal. Appl., **192**, pp. 519–528.

[12] Sanjurjo, J. M. R. (2011). *Stability, attraction and shape*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **12**, pp. 93–122.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Flexibility in geometric structures

Roger Casals
Institute of Mathematical Sciences (CSIC)

21st November, 2012

Topology underlies many of the branches of continuous mathematics: dynamical systems, complex geometry and differential topology are three classical active research areas with strong topological features. As basic instances the Euler characteristic determines the existence of a non–vanishing vector field in a real compact closed manifold and the Poincaré–Bendixson theorem allows to conclude the existence of periodic orbits in certain situations. In the complex realm, the existence of the Hodge decomposition or the Lefschetz property in a Kähler manifold restricts the parity of the rank of some homology groups and thus provides a topological obstruction for, say, a complex Hopf manifold $S^3 \times S^1$, to be endowed with a Kähler form, in particular implying it is not a projective variety.

The interaction between topology and geometry was strenghten in the last part of the past century. On the one hand the Geometrization Conjecture Program proposed by Thurston has culminated in the proof of the Poincaré conjecture by Perelman using the so–called Ricci flow, and further, the 8 geometries are understood mainly in terms of Riemannian geometry, or from the point of view of Erlangen program, the holonomy. On the other, the study of moduli spaces of instanton connections led Donaldson to the construction of smooth invariants in 4–folds, the initiative was followed by an uncountable number of gauge–theoretic machineries with serious applications in classical topology such as the proof of the P–property for knots by Kronheimer–Mrowka.

Let M be a closed topological manifold. By a geometric structure we refer to any additional data depending on the smooth topology of M: a Lorentzian or Riemannian metric, a symplectic form, a contact structure, an almost complex structure, a foliation and so on. As we mentioned above, the existence of certain geometric structures may restrict the topological properties of M. The central question is then, may M be endowed with a specificic geometric structure? Let us list some explicit questions:

(1) Does M^n admit a Riemannian or Lorentzian metric? Does M admit a Riemannian metric with negative or positive Ricci/scalar curvature?

(2) Can M^{2n} be endowed with an almost complex structure? If so, can it be deformed to be integrable?

Keywords: h–principle, flexibility.

(3) Does M^n necessarily admit a contact structure?

(4) Does there exist a symplectic form?

The questions being formulated in that generality are often simple: algebraic topology provides a list of necessary conditions that are rarely satisfied by all manifolds: no condition is imposed for Riemannian metrics, $\chi(M) = 0$ for the existence of a Lorentzian metric, whereas for (3) no condition is required if $n = 3$ and the existence of a $spin^{\mathbb{C}}$ structure is necessary if $n \geq 5$. Indeed, the relevant question is: suppose that M satisfies the topological necessary conditions, can it actually be endowed with a geometric structure? For instance, (3) is still an open conjecture for closed manifolds.

In any category, questions about objects can be transferred to morphisms. We may then write our own list of questions about maps. Let M^n, N^k be two smooth manifolds and $f \in C^\infty(M, N)$. Two classical examples of this are:

(1) If $n \leq k$, can f be homotoped to an immersion? Otherwise, can it be homotoped to a surjection?

(2) If (M, g) and (N, h) are Riemannian, can f be homotoped to an isometry?

(3) Let $E \longrightarrow X$ be a holomorphic bundle, can a continuous section be homotoped to a holomorphic one?

Again, the morphism f should satisfy a topological condition simply deduced from obstruction theory —for (1) the differential df should be an injective bundle map— and we assume so. We will now introduce the h–principle techniques developed by Gromov and describe the classical results partially answering some of the above questions.

