

M. Brozos Vázquez
J.C. Díaz Ramos
J. González Díaz
A.B. Rodríguez Raposo
M.T. Sánchez Rúa
EDITORES

As matemáticas do veciño

Actas do Seminario de Iniciación á Investigación

2006



INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

ACTAS DO SEMINARIO
DE
INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN

ANO 2006

Comité editorial:

Miguel Brozos Vázquez

José Carlos Díaz Ramos

Julio González Díaz

Ana Belén Rodríguez Raposo

María Teresa Sánchez Rúa

Imprime:

Imprenta Universitaria
Campus universitario sur
15782 Santiago de Compostela

D. L. C 680-2007

Podemos ser mellores veciños. Non deberiamos construír barreiras a base de palabras sofisticadas e da actitude do “non o entenderías”. Deberiamos explicar o que sabemos nos termos máis simples e na mínima xeneralidade. Daquela sería posible ver o que medra no campo do lado e empregar os froitos do labor do noso veciño.

Andrei Okounkov (Medalla Fields 2006)

Mentres o aire fresco que lle batía no rostro limpaba o seu orgullo, no derradeiro alento da tardiña o xinete comezaba xa a percibir o cansancio. Apenas un par de horas o afastaban da civilización, non había perigo, ademais coñecía ben o camiño. Levaba xa varios anos sendo o “Mensaxeiro”, que era así como o chamaban. “Parece mentira”, pensaba, “que nos tempos que corren, un aínda a cabalo para chegar a ese lugar recóndito...¡que nin os turistas se atreven a chegar!”. “E aquelas pobres mulleres e homes... que o tiñan a el como única comunicación co resto do mundo, pero...” seguía a cabalar o Mensaxeiro mentres a escuridade dilatava as súas meniñas, “pero se nen sequera sei como se chaman, nin de onde son...ah, non é certo, dun deles oín dicir que era ruso e que nun tempo se fixera famoso..., se cadra algún outro é da miña terra...”. Pero a el que máis lle tiña, a súa “misión era clara: transportar a información e os víveres, non tes nin que falar con eles, nada podes aprender deles, se é que chegas sequera a entendelos...” recalcara o seu superior cando aceptou aquel traballo. A mente do Mensaxeiro seguía a vagar sen rumbo, “Cando me xubile non hei botar isto de menos, nada deste traballiño hei botar de menos, nada,... excepto a paz daquel lugar, daquela xente e dos seus xeroglíficos”. Neste intre recordou unha breve conversa, moi ó principio, anos atrás cando, incumplindo as advertencias do seu xefe, lles preguntara “¿Por que vos acochades da xente?”, e un home de uñas longas respostou “Non é da xente de quen nos afastamos, senón da súa codicia”.

Santiago de Compostela, 11 de Xaneiro de 2007

Miguel Brozos Vázquez

Prefacio

Cuando alguien demuestra un buen teorema, me produce tanta satisfacción como si lo hubiera hecho yo mismo.

Edmund Landau (Berlín, 1877-1938) sistematizó y escribió importantes trabajos sobre la teoría analítica de números.

El ver terminado este segundo número del Seminario de Iniciación a la Investigación me produce una gran satisfacción. Hay temas muy variados y que cubren muchos aspectos actuales de las matemáticas, algunos los conozco bien y otros casi los desconozco completamente, pero todos ellos me han producido una gran satisfacción al leerlos.

El año 2006 ha sido muy importante para las matemáticas. Según los editores de la revista Science, la demostración de Grigori Perelmann (Medalla Fields 2006) de la conjetura de Poincaré ha sido el descubrimiento científico del año. También para los matemáticos españoles con la celebración del ICM (International Congress of Mathematicians) en Madrid, donde se entregaron las Medallas Fields, y la celebración de la Asamblea mundial de IMU (International Mathematical Union) en Santiago de Compostela. Si Perelmann representa un tipo de matemático genial pero singular, Terence Tao, otro medalla Fields en 2006, sirve de modelo a un matemático más en el espíritu de estas actas: joven, agradable, elegante y sencillo, y con contribuciones excepcionales a numerosas áreas (ecuaciones en derivadas parciales, geometría algebraica, combinatoria, fractales, análisis de Fourier, etc)

Felicito a todos los que han hecho posible este seminario bien con su participación, presencia o apoyo y estoy seguro que tendrá continuidad en el futuro. Creo que tanto los docentes como los investigadores, aunque ya hemos pasado nuestra etapa de iniciación a la investigación hace años, tenemos mucho que aprender y agradecer de esta actividad del SII y de sus impulsores.

Santiago de Compostela, 19 de Enero de 2007

Juan José Nieto Roig

Director del Instituto de Matemáticas

Índice Xeral

Introducción	1
Carlos Soneira Calvo “Introducción á teoría de esquemas”	3
Julio González Díaz “Subastas, ¿quién da más?”	7
Pablo González Sequeiros “Un espazo foliado de mosaicos”	11
María Castellano Méndez “Aplicaciones de la Estadística al tratamiento de aguas”	15
Jerónimo Paredes Cáceres “Formulación de un problema de interfase entre dos fluidos”	19
Álvaro Lozano Rojo “Hojas con mucho código”	23
Esteban Calviño Louzao “¿Que é a curvatura?”	27
M^a Cristina Naya Riveiro “El aluminio, ¿sabemos cómo se comporta?”	31
Alberto Rodríguez Casal “Estimación de conjuntos”	35
Alexandre Andrés Cortés Ayaso “Complexificando a Xeometría”	39
Ana Belén Rodríguez Raposo “O reto de Galois”	43

María Pérez Fernández de Córdoba “Universos y dioses de juguete”	47
José Carlos Díaz Ramos e Julio González Díaz “¿Quen é mellor?”	51
Manuel A. Mosquera Rodríguez “¿Cuánto me das si te deixo pasar?”	57
María Teresa Sánchez Rúa “¡¡¡De tres dimensións a solo una!!!”	61
Francisco Javier Fernández Fernández “Las ecuaciones del millón de dólares”	65
Miguel Brozos Vázquez “Proxectando a Terra”	69

Introducción

O presente volume contén os resumos das charlas que se impartiron ó longo do ano 2006 no Seminario de Iniciación á Investigación (SII). Tal seminario, organizado por alumnos de doutoramento, ten lugar na Facultade de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela e encádrase dentro das actividades do Instituto de Matemáticas.

