

A. Martínez Calvo
M. Pérez Fernández de Córdoba
S. Vilariño Fernández

EDITORES

As matemáticas do veciño

Actas do Seminario de Iniciación á Investigación

2008



INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

ACTAS DO SEMINARIO
DE
INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN

ANO 2008

Comité editorial:

Adela Martínez Calvo

María Pérez Fernández de Córdoba

Silvia Vilariño Fernández

Imprime:

Imprenta Universitaria
Campus universitario sur
15782 Santiago de Compostela

D. L. C 1692-2009

Estimado joven, las matemáticas también han sido infectadas por la peste moderna de la superespecialización. Me temo que no tengo la menor idea de lo que se hace en lógica formal, ni en ningún otro campo ajeno al mío.

Apóstolos Doxiadis (*El tío Petros y la conjetura de Goldbach*)

Un hombre deja de ser un principiante en cualquier ciencia y empieza a ser un experto cuando aprende que será un principiante toda su vida.

Robin G. Collingwood

Subiu as escaleiras ata o primeiro andar: unha quenda de doce, o descanso, e outra quenda de dez. Coñecía de memoria o camiño, pero aínda así, cada día contaba os pasos. Desta hora xa debería ter chegado. Os luns chegaba cedo. A súa rutina era previsible, coma tódalas rutinas. Estaría preparando a cea, algo lixeiro, ou xa vendo as noticias. Despois escollería a roupa para o día seguinte, e iría á cama, relería nalgún libro co que quedaría durmida antes de pasar dúas páxinas. Nunhas horas soaría o espertador, un café con torradas e un novo día.

Tres pasos dende o último banzo achegárono á porta, pero dubidou se timbrar, e retrocedeu. E se non estaba? E se estaba atarefada? Mellor non molestar. Baixou polas escaleiras, pero detívose antes do descanso. Era luns e chegaba cedo. Estaría preparando a cea ou vendo as noticias. Tiña que estar. Subiu rápido, timbrou e agardou. Volveu a timbrar, pero ninguén abriu. Era luns e chegaba cedo, e tiña que estar.

Baixou as escaleiras ata a rúa: unha quenda de dez, o descansiño, e outra quenda de doce. Contaba os pasos, ao tempo que pensaba: era luns e chegaba cedo. Timbrou pero ninguén abriu. Que lle pasaría? Tería que traballar ata tarde? Marcharía de viaxe? Na rúa facía frío. A ela non lle gustaba saír con este tempo. Estaría traballando. Algún imprevisto, seguro. Entón, volvería mañá. Nas rúas de decembro alumeaba o Nadal. Dende a outra beirarrúa mirou cara a súa fiestra, e viu luz.

Prefacio

Xenios aparte, ninguén discute que a imitación é unha compoñente importante dos procesos de aprendizaxe. Cada quen ten as súas propias experiencias discentes, e quero pensar que tamén docentes, e que por iso lle concedemos importancia ás nosas clases. Pero non é menos certo que imitación sen renovación só pode conducir a estancamento. Por iso, quenes falan do tema, inclúen ademais outros dous tipos de aprendizaxe: un, seguindo instrucións e, outro, polas consecuencias derivadas da nosa conduta, vaia, por ensaio/erro.

Se a preocupación pola formación dos nosos titulados que se inician na investigación tomase a forma dun problema, deberíamos entendelo, trazar un plan, levar a cabo ese plan e, unha vez resolto, revisar a súa solución. Pola multidisciplinidade da poboación, non circunscrita a ningún departamento concreto, as tres primeiras etapas poderían (se as circunstancias fosen outras, atreveríame a dicir deberían) formar parte do programa de calquera candidatura ao decanato.

Persoalmente, non me consta que fose o seguemento de instrucións o que deu orixe ao Seminario de Iniciación á investigación. Tamén descoñezo modelos entre nós que os iniciadores e seguidores poidesen ter imitado. A lóxica dos argumentos ten que levarnos a concluír que estamos ante unha verdadeira innovación. E se aplicamos a cuarta fase da resolución de problemas, deberíamos entre todos poñernos a revisar a solución. Entre outras cousas, deberíamos entender se é susceptible de ser aplicada noutros problemas semellantes, presentes ou futuros.

Por certo, dou por suposto ninguén de nós confunde supoñer con asumir, e dígoo polo típico método de afrontar problemas dos matemáticos: supoñer o problema resolto. Pero mesmo se é así, proporía que volvesemos ao primeiro parágrafo e que, intercambiando os nosos roles, tratásemos de aplicar o método de imitación para aprendermos deste modelo. E aínda que a solución non sexa completa, deberíamos convir en que o SII representa unha ventá pola que ademais de luz entran bocanadas de aire fresco.

E xa é ironía que, sendo eu, como son, usuario de macintosh, estea a glosar as ventás. Pois nada, o que está ben, está ben.

Santiago de Compostela, Abril de 2009

Felipe Gago Couso

Índice xeral

Introdución	1
Miguel Brozos Vázquez “A xeometría do voo dun avión”	3
María Piñeiro Lamas “Modelos de Predicción: una pequena ayuda al Medio Ambiente”	7
Rubén Figueroa Sestelo “Unha incursión no mundo discontinuo”	11
Ana Belén Rodríguez Raposo “Quen sabe trisecar un ángulo?”	15
Manuel García Magariños “Algunas aportaciones probabilísticas a la genética forense”	19
Carlos Meniño Cotón “El teorema de Hedlund. Flujos minimales y curvatura negativa”	23
Laura Saavedra Lago “¿Cómo quemar carbón con EDP's?”	27
Silvia Vilariño Fernández “Métodos Geométricos de Teorías Clásicas de Campos”	31
Abelardo Monsalve “Análisis de los Modelos de Tipo de Interés”	35
Álvaro Lozano Rojo “Un paseo por la dinámica de foliaciones”	39
Pablo González Sequeiros “Sistemas de numeración”	43

María Pérez Fernández de Córdoba	
“Percolación de grafos”	47
Adela Martínez Calvo	
“Estimación no modelo lineal funcional”	51
Giuseppe Viglialoro	
“Problema no estándar relacionado con el equilibrio de membranas a tracción”	55
María José Pereira Sáez	
“Aplicaciones de la transformación de Cayley”	59
Javier Seoane Bascoy	
“Primera aproximación a las variedades con estructuras”	63

Introdución

O presente volume é unha compilación dos resumos das charlas organizadas ao longo do ano 2008 dentro do Seminario de Iniciación á Investigación (SII) na Facultade de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela. As conferencias impartidas polo SII foron organizadas por alumnos de Terceiro Ciclo da Facultade e forman parte das actividades do Instituto de Matemáticas.

O SII iniciou a súa andaina a comezos do ano 2005. Foi nesa época cando os alumnos de doutoramento da Facultade decidiron crear un seminario que permitise o intercambio de coñecementos entre as diversas áreas das Matemáticas, dirixido fundamentalmente aos estudantes dos últimos cursos da licenciatura e aos estudantes de Terceiro Ciclo da Facultade. Desde o seu nacemento, hai xa catro anos, o SII propúxose os seguintes obxectivos:

1. Fomentar o intercambio de coñecemento entre os alumnos da Facultade.
2. Pór a disposición dos estudantes un foro onde dar a coñecer os campos nos que cada un centra as súas investigacións.
3. Facilitar a práctica de falar en público, ofrecéndolle aos alumnos a oportunidade de dar charlas e afacerse a escoitar e participar activamente neste tipo de eventos.
4. Proporcionar un espazo onde se poidan desenvolver as actividades necesarias para que cada quen saiba explicar as ideas fundamentais dos seus traballos, incluso a persoas que non estean especializadas na materia.

Por cuarto ano consecutivo, o SII conseguiu cumprir estes obxectivos básicos grazas á colaboración do alumnado dos distintos departamentos da Facultade. Seguindo coa dinámica de anos anteriores, o seminario desenvolveuse cunha periodicidade semanal entre os meses de xaneiro a maio, e de novembro a decembro. Como xa se fixera en anos anteriores, o SII abreu as súas portas non só aos alumnos da Facultade e a alumnos visitantes doutras universidades, senón tamén ao profesorado da Facultade.

No que se refire á loxística do SII, este ano renovouse o seu comité organizador. Dito comité estivo formado durante o 2008 por tres estudantes de doutoramento que se encargaron tanto da coordinación das conferencias en si (calendario de charlas, anuncio das mesmas, reserva de aula, proporcionar o material necesario ao

poñente,...) como da publicación deste anuario, onde se recolle un resumo de cada unha das charlas impartidas polos poñentes. Este mesmo comité organizador encargouse da confección deste volume e figura nel como comité editorial. Por outra banda, é importante salientar que cada un dos resumos aquí recollidos pasou un proceso de revisión por parte dun alumno de Terceiro Ciclo dun departamento distinto ao do autor, logrando así que os resumos sexan comprensibles por aqueles que non son expertos no campo correspondente.

Os membros do comité organizador deste último ano queremos agradecer aos membros dos comités de anos anteriores o legado que nos deixaron, trala súa iniciativa de compartir entre tódolos departamentos as distintas liñas de investigación que se seguen en cada un deles, tratando así de estreitar os lazos entre as distintas ramas desta ciencia que compartimos todos, as Matemáticas. Ademais seguindo con esta iniciativa, os membros do actual comité invitamos ás novas xeracións de estudantes de Terceiro Ciclo a participar activamente na organización deste seminario durante os próximos anos. Por todo isto, queremos facer expreso o noso máis sincero agradecemento a todos aqueles que, dun xeito ou doutro, nos axudaron nesta tarefa.

Agradecementos

Quixeramos mencionar neste apartado que a organización do seminario tería sido, sen dúbida, moito máis difícil de non contarmos coa colaboración desinteresada de moita xente. Por este motivo, desexamos agradecer a todos os que participaron no SII, ben como poñentes, ben como oíntes, e moi especialmente aos que participaron no proceso de arbitraje: Miguel Brozos Vázquez, Esteban Calviño Louzao, Rubén Figueroa Sestelo, Manuel García Magariños, Pablo González Sequeiros, Álvaro Lozano Rojo, Adela Martínez Calvo, Carlos Meniño Cotón, Abelardo Monsalve Cobis, María José Pereira Sáez, María Pérez Fernández de Córdoba, María Piñeiro Lamas, Ana Rodríguez Raposo, Laura Saavedra Lago, Javier Seoane Bascoy, Giuseppe Vigliano e Silvia Vilariño Fernández.

Merecen unha mención destacada Rosa Crujeiras Casais e Felipe Gago Couso pola súa colaboración desinteresada na elaboración destas actas, así como Beatriz Pateiro López, autora do deseño orixinal da portada das mesmas.

Como xa indicamos, tanto o comité organizador como o comité editorial será renovado. Por este motivo, non queremos deixar pasar esta oportunidade para dar o noso alento aos novos membros do comité e desexarlles a mellor das sortes.

Santiago de Compostela, Maio de 2009.

O Comité Editorial.

A xeometría do voo dun avión

Miguel Brozos Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía

23 de Xaneiro de 2008

Resumo

Habendo xa máis dun século dende que os irmáns Wright fixeron voar un prototipo de avión (alá polo 1903), aínda hoxe resulta curioso ver como un obxecto desas dimensións se pode soste no aire; sendo esta sensación aínda máis esaxerada, probablemente, se nos atopamos no seu interior. O obxectivo destas liñas non é outro que facer un achegamento meramente introdutorio á xeometría que fai posible que estes obxectos desafíen con éxito a gravidade.

Pensemos pois nun avión surcando o ceo, e fixemos o noso punto de referencia no propio avión, como se fosemos no seu interior e fose o aire o que se move empuxando o avión verticalmente cara arriba. A base fundamental de sustentación do avión son as súas ás, e será na súa xeometría na que nos centremos aquí. É importante destacar o feito de que a á dun avión é alargada e practicamente un espacio produto dun segmento por unha sección coa forma da figura seguinte (chamaremos “aerofoil” á forma que presenta esta sección):

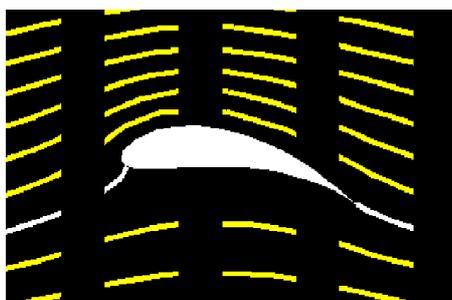


Figura 1. A sección da á dun avión ten forma de aerofoil, o que provoca unha modificación do fluxo de aire.

Isto xustifica a simplificación que faremos do problema estudándoo unicamente en dúas dimensións. Así, sendo conscientes de que a xeometría de todo o corpo dun avión cumpre unha importante función, restrinxirémonos aquí a esta análise máis simplificada.

Deste xeito, a situación a estudar é a dun fluxo de aire que interactúa cun corpo sólido, e o obxectivo é estudar a forza vertical e cara arriba que o fluído

PALABRAS CLAVE: Aerodinámica, fluxo potencial, transformación de Joukowski.

exerce sobre dito corpo. A pesar das simplificacións que levamos feito, este problema presenta aínda unha grande dificultade nun contexto físico xeral e precisaremos asumir algunhas condicións sobre o fluxo de aire. Un dos casos máis sinxelos é aquel no que o fluxo é o que se coñece co nome de fluxo potencial. As características que nos interesan destes fluxos son as seguintes:

1. O campo de velocidades do fluxo (\mathbf{v}) vén dado polo gradiente dunha función (f), isto é, $\mathbf{v} = \nabla f$.
2. Como consecuencia do anterior, o rotacional do campo de velocidades é cero, como veremos: sexan (x, y) coordenadas no plano, entón o vector de velocidades vén dado por $\mathbf{v} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ e, polo tanto,

$$\|\text{rot}(\mathbf{v})\| = \|\text{rot}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})\| = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Esta propiedade interprétase fisicamente e dun modo intuitivo como que o fluxo non produce rotacións actuando sobre muíños infinitesimalmente pequenos e con aspas non orientadas.

3. Como terceira característica, que non sempre se impón ó considerar este tipo de fluxos, temos que a diverxencia do campo de velocidades é cero ($\text{div}(\mathbf{v}) = 0$). O seu significado físico é que o volume se preserva infinitesimalmente ó longo do fluxo.

Fixaremos pois a nosa atención en fluxos que cumpren estas propiedades, a pesar de que describen unha situación moi ideal. Tanto así que o coñecido físico Richard Feynman chegou a dicir que “o único fluído que cumpre estas condicións é a *auga seca*”.

Posto que queremos estudar un fluxo no plano, será útil considerar ese plano como o plano complexo. Isto implicará diversas vantaxes importantes, como veremos, pero ademais permite crear unha grande inmensidade de fluxos potenciais verificando as tres propiedades anteriores. Para facer isto un non ten máis que considerar unha función holomorfa ϕ definida no plano complexo. Chamemos f á parte real ($f = \text{Re}(\phi)$) e h á parte imaxinaria ($h = \text{Im}(\phi)$), entón temos que $\phi(z) = f(z) + ih(z)$ para todo complexo z . Consideremos agora f como función potencial do noso fluxo. Nótese entón que estamos a falar dun fluxo que ten como vector de velocidades $\mathbf{v} = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$, pero ademais, posto que a función ϕ é holomorfa, verifica as ecuacións de Cauchy–Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

Nestas condicións, é obvio que se cumpren as dúas primeiras condicións de fluxo potencial, e empregando (1) é doado ver que

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \text{div}(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 0,$$

co que a terceira condición para os fluxos potenciais tamén se verifica.

Nesta situación, existen dúas clases de liñas que desempeñan un papel de extrema importancia. Estas son as liñas equipotenciais, que corresponden a considerar f constante, e as liñas de fluxo, que corresponden a considerar h constante. Unha propiedade fundamental é que estas liñas se cortan ortogonalmente, como se deduce do seguinte cálculo empregando de novo (1):

$$\langle \nabla f, \nabla h \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Retomemos pois o problema que nos ocupa, este é o de estudar a forza que exerce o fluxo de aire sobre o corpo sólido (sección da á de avión). Obviamente, a dificultade deste problema depende da forma do sólido que consideremos, así, por exemplo, a solución a este problema era ben coñecida hai máis dun século se o sólido ten forma circular. Sen embargo, preséntase moito máis complicado á hora de considerar un aerofoil como o da Figura 1.

Para resolver este problema, botamos man de novo do cálculo complexo mediante a transformada de Joukowski. Esta é unha aplicación do plano complexo en si mesmo dada pola seguinte expresión:

$$J(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Nótese que esta aplicación ten a súa única singularidade na orixe e, salvando a tal singularidade, transforma certos círculos en aerofoils. Isto móstrase na seguinte gráfica:

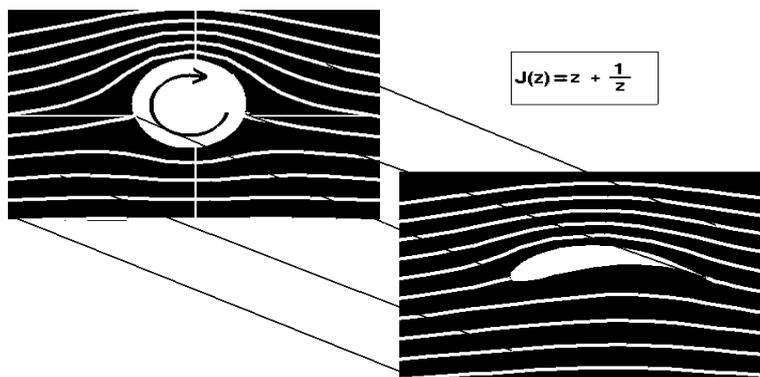


Figura 2. A transformada de Joukowski é unha aplicación conforme que transforma un disco no plano complexo nun aerofoil.

Unha característica importante da transformada de Joukowski é que é unha aplicación conforme, polo que preserva a ortogonalidade das liñas equipotenciais e as liñas de fluxo. Este feito é fundamental á hora de reducir o problema de calcular o empuxe exercido polo fluxo sobre o aerofoil ó problema de calcular o empuxe exercido polo fluxo sobre o círculo en rotación. Non entraremos aquí en máis detalles, pois o noso obxectivo non era máis que dar unha moi sinxela e breve introdución. Porén,

recomendaría [1] para unha interesante introdución á aerodinámica con simuladores que permiten o cálculo do empuxe en función da forma do aerofoil.

Na achega que vimos de facer á xeometría que permite o voo dun avión, consideramos un modelo, como xa mencionamos, moi ideal. Na vida real, a viscosidade do fluído que se considera desempeña un papel clave e as ecuacións que rixen o comportamento do fluído son as ecuación de Navier-Stokes. Estas son ecuacións en derivadas parciais de segundo grao moi complexas e non se coñece a súa solución. Por este motivo, en ocasións redúcese o problema a outros máis sinxelos, como o dos fluxos potenciais, que o aproximen. Non obstante, unha técnica que se emprega actualmente é a de considerar a capa máis próxima ó sólido (na que se dan certas simplificacións que fan o problema máis tanxible) e o resto do fluído por separado, permitindo así aproximacións coa suficiente precisión para levar a cabo simulacións axeitadas, que permiten que nos últimos anos se veñan facendo destacados avances en aerodinámica.

Bibliografía

- [1] NASA Glenn Research Center, *Beginner's Guide to Aerodynamics*,
<http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/bga.html>.
- [2] Wikipedia (versión en inglés).

Modelos de Predicción: una pequeña ayuda al Medio Ambiente

María Piñeiro Lamas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

30 de Enero de 2008

Resumen

Hace unas décadas era impensable que el desarrollo económico pudiera afectar tan negativamente a la naturaleza como para llegar a representar un serio problema. Sin embargo, el acelerado crecimiento de la población humana y el consumo incontrolado de los recursos naturales han hecho mella en el aire, el agua y el suelo. Hoy en día la contaminación provoca importantes daños en la salud humana, los seres vivos y el entorno. En los últimos años, tanto los gobiernos y las organizaciones ecologistas como los científicos buscan soluciones para evitar los problemas ambientales. Las acciones políticas para la protección del Medio Ambiente obligan a las empresas a desarrollar planes medioambientales que permitan prevenir daños ecológicos, aunque esto suponga reducciones en sus beneficios. Por su parte, las investigaciones científicas intentan aportar soluciones desde sus diferentes ámbitos. Entre la infinidad de campos de aplicación de la Estadística, se encuentra el Medio Ambiente.

Un problema medioambiental

La Unidad de Producción Térmica (UPT) de As Pontes constituye uno de los centros productivos propiedad de Endesa Generación S.A. en la península Ibérica. Está situada en el municipio de As Pontes de García Rodríguez, al noreste de la provincia de A Coruña.