The general setup

Let $\pi : X \longrightarrow M^m$ be a fibration. A differential relation of order k is a subspace $\mathcal{R} \subset X^{(k)}$ of the space of k–jets of sections of π. By definition, a section $s \in \Gamma(\mathcal{R})$ is a formal solution of $\mathcal{R}$, and it is *holonomic* if it can be expressed as $s = j^k f$ with $f \in \Gamma(X)$. Let $Hol(\mathcal{R})$ be the set of holonomic sections. A differential relation $\mathcal{R}$ is said to satisfy the h–principle if the inclusion induces a bijection

$$\pi_0(Hol(\mathcal{R})) \longrightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R})).$$

Namely, any formal solution can be homotoped to a *genuine* solution. If the inclusion is a weak homotopy equivalence, then the parametric h–principle is satisfied. Indeed, in this case we are allow to deform spherical families of formal solutions to holonomic ones. For instance, any partial differential equation defines a differential relation, e.g. the Cauchy–Riemann equation defines $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$.

There are several instances of h–principle proven *ad hoc*. There are though two cases in which a general statement can be formulated:

Theorem 1. *(Gromov, 1969)*

(1) Let M be an open manifold and $\mathcal{R}$ an open Diff(M)–invariant differential relation. Then $\mathcal{R}$ satisfies the parametric h–principle.

(2) An open ample differential relation satisfies the parametric h–principle.

As an immediate consequence of the first case, if an open manifold M is endowed with a non–degenerated two form then M admits a symplectic structure. The contact case also follows for open manifolds, i.e. the inclusion of the space of contact structures into the space of almost contact structures is a homotopy equivalence. A recommended account for the flexibility in symplectic topology is [4]. The ampleness condition encodes one of the fundamental techniques to prove h–principles: the theory of convex integration. The reader is encouraged to study [7].

Classical results

Let us focus our interest on the first historical instance of h–principle: the flexibility of the space of immersions. Denote by $\mathcal{I}(M,N)$ the space of immersion between two smooth manifolds M and N. The formal condition is the injectivity of the induced tangent bundle map, we thus define

$$\mathcal{I}^{\mathcal{F}}(M,N) = \{(f,F) : f \in C^{\infty}(M,N), F : TM \longrightarrow f^{*}TN, F \text{ monomorphism}\}.$$

The following result was proven with elementary differential topology and the reader should try to use the *integrate–the–homotopy* method to notice the relevance of the notion of convexity.

Theorem 2. *(Whitney, 1937) The rotation index classifies the immersion class. Further, the inclusion $\mathcal{I}(S^1,\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{I}^{\mathcal{F}}(S^1,\mathbb{R}^2)$ is a weak homotopy equivalence.*

This was vastly generalized by Hirsch and Smale in the remarkable:

Theorem 3. *(Hirsch–Smale, 1959) Let M^n, N^k be a smooth manifolds with $\partial N = \emptyset$. If either M is open or $n < k$ the inclusion $\mathcal{I}(M,N) \longrightarrow \mathcal{I}^{\mathcal{F}}(M,N)$ is a weak homotopy equivalence.*

In particular, the 2–sphere can be everted in Euclidean 3–space since

$$\pi_0(\mathcal{I}(S^2,\mathbb{R}^3)) = \pi_2(SO(3,\mathbb{R}^3)) = 0.$$

Note that another consequence is that any stably parallelizable manifold M^n admits an immersion into $\mathbb{R}^{n+1}$, regardless of its smooth structure.

The main result concerning the morphisms in the Riemannian category is the Nash–Kuiper theorem, providing some flexibility for the closed differential relation defined by an isometric immersion, see [6].

Active areas

In order to convince the reader of the relevance of the h–principle and its status as a research topic we mention three cases. Forstneric has been developing several h–principle results in complex geometry, where the first instance of h–principle is the theorem of Grauert about the flexibility of continuous sections in a holomorphic fibration over a Stein base (see [5]). From a more algebraic geometric prespective, it is worth mentioning the recent article [2] where the existence of an h–principle in a complex projective manifold imposes strong conditions on the manifold itself. Finally, the h–principle for contact structures in closed manifolds is still an open question. Carefully understanding the characteristic foliations on the skeleton of a closed contact 3–fold, Eliashberg has proven that the h–principle holds for the class of *overtwisted* contact structures. The 5–dimensional case has been recently solved in [1].