O SII xurdiu a comezos do ano 2005, como unha iniciativa dos alumnos de Terceiro Ciclo da Facultade e como resposta ás necesidades de crear un seminario que cumprise, cando menos, os obxectivos seguintes:

1. Fomentar o intercambio de coñecemento.
2. Proporcionar un lugar onde dar a coñecer os campos nos que cada un centra as súas investigacións.
3. Facilitar a práctica de falar en público, máis en concreto dar charlas, e o afacerse a escoitar e participar activamente neste tipo de eventos.
4. Desenvolver as actividades necesarias para que cada quen saiba explicar, a persoas non especialistas no seu campo, as ideas fundamentais dos seus traballos.

Por segundo ano consecutivo, non só se cubriron os obxectivos básicos citados, senón que o SII supuxo un foro de intercambio de coñecemento aberto, onde tiveron cabida alumnos de tódolos departamentos da Facultade e que contou, neste ano por primeira vez, coa participación de alumnos de doutoramento doutras universidades. Continuando a dinámica do ano anterior, o seminario desenvolveuse semanalmente. Comezando no mes de Xaneiro, as charlas tiveron lugar ata o mes de Xuño, suspendéndose no Outono debido a que a maior parte de organizadores e asistentes se achaban en visitas a outras universidades. Ademais, neste segundo ano de vagaxe do SII, mantívose o costume de non permitir a asistencia de profesorado, logrando así unha participación menos cohibida do alumnado.

En canto á organización do SII, un grupo de cinco estudantes de doutoramento constitúen o comité organizador, que se encarga tanto da coordinación do evento en si: calendario de charlas, reserva da aula, proporcionar o material necesario ó poñente, etc; como da publicación deste anuario, onde se recolle, como xa se indicou, un resumo de cada unha das charlas impartidas. O mesmo comité organizador encargouse da confección deste volume a partir dos resumos proporcionados por

cada poñente, e figura neste como comité editorial. É importante salientar que cada un dos resumos aquí presentados pasou un proceso de revisión por parte dun alumno de Terceiro Ciclo dun departamento distinto ó do autor, logrando así que os resumos sexan comprensibles para non expertos no campo correspondente.

Tras dous anos de organización, os membros do actual comité editorial deixamos o noso lugar a novos estudantes para a organización do SII do ano 2007 e as conseguintes actas. Por este motivo, quixeramos facer expreso o noso máis sincero agradecemento a todos aqueles que, dun xeito ou doutro, nos axudaron nesta tarefa.

Agradecementos

Quixeramos mencionar neste apartado que a organización do seminario tería sido, sen dúbida, moito máis difícil de non contarmos coa colaboración desinteresada de moita xente. Por este motivo, desexamos agradecer a todos os que participaron no SII, ben como poñentes, ben como oíntes, e moi especialmente ós que participaron no proceso de arbitraje: Esteban Calviño Louzao, Rosa María Crujeiras Casais, Pablo Fernández Ascariz, Pablo González Sequeiros, Manuel A. Mosquera Rodríguez, Beatriz Pateiro López, María Pérez Fernández de Córdoba e Silvia Vilarino Fernández. Merece unha mención destacada Beatriz Pateiro López, autora da portada destas actas.

Como xa indicamos, o comité editorial será renovado. Por este motivo, non queremos deixar pasar esta oportunidade para dar o noso alento ós novos membros do comité e desexarlles a mellor das sortes.

Santiago de Compostela, 29 de Decembro de 2006.

O Comité Editorial.

Introducción á teoría de esquemas

Carlos Soneira Calvo

Departamento de Álgebra

10 de Xaneiro de 2006

Resumo

A charla pretende dar unha visión xeral dos conceptos básicos da xeometría alxébrica moderna, seguindo a escola de A. Grothendieck, partindo da motivación da introducción das abstraccións modernas e facendo especial fincapé na estreita relación entre a álgebra conmutativa, a xeometría alxébrica e a teoría dos números alxébricos, pensando estas dúas derradeiras disciplinas como as dúas facianas da mesma moeda, e a primeira coma o canto. A través da exposicións preténdese tamén amosar a claridade formal e a sinxeleza nos razoamentos que a linguaxe de esquemas permite, facendo ver que a abstracción introducida constitúe en realidade unha sorte de simplificación.

Motivacións

Nun principio, a xeometría alxébrica estudaba as chamadas variedades entendidas como os ceros de polinómios definindo un ideal sobre un anel de polinómios sobre un corpo base K . Se o corpo base é alxebricamente pechado, en virtude do teorema dos ceros de Hilbert, sabemos que os puntos son os pechados, é dicir, os ideais maximais que conteñen ao ideal xerado polas ecuacións da variedade son todos do xeito $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Mais sobor un corpo arbitrario isto non ten por que verificarse.

Temos a seguinte

Definición 1. *Sexa \mathbb{A}^n o espazo afín n -dimensional. Un conxunto $Y \subset \mathbb{A}^n$ dise que é alxébrico se existe un ideal I de $K[X_1, \dots, X_n]$ tal que*

$$Y = Z(I) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \forall f \in I\}.$$

Aparecen entón novos puntos no espazo, é dicir, non só os puntos pechados clásicos.

A relación básica que a nivel afín existe entre a álgebra e a xeometría podémola expresar dicindo

PALABRAS CLAVE: Álgebra conmutativa, esquema.

Proposición 1. *Existe unha correspondencia biunívoca que invirte as inclusións entre os conxuntos alxébricos de \mathbb{A}^n e os ideais radicais en $A = K[X_1, \dots, X_n]$ dada por*

$$Y \rightsquigarrow I(Y) = \{f \in A \mid f(P) = 0 \forall P \in Y\}, \mathfrak{a} \rightsquigarrow Z(\mathfrak{a})$$

Ademais un conxunto alxébrico Y é irreducíbel se e só se $I(Y)$ é primo.

Polo de agora consideráronse corpos alxebricamente pechados, mais é convinte permitir corpos que non o sexan, por exemplo porque o corpo residual do anel local dunha subvariedade pode non selo, cousa que ocorre cando esta non é un punto no senso clásico. É convinte xa que logo ter unha linguaxe e uns procedementos que nos permitan abordar a materia dun xeito unificado. Ademais, moitos problemas da xeometría alxébrica veñen motivados da teoría dos números, na que sobre todo se buscan solucións de ecuacións sobre corpos de números finitos. Ademais precísase definir unha serie de variedades abstractas que non estean mergulladas nun espazo afín nin proxectivo; tamén classicamente estudábanse conxuntos alxébricos irreducíbeis, mais compre ter en conta conxuntos reducíbeis, porque ao facermos interseccións, a intersección de dous conxuntos irreducíbeis pode non ser irreducíbel. Son tamén interesantes os fenómenos que ocorren ao facer un troco de corpo base.