Esta central térmica fue diseñada y construida para hacer uso racional de los lignitos pardos extraídos de la mina a cielo abierto situada en sus proximidades. Este combustible sólido se caracteriza por sus elevados contenidos en humedad y azufre, así como por su bajo poder calorífico. A lo largo de los años la central ha sufrido varios procesos de transformación en sus instalaciones con el objetivo principal de reducir las emisiones de dióxido de azufre (SO_2). En la actualidad se ha finalizado una nueva adaptación de la UPT de As Pontes para consumir, como combustible principal, carbón subbituminoso de importación, caracterizado por su bajo contenido en azufre y cenizas.

La legislación vigente y la localización de la Central Térmica próxima a enclaves naturales de alto valor ecológico, como el Parque Natural de *As Fragas do Eume*,

hacen que desde sus inicios haya existido una gran preocupación por su impacto en el entorno. Por ello dicha central posee un Sistema de Seguimiento y Control de la Calidad Atmosférica que le permite efectuar cambios en las condiciones de operación que reducen las emisiones cuando las condiciones meteorológicas son adversas para la difusión del penacho emitido, concretamente el dióxido de azufre que contiene, y se dan episodios significativos de alteración de la calidad del aire. La legislación española mediante normas y decretos fija las concentraciones máximas que se pueden alcanzar de estos gases en un determinado período de tiempo. En particular, para esta central el único límite susceptible de ser rebasado alguna vez, es aquel que se establece sobre la media horaria arrastrada de la concentración de SO_2 en el suelo, en el valor de $350 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

El problema que se plantea entonces es poder predecir la citada media horaria de los niveles de SO_2 , a partir de la información que se recibe en continuo de las estaciones de muestreo y la información pasada de dichas medidas. Los modelos estadísticos de predicción son la clave para obtener estas predicciones y sugerir una línea de actuación a los operadores de la central, para intentar evitar los episodios de calidad de aire.

En los últimos años los cambios producidos en la legislación medioambiental y en la propia central, así como la construcción de una nueva central de ciclo combinado de gas natural hacen necesario el diseño de modelos que obtengan la predicción simultánea de dos indicadores de polución en el entorno. Los combustibles que van a ser utilizados hacen que el principal interés recaiga en predecir los valores de los óxidos de nitrógeno (NO_x). También será interesante seguir prediciendo los valores del SO_2 .

Se plantea entonces un nuevo problema: predecir las concentraciones medias horarias de dióxido de azufre y de los óxidos de nitrógeno, medidas en el entorno de las dos instalaciones. Ante este nuevo planteamiento, los modelos estadísticos de predicción vuelven a ser una herramienta eficaz.

Modelos de predicción

Fruto de la colaboración durante los últimos años entre el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Santiago de Compostela y de la Sección de Medio Ambiente de la Central Térmica, se creó un Sistema de Predicción Estadística de Inmisión (SIPEI) que emplea modelos estadísticos para facilitar predicciones de los niveles de SO_2 que permitan a los operadores de la planta anticiparse a la aparición de episodios de alteración de la calidad del aire.

La legislación vigente y la disponibilidad de datos con frecuencia minutal en tiempo real, nos hacen considerar la media horaria arrastrada tanto de los valores de SO_2 como del NO_x , para obtener las predicciones de los valores futuros de ambos contaminantes. Así vamos a construir dos series temporales x_t e y_t , para las que el subíndice t representa un instante minutal, y cada valor se va a obtener como

promedio de los valores reales correspondientes a la hora anterior:

$$x_t = \frac{1}{60} \sum_{i=0}^{59} SO_2(t-i),$$

$$y_t = \frac{1}{60} \sum_{i=0}^{59} NO_x(t-i),$$

donde $SO_2(t)$ y $NO_x(t)$ representan la concentración de SO_2 y NO_x , respectivamente, en el instante t , medida en $\mu\text{g}/\text{m}^3$.

La serie de valores medios horarios de SO_2 tiene un comportamiento bastante peculiar, muy influenciado por las condiciones meteorológicas y la topografía local. Toma valores próximos a cero durante largos períodos de tiempo, y crece de manera repentina en condiciones meteorológicas desfavorables para la dispersión del penacho. En la actualidad, la serie de valores medios horarios de NO_x tiene un comportamiento similar a la del SO_2 pero a menor escala. El principal objetivo de los modelos estadísticos desarrollados es predecir los episodios de alteración de la calidad del aire, por lo que nuestro interés se centra en los valores que menos ocurren a lo largo de la serie temporal. Por esto se diseñó un tipo de memoria denominado *Matriz Histórica* (véase [1]). Esta matriz se compone de un número grande de registros de la forma $(x_t - x_{t-5}, x_t, x_{t+30})$: ternas de datos reales de medias bihorarias de SO_2 ó NO_x , elegidos de forma que cubran todo el rango de la variable en cuestión y que harán el papel de memoria histórica de ésta. Para asegurar que cubren todo el rango de la variable, se divide la matriz en bloques atendiendo al nivel de la variable respuesta, x_{t+30} . Para actualizar la memoria, cada vez que llega un nuevo dato se construye el registro correspondiente al que pertenece. Dicho registro entra en ese bloque sustituyendo al registro más antiguo del mismo. Con una muestra así construida, se asegura que en todo momento se dispone de información actualizada sobre todo el rango de variación de la variable de interés.

Un campo donde han sido muy utilizados los *modelos aditivos* (véase [2]) es en el estudio de las series de tiempo medioambientales. Por este motivo vamos a utilizarlos para obtener las predicciones, a media hora, de los niveles de SO_2 y NO_x en el entorno de la Central Térmica. Estamos planteando así nuestro problema de predicción desde el punto de vista de la regresión, donde la variable respuesta es aquella que queremos predecir, x_{t+30} .

El modelo que planteamos es

$$\hat{X}_{t+30} = \beta_0 + f_1(X_t) + f_2(X_t - X_{t-5}),$$

donde X_i representa el nivel medio horario del contaminante en el instante i , β_0 es la constante desconocida y, f_1 y f_2 son funciones suaves desconocidas. Estimaremos el modelo de forma no paramétrica utilizando *splines* con penalizaciones y las matrices históricas correspondientes. El parámetro de suavizado, presente en cualquier metodología no paramétrica, se va a estimar utilizando el *método de validación cruzada generalizado*.

Hay que tener en cuenta que la estimación de los modelos se hace de forma independiente para cada uno de los dos contaminantes, es decir, por un lado utilizamos un modelo de la forma expuesta arriba y las correspondientes matrices históricas para obtener las predicciones de SO_2 , y por otro, utilizaremos otro modelo similar para obtener las del NO_x .

Para poder observar el comportamiento del modelo aditivo seleccionado hemos evaluado su funcionamiento sobre un episodio de alteración de la calidad de aire, cuya información no ha sido incluida en las matrices históricas. Así veremos si se comporta de forma adecuada ante situaciones reales a la hora de predecir tanto los valores futuros de SO_2 como los de NO_x . La figura muestra las predicciones (a media hora) utilizando el modelo propuesto y la serie real observada para un episodio de alteración de la calidad de aire ocurrido el 12 de Marzo de 2007, para el SO_2 . En dicha figura se puede apreciar el buen comportamiento de las predicciones obtenidas por el modelo propuesto.

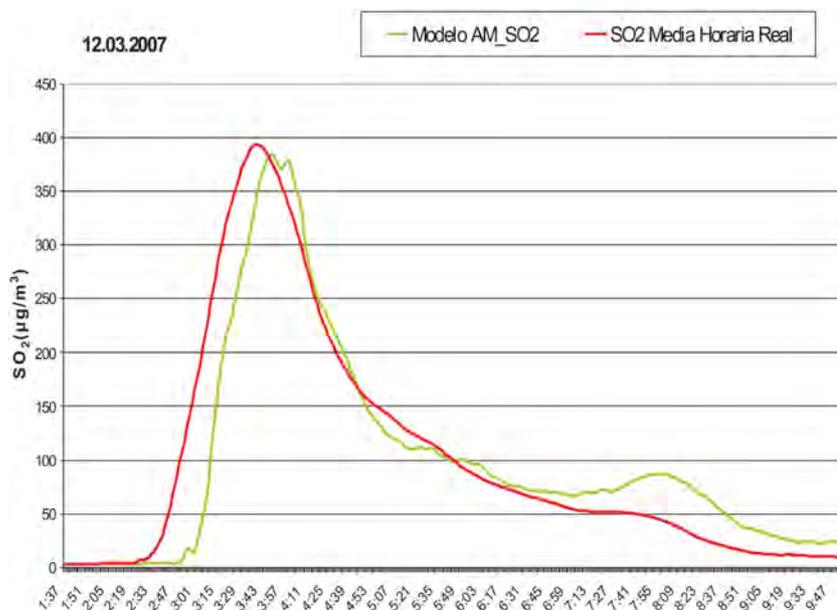


Figura 1: Episodio de alteración de la calidad del aire ocurrido el 12 de Marzo de 2007. Predicción dada por modelo aditivo.

Bibliografía

- [1] I. García-Jurado, W. González-Manteiga, J.M. Prada-Sánchez, M. Febrero-Bande y R. Cao, *Predicting using Box-Jenkins, Nonparametric and Bootstrap Techniques*, *Technometrics* **37** (1995), 303–310.
- [2] T.J. Hastie y R.J. Tibshirani; *Generalized Additive Models*, Chapman and Hall, 1990.

Unha incursión no mundo discontinuo

Rubén Figueroa Sestelo

Departamento de Análise Matemática

13 de febreiro de 2008

Resumo

O obxectivo desta charla é motivar e afondar un pouco na teoría da diferenciación de funcións dunha variable real e na integral de Lebesgue, de xeito que estas técnicas permitan posteriormente realizar unha xeneralización dos teoremas de Cauchy-Peano e Picard-Lipschitz a ecuacións diferenciais con segundo membro discontinuo.

Motivación

A modelización dos problemas da física clásica foi quizais unha das maiores motivacións no desenvolvemento do cálculo diferencial e da teoría das ecuacións diferenciais. Vexamos cómo un problema de cinemática serve de motivación para o estudo das ecuacións diferenciais discontinuas: Supoñamos unha vagoneta que circula sobre dous raís empuxada por unha locomotora que se despraza con aceleración constante a . No instante t_0 un obstáculo situado sobre a vía provoca a detención brusca da locomotora, sen interromper o movemento da vagoneta, que pasa a desprazarse segundo a súa propia inercia. Deste xeito, se $x(t)$ representa a velocidade da vagoneta no instante t , entón esta pode representarse mediante a expresión:

$$x'(t) = \begin{cases} a, & \text{se } 0 < t < t_0, \\ 0, & \text{se } t \geq t_0, \end{cases} \quad (1)$$

que é unha función discontinua de t . Este problema ten unha aparencia sinxela, pero a teoría clásica de ecuacións diferenciais non nos permite abordalo, pois os resultados clásicos de existencia de solución esixen segundos membros continuos. Sen embargo, non é difícil ver que a función

$$x(t) = \begin{cases} at, & \text{se } 0 < t < t_0, \\ at_0, & \text{se } t \geq t_0, \end{cases} \quad (2)$$

describe perfectamente a velocidade da vagoneta. Esta función x non é unha solución de (1) no sentido clásico, pois x non é unha función derivable en todo punto como esixe a noción clásica de solución. Será, como veremos máis adiante, unha solución

PALABRAS CLAVE: funcións dunha variable real, integral de Lebesgue, ecuacións diferenciais discontinuas

en sentido débil. O lector que desexe obter outras motivacións para as ecuacións discontinuas, referentes por exemplo aos modelos de crecemento de poboacións, pode consultalos en [4].

Resultados relativos a funcións reais dunha variable real

Nesta sección preténdese afondar nalgúns conceptos relativos á diferenciación e integración de funcións de variable real que serán necesarios para elaborar a nosa teoría de ecuacións diferenciais discontinuas. Supóñense coñecidos os resultados clásicos da derivación de funcións reais dunha variable real, así como a teoría das integrais de Riemann e de Lebesgue. Consideremos o problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ para todo } t, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

O teorema fundamental do cálculo dinos que o problema (P) equivale a atopar unha función x tal que para todo t do seu dominio se teña

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (3)$$

onde a integral considérase no sentido de Riemann. A idea fundamental na que nos basearemos é que a integral da ecuación (3) ten sentido para unha clase moito máis ampla de funcións que as funcións continuas, e maior aínda se se considera a integral no sentido de Lebesgue. Por este motivo, debilitaremos as condicións esixidas á función f e pediremos simplemente medibilidade na variable independente e continuidade na variable dependente. Estas funcións denomínanse *funcións de Carathéodory*. O que debemos estudar agora son condicións suficientes para que se satisfagan estas tres condicións: 1) A composición $s \mapsto f(s, x(s))$ é medible; 2) A función x é derivable (alomenos en case todo punto) e 3) A función $f(\cdot, x(\cdot))$ é integrable e a integral coincide con x . Á primeira pregunta dá resposta o teorema de composición medible. O lector interesado pode atopar a súa proba en [1].

No que segue, $I = [a, b]$ será un intervalo pechado e acotado de \mathbb{R} .

Teorema 1. (Teorema de composición medible) *Dadas unha función de Carathéodory $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e unha función medible $v : t \in I \rightarrow \mathbb{R}^n$, a aplicación*

$$t \in I \mapsto f(t, v(t)) \in \mathbb{R}^n$$

tamén é medible.

Unha vez superado o problema da medibilidade, debemos abordar o problema de atopar a clase de funcións que, sendo derivables, poden ser reconstruídas integrando a función derivada. A esta cuestión dan resposta as funcións absolutamente continuas e o teorema fundamental do cálculo para a integral de Lebesgue. Pódese ver un desenvolvemento exhaustivo destas cuestións en [2] e [3].

Definición 2. Unha función $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dize que é absolutamente continua en I se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal xeito que se $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ é unha familia de subintervalos de I que son disxuntos dous a dous e tal que

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

entón

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Denotaremos por $AC(I)$ o conxunto de funcións reais absolutamente continuas en I .

Teorema 3. (Teorema fundamental do cálculo para a integral de Lebesgue) Unha función $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente continua en I se e só se existe $f'(t)$ para case todo punto $t \in I$, $f' \in L^1(I)$ e ademáis

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds \text{ para todo } t \in I.$$

En consecuencia, as funcións absolutamente continuas son aquelas (e só aquelas) que poden ser reconstruídas integrando a súa función derivada. Polo tanto, será neste conxunto de funcións onde teremos que buscar as solucións aos problemas de valor inicial que plantexábamos ao inicio.

Observación 4. O concepto de función absolutamente continua, así como o teorema fundamental do cálculo foron establecidos para funcións con valores en \mathbb{R} , pero esténdense sen dificultade a funcións con valores en \mathbb{R}^n .

Resultados de existencia de solución para ecuacións diferenciais discontinuas

A teoría das funcións absolutamente continuas permítenos estender a teoría clásica de ecuacións diferenciais, dando un novo concepto de solución e versións máis débiles dos teoremas de Cauchy-Peano e Picard-Lipschitz. Pódense ver estes resultados con máis detalle en [5].

Sexan $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función de Carathéodory e $(t_0, x_0) \in D$. Consideramos o problema de valor inicial

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4)$$

Definición 5. Unha solución de (4) no sentido de Carathéodory é unha función $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface as seguintes condicións:

1) I é un intervalo non dexenerado e $t_0 \in I$;

2) $\xi \in AC(I, \mathbb{R}^n)$ e $(t, \xi(t)) \in D$ para todo $t \in I$;

3) $\xi'(t) = f(t, \xi(t))$ para case todo $t \in I$;

4) $\xi(t_0) = x_0$.

Observación 6. Se $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solución de Carathéodory de (4) e a composición

$$t \in I \mapsto f(t, \xi(t))$$

é continua, entón ξ é solución en sentido clásico.

Teorema 7. (Teorema de Carathéodory de existencia de solución) Sexa $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un aberto e sexa $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de Carathéodory tal que para cada subconxunto compacto $U \subset D$ existe unha función real de variable real, $m_U(t)$, localmente integrable e tal que

$$\|f(t, x)\| \leq m_U(t) \text{ para todo } (t, x) \in U.$$

Entón para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe $\bar{\alpha} > 0$ tal que o problema (4) ten solución definida en $[t_0 - \bar{\alpha}, t_0 + \bar{\alpha}]$.

Teorema 8. (Teorema de unicidade de solución) Sexa unha función nas hipóteses do teorema (7) $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e tal que para cada compacto $U \subset D$ existe unha función real, $L_U(t)$, localmente integrable tal que para calesquera $(t, x), (t, y) \in U$ tense

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_U(t) \|x - y\|.$$

Entón, para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe $\bar{\alpha} > 0$ tal que o problema (4) ten solución única definida en $[t_0 - \bar{\alpha}, t_0 + \bar{\alpha}]$.

Para rematar, invitamos ao lector a verificar que estes dous resultados xeneralizan os teoremas coñecidos de Cauchy-Peano e Picard-Lipschitz e polo tanto permítenos ampliar notablemente o campo de ecuacións diferenciais que podemos estudar. Invitamos tamén a comprobar que o problema das vagonetas que plantexabamos ao inicio está nas hipóteses dos resultados precedentes.

Bibliografía

- [1] J. APPELL Y P. P. ZABREJKO, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press (1990).
- [2] S. B. CHAE, *Lebesgue Integration*, Springer-Verlag.
- [3] E. HEWITT Y K. STROMBERG, *Real and Abstract Analysis*, Springer – Verlag, Nueva York; Tercera Edición (1975).
- [4] S. NOVO, R. OBAYA Y J. ROJO, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, A.C., Madrid (1992).
- [5] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications I*, Springer-Verlag, Nueva York (1986).

Quen sabe trisecar un ángulo?

Ana Belén Rodríguez Raposo

Departamento de Álgebra

20 de febreiro de 2008

Resumo

Para atopar a orixe do problema da trisección do ángulo temos que remontarnos á época grega, en torno ao 300 a.C. Nese momento a xeometría vivía un dos seus puntos álxidos coa aparición dos famosos Elementos de Euclides. Recordemos que, a parte de ser o primeiro tratado "moderno" de matemáticas, é un abraiante resumo de case todo o saber matemático da Grecia clásica. Eran moitos os problemas xeométricos que se resolvían neste tratado. Entre eles, descríbese a forma de calcular xeometricamente a bisectriz dun ángulo. É importante remarcar que con *xeometricamente* nos referimos á construción con regra e compás. De feito, a xeometría de Euclides pode pensarse coma a *xeometría da regra e o compás*.

Así, e en vista de que biseclar un ángulo resultaba moi sinxelo dentro dos axiomas de Euclides, naceu a pregunta de como se facía a *trisección do ángulo*, é dicir, como se podía dividir un ángulo arbitrario en tres partes iguais utilizando só regra e compás. O problema, de enunciado sinxelo, resultou non ter unha solución tan inmediata como era de esperar, e a comunidade matemática comezou a preguntarse se era efectivamente posible realizar esta construción con regra e compás, ou se pola contra non era factible.

Euclides non sabe trisecar un ángulo!

A solución tivo que agardar varios centos de anos, ata que o estudio da resolución de ecuacións polinómicas e dos corpos que se xeneran nesta resolución estivo o suficientemente desenvolvido. Antes de obter, entón, unha resposta ao noso problema teremos que recordar uns cantos conceptos de álgebra conmutativa, que nos permitirán alxebrizar o problema e obter de forma sinxela unha solución que se resistiu para a xeometría pura.

Supoñamos que temos un polinomio $f \in K[x]$, sendo K un corpo conmutativo. Para que este polinomio teña unha *raíz* ou *cero* no corpo K debe existir un elemento $\alpha \in K$ tal que $f(\alpha) = 0$. Pero se isto non sucede non quere dicir que o polinomio f non teña raíces, senón que non estamos escollendo un corpo suficientemente grande onde buscar as súas solucións. Pensemos no polinomio $f = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Claramente

PALABRAS CLAVE: Trisección dun ángulo, constructibilidade de números, axiomas da xeometría.

as raíces deste polinomio non son elementos de \mathbb{Q} , pero se tomamos $i \in \mathbb{C}$ si obtemos que $f(i) = 0$. Ten sentido, entón, preguntarnos como podemos atopar un corpo no que estean tódalas raíces dun polinomio, e incluso a súa relación co corpo base.

Definición 1. *Consideremos F e K corpos.*

Unha extensión de corpos é un homomorfismo $f : K \rightarrow F$ de corpos. Esta extensión denotarémola como $F|K$.