Along these pages we have stated more questions than answers provided, the reader is encouraged to try an approach for the existence of negative Ricci curvature for open manifolds since there are also references in the literature of explicit *bending* constructions, or study the flexibility of his own favourite geometric structure.

References

[1] Casals, R., Presas, F. and Pancholi, D. (2012). *Almost contact* 5*–folds are contact*, arXiv:1203.2166.

[2] Campana, F. and Winkelmann, J. (2012). *On h–Principle and specialness for complex projective manifolds*, arXiv:1210.7369.

[3] Gromov, M. (1986). *Partial Differential Relations*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 9, Springer–Verlag.

[4] Eliashberg, Y. and Mishachev, N. (2002). *Introduction to the h–Principle*, Graduate Studies in Mathematics 48, AMS Providence.

[5] Forstneric, F. (2010). *The Oka principle for sections of stratified fiber bundles*, Pure Appl. Math. Quarterly **6**, pp. 843–874.

[6] Nash, J. (1954). C^1*–isometric embeddings*, Ann. Math. **63**, pp. 384–396.

[7] Spring, D. (1998). *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics 92, Birkhäuser Verlag.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Automatic set estimation methods

Paula Saavedra Nieves
Department of Statistics and Operations Research

4th December, 2012

We suggest an automatic algorithm for the problem of estimating the compact and r_0-convex support of an absolutely continuous random vector from independent and identically distributed (iid) observations taken in it. We could consider the r_0-convex hull of the sample points as an estimator but the real value of r_0 is unknown. Our proposal will estimate it consistently by using a test for the hypothesis of uniformity, see [1]. So, we assume that the random vector has a uniform distribution on the support.

Preliminaries

The support estimation problem is established as the problem of estimating the compact and nonempty support $S \subset \mathbb{R}^d$ of an absolutely continuous random variable X from iid observations, $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$, taken in it. The main problem is to reconstruct the set by using the available information.

In the most general case, sample points are the only source information. It can be demonstrated that $\mathcal{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ is a consistent estimator for Hausdorff distance. Devroye–Wise proposed a more general estimator, see [2]. Specifically,

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\epsilon_n}[X_i],$$

where $B_{\epsilon_n}[X_i]$ denotes the closed ball with center X_i and radius ϵ_n depending only on n. Unknowing the value of ϵ_n is the main disadvantage of this estimator.

More sophisticated estimators can be used if we are given some additional information on the set. For instance, if we know that S is convex then the convex hull of the sample is a natural support estimator. Convexity assumption may be too restrictive in practice. So, it is necessary to introduce a more flexible shape assumption in Definition 1.

Definition 1. A closed set $A \subset \mathbb{R}^d$ is said $r-$convex, for $r > 0$, if

$$A = C_r(A),$$

where

$$C_r(A) = \bigcap_{\{B_r(x): B_r(x) \cap A = \emptyset\}} (B_r(x))^c$$

Keywords: Support estimation, $r-$convexity, automatic methods, uniform distribution.

is the $r-$convex hull of A and $B_r(x)$, the open ball with center x and radius r.

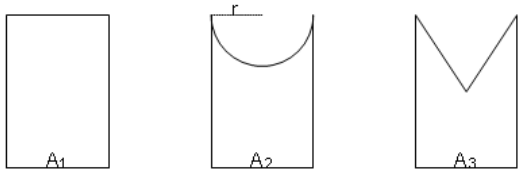


Figure 1: A_1 is convex and $r-$convex, for all $r > 0$. A_2 is not convex but it is $r-$convex. A_3 is not convex and it is not $r-$convex, for all $r > 0$.