Vista a necesidade de considerar máis corpos e aneis, a pregunta sería: que aneis son os axeitados para facer xeometría alxébrica?

A resposta é:

Todos. Introduciuse por estes motivos a noción de esquema.

Preliminares

O concepto de esquema defínese a partires da noción de feixe, sendo os esquemas un caso particular desta estrutura.

Definición 2. *Sexa X un espazo topolóxico e consideramos a categoría onde os obxectos son os abertos de X e os morfismos as inclusións entre abertos. Un prefeixe \mathcal{F} de grupos abeliáns en X é un funtor contravariante dende esta categoría $\mathbf{Top}(X)$ á categoría \mathbf{Ab} de grupos abeliáns.*

Dicimos que un prefeixe \mathcal{F} é un feixe se satisfai

(a) *Se U é un aberto, $\{V_i\}$ un recobramento aberto de U , e $s \in \mathcal{F}(U)$ é tal que $s_{V_i} = 0$, daquela $s = 0$.*

(b) *Se U é un aberto, $\{V_i\}$ un recobramento aberto de U , e temos*

$$s_i \in \mathcal{F}(V_i) \quad \forall i \mid \forall i, j, s_{iV_i \cap V_j} = s_{jV_i \cap V_j},$$

daquela

$$\exists s \in \mathcal{F}(U) \mid s_{V_i} = s_i \quad \forall i.$$

Definición 3. *Se \mathcal{F} é un prefeixe en X e $P \in X$ un punto, defínese o tallo \mathcal{F}_P de \mathcal{F} en P coma o $\varinjlim_{P \in U} \mathcal{F}(U)$.*

Definición 4. Un morfismo de prefeixes $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ é un morfismo de grupos abeliáns $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ para cada aberto U tal que para todo aberto $V \subset U$ o seguinte diagrama é conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{U,V} \downarrow & & \downarrow \rho'_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V). \end{array}$$

Un morfismo de prefeixes $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ en X induce, achando límites directos, un morfismo nos tallos $\varphi_P : \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$ para todo $P \in X$.

Conceptos básicos

Estamos agora en condicións de definirmos a noción de esquema. Sexa A un anel e $\text{Spec } A$ o conxunto dos ideais primos de A , que constitúen un espazo topolóxico sendo os conxuntos pechados os do xeito $v(\mathfrak{a})$, é dicir, todos os primos que conteñen ao ideal \mathfrak{a} . É a chamada topoloxía de Zariski. Definimos a continuación un feixe de aneis en $\text{Spec } A$.

Para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, sexa $A_{\mathfrak{p}}$ o localizado (ver [1], [2] ou [3]). Para $U \subset \text{Spec } A$ un aberto, defínese $\mathcal{O}(U)$ coma o conxunto de funcións

$$s : U \longrightarrow \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{q} \rightsquigarrow s(\mathfrak{q}) \in A_{\mathfrak{q}}$$

Para cada primo de U tal existe unha veciñanza aberta $W \subset U$ de \mathfrak{q} tal que

$$\forall \mathfrak{p} \in W, s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f}, \text{ con } f \notin \mathfrak{q}.$$

Verifícase que $\mathcal{O}(U)$ é un anel conmutativo e se $V \subset U$, a restricción

$$\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$$

é un homomorfismo de aneis. Daquela o funtor \mathcal{O} é un feixe de aneis, e diremos que o espectro de A é $\text{Spec } A$ xunto coa estrutura de feixe \mathcal{O} .

Esta construción constitúe unha xeralización das nocións xeométricas e das relacións destas coa álgebra conmutativa que se tiñan na concepción clásica, porque:

Proposición 2. Dado $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$ verifícase:

(a) $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}$.

(b) $\forall f \in A, \mathcal{O}(D(f)) \simeq A_f$.

(c) En particular, $\mathcal{O}(\text{Spec } A) \simeq A$ (tomamos $f = 1$ en (b)).

Definición 5. *Un espazo anelado é un par (X, \mathcal{O}_X) con X un espazo topolóxico e \mathcal{O}_X un feixe de aneis en X . O morfismo de espazos anelados*

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f, f^\#)} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

é un par formado por unha aplicación continua de espazos topolóxicos $f : X \rightarrow Y$ e un morfismo de feixes de aneis $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_\mathcal{O}_X$ en Y .*

Dicimos que un par (X, \mathcal{O}_X) é localmente anelado se pra todo $\mathfrak{p} \in X$, o tallo $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ é un anel local, e un morfismo de espazos localmente anelados non é máis ca un morfismo de espazos anelados tal que a aplicación inducida nos tallos é un homomorfismo local de aneis para todo punto.

Afondando algo máis na relación entre os conceptos xeométricos e os alxébricos, enunciámos a seguinte proposición:

Proposición 3. *(a) Se A é un anel, $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$ é un espazo localmente anelado.*

(b) Un morfismo de aneis $\varphi : A \rightarrow B$ induce un morfismo natural de espazos anelados

$$(f, f^\#) : (\text{Spec } B, \mathcal{O}_{\text{Spec } B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}).$$

(c) Se A e B son aneis, daquela calquera morfismo de espazos localmente anelados de $\text{Spec } B$ en $\text{Spec } A$ vén inducido por un homomorfismo de aneis $\varphi : A \rightarrow B$ coma en (b).

Estamos agora en condicións de definir a noción de esquema:

Definición 6. *Un esquema afín é un espazo localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) isomorfo (como espazo localmente anelado) ao espectro dalgún anel.*

Un esquema é un espazo localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) tal que cada punto ten unha veciñanza aberta U de xeito que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ é un esquema afín. Un morfismo de esquemas é un morfismo de espazos anelados.

Bibliografía

- [1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald; *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté, 1973.
- [2] D. Eisenbud; *Commutative algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **150**, Springer-Verlag New York, 1995.
- [3] R. Hartshorne; *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag New York, 1971.

Subastas, ¿quién da más?