A dimensión de F coma K -espacio vectorial chámase grao da extensión, e denotarémola mediante $[F : K]$. Se o grao da extensión é finito diremos que a extensión é finita.

Se $f : K \rightarrow F$ é unha extensión de corpos e $\alpha \in F$, defínese $K(\alpha)$ coma o menor corpo que contén a K e a α . Nótese que $K(\alpha)|K$ é unha extensión de corpos.

Proposición 2. *Sexan $F : K$ e $E : F$ dúas extensións de corpos finitas. Entón verifícase que $[E : K] = [E : F] \cdot [F : K]$.*

O seguinte paso será relacionar estes coñecementos sobre extensións de corpos ó problema da resolución de ecuacións polinómicas. Recordemos que dado un polinomio $f \in K[x]$ as súas raíces non teñen por que ser elementos de K . Así definimos:

Definición 3. *Sexa $F|K$ unha extensión de corpos. Un elemento $\alpha \in F$ é alxébrico sobre K se existe un polinomio $f \in K[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Un elemento $\alpha \in F$ é transcendente se non é alxébrico.*

Se $\alpha \in F$ é alxébrico sobre K , chamámoslle polinomio irreducible de α sobre K ao polinomio irreducible $f \in K[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Este polinomio é único.

A nosa próxima tarefa será obter unha relación entre o grao do polinomio e a dimensión do corpo $K(\alpha)$.

Proposición 4. *Sexa $F|K$ unha extensión de corpos, e $\alpha \in F$ alxébrico. Entón, se $f \in K[x]$ é o polinomio irreducible de α sobre K , tense que $[K(\alpha) : K] = \text{grao } f$.*

Unha vez que temos esta base alxébrica teórica utilizarémola para estudar a constructibilidade de figuras xeométricas. Para isto basearémonos nos axiomas de Euclides, é dicir, nas construcións con regra e compás. A partir de aquí consideraremos que o corpo K é \mathbb{Q} .

Como o que queremos é estudar a constructibilidade con regra e compás, o que teremos que facer é traducir estas construcións á linguaxe alxébrica. Se identificamos as rectas con polinomios de grao 1 e as circunferencias con (certos) polinomios de grao 2, poderemos aplicar os nosos coñecementos alxébricos para tratar problemas provenientes da xeometría de Euclides, e sempre sen saírnos dos seus cinco axiomas. Se partimos de \mathbb{Q} permitiremos só os números reais que proveñan de interseccións de dúas rectas, de unha recta e unha circunferencia ou de dúas circunferencias, e permitiremos que este proceso sexa iterativo.

Definición 5. *Un número real α é absolutamente constructible se é raíz dun polinomio con coeficientes racionais que proveña dunha ecuación dunha intersección de dúas rectas, dunha recta e unha circunferencia ou de dúas circunferencias.*

Un número real α é constructible se existe unha torre de corpos

$$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Q}_n$$

tales que $\mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}_{i-1}(\alpha_i)$, onde α_i é absolutamente constructible sobre \mathbb{Q}_{i-1} .

Nótese que cada un dos pasos $\mathbb{Q}_i|\mathbb{Q}_{i-1}$ provén da obtención dun novo punto intermedio mediante os procesos permitidos, co cal debe ter grao 1 ou 2, dependendo se intervén unha circunferencia ou non. Tense entón:

Teorema 6. *Sexa α un número real constructible. Verifícase que:*

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^k, k \in \mathbb{N}.$$

Parece que este é o resultado axeitado para ver que, en efecto, a trisección dun ángulo non é posible con regra e compás. Consideremos o ángulo $\frac{\pi}{3}$, e vexamos que en efecto non se pode trisecar. Primeiro observemos que, dado un ángulo α , a súa constructibilidade e a do seu seno son equivalentes, xa que bastaría construír o triángulo rectángulo de hipotenusa 1 e construír un dos catetos medindo $\text{sen}\alpha$. Logo se probamos que $\text{sen}\frac{\pi}{9}$ non é constructible obteremos que non é posible trisecar o ángulo $\frac{\pi}{3}$. Atoparemos pois un polinomio irreducible sobre \mathbb{Q} de grao 3 que teña por raíz ao número $l = \text{sen}\frac{\pi}{9}$. Utilizando fórmulas trigonométricas elementais obtense que:

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = -4\text{sen}^3\frac{\pi}{9} + 3\text{sen}\frac{\pi}{9},$$

de onde obtemos o polinomio:

$$f = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2},$$

que é claramente un polinomio de $\mathbb{Q}[x]$, que ten por raíz ao número l e que ademais é irreducible sobre \mathbb{Q} . Así

$$[\mathbb{Q}(l) : \mathbb{Q}] = 3$$

co cal l non pode construírse con regra e compás.

A trisección mediante os axiomas da papiroflexia

Logo non é posible trisecar un ángulo? A resposta é, evidentemente, si, pero necesitamos algún axioma máis aló dos cinco euclidianos. Son coñecidas algunhas curvas trisectrices, como a espiral de Arquímedes [1] ou a trisectriz de Hippias [2]. A parte destas famosas trisectrices existe outra maneira moi sinxela de trisecar un ángulo, que é usando a papiroflexia.

Pódese construír unha *xeometría das dobreces do papel*, que se basea en 6 axiomas que conteñen (ou implican) aos de Euclides, pero que van máis aló [3]. O axioma que a diferenza da xeometría euclídea é o seguinte:

Dados dous puntos P_1 e P_2 e dúas rectas L_1 e L_2 , existe unha única dobrez que leva P_1 sobre L_1 e P_2 sobre L_2 .

Esta dobrez, trasladada á linguaxe de ecuacións, é solución dunha ecuación de grao 3, co cal estes axiomas non son equivalentes aos de Euclides, aínda que os conteñen. É este axioma o que nos permite obter a trisección dun ángulo arbitrario de forma máis ou menos sinxela. En [3] podes atopar como facelo.

Bibliografía

- [1] <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/ExpoDe/AntonioPerez/HistoriaMate/Arquimedes.asp>
- [2] <http://descartes.cnice.mec.es/materiales-didacticos/trisectrices-pge/hipias.html>
- [3] José Ignacio Royo, *Matemáticas, Papiroflexia y balones de fútbol*, en <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/01-02/PG01-02-royo.pdf>

Algunas aportaciones probabilísticas a la genética forense

Manuel García Magariños

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

5 de Marzo de 2008

Resumen

Introducción

Prácticamente desde el nacimiento de la medicina como ciencia propiamente dicha, las matemáticas, y más concretamente, la estadística, destacaron como herramientas esenciales a la hora de afrontar aquellos estudios que involucraban cantidades más o menos altas de información a partir de la cual se pretendiese obtener un resultado analítico. En el campo de la genética forense y, dentro de este campo, en las pruebas de paternidad, la realidad no es distinta. Una prueba de paternidad es aquella que tiene como objeto probar la paternidad, esto es, determinar el parentesco ascendente en primer grado entre un individuo y un hombre (presunto padre). Los métodos para determinar esta relación han evolucionado desde la simple convivencia con la madre, la comparación de rasgos, tipo de sangre ABO, análisis de proteínas y antígenos HLA. Actualmente la prueba idónea es la prueba genética basándose en polimorfismo de regiones STR.

Los polimorfismos genéticos hacen referencia a aquellas regiones del genoma para las cuales existe variabilidad entre los seres humanos. Son aproximadamente un 1% del ADN y existen diferentes tipos, aunque los más usados tradicionalmente en los estudios forenses son los Short Tandem Repeats (STRs). Los STRs son secuencias de nucleótidos que se repiten un cierto número de veces en una posición del genoma. Cada individuo posee un par de números de repeticiones (e.g. 10-12) de cada STR, heredado cada uno de un progenitor. Como alternativa o complemento a los STRs, han surgido en los últimos tiempos los Single Nucleotide Polymorphisms (SNPs). Estos son variaciones en la secuencia de ADN que afectan a un único nucleótido en una determinada posición. Cuando existen dos posibilidades (e.g. C o T) se denominan SNPs bialélicos. Al igual que con los STRs, se hereda una cadena nucleotídica de cada progenitor, de modo que en cada individuo se pueden dar 3 diferentes posibilidades (e.g. CC, CT o TT). Cada una de las variantes en un posible SNP ha de darse al menos en un 1% de la población; de lo contrario, se considera que estamos ante una mutación.

PALABRAS CLAVE: genética; paternidad; polimorfismo; STR; SNP; teorema de las probabilidades totales.

Los STRs, como marcadores de referencia en pruebas de paternidad, se agrupan en los diferentes kits comerciales normalmente usados para llevarlas a cabo. Los más comunes son

- Minifiler (8 STRs)
- Profiler Plus (9 STRs)
- Identifiler (15 STRs)
- PowerPlex (15 STRs)
- Identifiler + PowerPlex (17 STRs)

De forma adicional, en algunas ocasiones pueden ser usados algunos STRs suplementarios. Las pruebas de paternidad llevadas a cabo mediante estos kits dan lugar generalmente a resultados para los que, bien positivos, bien negativos, no existe duda razonable posible. Sin embargo, en algunos casos, las pruebas de paternidad pueden ofrecer resultados ambiguos, para los que no se puede asegurar taxativamente la paternidad o la exclusión. Estos problemas se circunscriben en muchas ocasiones a casos en los que, por unas circunstancias u otras, se estudia la paternidad de un individuo a través de un familiar cercano, generalmente un hermano biológico (tío).

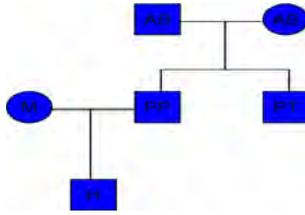
Nuestra hipótesis de trabajo es que la adición de un set de 52 SNPs puede proporcionar la información necesaria para resolver aquellos casos en que los STRs dan lugar a resultados ambiguos. Para contrastarla, hemos llevado a cabo dos estudios de simulación, que explicamos en el siguiente apartado.

Simulación

En un primer estudio se simularon, a partir de las frecuencias poblacionales y las tasas de mutación en cada marcador, 10.000 individuos que representan el papel de tíos (hermanos biológicos del verdadero padre), y se calculó la probabilidad $P(B)$ de que para dichos individuos no se encuentre exclusión alguna en el conjunto de marcadores.

En un segundo estudio de simulación, y usando de nuevo datos genéticos poblacionales, se obtuvieron alrededor de 6.600 pedigrís de familias como el que se aprecia en la figura 1. Para ello, se comenzó simulando, del mismo modo que en el primer estudio, a los tres individuos independientes (abuelo, abuela y madre), en el sentido de que en su caso no se dispone de sus antecedentes familiares. Posteriormente, se realizan los cruces simulados correspondientes, lo cual da lugar al trío de individuos hijo-padre-tío. Tomando los datos del hijo y el tío se obtiene el índice de paternidad, contrastando la hipótesis de éste último como presunto padre.

Se han obtenido tanto los $P(B)$ como los índices de paternidad correspondientes a los diferentes kits y diferentes agrupaciones de marcadores, con el objetivo de comparar posteriormente los resultados. Todos estos modelos de simulación han sido programados en R, software estadístico gratuito y de libre distribución.

Figura 1: *Pedigrí simulado*

Métodos probabilísticos

En el primer estudio, se comienza obteniendo la probabilidad de no exclusión en cada marcador i (STR o SNP), $P(B_i)$, usando el teorema de las probabilidades totales, que, aplicado a este caso particular, dice

$$P(B_i) = P(B_i|C1)P(C1) + P(B_i|C2)P(C2) + P(B_i|C3)P(C3)$$

siendo $C1$, $C2$ y $C3$ las tres posibles situaciones por las cuales dos hermanos biológicos comparten 2, 1 o ninguno de los alelos heredados en cada marcador, con probabilidades 0.25, 0.5 y 0.25 respectivamente. De esta forma, y debido a la independencia de los marcadores, la probabilidad de no exclusión en el conjunto correspondiente de marcadores, $P(B)$, es igual al producto de las probabilidades de no exclusión en cada marcador

$$P(B) = \prod P(B_i)$$

En el segundo estudio, y para cada pedigrí, se obtiene el índice de paternidad del tío como el cociente

$$IP = \frac{P(E|H_1)}{P(E|H_2)}$$

siendo E los genotipos de padre y tío, y H_1 y H_2 las hipótesis que afirman que el tío es el verdadero padre y que no lo es, respectivamente.

Resultados

La figura 2 contiene una tabla con los resultados de probabilidad media de no exclusión, $P(B)$, e índices de paternidad obtenidos para diferentes agrupaciones de marcadores genéticos. En lo que respecta al IP, se reportan las proporciones de valores (en el total de 6.600 pedigrís) mayores que 1, puesto que este es el valor a partir del cual la probabilidad de que el tío sea considerado padre es mayor que la de que no lo sea. De todos modos, es obligado aclarar que un $IP > 1$ no es suficiente para que un individuo sea considerado como padre en una prueba. Se aprecia en los resultados que tanto la adición del set de 52 SNPs como la de 4 STRs suplementarios reducen considerablemente las probabilidades de cometer un error en este tipo de pruebas, algo fundamental, entendiendo todo lo que está en juego.

La figura 3 se obtiene a partir de los logaritmos base 10 de los IPs ordenados de menor a mayor a lo largo de los aproximadamente 6.600 pedigrís, para las diferentes

agrupaciones de marcadores que se muestran en la figura 2. Dado que se reportan las IPs de individuos que no son el padre, los mejores resultados serán los de aquellos conjuntos de marcadores cuyos valores sean menores. Lo más reseñable en esta figura es que se aprecia que los resultados del set de 52 SNPs son mejores que los del kit Identifiler + PowerPlex (17 STRs), el más potente de los usados comúnmente, y muy similares a los que se obtienen añadiendo a dicho kit 4 STRs suplementarios.

En base a los resultados obtenidos, se puede por tanto afirmar que la adición de un set de 52 SNPs es necesaria en estudios de paternidad que involucren a familiares del presunto padre, aun a pesar del incremento económico que ello suponga.

Marker set (number of loci)	Probability of no detected exclusions in a brother (standard deviation in brackets)	Proportion of PI values higher than 1 (%)
Identifiler [®] (15)	0.02657 (0.011)	6.9
MiniFiler [®] (8)	0.12044 (0.035)	11.9
Powerplex [®] 16 (15)	0.02503 (0.01)	6.4
Profiler Plus [®] (9)	0.09648 (0.029)	10.7
Identifiler [®] + Powerplex [®] 16 (17)	0.01395 (0.006)	5.0
17 core STRs + 4 supplementary	0.00277 (0.001)	2.4
SNPforID ID-SNPs (52)	0.05165 (0.018)	6.1
21 STRs + 52 SNPs	0.00017 (0.0001)	0.5

Figura 2: Probabilidades medias de no exclusión y resultados de IP para las diferentes agrupaciones de marcadores genéticos utilizados.

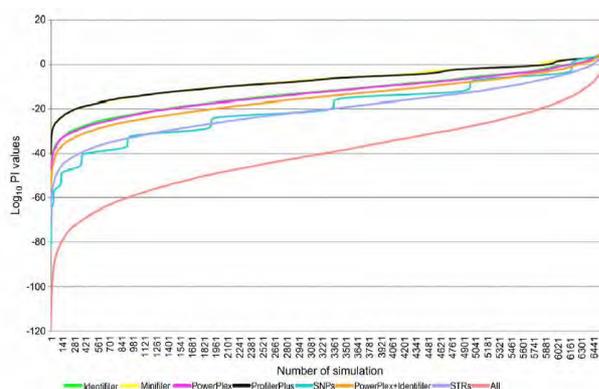


Figura 3: Logaritmos base 10 ordenados de menor a mayor de los 6600 IPs obtenidos en los pedigrís simulados para las diferentes agrupaciones de marcadores genéticos utilizados. Los mejores resultados son los de aquellos conjuntos de marcadores cuyos valores están por debajo.



El teorema de Hedlund. Flujos minimales y curvatura negativa

Carlos Meniño Cotón

Departamento de Xeometría e Topoloxía

19 de Marzo de 2008

Resumen

Dentro de la teoría de sistemas dinámicos cobra especial importancia la detección de *aplicaciones y flujos minimales*. Surge de modo natural esta cuestión en el estudio de los conjuntos minimales (cerrados densos que son minimales para la relación de inclusión).

Recordamos que un flujo (o sistema dinámico) sobre un espacio topológico X es una acción $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$. Al conjunto $\Phi(\mathbb{R} \times \{x\})$ se le denomina *órbita* que pasa por x . Un flujo se dice minimal si todas sus órbitas son densas en X . Un homeomorfismo f se dice minimal si la \mathbb{Z} -acción que induce, $(n, x) \mapsto f^n(x)$, es tal que todas sus órbitas son densas.

Ejemplo 1. *Una rotación de ángulo $2\pi\alpha$, con α irracional, es una aplicación minimal en S^1 . El sistema dinámico en el toro inducido por las rectas de pendiente irracional en el plano es un flujo minimal.*

Aunque ambos conceptos están relacionados, no son equivalentes y, en general, se usan técnicas distintas para detectarlos. Como muestra de la complejidad del tema diremos que todavía no se sabe si existen flujos minimales sobre S^3 (conjetura de Gottschalk) pero sí se sabe que existen aplicaciones minimales sobre todas las esferas de dimensión impar [1].

Todo sistema dinámico sobre la botella de Klein tiene necesariamente una órbita periódica y por tanto no admite flujos minimales [3]. En consecuencia, los flujos minimales permiten distinguir la botella de Klein del toro de dimensión 2.

La cuestión que abordamos ahora es cómo influye la curvatura a esta cuestión, el resultado en este sentido es el que obtuvo Hedlund en 1936 [2]. Antes de enunciarlo repasaremos algo de geometría hiperbólica.

Previos en geometría hiperbólica

Definición 2. *El disco de Poincaré es la variedad de Riemann definida sobre el disco abierto de radio 1 del plano complejo con la métrica*

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 - z\bar{z})^2} .$$

El modelo del semiplano viene dado en el semiplano superior complejo con la métrica dada por la densidad $\lambda(z) = 1/\text{im}(z)$. El punto del infinito forma parte de este modelo.

Ambos modelos son isométricos, forman el *plano hiperbólico*, que denotamos H , y tienen distintas ventajas e inconvenientes.

Poincaré demostró que el grupo de isometrías del plano hiperbólico que conservan la orientación coincide con el grupo de Lie

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2 \mid \det(A) = 1\} / \{I, -I\} ,$$

(las que no conservan orientación son de la forma $\frac{a\bar{z}+c}{c\bar{z}+a}$ con $|a|^2 - |c|^2 = 1$).

Definición 3 (Transformaciones elementales del plano hiperbólico). *Existen transformaciones sencillas del plano hiperbólico que generan el resto de isometrías orientadas.*

- (a) Transformaciones parabólicas. *Las que fijan un punto del plano hiperbólico. Son conjugadas a traslaciones horizontales en el modelo del semiplano.*
- (b) Transformaciones elípticas. *Son las conjugadas a rotaciones en el modelo del disco.*
- (c) Transformaciones hiperbólicas. *Fijan exactamente dos puntos. Son conjugadas a homotecias en el modelo del semiplano, que fijan 0 y ∞ .*

Definición 4. *Un grupo fuchsiano es un grupo discreto de isometrías del plano hiperbólico. Diremos que es de primera clase si está constituido por transformaciones hiperbólicas. Su conjunto límite es el círculo del infinito. Diremos que es cocompacto si el cociente del plano hiperbólico por la acción del grupo fuchsiano es compacto.*

Sea (M, g) una variedad de Riemann y $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ el fibrado tangente. Se define el *fibrado tangente unitario* de M como

$$T^1(M) = \{(p, v) \in TM \mid g(v, v) = 1\} .$$

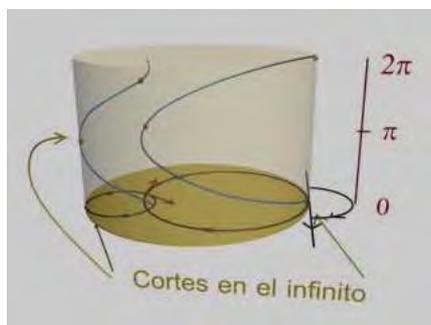


Figura 1: *Levantamiento de dos horociclos orientados al fibrado tangente unitario del plano hiperbólico. El levantamiento de todos los horociclos con esa orientación determina un flujo.*

Flujo geodésico y flujo horocíclico

En el plano hiperbólico existen varios tipos de curvas que destacan por sus propiedades geométricas, consideramos el modelo del disco de Poincaré para su visualización:

- (a) *Geodésicas*. Círculos ortogonales al borde del círculo.
- (b) *Hiperciclos*. Círculos que cortan en dos puntos al borde no ortogonalmente.
- (c) *Horociclos*. Círculos tangentes al borde.
- (d) Círculos *hiperbólicos*. Contenidos dentro del círculo.