If we assume that S is $r-$convex (see Figure 1) then a natural support estimator will be $r-$convex hull of the sample points,

$$S_n = C_r(\mathcal{X}_n) = \bigcap_{\{B_r(x):B_r(x)\cap\mathcal{X}_n=\emptyset\}} (B_r(x))^c\,. \tag{1}$$

The estimator defined in (1) was first studied in [4]. Although the $r-$convexity is a flexible restriction, the estimator proposed in (1) has a big limitation. In practice, S is unknown and, consequently, the smoothing parameter r too. Figure 2 shows the influence of this parameter given a uniform sample with support $S = B_1[0]\setminus B_{0,5}(0)$. For low values of r, $C_r(\mathcal{X}_n)$ is almost equal to the sample, see (a). However, $C_r(\mathcal{X}_n)$ is almost equal to the convex hull for high values of r, see (c).

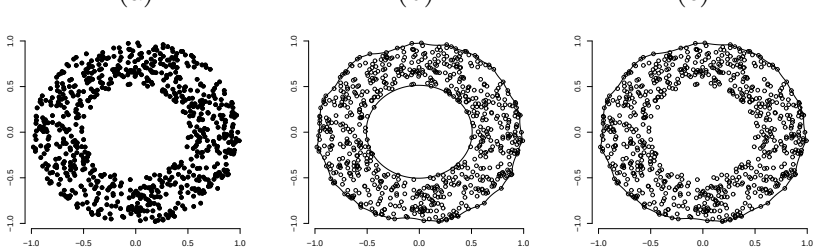


Figure 2: $C_r(\mathcal{X}_{750})$ with (a) $r = 0{,}01$, (b) $r = 0{,}5$ and (c) $r = 0{,}75$.

The aim of this work is to present an automatic method for selecting the smoothing parameter for $r-$convex hull. First, we will define the parameter to be estimated and then we will present the new algorithm.

Estimating the support automatically

The first step is to determine the parameter r_0 to be estimated. We are interested in estimating the highest value of r which satisfies that S is $r-$convex because if a set is $r-$convex then it is r^*-convex for all $r^* \leq r$. If we assume that S is not convex then $\{\gamma > 0 : C_\gamma(S) = S\}$ is upper bounded and we can present the Definition 2.

Definition 2. Let $S \subset \mathbb{R}^d$ be a compact, non-convex and $r-$convex set for some $r > 0$. We define

$$r_0 = \sup\{\gamma > 0 : C_\gamma(S) = S\}. \tag{2}$$

Under some new shape restrictions, the supreme defined in (2) is a maximum. Then, S is r_0-convex too. As we have said before, we will consider a uniformity test proposed in [1] to estimate r_0 in an automatic way from $\mathcal{X}_n$. This test is based on the multivariate spacings, see [3]. The maximal spacing is defined as

$$\Delta_n(S) = \sup\{\gamma : \exists x \text{ with } B_\gamma[x] \subset S \setminus \mathcal{X}_n\}. \tag{3}$$

The Lebesgue measure (volume) of the balls with radius $\Delta_n(S)$ is denoted by $V_n(S)$. The following result will be essential in what follows, see [3]:

Theorem 3 (Janson, 1987)**.** *Let $\mathcal{X}_n$ be an iid uniform on S, with $\mu(S) = 1$ and $\mu(\partial S) = 0$. Then,*

$$nV_n - \log n - (d-1)\log\log n - \log\beta \xrightarrow{d} U,$$

where μ is the Lebesgue measure, V_n denotes the volume associated with the largest spacing Δ_n defined in (3), β is a known constant, $\xrightarrow{d}$ denotes convergence in distribution and U is a random variable with distribution $\mathbb{P}(U \leq u) = \exp(-\exp(-u))$, for $u \in \mathbb{R}$.