Julio González Díaz

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

17 de Enero de 2006

Resumen

Dentro de los campos de la teoría de juegos y la teoría económica, la teoría de subastas es muy importante por razones tanto teóricas como prácticas. Un gran número de bienes, servicios, propiedades e instrumentos financieros se venden a través de subastas. A esto hay que añadir la aparición reciente de nuevos mercados donde las subastas desempeñan un papel importante: venta por Internet, adjudicación de licencias de telefonía, permisos de contaminación,...

De entre los muchos tipos de subastas que hay, a continuación esbozamos el funcionamiento de los cuatro más comunes.

Subasta ascendente: La más popular de todas las subastas. El precio se va subiendo sucesivamente hasta que sólo queda un agente, que se lleva el objeto al precio final.

Subasta descendente: El funcionamiento ahora es el opuesto. El director de la subasta inicia con un precio muy alto y lo va bajando sucesivamente hasta que algún agente manda parar. Dicho agente se lleva el objeto al precio final.

Subasta sellada al primer precio: Todos los agentes someten, simultánea e independientemente, una puja. El objeto se lo lleva el agente que haya hecho la puja más alta y paga el precio de dicha puja.

Subasta sellada al segundo precio: El funcionamiento es análogo al de la subasta sellada al primer precio, pero el agente que gana paga la segunda puja más alta, no la suya propia.

Se puede demostrar que, desde el punto de vista estratégico, la subasta al primer precio es equivalente a la subasta descendente y, en muchas situaciones, la subasta al segundo precio es equivalente a la subasta ascendente. A continuación definimos formalmente las subastas al primer y segundo precio.

Dado un objeto a subastar y un conjunto de agentes $N = \{1, \dots, n\}$ con valoraciones $\{v_1, \dots, v_n\}$, una subasta sellada al primer precio se puede formalizar como un juego dado por la tripleta (N, X, H^I) , donde N es el conjunto de jugadores,

PALABRAS CLAVE: teoría de juegos, diseño de subastas.

$X := \prod_{i=1}^n X_i$, donde $X_i = [0, \infty)$ denota las estrategias (pujas) posibles del jugador i , y $H^I := \prod_{i=1}^n H_i^I$, donde, para cada $i \in N$, su función de utilidad $H_i^I: X \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$H_i^I(x) = \begin{cases} v_i - x_i & x_i > \max_{j \neq i} x_j \\ \frac{v_i - x_i}{|\{j: x_j = \max_{j \in N} x_j\}|} & x_i = \max_{j \neq i} x_j \\ 0 & x_i < \max_{j \neq i} x_j. \end{cases}$$

De modo similar, una subasta sellada al segundo precio se define como una tripleta (N, X, H^{II}) , donde

$$H_i^{II}(x) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} x_j & x_i > \max_{j \neq i} x_j \\ \frac{v_i - \max_{j \neq i} x_j}{|\{j: x_j = \max_{j \in N} x_j\}|} & x_i = \max_{j \neq i} x_j \\ 0 & x_i < \max_{j \neq i} x_j. \end{cases}$$

Una vez que hemos modelizado formalmente las subastas selladas como juegos, el siguiente paso sería utilizar las herramientas y conceptos de teoría de juegos para analizar los distintos tipos y comprender las posibles ventajas e inconvenientes de cada uno. De todos modos, en la representación que hemos hecho de las subastas hemos asumido implícitamente que las valoraciones que los distintos jugadores tienen del objeto son de conocimiento común, cosa que, aunque reduce las subastas a unos juegos muy fáciles de estudiar, no es muy realista. Para hacer un análisis riguroso de los distintos tipos de subastas se usan modelos más complicados, que permiten estudiar situaciones en las que los distintos jugadores tengan distinta información acerca de las valoraciones de los otros.

A la hora de elegir qué subasta es la más apropiada para una situación en concreto hay que ser muy cuidadoso y analizar con detalle el marco en el que se va a encuadrar la puja. Como es natural, a la hora de diseñar una subasta hay que intentar que esta resulte lo más competitiva posible y que, por ejemplo, no deje margen para ningún tipo de colusión entre los distintos jugadores. En este sentido, han sido especialmente relevantes los estudios de Paul Klemperer. A continuación mostramos uno de los ejemplos que más repercusión han tenido y que ha puesto de manifiesto la importancia del diseño óptimo de subastas. Se trata de las subastas que tuvieron lugar en Europa en los años 2000 y 2001 para adjudicar las licencias de telefonía móvil de *tercera generación* (3G, UMTS). La Tabla 1 muestra que, aunque las subastas movieron un volumen de capital superior al 1.5 del producto interior bruto de los países afectados, hubo una enorme varianza en los resultados conseguidos por cada país. El marco en el que se produjeron las distintas subastas era muy similar en los distintos países, cambiando simplemente la forma en la que las subastas en sí fueron diseñadas.

En los precios finales fueron muy importantes las fechas de las subastas, ya que la expectación generada por 3G descendió notablemente durante el periodo en el que las subastas tuvieron lugar. Paul Klemperer fue uno de los principales asesores a la hora de diseñar la subasta en el Reino Unido y, tras estudiar el número de licencias a la venta y el número de empresas interesadas, planteó una subasta que, a la postre, resultó tremendamente competitiva. Véase [1] para más detalles en cómo se llevaron

Año 2000		Año 2001	
Alemania	615	Bélgica	45
Austria	100	Dinamarca	95
Holanda	170	Grecia	45
Italia	240		
Reino Unido	650		
Suiza	20		

Táboa 1: Ingresos (en euros *per capita*) derivados de las subastas 3G

a cabo las distintas subastas de licencias de telefonía móvil de tercera generación y [2] para un tratado completo de la teoría de subastas.

Bibliografía

- [1] P. Klemperer; How (Not) to Run Auctions: the European 3G Telecom Auctions, *European Economic Review* **46** (2002), 829-845.
- [2] P. Klemperer; *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, 2004.

Un espazo foliado de mosaicos

Pablo González Sequeiros

Departamento de Xeometría e Topoloxía

24 de Xaneiro de 2006

Resumo

Un *mosaico* ou *teselación* do plano, \mathcal{T} , é unha descomposición deste en subconxuntos chamados *teselas*, xeralmente polígonos dispostos lado con lado, obtidos por translación (ou mediante un subgrupo de movementos ríxidos que conteña ás translacións) a partir dun conxunto de teselas modelo ou *prototeselas*.