Cada elemento del fibrado tangente unitario se puede identificar con un punto y una dirección. Por ese punto y con esa dirección pasa un único horociclo y una única geodésica (fijando una orientación). Se definen, por tanto, flujos en el fibrado tangente unitario; la línea de flujo que pasa por un elemento es la inducida por la geodésica y horociclo únicos que determina dicho elemento (ver Figura 1).

Un grupo fuchsiano Γ de primera clase y cocompacto actuando sobre el plano hiperbólico, $\Gamma \times H \rightarrow H$, induce una superficie de curvatura negativa constante -1 . El grupo también actúa sobre los elementos del fibrado tangente unitario,

$$\Gamma \times T^1(H) \rightarrow T^1(H), (g, (p, v)) \mapsto (gp, g_*v).$$

Dicha acción está bien definida puesto que el grupo actúa por isometrías. Los flujos geodésico y horocíclico del fibrado tangente unitario del plano hiperbólico inducen flujos en el cociente por la acción del grupo fuchsiano. Éstos son los flujos *geodésico* y *horocíclico* respectivos de dicha superficie.

Recíprocamente se tiene que toda superficie orientada de curvatura constante -1 se obtiene como cociente del plano hiperbólico por la acción de un grupo fuchsiano de primera clase cocompacto.

El flujo geodésico fue bien estudiado en los comienzos de la geometría hiperbólica y no es minimal aunque se sabe que posee órbitas densas así como órbitas periódicas. La cuestión sobre el carácter minimal del flujo horocíclico quedó en suspenso hasta los años 30 del siglo XX, esto es precisamente el resultado de Hedlund.

Teorema 5 ([2], Teorema de Hedlund). *Sea Γ un grupo fuchsiano de primera clase y cocompacto. Entonces el flujo horocíclico inducido en $T^1(H)/\Gamma = T^1(H/\Gamma)$ es minimal.*

La demostración se sigue usando el lema del encajonamiento en semihorociclos dados sobre un intervalo del borde del disco de Poincaré y que pasan por un punto fijo. Esto prueba la existencia de órbitas densas.

La cocompacidad se usa para probar que todos los horociclos cumplen esta propiedad, la demostración completa es larga y técnica.

Corolario 6. *Para $p > 1$ existen superficies de curvatura negativa, cerradas y orientadas de género p cuyos fibrados tangentes unitarios (que son 3-variedades) admiten un flujo minimal.*

El teorema de Hedlund también ofrece un contraejemplo en homología a la conjetura de Gottschalk. Usando este teorema A. Verjovsky obtuvo una 3-variedad equivalente a S^3 en homología y que admite un flujo minimal.

Bibliografía

- [1] A.Fathi, M.R. Herman, *Existence de difféomorphismes minimaux*, Astérisque **49** (1977), 37–59.
- [2] G. A. Hedlund, *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. **2** (1936), no. 3, 530–542.
- [3] H. Kneser, *Regulare Kurvensharen auf Ringflächen*, Math. Ann. **91** (1924), 135–154.

¿Cómo quemar carbón con EDP's?

Laura Saavedra Lago

Departamento de Matemática Aplicada

26 de Marzo de 2008

Resumen

El modelado de los procesos involucrados en la combustión del carbón es uno de los problemas más complejos que se estudia en mecánica de fluidos. En el modelo que presentaremos tenemos dos fases acopladas, la fase gaseosa y la fase sólida dispersa (el carbón pulverizado), que debemos modelar atendiendo a los fenómenos propios de cada una de ellas. Este acoplamiento se debe a las fuentes que aporta la fase discreta a las ecuaciones de conservación de masa y energía del modelo para la fase gaseosa, y a que la fase gaseosa determina cómo se mueve y la atmósfera en la que se quema cada partícula de carbón. Además, debido a las altas temperaturas que se producen en la combustión del carbón debemos usar modelos con transferencia de calor en los que se incluya un modelo para la radiación. Por otro lado, en la mayoría de los flujos reactivos la turbulencia es un fenómeno importante para el que se deben incluir modelos específicos.

En este resumen enunciaremos las ecuaciones que se necesitan resolver numéricamente para realizar una simulación completa de un flujo en el que se quema carbón pulverizado. Además mostraremos algunas ecuaciones más específicas del modelado de la combustión, en concreto las del modelo BFL que ha sido desarrollado en [2].

Ecuaciones generales para flujos con combustión de carbón

Al realizar una simulación de un flujo de una mezcla de gases en la que se produce combustión de carbón pulverizado (por ejemplo en una caldera de una central térmica) queremos conocer en cada punto del dominio computacional la velocidad de la mezcla de gases, la densidad de la mezcla, ρ^g , la presión de la mezcla, p , la concentración de cada una de las especies, $Y_i^g, i = 1, \dots, N_e$ y la temperatura de la mezcla, T^g .

Además nos interesa la eficiencia de la combustión por lo que necesitaremos saber cuánta masa de carbón ha quedado sin quemar y cómo podemos minimizar esta cantidad. Para ello necesitaremos conocer una estimación del tiempo que está cada partícula en la caldera y de la trayectoria seguida por la misma. De esta forma,

PALABRAS CLAVE: Combustión, carbón pulverizado.

podremos modificar las condiciones de funcionamiento de nuestra caldera para conseguir que las partículas estén el tiempo necesario en la caldera para su combustión completa y conseguir así un mayor rendimiento.

Las ecuaciones que se necesitan resolver para realizar una simulación completa son:

- **Ecuaciones para la fase gaseosa:**

1. *Aerodinámica:*

- Ecuación de conservación de la masa
- Ecuación de la cantidad de movimiento
- Ecuación de conservación de la energía
- Ecuación de la radiación térmica
- Ecuación de estado

2. *Combustión*

- Ecuación de conservación de las especies

- **Ecuaciones para la fase sólida:**

1. *Movimiento:*

- Ecuación de la dinámica de una partícula

2. *Combustión:*

- Ecuación de conservación de la masa de los componentes
- Ecuación de conservación de la energía
- Ecuaciones cinéticas de las reacciones químicas

Modelización matemática de las ecuaciones

Las ecuaciones necesarias para simular un flujo en el que se produce combustión de carbón son muy complejas. Es necesario introducir modelos que simplifiquen la resolución numérica de las mismas y despreciar términos que representan fenómenos poco significativos en este tipo de flujos. Algunas simplificaciones realizadas para los modelos son:

- Flujo estacionario \rightarrow No hay derivadas parciales con respecto del tiempo.
- Flujo a bajo número de Mach \rightarrow Podremos hacer algunas simplificaciones sobre la presión y la velocidad en algunas ecuaciones.

Los modelos utilizados en combustión para la turbulencia, radiación, etc., pueden ser consultados en cualquier referencia básica de mecánica de fluidos. En este resumen solo presentaremos las hipótesis fundamentales del modelo de combustión BFL y algunas ecuaciones del mismo.

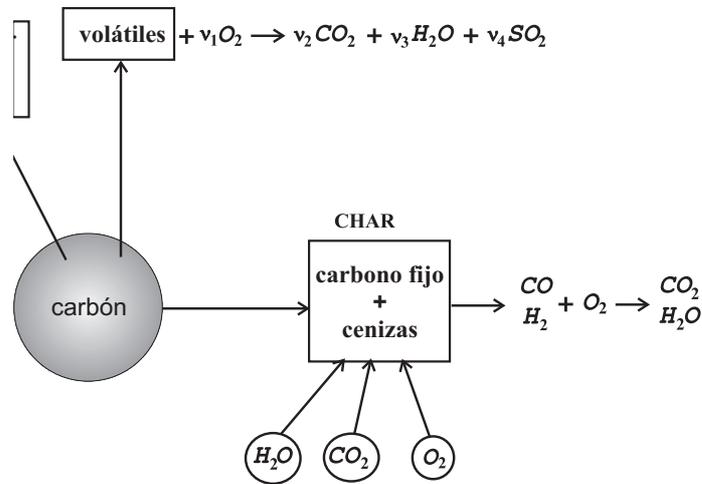


Figura 1: Esquema de la combustión de una partícula

Una partícula de carbón está formada por carbono fijo, agua, cenizas y volátiles. Los volátiles son moléculas compuestas de carbono, hidrógeno, azufre y oxígeno. Cuando la partícula de carbón comienza a calentarse libera vapor de agua y volátiles. Al alcanzar una determinada temperatura comienza la gasificación del carbono fijo que se produce al ser el carbono atacado por diferentes especies. En el modelo de combustión que consideramos estas especies pueden ser el oxígeno, el vapor de agua o el dióxido de carbono. Al producirse estas reacciones de gasificación se libera CO y H_2 . Los volátiles, el CO y el H_2 reaccionan con O_2 en la fase gaseosa. Un esquema de este proceso se puede ver en la Figura 1.

La hipótesis fundamental de este modelo es la Hipótesis de Burke-Schumann, que dice que las reacciones en fase gaseosa o no ocurren o lo hacen con velocidad infinita en una llama de difusión. Encontramos de esta forma dos regiones en la fase gaseosa, Ω_O , donde no hay oxígeno, y Ω_F , donde no hay reactantes. Las reacciones en fase gaseosa se supone que están controladas por la difusión y tienen lugar en una llama Γ_F que separa las dos regiones.

Se definen los números de Damköhler como $\text{Da}_i = (a^2/\mathcal{D}_e)B_i e^{-E_i/\mathcal{R}T_p}$, $i = 1, 2, 3$, donde a es el radio de la partícula, \mathcal{D}_e es el coeficiente de difusión a través de la partícula porosa, B_i y E_i son respectivamente el prefactor de Arrhenius y la energía de activación de la reacción i , T_p es la temperatura de la partícula y \mathcal{R} es la constante universal de los gases. Estos números determinan la etapa de gasificación en la que se encuentra la partícula:

- Primera etapa: Reacciones de gasificación del char congeladas ($\text{Da}_i \ll 1$).
- Segunda etapa: Reacciones de gasificación del char infinitamente rápidas ($\text{Da}_i \gg 1$).
- Tercera etapa: Partícula inerte (la gasificación del char o bien no se ha iniciado o ha finalizado).

Para estudiar la evolución de la liberación de humedad y volátiles y la gasificación en una partícula de carbón debemos estudiar como evoluciona la densidad de las especies que la forman. Esta densidad viene dada por las ecuaciones:

$$\rho_p = \rho_{H_2O} + \rho_V + \rho_C + \rho_{ash},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_V}{dt} &= -\frac{3\rho_g\mathcal{D}}{a^2}\lambda_4, & \lambda_4 &= \frac{a^2}{3\rho_g\mathcal{D}}B_4e^{-E_4/\mathcal{R}T_p}\rho_V, \\ \frac{d\rho_{H_2O}}{dt} &= -\frac{3\rho_g\mathcal{D}}{a^2}\lambda_5, & \lambda_5 &= \frac{a^2}{3\rho_g\mathcal{D}}B_5e^{-E_5/\mathcal{R}T_p}\rho_{H_2O}, \\ \frac{d\rho_c}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \end{aligned}$$

donde a es el radio de la partícula, B_4 y B_5 , los prefactores de Arrhenius, E_4 y E_5 las energías de activación de las reacciones de liberación de agua y volátiles, \mathcal{D} el coeficiente de difusión del gas y ρ_g la densidad del mismo.

Según la etapa de combustión y la zona en la que se encuentre la partícula debemos resolver distintas ecuaciones para λ_1 , λ_2 y λ_3 y para la temperatura de la partícula.

Además de estudiar la pérdida de masa que experimenta la partícula al quemarse el modelo se completa con ecuaciones que determinan la velocidad que tiene en cada instante, la posición que ocupa y las fuentes de masa y energía que libera a la fase gaseosa. Para ver la obtención de las distintas ecuaciones que forman el modelo de combustión presentado en este resumen y los detalles del mismo se puede consultar [2]. En [5] se pueden ver los resultados de la simulación de una caldera de carbón pulverizado utilizando este modelo de combustión.

Bibliografía

- [1] A. Bermúdez, *Continuum thermomechanics*, Birkhäuser, Verlag, Berlín, 2005.
- [2] A. Bermúdez, J. L. Ferrín y A. Liñán, *The modelling of the generation of volatiles, H₂ and CO, and their simultaneous diffusion controlled oxidation, in pulverised furnaces*
- [3] S.P. Burke and T.E.W. Schumann, *Diffusion flames*, Ind. and Eng. Chemistry, **20** (1928),998–1004.
- [4] J. L. Ferrín. *Algunas contribuciones a la modelización matemática de procesos de combustión de carbón*, Tesis, Universidade de Santiago de Compostela, 1999.
- [5] L. Saavedra. Simulación numérica de la combustión de carbón pulverizado. Trabajo de investigación tutelado. Universidad de Santiago de Compostela, 2006.

Métodos Geométricos de Teorías Clásicas de Campos

Silvia Vilariño Fernández

Departamento de Xeometría e Topoloxía

02 de Abril de 2008

Resumen

Existen varios modelos alternativos que nos permiten dar una descripción geométrica de las teorías clásicas de campos: polisimpléctico, k -simpléctico, k -cosimpléctico, multisimpléctico, ... En este resumen presentaremos el modelo conceptualmente más simple: *la formulación k -simpléctica de las teorías de campos*. Esta formulación, como veremos a continuación, nos permitirá describir cierto tipo de teorías, pero antes vamos a introducir qué entendemos por teoría clásica de campos.

Teoría Clásica de Campos

En física, un *campo* es cualquier magnitud física que presenta cierta variación sobre una región del espacio. En ocasiones campo se refiere a una abstracción matemática para estudiar la variación de una cierta magnitud física; en este sentido el campo puede ser un ente no visible pero sí medible.

Históricamente, el concepto de campo fue introducido para explicar la acción a distancia de las fuerzas de gravedad, eléctrica y magnética, aunque con el tiempo su significado se ha extendido, y hoy en día también se emplea para describir variaciones de temperatura, tensiones mecánicas en un cuerpo, propagación de ondas, etc.

La *teoría clásica de campos* describe la dinámica de los fenómenos físicos macroscópicos descriptibles mediante un campo físico.

Vamos a aclarar a continuación este concepto comparándolo con los sistemas dinámicos clásicos (mecánica clásica o de Newton).

Los sistemas dinámicos clásicos se caracterizan por los siguientes hechos:

- Involucran un número finito de grados de libertad (número mínimo de números reales que es necesario especificar para determinar completamente el estado físico. En mecánica, por cada partícula del sistema y por cada dirección en la que ésta es capaz de moverse existen dos grados de libertad, uno relacionado con la posición y el otro con la velocidad).
- La evolución del sistema está dada por funciones de una variable (el tiempo). Estas funciones son solución de ecuaciones diferenciales ordinarias: las ecuaciones dinámicas.

PALABRAS CLAVE: Teorías Clásicas de Campos, lagrangianos, ecuaciones de Euler-Lagrange

- Ejemplos típicos son sistemas mecánicos (clásicos o relativistas) con un número finito de partículas.

Las principales características de las teorías clásicas de campos son las siguientes:

- Involucran un número infinito de grados de libertad,
- Los diferentes estados de los sistemas están descritos por funciones de varias variables (coordenadas espacio-tiempo), y su comportamiento se describe mediante ecuaciones en derivadas parciales: las ecuaciones de campo.
- Ejemplos típicos son: electromagnetismo clásico, (descrito mediante las ecuaciones de Maxwell), gravitación (ecuaciones de Einstein), mecánica de fluidos (ecuaciones de Navier-Stokes), mecánica de ondas (ecuación de onda),...

Ejemplo 1. *La transmisión de ondas en un medio material, por ejemplo la vibración de una membrana de dimensión 2.*

El campo es una función

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto \phi(t, x, y) \end{aligned}$$

que mide el desplazamiento de cada punto (x, y) de la membrana en el instante de tiempo t .

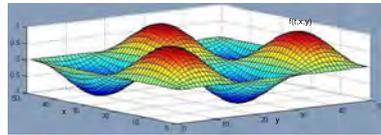


Figura 1: Membrana vibrante

La ecuación que describe este movimiento es una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

donde v denota la velocidad de propagación de la onda. (Cada uno de los infinitos grados de libertad se corresponde con los desplazamientos de cada punto.)

Formalismo lagrangiano k-simpléctico

Como se ha comentado al inicio del resumen existen varios modelos alternativos que permiten describir geoméricamente las teorías clásicas de campos. Desde el punto de vista conceptual, el más simple de ellos es el formalismo k -simpléctico. Este formalismo nos permite describir aquellos tipos de teorías cuyos campos son solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a lagrangianos que sólo dependen del campo y de las derivadas parciales del campo. A continuación vamos a dar una breve descripción de este formalismo.

El fibrado tangente de las k^1 -velocidades. Estructuras canónicas.

Sea Q una variedad diferenciable de dimensión n . Denotamos por $T_k^1 Q$ la suma de Whitney de k copias del fibrado tangente a Q , esto es,

$$T_k^1 Q := TQ \oplus \dots \oplus TQ.$$

Los elementos de este espacio son k -tuplas de vectores tangentes a la variedad Q en un mismo punto base $q \in Q$. Denotamos por $\tau_Q: T_k^1 Q \rightarrow Q$ la proyección canónica definida por

$$\tau_Q(v_{1q}, \dots, v_{kq}) = q.$$

Dado un sistema de coordenadas locales $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$ en $U \subset Q$, se define el sistema de coordenadas locales $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$ inducido en $T_k^1 U \equiv (\tau_Q)^{-1}(U) \subset T_k^1 Q$ por:

$$q^i(v_{1q}, \dots, v_{kq}) = q^i(\mathbf{q}), \quad v_A^i(v_{1q}, \dots, v_{kq}) = v_{Aq}(q^i) = (dq^i)_q(v_{Aq}) \quad (1)$$

donde $(v_{1q}, \dots, v_{kq}) \in T_k^1 Q$. Estas coordenadas dotan a $T_k^1 Q$ de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n(k+1)$ llamada *fibrado tangente de las k^1 -velocidades*.

Para cada $Z_q \in T_q Q$ se define su *levantamiento vertical A -ésimo* en el punto $(v_{1q}, \dots, v_{kq}) \in T_k^1 Q$ como el vector $(Z_q)^{VA}$ tangente a $\tau_Q^{-1}(q) \subset T_k^1 Q$ y definido por la siguiente expresión:

$$(Z_q)^{VA}(v_{1q}, \dots, v_{kq}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (v_{1q}, \dots, v_{A-1q}, v_{Aq} + sZ_q, v_{A+1q}, \dots, v_{kq}).$$

El levantamiento vertical de vectores tangentes permite definir dos familias de objetos canónicos sobre el fibrado tangente de las k^1 -velocidades:

1. *La estructura k -tangente canónica:* es el conjunto (S^1, \dots, S^k) de campos de tensores de tipo $(1, 1)$ definidos como sigue:

$$S^A(w_q)(Z_{w_q}) = ((\tau_Q)_*(w_q)(Z_{w_q}))^{VA}(w_q) \quad , \quad w_q \in T_k^1 Q, \quad Z_{w_q} \in T_{w_q}(T_k^1 Q).$$

2. *Los campos de vectores de Liouville:* Es una familia, $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$, de k campos de vectores en $T_k^1 Q$ definidos por la siguiente expresión

$$\Delta_A(v_{1q}, \dots, v_{kq}) = (v_{Aq})^{VA}(v_{1q}, \dots, v_{kq}).$$

Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE'S)

Definición 2. Una ecuación diferencial parcial de segundo orden (SOPDE) en $T_k^1 Q$ es un campo de k -vectores, esto es, una sección $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, de $\tau_{T_k^1 Q}: T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$ tal que $S^A(\Gamma_A) = \Delta_A$, $1 \leq A \leq k$.

Definición 3. Una sección integral de un SOPDE $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ es una aplicación $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$ tal que

$$\Gamma_A(\psi(t)) = \psi_*(t) \left(\left. \frac{\partial}{\partial t^A} \right|_t \right), \quad A = 1, \dots, k.$$

Formalismo lagrangiano

Consideramos un lagrangiano L , esto es, una función $L: T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para L son

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\psi(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\psi(t)} \quad , \quad v_A^i(\psi(t)) = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \quad (2)$$

cuyas soluciones son aplicaciones $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$.