By using the Theorem 3, it was considered the problem of testing

$$H_0 : \ X \text{ is uniform with support in } S.$$

With significance level α, H_0 will be rejected if

$$V_n(S) > \frac{a(u_\alpha + \log n + (d-1)\log\log n + \log\beta)}{n}, \tag{4}$$

where $a = \mu(S)$ and μ denotes the Lebesgue measure. Figure 3 shows the maximal spacings for two different samples with uniform distribution on their supports.

However, the main goal in [1] was to obtain a test for the uniformity hypothesis in which the support S is not given in advance but S satisfies some geometric restriction. They assume that S and the closure of its complementary are $\nu-$convex for some $\nu > 0$. Then, they consider $S_n = C_\nu(\mathcal{X}_n)$ to estimate the support S. In this case, the maximal spacing is estimated as

$$\hat{\Delta}_n = \sup\{\gamma : \exists x \text{ with } B_\gamma[x] \subset C_\nu(\mathcal{X}_n) \setminus \mathcal{X}_n\}, \tag{5}$$

and the critical region (4) will be

$$\hat{V}_n > \frac{a_n(u_\alpha + \log n + (d-1)\log\log n + \log\beta)}{n},$$

where $a_n = \mu(C_\nu(\mathcal{X}_n))$ and $\hat{V}_n$ denotes the volume of a ball of radius $\hat{\Delta}_n > 0$, see (5). The parameter ν is unknown again and, in addition, we could reject the null hypothesis on $C_\nu(\mathcal{X}_n)$ with high values of ν. Figure 3 shows the maximal spacings for two random samples with uniform distribution on each support. In this case,

the support is unknown and its estimators are $S_n = C_{0,2}(\mathcal{X}_{500})$, see (a), or $S_n = C_{0,6}(\mathcal{X}_{500})$, see (b). A bad choice (a big value) of the smoothing parameter allows to detect a gap with big area in (b). From a intuitive point of view, the test will reject that the sample $\mathcal{X}_n$ is uniform on the support considered (known or unknown) if it contains a big spacing which does not intersect the sample points.

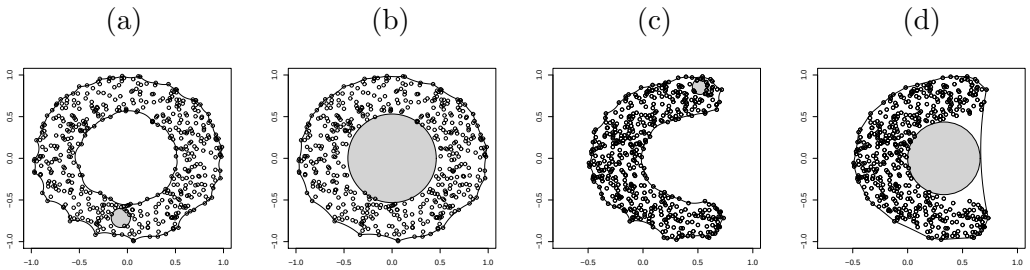


Figure 3: Maximal spacing with unknown supports (a) $S_n = C_{0,2}(\mathcal{X}_{500})$, (b) $S_n = C_{0,6}(\mathcal{X}_{500})$, (c) $S_n = C_{0,2}(\mathcal{X}_{500})$ and (d) $S_n = C_5(\mathcal{X}_{500})$.

Our proposal to estimate r_0 is based on the previous idea with unknown support. So, we will assume that the distribution is uniform and S is not convex. Null hypothesis is rejected on $S_n = C_{0,6}(\mathcal{X}_{500})$ for significance level α in Figure 3 (b). However, $\mathcal{X}_{500}$ is a uniform sample on S. This means that the estimator contains a big gap which is not contained in S. Then, the smoothing parameter has been chosen in a wrong way because the sample is uniform on S. It must be smaller than 0,6. According to Definition 2, our method will estimate r_0 as

$$\hat{r}_0 = \sup\{\gamma > 0 : H_0 \text{ is accepted on } C_\gamma(\mathcal{X}_n)\}.$$

This estimator is consistent. In fact, $\hat{r}_0$ converges to r_0 almost surely under some conditions on the significance level and new geometric restrictions.