Fixando un punto en cada tesela, obtense unha discretización ou *conxunto base* do mosaico. Cando o mosaico só ten un número finito de prototeselas, a elección dun *punto base* en cada prototesela determina un conxunto base de todo o mosaico e calquera conxunto base D é un *conxunto de Delone* do plano, é dicir, un conxunto r -discreto ($\overline{B}(x, r) \cap D \subset \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}^2$) e R -denso ($d(x, D) \leq R, \forall x \in \mathbb{R}^2$).

A priori, dous mosaicos que se diferencian nunha translación son distintos. Mais pode ser que un mosaico coincida con algún dos seus trasladados, coma no caso dun mosaico regular por cadrados unidade, que se conserva por desprazamentos enteiros. Un mosaico que non se conserve en ningunha dirección ($\mathcal{T} \neq \mathcal{T} + v, \forall v \in \mathbb{R}^2$) chámase *aperiódico*. O interese por este tipo de mosaicos nace nos anos 60 dos traballos do lóxico H. Wang sobre as máquinas de Turing. Wang conxeturara a non existencia de prototeselas aperiódicas, isto é, que teselan o plano só de xeito aperiódico. Nembargantes, en 1966, o seu alumno R. Berger construíu un contraexemplo con 20.426 prototeselas. Algo despois, e de maneira independente, R. M. Robinson e R. Ammann reduciron este número a 6. En 1974, R. Penrose deu un afamado exemplo con dúas prototeselas aperiódicas: o dardo e o papaventos.

Por outra banda, en 1982 o equipo do profesor D. Shechtman do Departamento de Enxeñería de Materiais do Israel Institute of Technology-Technion, descubriu unha aleación de aluminio e manganeso coas características físicas propias dun cristal, pero que presentaba un patrón de difracción imposible. Xurdiu así o primeiro exemplo de *sólido case cristalino*, e resultou que a discretización dun mosaico de Penrose por dardos e papaventos era o modelo do seu patrón de difracción. Isto favoreceu o estudo teórico dos mosaicos aperiódicos como modelos para os posibles patróns de difracción dos sólidos case cristalinos.

PALABRAS CLAVE: mosaico (de Robinson), aperiódico, espazo foliado, repetitivo, envoltura.

Espazo foliado de Gromov-Hausdorff

Sexa $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ o conxunto de todos os mosaicos obtidos a partir do mesmo conxunto finito de prototeselas \mathcal{P} . Defínese a *topoloxía de Gromov-Hausdorff* facendo que dous mosaicos sexan próximos se coinciden nunha bóla grande centrada na orixe, salvo pequenas translacións. De xeito explícito, unha base de entornos dun mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ está dada por

$$U_{\varepsilon, \varepsilon'}^R(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \mid \exists v, v' \in \mathbb{R}^2 : \|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon', R(\mathcal{T} + v, \mathcal{T}' + v') > R\}$$

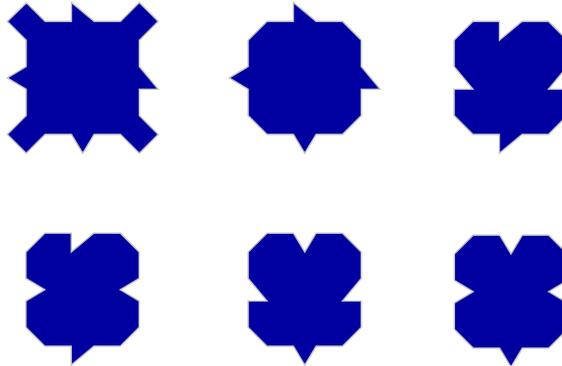
onde

$$R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \sup\{R \geq 0 : B_{\mathbb{R}^2}(0, R) \cap \mathcal{T} = B_{\mathbb{R}^2}(0, R) \cap \mathcal{T}'\}.$$

Esta topoloxía convirte a $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ nun espazo compacto metrizable, dotado dunha estrutura foliada na que a folla dun mosaico é a súa órbita pola acción natural de \mathbb{R}^2 en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. As clausuras das follas, denominadas *envolturas*, son conxuntos saturados de singular interese. A envoltura dun mosaico é un conxunto minimal cando o mosaico é *repetitivo*, isto é, satisfai a seguinte condición de repetición uniforme: para todo $r > 0$ existe $R = R(r) > 0$ tal que calquera motivo (unión finita de teselas) de diámetro $< r$ posúe unha copia por translación dentro de calquera bóla de radio R .

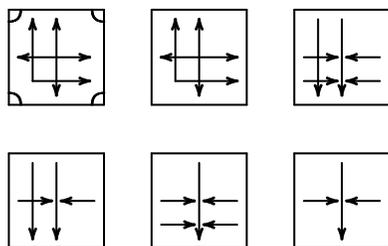
Espazo foliado dos mosaicos de Robinson

Chámamos *mosaicos de Robinson* aos construídos a partir das seguintes 6 prototeselas presentadas por Robinson en 1971 ([3]). As dúas primeiras denomínanse *cruces*, respectivamente *con cornos* e *sen cornos*. As restantes, con rañuras, chámanse *brazos*.



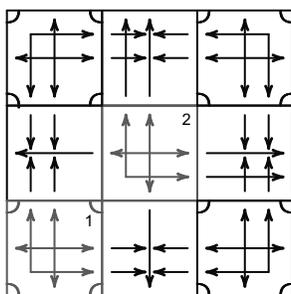
As 6 prototeselas de Robinson

Hai outra representación máis cómoda por cadrados decorados ([2], [3]):



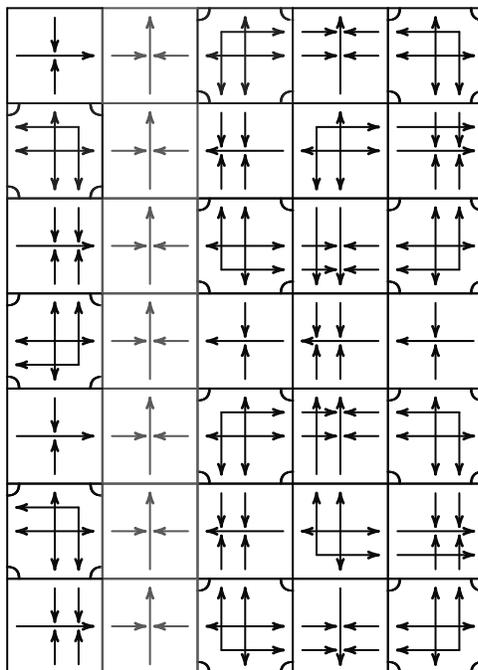
Compre precisar que as teselas dos mosaicos de Robinson poden obterse a partir destas 6 prototeselas por translación, pero tamén mediante xiros de 90° , 180° e 270° ou por reflexión respecto do eixo de ordenadas. É dicir, estamos falando dun conxunto \mathcal{P} con 32 tipos de prototeselas por translación. Por outra banda, a maioría dos mosaicos de Robinson satisfán a condición de repetición uniforme, pois poden construírse por medio dun proceso repetitivo:

- Pártese dun cruce con cornos colocado cunha das catro orientacións posibles (o que aparece na figura ou algunha das súas imaxes polos xiros de 90° , 180° e 270°)⁽¹⁾.
- Replícase a peza inicial (mediante xiros de 90° , 180° e 270°).
- Engádesse un motivo formado por 5 teselas en forma de cruz. Para isto, elíxese a peza central, á forza un cruce sen cornos ⁽²⁾, e as restantes, que deben ser brazos, quedan determinadas.



Obtense así un bloque de 3×3 teselas. De xeito análogo, constrúense bloques de lado $(2^{n+1} - 1)$ a partir de bloques de lado $(2^n - 1)$. A elección dos cruces centrais determina a rexión do plano que se tesela: un cuadrante, un semiplano ou o plano completo.

Nos dous primeiros casos tamén é posible teselar todo o plano, “pegando” axeiadamente os cuadrantes e semiplanos obtidos cos seus replicados. Pero a forma de pegar non ten por que ser simétrica. Podemos introducir “faias”, que suprimen o carácter repetitivo:



Tendo en conta o proceso de construción e as propiedades da topoloxía de Gromov-Hausdorff, se \mathfrak{R} denota o conxunto de todos os mosaicos de Robinson agás os que conteñen algún tipo de faia, é sinxelo probar:

Proposición 4. *Todo mosaico de Robinson é aperiódico, isto é, o conxunto das prototeselas de Robinson é aperiódico.*

Proposición 5. *O subespazo \mathfrak{R} coincide co conxunto dos mosaicos de Robinson que son repetitivos. Ademais, \mathfrak{R} obtense como a envoltura de calquera deles.*

Bibliografía

- [1] P. González Sequeiros; *A dinámica dos mosaicos de Robinson*, Publ. Dpto. Geom. Top. **107**, USC, 2006.
- [2] B. Grünbaum, G. C. Shephard; *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Co., New York, 1987.
- [3] R. M. Robinson; Undecidability and Nonperiodicity of Tilings of the Plane, *Inventiones Math.* **12** (1971), 177–209.

Aplicaciones de la Estadística al tratamiento de aguas

María Castellano Méndez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

31 de Enero de 2006

Resumen

La Digestión Anaeróbica (AD) es un proceso complejo mediante el cual la materia orgánica se transforma en compuestos más simples sin la necesidad de la participación de oxígeno molecular. Los tratamientos anaerobios son procesos complejos en los que tienen lugar un gran número de subprocesos (de tipo biológico y físico-químico) que se desarrollan tanto en serie como en paralelo, generando un espacio multidimensional de respuestas y operación. El análisis multivariante, por tanto, resulta una herramienta adecuada para analizar este tipo de problemas. La estabilidad del sistema es un tema complejo, que ha de ser estudiado cuidadosamente. Así mismo la operación en estado estacionario es el estado idóneo de funcionamiento, bajo el que se pueden conocer muchas propiedades del proceso.

La detección de estados estacionarios es un punto clave para el análisis de procesos: mantenimiento, optimización, control,... Existen diversos trabajos sobre la detección de estados estacionarios, pero pocos sobre algoritmos de detección on-line. Estos trabajos además suelen referirse a procesos univariantes. En este trabajo se emplea Análisis de Componentes Principales (PCA) para la reducción del número de variables y para obtener variables incorreladas. Esto permitió pasar a un problema bidimensional [1], de modo que las nuevas variables se utilizaron para la determinación de los estados estacionarios, empleando la metodología propuesta por Cao y Rhinehart [2].

Una vez detectados los estados estacionarios, es posible estimar los parámetros de los modelos cinéticos del sistema, empleando sólo aquellos datos en estado estacionario. Se han empleado técnicas bootstrap, en particular Bootstrap paramétrico, para aproximar la distribución de los estimadores de los parámetros, con el fin de obtener regiones de confianza para estos y para el modelo estimado.

Se dispone de datos de una planta de tratamiento anaeróbico de aguas residuales, compuesta por un reactor híbrido UASB-UAF de 1 m³ que se monitoriza a través de 17 variables. Se realizaron 4 sobrecargas a distintas velocidades de carga orgánica, para cubrir el espectro de las posibles situaciones del sistema, en particular de los estados de inhibición y no inhibición de las bacterias metanogénicas. Se aplicó PCA para reducir la dimensión del problema y la metodología de Cao y Rhinehart para detectar los momentos en los que el sistema se encuentra en estado estacionario.

PALABRAS CLAVE: componentes principales, estado estacionario, bootstrap.

La relación entre el caudal de metano en la fase gaseosa y el DOC (carbono orgánico disuelto) del efluente suele establecerse empleando un modelo Haldane de inhibición cuando el sistema se encuentra en condiciones estacionarias. Se estimaron los parámetros del modelo de Haldane empleando mínimos cuadrados ponderados, de modo que los diferentes estados estacionarios, asociados a las distintas velocidades de carga orgánica, tuviesen el mismo peso. Se aplicó Wild Bootstrap paramétrico, para la estimación de la distribución de los estimadores de los parámetros.

La Figura 1 presenta el ejemplo cinético en el que se trabajó, un modelo cinético de Haldane, que relaciona la tasa de reacción con la concentración de un reactivo.