La ecuación de onda en dimensión 2, véase el Ejemplo 1, es la ecuación de Euler-Lagrange para el lagrangiano $L(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_y) = \frac{1}{2} (\phi_t^2 - v^2(\phi_x^2 + \phi_y^2))$.

La formulación lagrangiana k -simpléctica nos permite dar una descripción geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2).

Introducimos las formas $\theta_L^A = dL \circ S^A \in \Lambda^1(T_k^1 Q)$, $\omega_L^A = -d\theta_L^A \in \Lambda^2(T_k^1 Q)$, y la función Energía lagrangiana $E_L = \sum_{A=1}^k \Delta_A(L) - L \in C^\infty(T_k^1 Q)$.

El lagrangiano $L: T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ se dice regular si la matriz $(\partial^2 L / \partial v_A^i \partial v_B^j)$ es no singular en cada punto de $T_k^1 Q$. Esto es equivalente a decir que $(\omega_L^1, \dots, \omega_L^k; V)$ es una estructura k -simpléctica, donde $V = \ker(\tau_Q)_*$.

Se denota por $\mathfrak{X}_L^k(T_k^1 Q)$ el conjunto de campos de k -vectores $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ en $T_k^1 Q$, esto es de secciones de $\tau_{T_k^1 Q}: T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$, que son solución de la ecuación

$$\sum_{A=1}^k i_{\Gamma_A} \omega_L^A = dE_L. \quad (3)$$

Se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 4. *Sea $L: T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular. Si $\Gamma \in \mathfrak{X}_L^k(T_k^1 Q)$ entonces:*

- Γ es un SOPDE.
- Si $\psi: \mathbb{R} \rightarrow T_k^1 Q$ es una sección integral de ξ entonces ψ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2).

Demostración:

Este teorema se demuestra mediante un cálculo en coordenadas locales que puede encontrarse en [1].

Bibliografía

- [1] N. Román-Roy, M. Salgado, S. Vilariño, *Symmetries and conservation laws in the Günther k -symplectic formalism of field theory*. Rev. Math. Phys. **19** (2007), no. 10, 1117–1147.
- [2] N. Román-Roy, *k -symplectic formulation for field theories an introduction to symmetries*, <http://www-ma4.upc.edu/dgdsa/seminaris/files/07NRoman.pdf>

Análisis de los Modelos de Tipo de Interés

Abelardo Monsalve

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

09 de Abril de 2008

Resumen

En los últimos años encontramos una gran cantidad de trabajos cuyo objetivo es analizar las propiedades estocásticas del tipo de interés a corto plazo, motivados por la importancia de esta variable en economía y finanzas. A partir de los diversos modelos planteados en la literatura, el interés se centra en determinar qué modelo es capaz de recoger las regularidades empíricas de los tipos de interés.

En este trabajo presentamos un Test de Bondad de Ajuste basado en procesos empíricos, el cual se caracteriza por su sencilla implementación si se lo compara con otros métodos existentes en la literatura, y cuya finalidad es determinar cuál modelo arroja mayor evidencia de ajustar mejor a los datos, en nuestro caso, las series de tipos de interés para el EURIBOR.

Sea (X, Y) una variable aleatoria con F la función de distribución de X y

$$m(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$$

la función de regresión asociada de Y en X .

El estimador de la función de regresión Integrada:

$$I(x) = \mathbb{E}(Y \mathbf{1}_{\{X \leq x\}}) = \int_{-\infty}^x m(y) dF(y), \quad x \in \mathbb{R},$$

cuyo estimador empírico viene dado por

$$I_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} Y_i,$$

donde (X_i, Y_i) , para $1 \leq i \leq n$, es una muestra aleatoria con la misma distribución que (X, Y) e I_n es insesgado para cada x y para cada $n \geq 1$.

Inspirado en los procesos empíricos y en los test de bondad de ajuste basados en dichos procesos (ver Stute 1997), se define:

$$R_n(x) = n^{1/2} \{I_n(x) - \mathbb{E}[I_n(x)|X_1, \dots, X_n]\} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} (Y_i - m(X_i)).$$

PALABRAS CLAVE: Test de Bondad de Ajuste, modelos de tipo de interés, bootstrap, drift

El Teorema 1.1 de Stute (1997) afirma que bajo la condición $\mathbb{E}Y^2 < \infty$,

$$R_n \xrightarrow{\mathcal{D}} R_\infty \quad \text{en distribución} \quad (1)$$

en el espacio de Skorokhod $D[-\infty, \infty]$, donde R_∞ es un movimiento Browniano con respecto al tiempo

$$T(x) = \int_{-\infty}^x \text{var}(Y|X = u)F(du) \equiv \int_{-\infty}^x \sigma^2(u)F(du).$$

Consideremos la hipótesis Nula

$$H_0 : m \in \{m_\theta | \theta \in \Theta\},$$

entonces, para $\hat{\theta}$ un estimador apropiado de θ , el Test de Bondad de ajuste se basa en el proceso

$$R_n^1(x) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} (Y_i - m_{\hat{\theta}}(X_i)).$$

El Teorema 1.2 de Stute (1997), afirma que bajo suposiciones generales, R_n^1 converge en distribución a un límite gaussiano centrado, R_∞^1 , con una complicada estructura de covarianzas. Para aproximar la distribución del proceso R_n^1 , Stute y otros (1998) proponen el uso de la metodología bootstrap.

Para su implementación se procede como sigue:

Sea $\{(X_i^*, Y_i^*)\}_{i=1}^n$ una remuestra bootstrap, que definiremos posteriormente, y sea $\hat{\theta}^*$ un estimador calculado con dicha remuestra. La versión bootstrap de R_n^1 es

$$R_n^{1*}(x) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i^* \leq x\}} (Y_i^* - m_{\hat{\theta}^*}(X_i^*)).$$

Considerando el funcional continuo $T_n = \Psi(R_n^1)$ se define el test estadístico, con región de rechazo de H_0 si $T_n > c_\alpha$ su valor crítico para un test de nivel α , es decir,

$$P(T_n > c_\alpha) = \alpha,$$

evidentemente c_α se aproxima por c_α^* satisfaciendo

$$P^*(\Psi(R_n^{1*}) > c_\alpha^*) = \alpha,$$

con P^* denotando la medida de probabilidad respecto de la muestra bootstrap. Mediante Monte Carlo

$$\hat{c}_\alpha^* = T_n^{*[B(1-\alpha)]}$$

el $[B(1-\alpha)]$ -simo estadístico de orden de las remuestras bootstrap calculado de las B remuestras bootstrap

$$T_n^{*j} = \Psi(R_n^{1*j}) \quad j = 1, \dots, B.$$

La remuestra bootstrap $\{(X_i^*, Y_i^*)\}_{i=1}^n$ puede ser construida siguiendo las ideas dadas en Härdle y Mammen (1993), Stute y otros (1998) para datos independientes, y Franke, Kreiss y Mammen (2002) para datos dependientes.

En este trabajo consideraremos, para el Test, los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov (KS) y Cramér-Von Mises (CvM) basados en el proceso R_n^1 , es decir,

$$T_n^{KS} = \sup_x |R_n^1(x)|, \quad y \quad T_n^{CvM} = \int_{\mathbb{R}} (R_n^1(x))^2 F_{1n}(dx)$$

donde F_{1n} es la distribución empírica de X_1, X_2, \dots, X_n .

Por otro lado, también podemos estimar el p -valor empírico mediante

$$\frac{\#\{T_n^{*j} > T_n\}}{B}.$$

En cuanto a la remuestra bootstrap se procede de la siguiente manera:

- Construimos la Remuestra Bootstrap $\{(r_{t_i}, Y_{t_i}^*)\}$. Aplicando la metodología sugerida por Franke, Kreiss y Mammen (2002) para construir la réplica,

$$Y_{t_i}^* = (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 r_{t_i}) \Delta_{t_i} + \hat{\sigma} r_{t_i}^{\hat{\gamma}} \sqrt{\Delta_{t_i}} \varepsilon_{t_i}^*$$

con $\{\varepsilon_{t_i}^*\}_{i=1}^{n+1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que, $\mathbb{E}(\varepsilon_{t_i}^*) = 0$ y $\mathbb{E}(\varepsilon_{t_i}^*)^2 = 1$, en este caso, $\varepsilon_{t_i}^* \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- Estimamos los parámetros, por máxima verosimilitud, para la remuestra Bootstrap $\{(r_{t_i}, Y_{t_i}^*)\}_{i=1}^n$, $\hat{\alpha}_0^*$, $\hat{\alpha}_1^*$, $\hat{\sigma}^*$ y $\hat{\gamma}^*$.
- Calculamos $m_{\hat{\theta}^*}(r_{t_i}) = (\hat{\alpha}_0^* + \hat{\alpha}_1^* r_{t_i})$ (drift de la remuestra).

A continuación presentamos una aplicación para ilustrar como funciona.

Dado el modelo de tipo de interés de Chan y otros (1992) (CKLS)

$$dr_t = (\alpha_0 + \alpha_1 r_t) dt + \sigma r_t^{\gamma} dW_t$$

con $\{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento browniano estándar. Su versión discretizada

$$Y_{t_i} \approx (\alpha_0 + \alpha_1 r_{t_i}) \Delta_{t_i} + \sigma r_{t_i}^{\gamma} \sqrt{\Delta_{t_i}} \varepsilon_{t_i} \quad (2)$$

con

$$\{r_{t_i}, i = 1, \dots, n+1\} \quad \text{en los instantes} \quad t_1 < \dots < t_{n+1},$$

igualmente espaciados, y

$$Y_{t_i} = r_{t_{i+1}} - r_{t_i}, \quad \Delta_{t_i} = t_{i+1} - t_i \quad y \quad \varepsilon_{t_i} \sim N(0, 1).$$

Ajustamos este modelo a la serie de tipos de interés para el EURIBOR a distintos plazos. El período temporal abarca desde el 15/10/2001 hasta el 30/03/2006 para una periodicidad diaria. Los plazos considerados son de 1,2 y 3 semanas y 1,2,...,12, meses. Los resultados obtenidos por el test se muestran a continuación:

Plazo	c_{α}^{*KS}	c_{α}^{*CvM}	T_n^{KS}	T_n^{Cvm}	p_{KS}	p_{CvM}
1 semana	0.034	3.29e-04	0.0339	2.15e-04	0.060	0.106
1 mes	0.015	4.23e-05	0.012	2.90e-05	0.178	0.144
3 meses	0.010	2.10e-05	0.007	1.01e-05	0.476	0.242
6 meses	0.015	4.29e-05	0.006	4.20e-06	0.982	0.992
9 meses	0.019	9.98e-05	0.008	1.85e-05	0.986	0.876
10 meses	0.021	1.30e-04	0.010	3.03e-05	0.948	0.736
11 meses	0.024	1.63e-04	0.011	3.72e-05	0.922	0.702
12 meses	0.024	1.93e-04	0.012	5.12e-05	0.894	0.740

Cadro 1: Aproximación Bootstrap de los valores críticos del test. El Estadístico definido por el funcional $T_n = \Psi(R_n(x))$ y el p -valor, para cada serie del EURIBOR aplicando un modelo (CKLS). Donde c_{α}^{*KS} , T_n^{KS} , p_{KS} (Kolmogorov-Smirnov), y c_{α}^{*CvM} , T_n^{Cvm} , p_{CvM} (Cramér-Von Mises).

Los resultados obtenidos al aplicar el test a las series de tipos de interés del EURIBOR muestran que el modelo de un factor CKLS arroja evidencias de que ajusta mejor a las series a medida que los plazos se van incrementando. Es de destacar el caso de las series de tipos con plazo a 1 semana, que para cada modelo muestra evidencia de que no es factible y en aquellos casos en que pudiera serlo, la evidencia es débil debido a que estas series son más sensibles a las decisiones adoptadas por los entes que supervisan los mercados financieros.

Bibliografía

- [1] Chan K.C. , Karolyi G.A. , Longstaff F.A. , and Sanders A.B. , *An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*, The Journal of Finance **47** (1992), no. 3, 1209–1227.
- [2] Franke J. , Kreiss J. P. , and Mammen E. , *Bootstrap of kernel smoothing in nonlinear time series.*, Bernoulli (2002), no. 85, 1–37.
- [3] Gonzalez-Manteiga W. , Febrero M. , Reboredo J.C. , and Pateiro B. , *Análisis y modelización de tipos de interés*, Reporte de investigación, Universidad de Santiago de Compostela, 2007.
- [4] Härdle W. and Mammen E. , *Comparing nonparametric versus parametric regression fits*, The Annals of Statistics **21** (1993), no. 4, 1996–1947.
- [5] Stute W. , *Nonparametric model checks for regression*, The Annals of Statistics (1997), no. 25, 613–641.
- [6] Stute W. , González-Manteiga W. , and Quindimil M. Presedo , *Bootstrap approximations in model checks for regression*, Journal of the American Statistical Association **93** (1998), no. 441, 141–149.

Un paseo por la dinámica de foliaciones

Álvaro Lozano Rojo

Universidad del País Vasco

14 de abril de 2008

Resumen

Una *foliación* es una descomposición de una variedad M^n en subvariedades de dimensión $p \leq n$, las *hojas*, que localmente se apilan como los conjuntos de segunda coordenada constante de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. A pesar de que localmente tengan esta trivialidad, globalmente la geometría de las hojas y el comportamiento de unas con respecto a otras pueden ser muy complicados.

Los conjuntos de segunda coordenada constante $\mathbb{R}^p \times \{*\}$ se denominan *placas* y definen la descomposición en hojas. Por otro lado, los conjuntos de primera coordenada constante $\{*\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ se denominan *transversales locales* a la foliación y contienen información sobre la forma en que se acumulan unas hojas sobre otras, es decir, sobre la *dinámica transversa*.

Vamos a introducir aquí algunas nociones de dinámica transversa para foliaciones y veremos cómo se comporta esta para un ejemplo concreto. Consideremos un toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. En dicha variedad tomamos una foliación con una hoja compacta \mathbb{S}^1 y el resto se acumulan a ambos lados de este círculo, como se muestra en la Figura 1.

Pseudogrupos de transformaciones.

Dada una foliación \mathcal{F} , siempre existe un *buen atlas foliado* compatible, es decir, un atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_U : U \rightarrow P_U \times T_U\}$ de M tal que $P_U \times T_U$ es abierto de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$

1. las *placas* $\varphi_U^{-1}(P_U \times \{x\})$ son abiertos de alguna hoja de \mathcal{F} (φ_U es una *carta foliada*);
2. el cambio de coordenadas se escribe como $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}(x, y) = (f(x, y), \gamma(y))$ (las cartas son *compatibles*) y;
3. si U y $V \in \mathcal{A}$ se intersecan, existe otra carta foliada $W \supset \overline{U \cup V}$.

Dados dos abiertos foliados U y V que se intersecan, tenemos la *transformación de holonomía* asociada

$$h_{U,V} : D_{U,V} \subset T_U \longrightarrow D_{V,U} \subset T_V,$$

PALABRAS CLAVE: foliación, dinámica transversa, pseudogrupo, relación de equivalencia

siendo $D_{U,V}$ el abierto formado por los $x \in T_U$ tales que la placa de W por x corta a V . La aplicación $h_{U,V}$ asocia a x el único punto de la intersección de la placa de W por x con T_V . Intuitivamente la aplicación $h_{U,V}$ desliza la transversal a lo largo de las hojas (Figura 2). Las aplicaciones $h_{U,V}$ generan el *pseudogrupo de holonomía* Γ sobre la transversal completa $T = \bigsqcup_{U \in \mathcal{A}} T_U$, es decir, una familia de homeomorfismos γ entre abiertos de T cerrada para composición, restricción e inversión, que contiene la identidad y que si γ pertenece localmente a Γ , entonces $\gamma \in \Gamma$. Este objeto, que generaliza los grupos de transformaciones, contiene toda la información sobre la dinámica topológica transversa. Las Γ -órbitas no son otra cosa que los conjuntos cerrados para la acción de las transformaciones parciales de Γ , es decir:

$$\Gamma[x] = \text{“la } \Gamma\text{-órbita de } x\text{”} = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

De hecho, $\Gamma[x]$ es la intersección de la hoja por x con la transversal completa.

Si construimos el pseudogrupo de holonomía restringido a otra transversal completa T' asociada a otro atlas, el nuevo pseudogrupo Γ' debe contener la misma información dinámica que el pseudogrupo original. Esta situación modela la equivalencia de Haefliger:

Definición 1. *Dos pseudogrupos Γ_1 y Γ_2 sobre T_1 y T_2 son equivalentes si existe otro pseudogrupo $\hat{\Gamma}$ sobre $\hat{T} = T_1 \sqcup T_2$, de forma que T_i corta a todas $\hat{\Gamma}$ -órbitas y $\hat{\Gamma}|_{T_i} = \Gamma_i$, para cada $i = 1, 2$. La dinámica transversa de \mathcal{F} es la clase de equivalencia del pseudogrupo de holonomía.*

Veamos que ocurre con el ejemplo. Si observamos la transversal completa, vemos que al deslizar la transversal a lo largo de las hojas obtenemos una transformación contractante. Si nos fijamos en el dominio fundamental, un elemento de la transversal completa y su simétrico con respecto a la línea roja (la hoja compacta) pertenecen a la misma hoja. Así, el pseudogrupo de holonomía está generado por estas dos transformaciones. De hecho, se puede comprobar que la dinámica transversa de la foliación es la del pseudogrupo generado por las transformaciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = -x$ de \mathbb{R} .

Relaciones de equivalencia topológicas.

La foliación \mathcal{F} induce una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre cualquier transversal completa T fijada. Esta relación, como cualquier otra, está dotada de una estructura de grupoide:

1. la inclusión $\varepsilon : x \in T \mapsto (x, x) \in \mathcal{R}$ del conjunto T de las unidades en \mathcal{R} ;
2. las proyecciones $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x$ y $\alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y$;
3. el conjunto de los pares componibles

$$\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{(x, y), (y, z) \mid x, y, z \in T\}$$

con la multiplicación parcial $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$ y

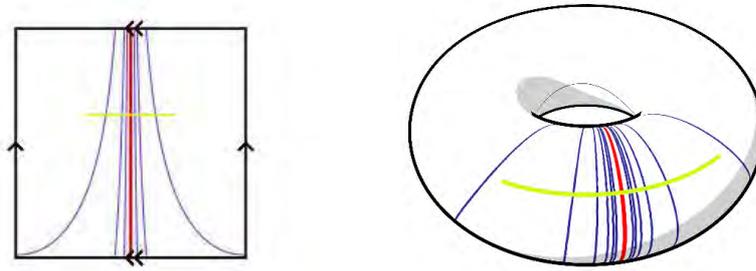


Figura 1: Nuestro ejemplo de foliación sobre el toro y el dominio fundamental del mismo. Se muestran: la única hoja compacta (roja), una hoja que se acumula sobre la hoja compacta (azul) y una transversal completa (amarilla).

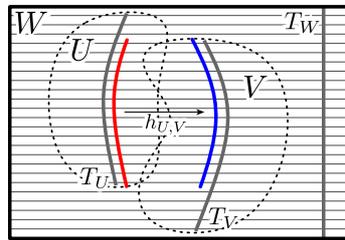


Figura 2: La aplicación de holonomía $h_{U,V}$.

4. la inversión $\iota : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto (y, x) \in \mathcal{R}$,

verificándose propiedades similares a las de los grupos.

En el caso de la relación \mathcal{R} inducida por una foliación \mathcal{F} sobre una transversal, esta está dotada de una topología localmente compacta y Hausdorff que la convierte en una *relación topológica*. En otras palabras, las aplicaciones α , β y la multiplicación parcial son continuas, e ι es un homeomorfismo. Más aún, la relación \mathcal{R} es β -discreta, es decir, la aplicación β es de fibras discretas (o es un homeomorfismo local [2]).

Definición 2 ([1]). *Dos relaciones de equivalencia β -discretas \mathcal{R} y \mathcal{R}' (sobre T y T' resp.) se dicen orbitalmente establemente equivalentes si: 1) existen abiertos $Y \subset T$ e $Y' \subset T'$ que cortan a todas las clases de equivalencia, 2) existe un homeomorfismo $\Phi : Y \rightarrow Y'$ de forma que $\Phi_*\mathcal{R} = \mathcal{R}'$. En este caso diremos que \mathcal{R} y \mathcal{R}' representan la misma dinámica topológica.*

Si volvemos a nuestro ejemplo, es obvio que la dinámica transversa debe describirse de forma similar al caso del pseudogrupo. Obsérvese que $\Gamma[x] = \mathcal{R}[x]$ ya que ambos conjuntos son la intersección de la hoja por x con la transversal. Si damos por supuesta la equivalencia entre el pseudogrupo de holonomía y el pseudogrupo generado por $f(x) = x/2$ y $g(x) = -x$, la relación inducida por la foliación en la transversal estará representada por la relación sobre \mathbb{R}

$$\mathcal{R}[x] = \left\{ \pm \left(x - \frac{x}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Pero en este caso perdemos cierta información referente a la hoja compacta, ya que esta descripción no nos dice cómo se enrollan las hojas, si no sólo que dicha hoja es compacta (su clase es finita).