References

[1] Berrendero, J. R., Cuevas, A. and Pateiro-López, B. (2012). *A multivariate uniformity test for the case of unknown support*, The Canadian Journal of Statistics, **40**, pp. 378–395.

[2] Devroye, L. and Wise, G. L. (1980). *Detection of abnormal behavior via nonparametric estimation of the support*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **38**, pp. 480–488.

[3] Janson, S. (1987). *Maximal spacings in several dimensions*, Annals of Probability, **15**, pp. 274–280.

[4] Rodríguez-Casal, A. (2007). *Set estimation under convexity type assumptions*, Annales de l'I.H.P.- Probabilités & Statistiques, **43**, pp. 763–774.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Ecuacións con simetría

Miguel Domínguez Vázquez
Departamento de Xeometría e Topoloxía

12 de decembro de 2012

Desde antigo, o concepto de simetría ten sido unha fonte de inspiración para artistas, enxeñeiros e científicos. Aínda que a idea de simetría está xa presente nas Matemáticas desde as súas orixes, a súa formulación matemática precisa, que ten que ver coa existencia dun grupo de transformacións, comezouse a forxar no século XIX. Especialmente influentes foron os traballos do matemático francés Évariste Galois (1811–1832), do noruego Sophus Lie (1842–1899), do alemán Felix Klein (1849–1925) e do francés Élie Cartan (1869–1951).

O propósito deste artigo é explicar dun xeito elemental e intuitivo que entendemos por grupo de simetrías dunha ecuación (ou sistema de ecuacións) e ver como a existencia de simetrías pode axudarnos a resolvela. Para unha introdución máis pormenorizada a este interesante campo, pódense consultar os libros da bibliografía.

A idea de Galois. Simetría nas ecuacións alxébricas

Durante moito tempo os matemáticos preguntáronse se sería posible resolver calquera ecuación alxébrica (é dicir, polinómica) nunha variable en termos de operacións elementais e radicais. A comezos do século XIX sabíase que isto era posible para ecuacións de ata orde 4: hai fórmulas concretas que nos dan todas as posibles solucións de xeito exacto. Pero, que pasaría para ordes superiores?

Motivado por esta cuestión, Galois (cando aínda non tiña vinte anos) desenvolveu unha profunda teoría que vén a relacionar o estudo de corpos co de grupos e que, en particular, dá unha resposta á pregunta anterior. Así, se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ é unha ecuación alxébrica nunha variable e con coeficientes racionais, esta é resoluble por radicais se e só se o seu grupo de Galois é resoluble. Expliquemos estes dous últimos conceptos. Por unha banda, que un grupo G sexa *resoluble* quere dicir que existe unha cadea de subgrupos $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k = \{1\}$ rematando no grupo trivial e tal que G_{i+1} sexa subgrupo normal de G_i e o grupo cociente G_i/G_{i+1} sexa abeliano. Por outra banda, o *grupo de Galois* da ecuación é certo grupo de transformacións (i.e. aplicacións bixectivas) do conxunto de solucións da ecuación en si mesmo. A súa definición precisa fai uso do concepto de extensión de corpos, pero non nos interesa aquí profundizar

Palabras Clave: simetría, ecuacións alxébricas, ecuacións diferenciais, grupo de transformacións, acción, grupo de Lie.

neste aspecto. Chegue con dicir que, para algunhas ecuacións polinómicas de grao n con coeficientes enteiros, o seu grupo de Galois é o grupo de permutacións das súas n raíces complexas, é dicir, o denominado grupo simétrico S_n. Así, como o grupo simétrico S_n é resoluble se e só se $n = 1$, 2, 3 ou 4, só é posible atopar unha fórmula xenérica de resolución para aquelas ecuacións polinómicas dunha variable de grao ó sumo 4.