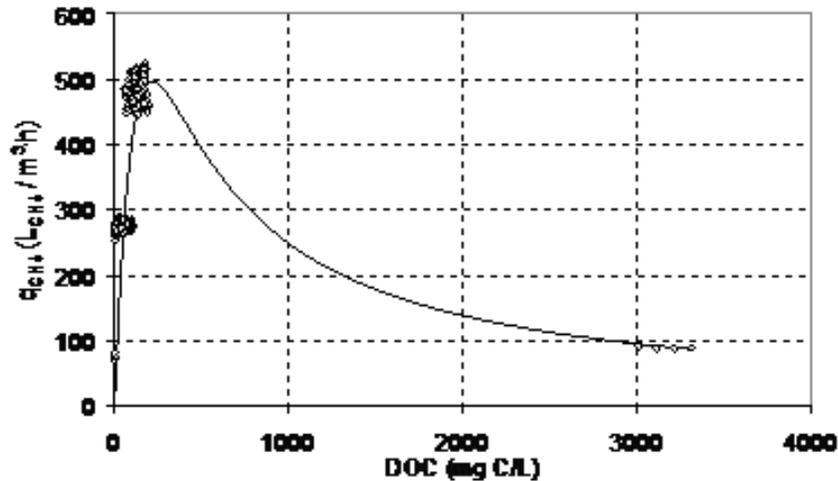


Figura 1: Modelo Haldane estimado

Las estimaciones bootstrap muestran que los parámetros estimados presentan una clara relación de dependencia entre sí, lo que reduce el tamaño de la región de confianza. Asimismo se determinó para cada valor del DOC un intervalo de confianza bootstrap al 95% para el valor del caudal de metano, es decir, sólo en un 5% de los casos el valor verdadero del DOC caerá fuera del intervalo en cuestión. La Figura 2 muestra la estimación bootstrap de la distribución de las estimaciones de los parámetros, así como el intervalo bootstrap y la relación entre los parámetros.

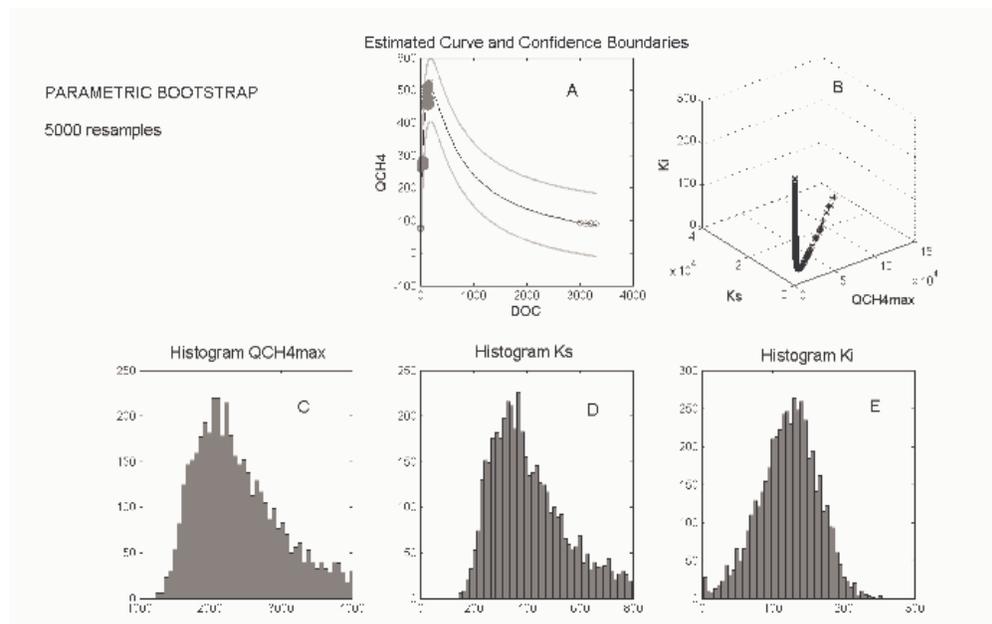


Figura 2: Estimación bootstrap

Bibliografía

- [1] G. Ruiz, M. Castellano, W. González, E. Roca, J. M. Lema; Algorithm for steady state detection of multivariate process: Application to anaerobic wastewater digestion process, en *Proceedings of the 2nd International IWA Conference on Automation in Water Quality Monitoring (AutMoNet)*, BOKU University, Viena, 2004.
- [2] S. L. Cao, R. R. Rhinehart; An efficient method for on-line identification of steady state, *Journal of Process Control* **5** (1995), 363–374.

Formulación de un problema de interfase entre dos fluidos

Jerónimo Paredes Cáceres

Departamento de Recursos Híbridos. Universidad de Concepción. Chile.

7 de Febrero de 2006

Resumen

Consideramos dos fluidos newtonianos, incompresibles, inmiscibles, con densidades ρ y, eventualmente, viscosidades diferentes. Estudiaremos el movimiento de los dos fluidos, en particular el de la interfase entre ambos, debido al efecto de fuerzas externas. Para fijar ideas se considera el caso de una burbuja de uno de ellos en el interior del otro, en una región del plano. Las fuerzas externas que incluiremos en nuestro modelo son las de gravedad, por lo que el movimiento se produce por la diferencia de densidad entre los fluidos. Nos interesa calcular, además de la posición de su interfase en cualquier instante de tiempo, la presión y la velocidad en cada punto de la región que ocupan.

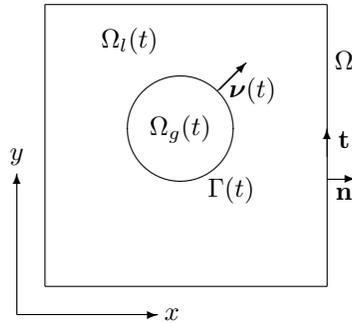


Figura 1: Región ocupada por cada fluido

Sea Ω una región de \mathbb{R}^2 y $[0, T]$ un intervalo en \mathbb{R} , para $T > 0$. En Ω distinguiremos dos regiones $\Omega_g(t)$ y $\Omega_l(t)$; $\Omega_g(t)$ denotará la región ocupada, en el instante t , por uno de los fluidos que llamaremos *gas*, mientras que la región $\Omega_l(t)$ será la ocupada por el otro que llamaremos *líquido*. Supondremos que ambos $\Omega_g(t)$ y $\Omega_l(t)$ son abiertos de frontera Lipschitziana. Además $\Omega_g(t)$ se supondrá simplemente conexo, $\overline{\Omega_g(t)} \subset \Omega$, $t \in [0, T]$ y $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_g(t)} \cup \overline{\Omega_l(t)}$. Denotaremos por $\Gamma(t)$ a $\partial\Omega_l(t) \cap \partial\Omega_g(t)$,

PALABRAS CLAVE: Navier-Stokes bifásico, conjunto de nivel, burbuja.