Relaciones de equivalencia medibles discretas.

Según el teorema de Kuratowski, si dotamos a cualquier transversal completa de una foliación de la σ -álgebra de los borelianos, esta se convierte en un *espacio boreliano estándar* isomorfo al intervalo unidad $[0, 1]$.

Una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un espacio boreliano estándar T es *medible* si es un subconjunto boreliano de $T \times T$. Además, decimos que es *discreta* si sus clases son contables. Es muy fácil comprobar que en efecto este es el caso de la relación de equivalencia inducida \mathcal{R} por una foliación sobre una transversal T cualquiera. Además, cada una de las transformaciones de holonomía es una *transformación parcial*, es decir, son isomorfismos $\varphi : A \rightarrow B$ entre borelianos de T de forma que $\text{grafo}(\varphi) \subset \mathcal{R}$. Las medidas de probabilidad sobre T invariantes por todas las transformaciones parciales son las *medidas invariantes de \mathcal{R}* .

En este contexto, como en el caso anterior, la dinámica transversa viene dada por la clase de equivalencia orbital estable:

Definición 3. Sean \mathcal{R} y \mathcal{R}' relaciones medibles discretas sobre T y T' . Denotemos por μ y μ' dos medidas invariantes para \mathcal{R} y \mathcal{R}' respectivamente. Estas dos relaciones son establemente orbitalmente equivalentes si: 1) existen dos borelianos $Y \subset T$ e $Y' \subset T'$ cuyas saturaciones sean de medida total y 2) un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ de forma que $\varphi(\mathcal{R}[y]) = \mathcal{R}'[\varphi(y)]$ para casi todo $y \in Y$ y $\varphi_*\mu_Y = \mu'_{Y'}$. Si este es el caso, (\mathcal{R}, μ) y (\mathcal{R}', μ') representan la misma dinámica medible.

Por último, veamos cómo se comporta el ejemplo en este caso. Dado que toda la información dinámica se “lee” en \mathbb{R} con las transformaciones $f(x) = x/2$ y $g = -x$, para encontrar las medidas transversas invariantes para la foliación basta con buscar medidas de probabilidad invariantes para f y g . Para g existen infinidad de estas medidas, pero para f no. Si μ fuese una medida invariante para f , tendríamos que $\mu((-\varepsilon, \varepsilon)) = \mu((-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}))$. Esto sólo es posible si $\mu = \delta_0$, la medida de probabilidad concentrada en 0. Como dicha medida es invariante también para g , sólo existe una medida transversa invariante para \mathcal{F} . Dicha medida está concentrada sobre la hoja compacta. Luego la dinámica medible “no distingue” entre toda la foliación, la única hoja compacta o un punto.

Bibliografía

- [1] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, **139** (2000), 41-89.
- [2] J. RENAULT, *A groupoid approach to C^* -algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1980.

Sistemas de numeración

Pablo González Sequeiros

Departamento de Xeometría e Topoloxía

22 de abril de 2008

Resumo

“A finalidade inicial dun *sistema de numeración* é asignar a cada número natural individual (cun límite que depende das necesidades prácticas) un nome e unha representación escrita, formada por combinacións dun reducido número de signos, efectuadas seguindo leis máis ou menos regulares” (Bourbaki). Un sistema será mellor en tanto sexa máis breve, máis doado de manexar, ou en tanto máis lonxe permita desenvolver o cálculo. A evolución dos sistemas de numeración nas diferentes culturas ata a consolidación do *sistema decimal posicional cifrado* que hoxe empregamos foi paseniña. Algúns autores apuntan unha secuencia histórica similar á seguinte [1, 2, 3]:

Representación simple

Repetición uniforme dun só símbolo a modo de rexistro do aspecto cardinal do número (por exemplo: *IIIIIIIIIIIIIIIIII*). É clara a limitación desta representación para grandes números, ou incluso para distinguir a simple vista números consecutivos non tan grandes (por exemplo, no caso anterior, *IIIIIIII* de *IIIIIIIIII*).

Sistemas aditivos de agrupamento simple e agrupamento múltiple

Para reducir esta dificultade pódese recurrir ao agrupamento:

$$IIIIIIIIIIIIIIIIII \Rightarrow IIII IIII IIII II \Rightarrow VVVII$$

Xurde aquí a noción de *base* do agrupamento (no exemplo 5), pasando a empregarse dous símbolos: un para as unidades e outro para os agrupamentos. Non obstante, é claro que este sistema segue presentando os problemas da representación simple. Unha solución natural é repetir o procedemento:

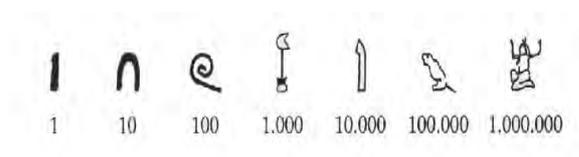
$$VVVVV \Rightarrow X$$

E así sucesivamente, de maneira que cada novo símbolo represente á seguinte potencia da base:

$$XXXXX \Rightarrow L$$

PALABRAS CLAVE: Sistema de numeración, base, multiplicador, sistema posicional.

Atopamos un exemplo de sistema de agrupamento múltiple no vello sistema xeroglífico exipcio (3000 a. C.):



Os exipcios representaban calquera número a partir destes sete símbolos básicos

Sistemas multiplicativos

O problema dun sistema de agrupamento múltiple está na reducida capacidade de repetición dos seus símbolos. Deuse un gran paso cara o noso sistema cando se decidiu empregar dúas clases de símbolos: uns para as potencias da base do agrupamento e outros que indican a multiplicidade destas, denominados *multiplicadores*. Exemplos salientables son o sistema de numeración ático grego (600 a. C.), o chinés-xaponés antigo (1500 a. C.) ou o noso sistema de numeración oral.

1	一	5	五	8	八	100	百
2	二	6	六	9	九	1000	千
3	三	7	七	10	十	10000	萬
4	四						

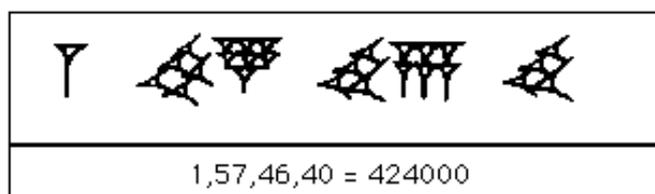
Símbolos do chinés-xaponés para os multiplicadores e as potencias da base

五千七百八十九

Representación do 5789 (tradicionalmente escribiuse de arriba cara abaixo)

Sistemas posicionais

O seguinte paso consiste en considerar un sistema multiplicativo ordenando e suprimir os símbolos das potencias da base (sobreentendédoas). Os babilonios déranse conta fai máis de catro mil anos de que chegaban dous símbolos (unha cuña vertical para o 1 e unha cuña horizontal para o 10) para representar calquera número natural por grande que fora. Empregaban un sistema que era de agrupamento simple para os números menores que 59, e a partir deste número un criterio posicional en base 60. Por exemplo, o $424000 = 60^3 + 57 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0$ representaríase do seguinte xeito:



Os maias, dende fai máis de mil anos, empregaron un sistema posicional en base 20. Escribían os seus símbolos en vertical, de acordo cun criterio de agrupamento simple para os números menores que 20 e un criterio posicional para os restantes:

0		11	
1		12	
2		13	
3		14	
4		15	
5		20	
6			
7			
8			
9			
10			
	26	400	8 000
		8 126	

Sistema decimal posicional cifrado

O noso sistema de numeración, denominado indoarábigo, xurdiu como a síntese de tres ingredientes:

- un sistema non posicional e similar ao xónico grego, denominado Brahmi, que empregaba cifras (300 a. C.);
- un sistema verbal en lingua sánscrita, decimal multiplicativo, que empregaban os eruditos hindúes e que evolucionou a posicional;
- a idea de cero.

Bibliografía

- [1] B. Gómez Alfonso; *Numeración y cálculo*, Editorial Síntesis, 1988.
- [2] G. Ifrah; *Las cifras. Historia de una gran invención*, Alianza Editorial, 1985.
- [3] G. Ifrah; *Historia Universal de las cifras*, Espasa Calpe, 1998.

Percolación de grafos

María Pérez Fernández de Córdoba

Departamento de Xeometría e Topoloxía

30 de Abril de 2008

Resumen

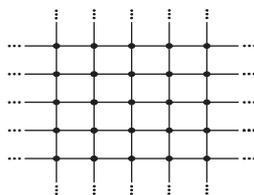
La teoría de la percolación surge en los años 50 con objeto de modelar procesos físicos aleatorios como el contagio de una enfermedad en una población, la propagación de un incendio en un bosque o la filtración de un fluido en un medio poroso. Para introducir de modo intuitivo dicha teoría, nos situamos en este último contexto, es decir, suponemos que vertemos agua sobre una gran roca porosa. La pregunta que surge de manera natural, y a la cual se pretende dar respuesta, es la siguiente:

¿Permitirán los poros que fluya el agua por su interior hasta alcanzar el centro de la roca o, por el contrario, la roca resultará humedecida sólo de manera superficial?

A priori, la respuesta a esta cuestión parece depender del grado de porosidad del material que constituye la roca. Pero... ¿en qué medida se da dicha dependencia? Sorprendentemente, la teoría de la percolación prueba que la probabilidad de que el agua llegue hasta el centro no aumenta gradualmente a medida que variamos la porosidad, si no que pasa de ser nula a ser total en un nivel crítico de porosidad.

1. Percolación de Bernoulli en grafos

Recordemos que un *grafo* G es un conjunto de puntos (vértices) y un conjunto de aristas conectando algunos de estos vértices. El grafo es *conexo* si para dos vértices cualesquiera existe un camino de aristas que los une. Si existe al menos un camino de aristas infinito decimos que es un *grafo infinito*.



Traduciremos a lenguaje matemático el proceso físico descrito en el apartado anterior. Para ello, identificamos nuestra roca con un grafo conexo infinito G cuyas aristas representan a los poros. Nótese que el tamaño de tales poros es insignificante con respecto al volumen total de la roca.

PALABRAS CLAVE: Grafos, foliaciones, percolación.

Por ello, la existencia de tubos porosos conectando la superficie con el centro de la roca es interpretada como la existencia de caminos de aristas infinitos en el grafo. La pregunta que nos interesa ahora es: ¿qué probabilidad hay de que podamos encontrar al menos un camino infinito de aristas que permitan pasar el agua?

Nos falta expresar en términos matemáticos la noción de porosidad. Para ello, introducimos la *percolación de Bernoulli* de parámetro $p \in [0, 1]$: cada arista del grafo G permanecerá abierta (permitiendo fluir el agua) con probabilidad p o cerrada con probabilidad $1 - p$, independientemente unas de otras. La probabilidad p representa el grado de porosidad de la roca ya que, a mayor p , mayor número de aristas abiertas y, por tanto, mayor probabilidad de que el agua fluya hasta el centro de la roca.

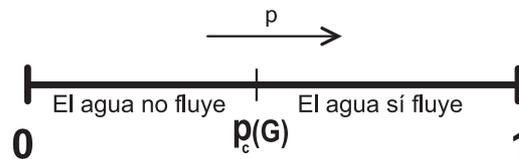
Si borramos de G las aristas cerradas, el grafo aleatorio que resulta es aquel formado por las aristas que permanecen abiertas. Dicho grafo no es conexo y llamaremos *clusters* a sus componentes conexas. Reformulamos de nuevo la cuestión planteada anteriormente: sea G un grafo y $p \in [0, 1]$ fijado, ¿qué probabilidad hay de que exista un cluster infinito tras la percolación? Por la ley 0-1 de Komogorov, se deduce que dicha probabilidad sólo puede ser nula o total:

$$\bullet P_p(\{\exists \text{ un cluster infinito}\}) = 0 \text{ o } 1$$

Por otra parte, tenemos monotonía en función del parámetro p . En efecto,

$$\bullet P_p(\{\exists \text{ un cluster infinito}\}) \leq P_{p'}(\{\exists \text{ un cluster infinito}\}), \text{ para } p < p'.$$

Puesto que dicha probabilidad toma los valores 0 y 1 en los extremos $p = 0$ y $p = 1$ del intervalo $[0, 1]$, deducimos de los puntos anteriores que existe un valor crítico $p_c(G)$ tal que para $p < p_c(G)$ la probabilidad es nula (todos los clusters son finitos) y para $p > p_c(G)$ la probabilidad es total (existe al menos un cluster infinito).



La probabilidad de que el agua fluya no depende gradualmente de la porosidad, como cabría esperar, si no que hay dos fases diferenciadas. Definimos la *percolación crítica* $p_c(G)$ como:

$$p_c(G) = \sup\{p \in [0, 1] \mid P_p(\exists \text{ un cluster infinito}) = 0\}$$

2. Percolación de Bernoulli en foliaciones

Supongamos ahora que tenemos una roca porosa estratificada, es decir, formada por capas, cada una de ellas constituida por un material con grado de porosidad diferente. Si vertemos agua sobre la roca de manera transversal, en algunos estratos fluirá y en otros no. El objetivo de nuestro trabajo es modelar este proceso y estudiar la existencia de niveles críticos globales de porosidad. Ahora, nuestra roca será representada por una foliación.

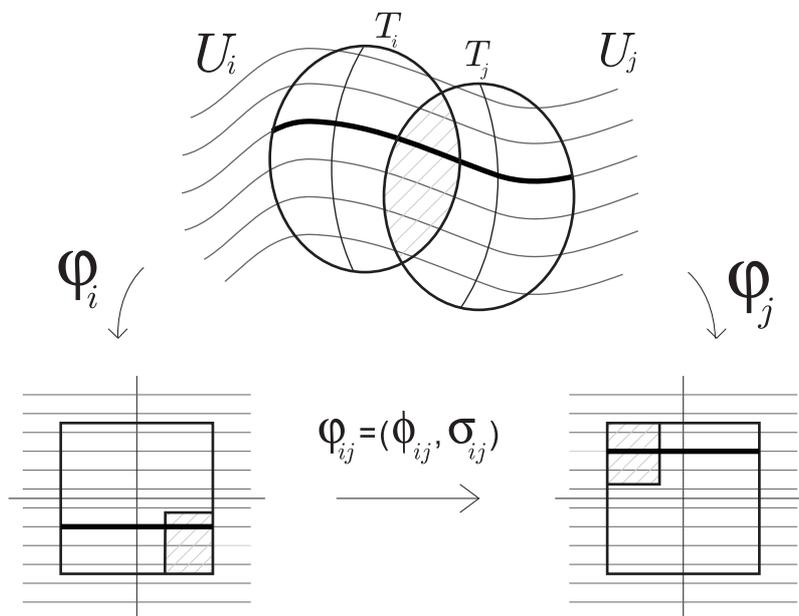
Intuitivamente, una *foliación* es una descomposición de una variedad en subvariedades de la misma dimensión que localmente se apilan como las hojas de un libro.

Definición 1. Una foliación es una m -variedad topológica M dotada de un atlas foliado $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ con cartas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, con cambio de coordenadas:

$$\varphi_{ij}(x, y) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = (\phi_{ij}(x, y), \sigma_{ij}(y))$$

Cada conjunto $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{*\})$ se denomina placa y al conjunto $T_i = \varphi_i^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})$ transversal local. La unión de placas que se intersecan dos a dos es una n -subvariedad de M que se denomina hoja. Llamamos transversal completa a la unión $T = \bigsqcup T_i$.

Ya que σ_{ij} depende sólo de la segunda coordenada, los cambios de coordenadas φ_{ij} llevan líneas horizontales $\mathbb{R}^n \times \{y\}$ en líneas horizontales $\mathbb{R}^n \times \{\sigma_{ij}(y)\}$.



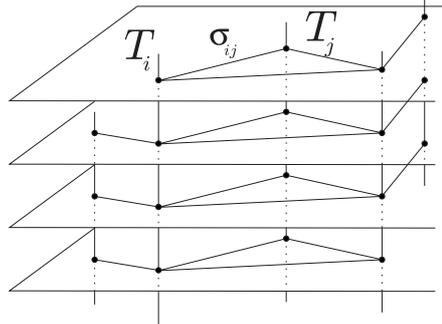
Definición 2. Sea T un espacio topológico, un pseudogrupo $\Gamma = \{\gamma_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de homeomorfismos entre subconjuntos abiertos de T , cerrada respecto a la composición, inversión, combinación y restricción.

La familia de homeomorfismos $\Sigma = \{\sigma_{ij} : T_i \rightarrow T_j\}_{ij}$ genera un pseudogrupo en el espacio topológico $T = \bigsqcup T_i$, llamado *pseudogrupo de holonomía*. Si la variedad M es compacta, podemos suponer que el atlas foliado es finito y, en ese caso, Σ es un sistema finito de generadores del pseudogrupo de holonomía.

Definición 3. Sea T un espacio medible. Una medida μ sobre T es casi-invariante respecto a un pseudogrupo Γ si, para $\gamma \in \Gamma$, $A \subset T$ subconjunto medible, se verifica:

$$\mu(\gamma^{-1}(A)) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Sea \mathcal{F} una foliación cuya transversal completa T está dotada de una medida de probabilidad μ casi-invariante respecto del pseudogrupo de holonomía. Obsérvese que T corta a cada hoja L en una cantidad numerable de puntos. Sobre L definimos un grafo G_L cuyos vértices son los elementos de $L \cap T$ y dos vértices (y, y') se conectan con una arista si y sólo si $\exists \sigma_{ij} \in \Sigma$ tal que $\sigma_{ij}(y) = y'$. Tenemos, pues, una pila de grafos conexos e infinitos $\{G_L\}_{L \in \mathcal{F}}$ disjuntos y, en general, distintos entre sí.

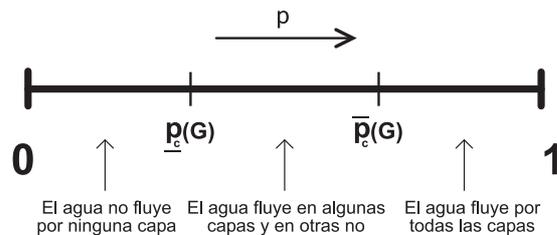


Dado $p \in [0, 1]$, hacemos percolación de Bernoulli en cada uno de los grafos G_L de manera independiente, obteniendo así en cada hoja clusters que pueden ser o no infinitos. Para cada $y \in T$ denotamos por $p_c(G_{L_y})$ a la percolación crítica del grafo correspondiente a la única hoja L_y que pasa por y .

Definición 4. Se define la percolación crítica inferior (y superior resp.) como:

$$\underline{p}_c(\mathcal{F}) = \sup \{p \in [0, 1] \mid \mu\{y \in T : p_c(G_{L_y}) < p\} = 0\}$$

$$\overline{p}_c(\mathcal{F}) = \inf \{p \in [0, 1] \mid \mu\{y \in T : p_c(G_{L_y}) > p\} = 0\}$$



Ahora nos aparecen tres fases distintas ya que hay dos puntos críticos. En efecto, para $p < \underline{p}_c$ tenemos que, en μ -casi toda hoja, no existen clusters infinitos. Por otro lado, para $p > \overline{p}_c$ tenemos que, en μ -casi toda hoja, existe al menos un cluster infinito. (μ -casi toda hoja significa en todas las hojas excepto en un conjunto de medida μ nula). Y para los parámetros $\underline{p}_c < p < \overline{p}_c$ existen hojas de medida positiva cuyos clusters son finitos y hojas de medida positiva con al menos un cluster infinito.

Bibliografía

- [1] G. Grimmet. *Percolation*. Springer, Heidelberg, (1999).

Estimación no modelo lineal funcional

Adela Martínez Calvo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

7 de Maio de 2008

Resumo

O gran desenvolvemento computacional dos últimos anos permítenos almacenar e traballar con grandes cantidades de datos. Isto resulta de grande utilidade en diversos eidos onde os avances técnicos darnos acceso a medidas en continuo de certas variables de interese como niveis de contaminantes atmosféricos, valores de activos financeiros, datos biométricos... É nestes casos onde parece razoable tratar estes conxuntos de observacións como realizacións discretizadas dunha variable funcional continua subxacente, o que nos obriga a revisar e adaptar as metodoloxías multidimensionais a este novo contexto (véxase [4] para unha visión xeral das técnicas para datos funcionais existentes).