Galois inspirou a Lie. Simetría nas ecuacións diferenciais

O traballo de Galois sobre ecuacións alxébricas fixo que Lie se preguntase se sería posible estender as ideas de Galois ó caso de ecuacións diferenciais. Se considerando e analizando o grupo de Galois dunha ecuación alxébrica se conseguía información sobre a resolución de tal ecuación, sería posible obter información sobre a resolubilidade de ecuacións diferenciais se se considera un certo grupo de simetrías? A resposta que deu Lie en 1874 foi afirmativa, aínda que a teoría no caso diferencial é máis complexa ca no caso alxébrico.

O exemplo máis sinxelo de simetría nunha ecuación diferencial é seguramente o seguinte. Consideremos a ecuación

$$\frac{dy}{dt} = f(t),$$

onde f é unha función real de variable real. Sabemos que as solucións desta EDO veñen dadas por

$$y = F_c(t) = \int f(t)dt + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Pois ben, esta constante c arbitraria é o reflexo da simetría da ecuación. Precisemos isto. Para cada $b \in \mathbb{R}$ podemos considerar as transformacións φ_b do conxunto abstracto de solucións en si mesmo que consisten en sumar b:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_b\colon & \{\text{solucións}\} & \to & \{\text{solucións}\} \\ & F_c & \mapsto & F_c + b. \end{array}$$

E así, $G = \{\varphi_b : b \in \mathbb{R}\}$ resulta ser un grupo abeliano cuxa operación é a composición (nótese que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a+b}$ e φ_0=id). Así pois, dicimos que o grupo G *actúa* no conxunto de solucións, é dicir, cada φ_b leva solucións en solucións. O grupo G é un grupo 1–paramétrico de simetrías da ecuación anterior.

Formalmente, unha *acción* dun grupo G nun espazo X é unha aplicación

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

tal que $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ e $1 \cdot x = x$, para todo g, $h \in G$ e todo $x \in X$. Outra forma moi conveniente de repensar unha acción é así: cada $g \in G$ define unha transformación bixectiva $\varphi_g\colon X \to X$ dada por $\varphi_g(x) = g \cdot x$. Isto é, cada elemento

do grupo pódese ver coma unha transformación do espazo X. A existencia dunha acción nun espazo X é a formalización da existencia de simetrías en X. Aquí X é un espazo calquera: dependendo do contexto pode ser simplemente un conxunto, un espazo vectorial, unha variedade... E G é un grupo, pero pode ter algunha estrutura adicional. Por exemplo, se X ten unha estrutura diferenciable, a G adóitaselle pedir que teña tamén unha estrutura diferenciable compatible coa operación de grupo (i.e. que a operación de grupo sexa diferenciable). Neste caso, estamos falando dun *grupo de Lie*.

En xeral, por *simetría* dunha ecuación ou sistema de ecuacións (alxébricas, diferenciais, ou do tipo que sexa) entenderemos unha transformación bixectiva do conxunto de solucións en si mesmo. Ás veces convén restrinxirse a simetrías máis especiais. Por exemplo, a ecuación alxébrica $x^2 + y^2 = 1$, que ten como solucións os puntos da circunferencia unidade de $\mathbb{R}^2$, admite unha cantidade enorme de simetrías que nin sequera son continuas. Segundo o problema que se considere, pode interesar restrinxirnos a aquelas simetrías que sexan difeomorfismos ou incluso a aquelas que sexan transformacións lineais de $\mathbb{R}^2$; neste último caso, o grupo de simetrías é o grupo das matrices ortogonais de orde 2.

Un exemplo de simetría nunha EDO

Para concluír, amosaremos nun exemplo sinxelo, pero non trivial, como a existencia de simetrías nunha ecuación diferencial nos permite resolvela. O problema de como encontrar as simetrías dunha ecuación é moi importante e, para o caso dun grupo de simetrías diferenciable, é máis sinxelo do que un puidera crer; o lector interesado pode consultar [2, §2.4] para máis información.

Consideremos a EDO dada por

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - x}{u(u^2 + x)},$$

que está definida no conxunto M dos pares $(x, u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tales que $u \neq 0$ e $x \neq -u^2$. A variable independente é a x e a dependente é a u. Supoñamos que atopamos a seguinte simetría da ecuación:

$$(x, u) \mapsto (\lambda^2 x, \lambda u), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Isto quere dicir que, se $u(x)$ é unha solución da EDO, entón $\tilde{u}(\tilde{x})$ tamén o é, onde $\tilde{u} = \lambda u$ e $\tilde{x} = \lambda^2 x$. Formalmente, o que temos é a seguinte acción do grupo multiplicativo de Lie $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no conxunto M onde temos definida a EDO:

$$\begin{array}{rcl} G \times M & \to & M \\ (\lambda, (x, u)) & \mapsto & \lambda \cdot (x, u) = (\lambda^2 x, \lambda u). \end{array}$$

Unha vez atopada unha simetría, hai que calcular o seu *xerador infinitesimal*. De xeito máis preciso, trátase de atopar a *álxebra de Lie* de G (que basicamente

é o espazo tanxente a G no elemento neutro 1), xunto coa acción infinitesimal inducida. Intuitivamente, consiste no seguinte. Para cada $(x,u) \in M$, existe unha única *órbita* da acción de G pasando por (x,u). No noso caso, esta órbita é a traza da curva $\alpha(t) = (t^2x, tu)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pois ben, trátase de saber cal é o vector tanxente a esta curva no punto $(x,u) = \alpha(1)$. Evidentemente, trátase do vector $\mathbf{v}_{(x,u)} = \alpha'(1) = (2tx, u)|_{t=1} = (2x, u)$. En notación diferencial, $\mathbf{v}_{(x,u)} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$.

O paso clave e que pode resultar máis complicado consiste en atopar o cambio de variables apropiado, baseándose no traballo feito. Buscaremos unhas novas variables independente t e dependente y nas cales a EDO adopte a forma máis sinxela de resolver: $\frac{dy}{dt} = f(t)$. Para isto, o cambio de variables $(x,u) \mapsto (t(x,u), y(x,u))$ terá que transformar a simetría da EDO orixinal na simetría estándar da ecuación $\frac{dy}{dt} = f(t)$ explicada na sección anterior, é dicir, $(t,y) \mapsto (t, y+c)$, $c \in \mathbb{R}$. En particular, a matriz jacobiana do cambio de variables ha de mandar o xerador infinitesimal $\mathbf{v}_{(x,u)} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$ no correspondente xerador infinitesimal da simetría estándar, que é $\mathbf{w}_{(t,y)} = \frac{\partial}{\partial y}$. É dicir:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} 2x\dfrac{\partial t}{\partial x} + u\dfrac{\partial t}{\partial u} = 0 \\ 2x\dfrac{\partial y}{\partial x} + u\dfrac{\partial y}{\partial u} = 1. \end{cases}$$

Obtemos así un sistema de ecuacións en derivadas parciais, pero atopar unha solución é a miúdo tarefa doada. No noso caso podemos pór

$$t(x,u) = x/u^2 \qquad \text{e} \qquad y(x,u) = \log|u|\,.$$

Nótese que a expresión para t ten relación coa simetría da EDO inicial (t é constante ó longo das órbitas da acción). Así, obtivemos o cambio de variables que buscabamos. Tan só temos que aplicar o cambio e a EDO orixinal queda transformada en

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1-t}{1-t+2t^2},$$

que xa se pode resolver por integración directa.

Bibliografía

[1] Gilmore, R. (2008). *Lie groups, Physics and Geometry. An introduction for physicists, engineers and chemists*, Cambridge University Press.

[2] Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie groups to differential equations*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 107, Springer-Verlag New York, Inc.