En particular, interésanos saber que acontece co modelo de regresión lineal clásico cando a covariable é funcional e a resposta real. Dende un punto de vista máis formal, consideraremos $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espazo de Hilbert separable (o cal inclúe tanto ao caso multivariante \mathbb{R}^p , como a espazos máis complexos de dimensión infinita), e o *modelo funcional lineal con resposta escalar* dado por

$$Y = \langle X, \theta \rangle + \epsilon,$$

onde Y é unha variable real, X é unha variable funcional centrada con valores en E , θ é un elemento de E descoñecido, e ϵ é unha variable real tal que $\mathbb{E}(\epsilon) = 0$, $\mathbb{E}(\epsilon^2) = \sigma^2$ e $\mathbb{E}(\epsilon X) = 0$. Nesta situación o noso obxectivo é estimar o parámetro θ a partir dunha mostra dada $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$.

Estimador baseado na ACPF

Un dos enfoques empregados na estimación do parámetro do modelo lineal funcional baséase na *análise de compoñentes principais funcionais (ACPF)*. As compoñentes principais xurden como unha ferramenta de grande utilidade para a redución da dimensión dos datos e o estudo da súa estrutura de covarianzas. No caso

PALABRAS CLAVE: Datos funcionais, modelo lineal, análise de compoñentes principais, pre-suavización.

funcional, a información relativa as covarianzas atópase recollida no *operador momento de segunda orde* de X dado por

$$\begin{aligned} \Gamma = \mathbb{E}(X \otimes_E X) : E &\rightarrow E \\ x &\rightarrow \Gamma x = \mathbb{E}(\langle X, x \rangle X), \end{aligned}$$

onde denotamos por \otimes_E ao produto tensorial entre elementos de E . As compoñentes principais obtéñense buscando en primeiro lugar a función $v_1 \in E$ solución de $\max_{\|v_1\|_E=1} \langle v_1, \Gamma v_1 \rangle$ e posteriormente, para $j = 2, \dots, +\infty$, as funcións v_j que resolven

$$\max_{\substack{\|v_j\|_E=1 \\ \langle v_k, v_j \rangle = 0, 1 \leq k < j}} \langle v_j, \Gamma v_j \rangle.$$

Pódese ver que as solucións deste problema son precisamente as autofuncións do operador Γ , que forman unha base ortonormal no espazo E .

A utilidade das compoñentes principais na estimación de θ provén do feito de que, baixo o modelo lineal, verifícase que $\Delta x = \langle \theta, \Gamma x \rangle$, sendo Δ o *operador momento de segunda orde cruzado* entre X e Y dado por

$$\begin{aligned} \Delta = \mathbb{E}(X \otimes_{E'} Y) : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \Delta x = \mathbb{E}(\langle X, x \rangle Y), \end{aligned}$$

onde $\otimes_{E'}$ denota o produto tensorial entre un elemento de E e un elemento de \mathbb{R} . Tomando como x as autofuncións de Γ , tense que $\Delta v_j = \lambda_j \langle \theta, v_j \rangle$. Polo tanto, se impoñemos a condición de que $\text{Ker}(\Gamma) = \{0\}$, o parámetro θ pode ser expresado como $\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \theta, v_j \rangle v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Delta v_j}{\lambda_j} v_j$. De aquí xurde a idea de buscar θ_n que verifique

$$\Delta_n x = \langle \theta_n, \Gamma_n x \rangle, \quad (1)$$

onde $\Gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \otimes_E X_i$ e $\Delta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \otimes_{E'} Y_i$ son as versións empíricas dos operadores Γ e Δ respectivamente, o que nos leva a estimar θ mediante

$$\hat{\theta}_{K_n} = \sum_{j=1}^{K_n} \frac{\Delta_n \hat{v}_j}{\hat{\lambda}_j} \hat{v}_j,$$

onde $\{(\hat{\lambda}_j, \hat{v}_j)\}$ son os autovalores e as autofuncións de Γ_n . Este estimador resulta ser consistente e as súas propiedades foron estudadas en numerosos artigos (por exemplo, en [1]).

Estimadores “presuavizados” baseados na ACPF

O emprego de *técnicas de presuavizado* está a dar moi bos resultados en numerosas áreas da estatística nos últimos tempos. Isto lévanos a analizar que acontece cando se introduce este tipo de métodos na estimación baseada na ACPF do

apartado anterior. A idea de base consiste en substituír os valores Y_i observados por unha estimación nonparamétrica dos mesmos como a estudada en [3]

$$\hat{m}_h(Y_i) = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k K(h^{-1}d(Y_i, X_k))}{\sum_{k=1}^n K(h^{-1}d(Y_i, X_k))},$$

e considerar certo tipo de problemas de minimización como os expostos en [2]. Facendo isto chegamos a dous novos estimadores do parámetro.

Presuavizado de Y Neste caso pátrese de $\Delta_n^h x = \langle \theta_n, \Gamma_n x \rangle$, ecuación que resulta de cambiar en (1) o estimador empírico de Δ pola súa versión presuavizada $\Delta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \otimes_{E'} \hat{m}_h(Y_i)$. Así estimamos θ por

$$\hat{\theta}_{K_n}^{h,Y} = \sum_{j=1}^{K_n} \frac{\Delta_n \hat{v}_j}{\hat{\lambda}_j} \hat{v}_j.$$

Aínda que $\hat{\theta}_{K_n}^{h,Y}$ é un estimador consistente de θ , resulta non ser eficiente con respecto ao estimador $\hat{\theta}_{K_n}$.

Presuavizado de X Perturbando (1) cun proceso centrado Z con operador momento de segunda orde Γ_Z , de xeito que $\Delta_n x = \langle \theta_n, (\Gamma_n + \Gamma_Z)x \rangle$, e denotando por $\{(\hat{\lambda}_j^Z, \hat{v}_j^Z)\}$ aos autovalores e ás autofuncións de $\Gamma_n + \Gamma_Z$, pódese construír $\hat{\theta}_{K_n}^Z = \sum_{j=1}^{K_n} \frac{\Delta_n \hat{v}_j^Z}{\hat{\lambda}_j^Z} \hat{v}_j^Z$. Se por simplicidade se supón que $\Gamma_Z = \alpha I$ sendo I o operador identidade, entón $\{(\hat{\lambda}_j^Z, \hat{v}_j^Z)\} \equiv \{(\hat{\lambda}_j + \alpha, \hat{v}_j)\}$ e o estimador transfórmase en

$$\hat{\theta}_{K_n}^{\alpha,X} = \sum_{j=1}^{K_n} \frac{\Delta_n \hat{v}_j}{\hat{\lambda}_j + \alpha} \hat{v}_j,$$

que resulta ser consistente e eficiente respecto a $\hat{\theta}_{K_n}$.

Estudo de simulación

Mediante un estudo de simulación podemos comparar os estimadores $\hat{\theta}_{K_n}^{h,Y}$ e $\hat{\theta}_{K_n}^{\alpha,X}$ con $\hat{\theta}_{K_n}$. Para isto simúlanse $ns = 200$ mostras, cada unha formada por $n = 200$ observacións de $Y = \langle \theta, X \rangle + \epsilon$ onde

- X é un movemento Browniano (Figura 1),
- $\theta(t) = 2 \text{sen}(0,5\pi t) + 4 \text{sen}(1,5\pi t) + 5 \text{sen}(2,5\pi t) \quad \forall t \in [0, 1]$, e
- ϵ é $N(0, \sigma^2)$ sendo $\sigma = 0,18 \sqrt{\mathbb{E}(\langle X, \theta \rangle^2)}$.

Ademais calcúlanse os valores das funcións de risco $R(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\langle X_i, \theta \rangle - \hat{Y}_i)^2$ e $R(\theta) = \int (\theta(t) - \hat{\theta}(t))^2 dt$ (erros de predición e de estimación, respectivamente).

As saídas expostas no Cadro 2 amósannos que o presuavizado da X mellora os resultados do estimador orixinal $\hat{\theta}_{K_n}$, mentres que o presuavizado da Y dá os maiores valores das medidas de risco consideradas, o que confirma os resultados teóricos obtidos ao respecto.

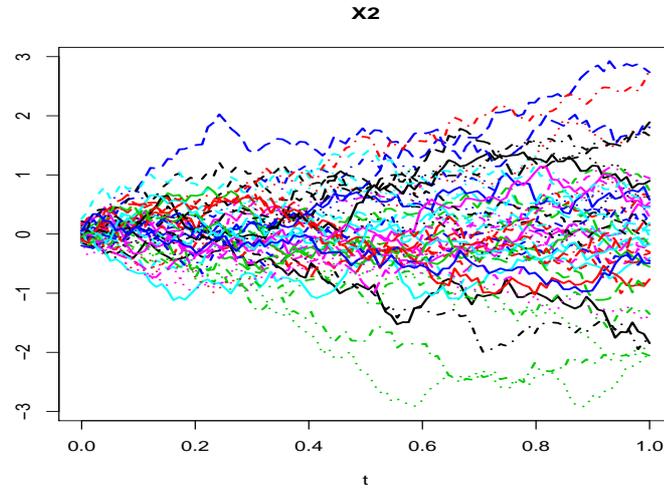


Figura 1: Observacións simuladas do movemente Browniano.

Risk	$\hat{\theta}_{K_n}$	$\hat{\theta}_{K_n}^{h,Y}$	$\hat{\theta}_{K_n}^{\alpha,X}$
$R(Y)$	0.00605	0.21165	0.00603
$R(\theta)$	0.54576	12.50619	0.53920

Cadro 2: Valores das funcións de risco para os distintos estimadores.

Bibliografía

- [1] H. Cardot, F. Ferraty, P. Sarda, *Functional linear model*, *Statistics and Probability Letters* **45** (1999), no. 1, 11–22.
- [2] J. A. Cristóbal-Cristóbal, P. Faraldo-Roca, W. González-Manteiga, *A class of linear regression parameter estimators constructed by nonparametric estimation*, *Annals of Statistics* **15** (1987), no. 2, 603–609.
- [3] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric functional data analysis : theory and practice*, Springer, New York, 2006.
- [4] J.O. Ramsay, B.W. Silverman, *Functional data analysis*, Springer, New York, 2005.

Problema no estándar relacionado con el equilibrio de membranas a tracción

Giuseppe Vigliano

Centro de Supercomputación de Galicia

12 de Noviembre de 2008

Resumen

Esta breve memoria resume, en mínima parte, uno de los problemas analizados en el trabajo de investigación [4]. En esta referencia se estudia de forma más exhaustiva el análisis matemático del equilibrio en estructuras de membrana con el objetivo último de utilizar las mismas en aplicaciones tales como las pasarelas, una tecnología del todo innovadora que se está desarrollando en España (referencias [2] y [3]).

Aquí sólo se aborda uno de los problemas matemáticos relacionados con el equilibrio de una membrana a tracción, tensada en parte por elementos de borde rígidos y en parte por cables a tracción. Debido a los esfuerzos de tracción, la membrana se identifica a una superficie con curvatura de Gauss negativa y sus esfuerzos a un tensor positivo del segundo orden. De esta forma, el equilibrio se expresa directamente por medio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en términos de la forma de la membrana y del tensor de esfuerzos. A partir de dichas ecuaciones, el problema de contorno correspondiente resulta ser elíptico y con condición de frontera inusual.

Ecuaciones de equilibrio y planteamiento del problema

Se identifica la membrana con una superficie \mathcal{S} con *curvatura de Gauss negativa*; en particular, \mathcal{S} es la gráfica de una función $z(x, y)$, definida en un dominio *acotado* $D \subset \mathbb{R}^2$, tal que $z_{,xx}z_{,yy} - z_{,xy}^2 < 0$. A su vez, se indica con $\sigma := N_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2$ y $\beta = 1, 2$) el tensor *positivo y simétrico* de esfuerzos de la membrana. En la tesis [4], se comprueba que en estas condiciones el equilibrio de membrana se resume en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 & \text{en } D, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0 & \text{en } D, \\ N_{xx}z_{,xx} + 2N_{xy}z_{,xy} + N_{yy}z_{,yy} = 0 & \text{en } D, \\ + \text{condiciones de contorno sobre } \partial D = \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Se consideran sólo dominios D definidos por:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a \text{ y } -y(x) \leq y \leq y(x)\},$$

con frontera $\partial D \equiv \Gamma = \Gamma^r \cup \Gamma^c$, siendo $\Gamma^r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \mp a, -b \leq y \leq b\}$ y $\Gamma^c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, y = \mp y(x)\}$, con a y b números reales e $y = y(x)$ función real, positiva, regular, convexa y definida en $[-a, a]$ tal que $\mp y(-a) = \mp y(a) = \mp b$.

Desde el punto de vista mecánico Γ^r y Γ^c representan, respectivamente, la parte del contorno de la membrana compuesta por elementos rígidos o bien por cables a tracción.

En estas condiciones el **problema completo** es el siguiente (referencia [4]):

Problema 1. *Dados los esfuerzos positivos y simétricos de membrana N_{xx} , N_{xy} y N_{yy} , tales que $(\nabla \cdot \sigma)_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 N_{\alpha\beta,\beta} = 0$ en D ($\forall \alpha = 1, 2$), y el valor de la membrana $g = g(y)$ a lo largo del borde rígido Γ^r , calcular la superficie $z = z(x, y)$ (no constante, $z \neq 0$) definida en D tal que*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \cdot \nabla z) = 0 & \text{en } D, \\ z = g & \text{en } \Gamma^r, \\ z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0 & \text{sobre } \Gamma^c. \end{cases} \quad (2)$$

Comentario 1. *Siendo el tensor σ definido positivo, el sistema (2) define un problema elíptico en forma divergencial (referencia [1]) con una restricción al contorno no estándar sobre z : la condición de cable $z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0$ en Γ^c .*

Unicidad y condiciones de resolubilidad

Establecer criterios para la existencia del sistema (2) es un problema todavía abierto; al revés, podemos comprobar la unicidad de la (eventual) solución y, además, dar condiciones necesarias para su resolubilidad. Para ello necesitamos, ante todo, el siguiente

Lema 1. *Sean $y = y(x)$ y $z = z(x, y)$ funciones reales y regulares, con $y''(x) \neq 0$; pongamos $h(x) := z(x, y(x))$. Entonces los problemas*

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} z(x, y(x)) = h(x) \\ z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} z(x, y(x)) = h(x) \\ z_{,y}(x, y(x)) = \frac{h''}{y''} \end{cases}$$

son equivalentes.

Demostración:

$(\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{P}_2)$. Por derivación: $z_{,x} + y'z_{,y} = h' \Rightarrow z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 + z_{,y}y'' = h''$. Siendo $z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0$, sigue $z_{,y} = h''/y''$.

$(\mathcal{P}_2) \Rightarrow (\mathcal{P}_1)$. Por derivación $h''(x) = z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 + z_{,y}y''$. Al ser $h'' = z_{,y}y''$, concluimos $z_{,xx} + 2z_{,xy}y' + z_{,yy}y'^2 = 0$. \square

Nota importante 1. Es útil aclarar más en profundidad la relación entre las funciones $z(x, y)$, $y(x)$ y $h(x)$. La función $y = y(x)$ se relaciona con la parte del contorno de D correspondiente a los cables a tracción; el dominio Γ^c . A su vez, las tres funciones están relacionadas por la expresión $h(x) := z(x, y(x))$, siendo $h(x)$ la “forma del cable”, valor de la membrana sobre el contorno Γ^c , y $z(x, y)$ la “forma de la membrana”. En las demostraciones que siguen, se tendrán en cuenta las condiciones $y''(x) > 0$ y $h''(x) \geq 0$, que traducen matemáticamente las propiedades mecánicas de un cable a tracción (véase la referencia [4]).

Unicidad del Problema 1

Demostración:

Reducción al absurdo.

Sean $z_1 = z_1(x, y)$ y $z_2 = z_2(x, y)$ dos funciones de D que resuelvan el sistema (2). Por consiguiente, es posible definir las funciones $h_1(x) := z_1(x, y(x))$ y $h_2(x) := z_2(x, y(x))$. Poniendo $z(x, y) := z_1(x, y) - z_2(x, y)$ y $h(x) := h_1(x) - h_2(x)$, al utilizar el Teorema 1 conviene considerar el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla z) = 0 & \text{en } D, \\ z = 0 & \text{en } \Gamma^r, \\ z = h & \text{en } \Gamma^c, \\ z_{,y}y'' = h'' & \text{en } \Gamma^c. \end{cases}$$

Debido al **Principio del Máximo Débil** (véase la referencia [1]), la solución z tiene un máximo en ∂D ; sea éste el punto $M = (x_0, y_0)$.

CASO 1: Si $M \in \Gamma^r$ (ecuación $x = \mp a$), su valor es 0. Esto significa que la función h es no positiva, esto es, $h \leq 0$. Si $h = 0$, entonces sigue la tesis siendo necesariamente $z = 0$. En cambio, si $h < 0$, entonces existe un punto $P = (x_0, y(x_0))$ perteneciente a Γ^c en el que h alcanza un mínimo; $h'(x_0) = 0$ y $h''(x_0) \geq 0$. Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(-y', 1)$ es el vector normal exterior, debido al **Principio del Máximo Fuerte** (véase la referencia [1]), se tiene

$$n_1 z_{,x} + n_2 z_{,y} = z_{,\mathbf{n}}(x_0, y(x_0)) < 0. \quad (3)$$

Además, siendo $h'(x_0) = 0$, se cumple

$$h'(x_0) = -n_2 z_{,x} + n_1 z_{,y} = 0. \quad (4)$$

Confrontando las relaciones (3) y (4), se tiene siendo $n_2 = 1$, $(n_1^2 + n_2^2)z_{,y} = \|\mathbf{n}\|^2 z_{,y} = z_{,y} < 0$. Al ser $y''(x_0) > 0$, se concluye $0 > z_{,y}(x_0, y(x_0))y''(x_0) = h''(x_0) \geq 0$.

CASO 2: Si $M \in \Gamma^c$ (ecuación $y = \mp y(x)$), entonces $h'(x_0) = 0$ y $h''(x_0) \leq 0$. Debido al **Principio del Máximo Fuerte**, se tiene siendo $n_2 = 1$,

$$n_1 z_{,x} + n_2 z_{,y} = z_{,\mathbf{n}}(x_0, y(x_0)) > 0. \quad (5)$$

Además, siendo $h'(x_0) = 0$, se cumple

$$h'(x_0) = -n_2 z_{,x} + n_1 z_{,y} = 0. \quad (6)$$

Confrontando las relaciones (5) y (6), se tiene $(n_1^2 + n_2^2)z_{,y} = \|\mathbf{n}\|^2 z_{,y} = z_{,y} > 0$. Siendo $y''(x_0) > 0$, se concluye $0 < z_{,y}(x_0, y(x_0))y''(x_0) = h''(x_0) \leq 0$. \square

Condiciones de resolubilidad para el Problema 1

Teorema 2. *Condición necesaria para que el Problema 1 tenga una solución (no constante, $z \neq 0$) es que $g''(y) < 0$.*

Demostración:

Reducción al absurdo.

CASO 1: $g'' = 0$ (esto es, $g = \text{constante}$ al ser, por razones mecánicas, $g(-b) = g(b)$). Si existiera una solución $z \neq 0$, entonces h tendría un mínimo absoluto en Γ^c ; $P = (x_0, y(x_0))$. De ello, utilizando los mismos pasos llevados a cabo para comprobar la unicidad, se obtiene $0 > z_{,y}(x_0, y(x_0))y''(x_0) = h''(x_0) \geq 0$.

CASO 2: $g''(y) > 0$. Se razona como en el **CASO 1**. □

Agradecimientos y consideraciones finales

Deseo agradecer a Silvia Vilariño Fernández, y a todos los editores de estas Actas, por haberme ofrecido la posibilidad de presentar mi seminario en una de las Sesiones de los "Seminarios de Iniciación á Investigación".

Por otro lado, considero que la formulación matemática del problema aquí presentado puede interesar a investigadores y/o estudiantes de diferentes ramas: Análisis Matemático, Geometría Diferencial, Análisis Numérico y/o Medios Continuos. Desde aquí, a quienes quisieran, les incito a contactar conmigo¹ para cualquier tipo de consulta y clarificación.

Finalmente, me disculpo de antemano para los eventuales errores de contenido, edición y/u ortografía, de los cuales soy el único responsable.

Bibliografía

- [1] Gilbarg L., Trudinger N. S., (1998). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer.
- [2] Murcia J., (2003). Prototipo de pasarela con estructura de membrana. *IV Congreso Nacional de la Ingeniería Civil*, Actas (Vol. 2), pp 905- 912. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- [3] Murcia J., (2007). Tecnología de pasarelas con estructura de membrana. *Informes de la Construcción*; No. 506.
- [4] Viglialoro G., (2006). Análisis matemático del equilibrio en estructuras de membrana con bordes rígidos y cables. Pasarelas: forma y pretensado. Tesis doctoral, UPC. Enlace <http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0515107-100745/UPC>

¹E-mail: gviglial@cesga.es

Aplicaciones de la transformación de Cayley

María José Pereira Sáez

Departamento de Xeometría e Topoloxía

17 de Noviembre de 2008

Resumen

Comencemos por recordar el concepto de grupo de Lie.

Definición 1. *Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G dotada de una estructura de grupo compatible con la operación, es decir, la operación del grupo*

$$\begin{aligned} p: G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

es diferenciable.

Los morfismos de grupos de Lie son las aplicaciones diferenciables $\varphi: G \longrightarrow H$ que sean homomorfismos de grupos.

Los grupos de Lie con los que vamos a trabajar pueden clasificarse como *grupos J -ortogonales*, $O_n(J, \mathbb{K})$, donde J es una matriz tal que $J^2 = \pm \text{id}$,

$$O_n(J, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \text{ tales que } AJA^* = J\}$$

con \mathbb{K} un álgebra asociativa con uno, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó \mathbb{H} (donde denotamos por \mathbb{H} a los cuaternios). Para estos grupos se verifica que A es J -ortogonal sii A^* también lo es, donde denotamos por $A^* = \overline{(A^t)}$.

$O_n(J, \mathbb{K})$ es un subgrupo cerrado del grupo lineal general $GL(n, \mathbb{K})$, así, por el teorema de Cartan, su álgebra de Lie vendrá dada por

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : e^{tX} \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposición 2. $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : JX + X^*J = 0\}$.

Ejemplo 3. *Si consideramos $J = \text{id}$ obtenemos como grupos J -ortogonales $O(n)$, $U(n)$ y $Sp(n)$, con álgebras de Lie:*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : X + X^t = 0\}, \text{ matrices antisimétricas,}$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) : X + X^* = 0\}, \text{ antihermíticas complejas y}$$

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{H}) : X + X^* = 0\}, \text{ antihermíticas cuaterniónicas.}$$

PALABRAS CLAVE: Categoría LS, función de Morse, grupo unitario.

La transformación de Cayley

Para pasar de un grupo de Lie a su álgebra de Lie y viceversa vamos a utilizar la *transformación de Cayley*, que se define como sigue.

Definición 4. Sea $E = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ espacio euclidiano y consideremos el abierto

$$\Omega = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \text{ tales que } \text{id} + X \text{ inversible}\},$$

definimos entonces

$$\begin{aligned} c: \mathfrak{g} \cap \Omega &\longrightarrow G \cap \Omega \\ X &\longmapsto c(X) = \frac{\text{id} - X}{\text{id} + X} \end{aligned}$$

Nótese que aunque hablamos de matrices tiene sentido escribir la expresión de c como un cociente porque $(\text{id} - X)(\text{id} + X)^{-1} = (\text{id} + X)^{-1}(\text{id} - X)$.

Es fácil probar que c está bien definida.

Propiedades 5. 1. Si $A \in \Omega$ es inversible entonces $A^{-1} \in \Omega$ y $c(A^{-1}) = -c(A)$.

2. Dada $A \in \Omega$, $A^* \in \Omega$ y $c(A^*) = c(A)^*$.

3. Si $X \in \Omega$ es tal que $-X \in \Omega$ entonces $c(-X) = c(X)^{-1}$.

4. La aplicación c es involutiva, es decir, $c^{-1} = c$.

5. Sean $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ inversible y $A \in \Omega$, entonces

$$BAB^{-1} \in \Omega \text{ y } c(BAB^{-1}) = Bc(A)B^{-1}.$$

6. Si λ es autovalor de $A \in \Omega$ entonces $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ es autovalor de $c(A)$.

Hasta aquí la aplicación de Cayley descrita en general, ahora vamos a restringirla a nuestro ámbito.

Restricción de la transformación de Cayley

La transformación de Cayley envía matrices J -hermíticas (es decir, las X tales que $JX + X^*J = 0$) en J -ortogonales y viceversa, *i.e.*, lleva un grupo en su álgebra y al revés.

Proposición 6. i) $c: \mathfrak{g} \cap \Omega \longrightarrow G \cap \Omega$ está bien definida.

ii) $c: G \cap \Omega \longrightarrow \mathfrak{g} \cap \Omega$ está bien definida.

Esta restricción nos permite afirmar el siguiente teorema.

Teorema 7. El abierto $O_n(\mathbb{K}) \cap \Omega$ es contráctil.

En efecto, pues dada una matriz $X \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{K})$ no tiene autovalores reales y por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{o}_n(\mathbb{K}) \subset \Omega$ y $c: O_n(\mathbb{K}) \cap \Omega \longrightarrow \mathfrak{o}_n(\mathbb{K})$ es un difeomorfismo.

Ejemplo 8. Si consideramos el grupo unitario unidimensional $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid zz^* = 1\} = S^1$, tendremos que la aplicación de Cayley es precisamente la proyección estereográfica de la circunferencia en la recta desde el punto $z = -1$.

Una generalización

Para nuestro propósito, más interesante que la curva que pasa por un punto es el abierto radial que sale de cada punto crítico, de ahí que modifiquemos la transformación de Cayley para tener un recubrimiento por abiertos del grupo $O_n(\mathbb{K})$.

Sea $A \in O_n(\mathbb{K})$. Definimos el abierto $\Omega(A) \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ como el conjunto formado por las matrices X tales que $A + X$ es inversible.

Definición 9. La transformación de Cayley centrada en A se define como la aplicación $c_A: \Omega(A) \rightarrow \Omega(A^*)$ dada por $c_A(X) = (\text{id} - A^*X)(A + X)^{-1}$.

Esta aplicación está bien definida y sus propiedades más interesantes son:

Proposición 10. Si $X \in \Omega(A)$ entonces,

1. $(c_A)^{-1} = c_{A^*}$.
2. $X^* \in \Omega(A^*)$ y $c_{A^*}(X^*) = c_A(X)^*$.
3. Para $U \in O_n(\mathbb{K})$ se tiene que $U\Omega(A)U^* = \Omega(UAU^*)$ y $c_{UAU^*}(UXU^*) = Uc_A(X)U^*$.
4. Si la matriz X es inversible entonces $X^{-1} \in \Omega(A^*)$ y $c_{A^*}(X^{-1}) = -Ac_A(X)A$.

Teorema 11. El abierto $\Omega(A) \cap O_n(\mathbb{K})$ es un abierto contráctil.

Es decir, los $\Omega(A)$ son abiertos contráctiles en los grupos ortogonales.

Aplicaciones

“Linearización” del flujo del gradiente de una función de Morse

Definición 12. Dada una variedad diferenciable M se dice que una función diferenciable con valores reales, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados (y por tanto aislados).

Nos interesa estudiar funciones de Morse porque uno de nuestros objetivos es calcular la categoría LS de diversos grupos de Lie y, por el teorema de Lusternik y Schnirelmann, el número de puntos críticos de una función de Morse nos da una cota superior para la categoría.

Clásicamente las funciones de Morse que se consideran son las funciones “altura” y “distancia”. Se prueba que, salvo una constante, en un grupo de Lie estas funciones son siempre de la forma $f(X) = \Re \text{Tr}(BX)$, la parte real de la traza de X módulo una matriz arbitraria B . Podemos ver entonces que el flujo $X(t)$ del gradiente $X' = \frac{1}{2}(B - XBX)$ lo podemos pasar mediante la aplicación de Cayley a otro flujo en el álgebra de Lie, que es un espacio vectorial, y allí integrarlo. Utilizando la expresión de Dynnikov y Veselov denominamos “linearización” a este proceso.

Lema 13. Una solución de $X' = \frac{1}{2}(B - XBX)$ es la imagen por la transformación de Cayley de la solución de la ecuación diferencial $c'(X) = -2(Bc(X) + c(X)B)$.

Aplicación al cálculo de la categoría de $U(n)$

Al desarrollar la generalización de la transformación de Cayley obtuvimos los $\Omega(A)$, abiertos contráctiles centrados en A de $O(n)$, $U(n)$ y $Sp(n)$. Estos abiertos los utilizamos ahora para obtener la categoría de $U(n)$ de un modo mucho más sencillo que el método clásico (véase por ejemplo [3]).

En cada punto de $U(n)$ tenemos un abierto contráctil difeomorfo al tangente (Teorema 11). Todos estos abiertos nos permiten recubrir el grupo unitario. Así, si calculamos el número de abiertos con los que podemos recubrir todo el grupo obtendremos una cota superior para la categoría.

Sea $M \in U(n)$ una matriz unitaria y A_k una matriz diagonal. Recordemos que $M \in \Omega(A_k)$ si y sólo si $A_k + M$ tiene inversa. Escogemos en primer lugar la matriz diagonal con todos sus elementos distinguidos iguales,

$$A = \text{diag}(z, \dots, z) = z \text{id}.$$

Ahora bien, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de M , entonces al diagonalizarla obtenemos:

$$A + M = U(z + \lambda_1, \dots, z + \lambda_n)U^*$$

de manera que $A + M$ es inversible si y sólo si $\lambda_i \neq z, \forall i = 1, \dots, n$.

Encontrar el recubrimiento es ahora una tarea sencilla. Como cada matriz tiene a lo sumo n autovalores distintos bastará tomar $n + 1$ complejos distintos z_0, z_1, \dots, z_n , con $|z_i| = 1$. Si denotamos por

$$A_k = \text{diag}(z_k, \dots, z_k) = z_k \text{id}$$

tenemos que, dada $M \in U(n)$, siempre hay algún z_k que no es autovalor de M . Luego existirá algún k para el cual $M \in \Omega(A_k)$. Es decir, $\{\Omega(A_i)\}_{0 \leq i \leq n}$ es un recubrimiento de $U(n)$ por abiertos contráctiles. Por tanto,

$$\text{cat } U(n) \leq n.$$

Por otro lado, por cohomología tenemos que $\text{cat } U(n) \geq n$ (véase [1, p. 273]), de manera que

$$\text{cat } U(n) = n.$$

Bibliografía

- [1] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea y D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category*. Mathematical Surveys and Monographs, 103. Providence, RI: American Mathematical Society XVII, 2003.
- [2] I. M. James. Lusternik-Schnirelmann Category, *Handbook of algebraic topology*. I.M. James, (ed.). Amsterdam: North-Holland X, p. 1293-1310, 1995.
- [3] W. Singhof, On the Lusternik-Schnirelmann Category of Lie Groups I, II. *Math. Z.* **145** (1975), 11-116, 151 (1976), 143-148.

Primera aproximación a las variedades con estructuras

Javier Seoane Bascoy

Departamento de Xeometría e Topoloxía

15 de Diciembre de 2008

Resumen

Una variedad diferenciable M de dimensión m es un espacio topológico Hausdorff localmente euclídeo de dimensión m dotado de una estructura diferenciable. Por lo tanto para cada $p \in M$ existe un entorno abierto U y un difeomorfismo φ en el abierto $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^m tal que $\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^m(q))$, $\forall q \in U$. Dichas funciones $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ se denominan sistema de coordenadas locales y nos permiten considerar la siguiente base del espacio tangente en cada punto $q \in U$, $T_qM = \langle \partial/\partial x_q^1, \dots, \partial/\partial x_q^m \rangle$.

Además supondremos que cualquiera de las variedades a las que hacemos referencia aquí es segundo numerable y paracompacta.

Ejemplo 1. $\mathbb{C}^m = \{(z^1, \dots, z^m) : z^k \in \mathbb{C}, z^k = x^k + iy^k\}$ es una variedad diferenciable de dimensión $2m$. Para comprobarlo es suficiente tomar como coordenadas locales las partes real e imaginaria de sus componentes, $(x^1, y^1, \dots, x^m, y^m)$.

Definición 2. Una **variedad compleja** M de dimensión compleja m es un espacio topológico Hausdorff en el que existe un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que para cada U_α existe un homeomorfismo $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow D_\alpha$, siendo $D_\alpha \subset \mathbb{C}^m$ abierto, y verificándose que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces las aplicaciones:

$$\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}} \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}} \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son ambas holomorfas.

Las aplicaciones $z^k = x^k + iy^k : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\psi_\alpha(q) = (z^1(q), \dots, z^m(q))$, $\forall q \in U_\alpha$ se denominan también **sistema de coordenadas locales**.

Como toda función holomorfa entre abiertos de \mathbb{C}^m considerada como una aplicación entre abiertos de \mathbb{R}^{2m} es analítica (puesto que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son analíticas) resulta que toda variedad compleja puede ser considerada como una variedad diferenciable de dimensión par. Considerando

PALABRAS CLAVE: Variedades complejas, variedades casi-complejas, variedades casi-contacto.

esto podemos definir también el espacio tangente a una variedad compleja M en un punto p , $T_p M = \langle \partial/\partial x_p^1, \partial/\partial y_p^1, \dots, \partial/\partial x_p^m, \partial/\partial y_p^m \rangle$.

Teniendo todo esto en cuenta estamos ya en condiciones de definir las primeras estructuras sobre variedades.

Definición 3. Sea M una variedad compleja de dimensión m y sea para cada $p \in M$ un sistema local de coordenadas (z^1, \dots, z^m) definido en un entorno U de p . Una transformación $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ verificando:

$$J_p(\partial/\partial x_p^k) = \partial/\partial y_p^k, \quad J_p(\partial/\partial y_p^k) = -\partial/\partial x_p^k$$

se denomina **estructura casi-compleja asociada** a la variedad compleja M .

Observación 4. $J_p^2 = -I$, siendo $-I$ la aplicación identidad de $T_p M$ en $T_p M$.

Es posible definir una estructura similar sobre variedades diferenciables de dimensión par, pero para ello debemos hacer la siguiente consideración: si V es un espacio vectorial real, una transformación lineal $J : V \rightarrow V$ verificando que $J^2 = -I$ se denomina estructura compleja del espacio vectorial real V .

Definición 5. Sea M una variedad real $2m$ -dimensional y sea para cada $p \in M$ un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^{2m}) definido en un entorno U de p . Supongamos que para cada p tenemos definida una estructura compleja J_p en $T_p M$, donde:

$$J_p(\partial/\partial x_p^j) = \sum_{k=1}^{2m} J_j^k(p)(\partial/\partial x_p^k)$$

siendo las funciones $J_j^k : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase infinito.

Estas estructuras complejas nos inducen la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} J : M &\rightarrow \text{Aut}(T_p M) \\ p &\mapsto J(p) = J_p \end{aligned}$$

que se denomina **estructura casi-compleja**.

Podemos, por tanto, afirmar que toda estructura casi-compleja sobre una variedad compleja induce también una estructura casi-compleja sobre la correspondiente variedad real. No obstante, el recíproco no es cierto:

Teorema 6. Sea M una variedad real $2m$ -dimensional con una estructura casi-compleja J . Supongamos que existe un recubrimiento γ de M satisfaciendo que existe un sistema local de coordenadas $(x^1, y^1, \dots, x^m, y^m)$ en cada abierto $U \in \gamma$, tal que, $\forall q \in U$ y $\forall k = 1, \dots, m$ se tiene que:

$$J_q(\partial/\partial x_q^k) = \partial/\partial y_q^k, \quad J_q(\partial/\partial y_q^k) = -\partial/\partial x_q^k$$

Entonces M es una variedad compleja y J es la estructura casi-compleja asociada.

Como se puede apreciar todas las consideraciones hechas hasta ahora son de carácter local, pero nuestro objetivo es trabajar globalmente, para ello definimos:

Definición 7. Una variedad diferenciable en la que tenemos definido un campo de tensores de tipo $(1,1)$, es decir, un endomorfismo J de $\chi(M)$ en $\chi(M)$, tal que $J^2 = -I$ se denomina **variedad casi compleja**.

Ejemplo 8. Los espacios \mathbb{R}^{2k} admiten una estructura casi-compleja dada por:

$$J(x^1, \dots, x^{2k}) = (-x^2, x^1, \dots, -x^{2k}, -x^{2k-1})$$

Por otra parte como todas nuestras variedades diferenciables son segundo numerables y paracompactas podemos considerarlas como variedades de Riemann ya que para cada punto $p \in M$ tenemos garantizada la existencia de un producto interior para su espacio tangente T_pM .

Definición 9. Si (M, J) es una variedad casi-compleja dotada de una métrica de Riemann g sobre M invariante por J , es decir, tal que:

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \forall X, Y \in \chi(M)$$

entonces diremos que M es una variedad **casi-hermítica**.

Proposición 10. Sobre toda variedad casi-compleja M existe una métrica con respecto a la cual es casi-hermítica.

Todo lo visto hasta ahora sólo es aplicable a variedades de dimensión par. Nuestro objetivo a partir de ahora será estudiar estructuras sobre variedades de dimensión impar que en cierto sentido serán las análogas a las de dimensión par ya vistas.

Definición 11. Sea M una variedad diferenciable de dimensión impar $2m + 1$. Si sobre M existen: φ campo de tensores $(1,1)$, ξ campo de vectores, η 1-forma; verificando que:

$$\eta(\xi) = 1, \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$$

decimos que M posee una **estructura casi-contacto** (φ, ξ, η) y M se dice una **variedad casi-contacto**.

Proposición 12. Toda variedad casi-contacto admite una métrica de Riemann g tal que:

$$\eta(X) = g(X, \xi), g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \forall X, Y \in \chi(M)$$

Definición 13. Se dice que una variedad casi-contacto M dotada con una métrica de esta forma es un **variedad casi-contacto métrica**, o que M posee una **estructura casi-contacto métrica**.

Existe una estrecha relación entre las variedades casi-hermíticas y las variedades casi-contacto métricas. Si (M, J, g) es una variedad casi-hermítica $2m$ -dimensional podemos dotar a $M \times \mathbb{R}$ de una estructura casi-contacto métrica (φ, ξ, η, h) considerando:

- $\eta = dt$
- $\xi = (0, d/dt)$
- $\varphi(X, fd/dt) = (JX, 0)$, $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase infinito.
- $h((X, fd/dt), (Y, rd/dt)) = g(X, Y) + fr$

Donde $X, Y \in \chi(M)$ y $fd/dt, rd/dt \in \chi(\mathbb{R})$

Análogamente se puede ver que si $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ es una variedad casi-contacto métrica $2m+1$ -dimensional podemos dotar a $M \times \mathbb{R}$ de una estructura casi-hermítica dada por:

- $J(X, fd/dt) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)d/dt)$
- $h((X, fd/dt), (Y, rd/dt)) = g(X, Y) + fr$

Siendo $X, Y \in \chi(M)$ y $fd/dt, rd/dt \in \chi(\mathbb{R})$

Realmente, y como ya comentamos, el estudio de las variedades casi-contacto se debe a la búsqueda de variedades de dimensión impar análogas a las variedades casi-complejas. Una de las principales características de estas últimas es que su grupo estructural del fibrado tangente se puede reducir a $U(m)$, mientras que el de las casi-contacto se puede reducir a $U(m) \times 1$. Existe, de hecho, una definición análoga de variedad casi-contacto:

Definición 14. *Sea M una variedad diferenciable $2m + 1$ -dimensional. Se dice que M tiene una estructura casi-contacto si el grupo estructural de su fibrado tangente se reduce a $U(m) \times 1$.*

Finalmente podemos decir que existe una tercera definición análoga de variedad casi-contacto:

Definición 15. *Sobre una variedad M de dimensión $2m + 1$ se dice que tenemos una estructura casi-contacto si admite una 1-forma global η y una 2-forma global ϕ tal que $\eta \wedge \phi^m \neq 0$ en todo M .*

Ejemplo 16. *Los espacios euclídeos \mathbb{R}^{2m+1} admiten una estructura casi-contacto.*

Definición 17. *Una variedad M de dimensión $2m + 1$ se dice que posee una estructura de contacto y M se dice una **variedad de contacto** si existe una 1-forma global tal que $\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0$.*

Bibliografía

- [1] David E. Blair; *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1976.
- [2] K. Yano, M. Kom; *Structures on manifolds*, World Scientific, 1984.

${}^2\eta \wedge \phi^m = \eta \wedge \phi \wedge \overset{m}{\underbrace{\dots}} \wedge \phi \neq 0$ en todo M