$\boldsymbol{\nu}$ la normal unitaria a $\Gamma(t)$, dirigida hacia el exterior de $\Omega_g(t)$ y \mathbf{n} la normal unitaria exterior a Ω .

El movimiento de ambos fluidos se rige por la ecuación de equilibrio

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} , \quad (1)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}$ denota la derivada material del campo de velocidades \mathbf{u} . Representamos por ρ_g, ρ_l las densidades del *gas* y del *líquido*, respectivamente. Por otra parte \mathbf{T}_g y \mathbf{T}_l denotan los tensores de esfuerzos de Cauchy para cada fluido, y $\mathbf{f}_g, \mathbf{f}_l$ las respectivas fuerzas de gravedad.

Mientras que la velocidad se supone continua, sobre la interfaz $\Gamma(t)$ el salto de las fuerzas se regirá por la siguiente ley de proporcionalidad

$$(\mathbf{T}_l - \mathbf{T}_g)\boldsymbol{\nu} = \sigma\kappa\boldsymbol{\nu} \quad \text{en } \Gamma(t) , \quad (2)$$

donde κ es la curvatura de $\Gamma(t)$ y σ un parámetro escalar llamado *coeficiente de tensión superficial*.

Como además hemos supuesto que ambos fluidos son newtonianos, escribimos para el *gas* y el *líquido* sendas leyes constitutivas:

$$\mathbf{T}_g = -\pi_g \mathbf{Id} + 2\mu_g \mathbf{D}(\mathbf{u}_g) \quad \text{en } \Omega_g(t) , \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_l = -\pi_l \mathbf{Id} + 2\mu_l \mathbf{D}(\mathbf{u}_l) \quad \text{en } \Omega_l(t) , \quad (4)$$

donde $\pi_g, \pi_l, \mu_g, \mu_l$ son las presiones y las viscosidades del fluido en $\Omega_g(t)$ y $\Omega_l(t)$, respectivamente, en tanto que \mathbf{D} denota la parte simétrica del tensor gradiente de velocidades.

En la frontera de Ω se impone una condición de deslizamiento sin rozamiento, es decir, se exige que la componente normal de la velocidad y la componente tangencial de la fuerza sean nulas en la frontera de Ω . También imponemos la condición inicial para la velocidad como \mathbf{u}_g^0 y \mathbf{u}_l^0 en la zona gaseosa y líquida, respectivamente.

Siguiendo la notación introducida por [3], sea $\mathcal{B} = \overline{\Omega}$ la configuración inicial de referencia, sea p un punto material de \mathcal{B} y ϕ_0 una función definida sobre \mathcal{B} y tal que

$$\phi_0(p) \begin{cases} < 0 & \text{si } p \in \Omega_g(0), \\ = 0 & \text{si } p \in \Gamma(0), \\ > 0 & \text{si } p \in \Omega_l(0). \end{cases} \quad (5)$$

Una función ϕ_0 con estas características se puede construir, por ejemplo, considerando la *distancia signada* desde cualquier punto p a la interfaz $\Gamma(0)$.

Veamos ahora la evolución de la función $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\phi(x, t) = \phi_0(P(x, t)) , \quad (6)$$

donde P es la aplicación de referencia que corresponde a la aplicación inversa del movimiento X , (ver [3]). Esto nos lleva a concluir que la derivada material de ϕ es nula, es decir,

$$\dot{\phi}(x, t) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Usando la regla de la cadena es posible escribir (7) como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi = 0, \quad x \in \Omega \quad \text{y } 0 < t < T. \quad (8)$$

Además se deduce que ϕ , evolución de ϕ_0 , mantiene para cualquier $t > 0$, la propiedad

$$\phi(x, t) \begin{cases} < 0 & \text{si } x \in \Omega_g(t), \\ = 0 & \text{si } x \in \Gamma(t), \\ > 0 & \text{si } x \in \Omega_l(t). \end{cases} \quad (9)$$

De esta manera, considerando la ecuación (8) junto a una condición inicial

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (10)$$

podemos representar la interfase $\Gamma(t)$ a través del conjunto de nivel cero de la función ϕ , es decir,

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega / \phi(x, t) = 0\}. \quad (11)$$

El acoplamiento de las ecuaciones del movimiento con la ecuación del transporte (8) junto con las condiciones iniciales para la velocidad y (10), además de las condiciones de contorno, y la de transmisión (2), constituyen un sistema completo de ecuaciones en las incógnitas presión (p), salvo constante, velocidad (\mathbf{u}) y función de nivel (ϕ).

Si además suponemos que las viscosidades de cada fluido permanecen constantes en sus respectivos dominios $\Omega_g(t)$ y $\Omega_l(t)$, entonces las ecuaciones del modelo las podemos escribir como,

$$\rho_g \left(\frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g \right) + \text{grad } p_g - \mu_g \Delta \mathbf{u}_g = \mathbf{f}_g \quad \text{en } \Omega_g(t) \times (0, T), \quad (12)$$

$$\text{div } \mathbf{u}_g = 0 \quad \text{en } \Omega_g(t), \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_g(x, 0) = \mathbf{u}_g^0(x) \quad \text{en } \Omega_g(0), \quad (14)$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l \right) + \text{grad } p_l - \mu_l \Delta \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_l \quad \text{en } \Omega_l(t) \times (0, T), \quad (15)$$

$$\text{div } \mathbf{u}_l = 0 \quad \text{en } \Omega_l(t), \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_l(x, 0) = \mathbf{u}_l^0(x) \quad \text{en } \Omega_l(0), \quad (17)$$

$$(\mathbf{T}_l - \mathbf{T}_g)\boldsymbol{\nu} = \sigma \kappa \boldsymbol{\nu} \quad \text{en } \Gamma(t), \quad t > 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{u}_l \quad \text{en } \Gamma(t), \quad t \geq 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_l \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{en } \partial \Omega, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \phi = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (21)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (22)$$

que finalmente forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales acoplado y no lineal.

Este sistema constituye el modelo matemático del proceso físico descrito con anterioridad. En un trabajo posterior proponemos métodos numéricos para su resolución. Primeramente, asumiendo conocidas las posiciones de ambos fluidos a lo largo del tiempo, nos ocupamos de las ecuaciones del movimiento (12) a (20), que constituyen un problema de Navier-Stokes bifásico, cuyo tratamiento numérico está basado en [1] y [2]. Posteriormente, resolvemos el problema de transporte (21), (22) suponiendo que, el campo de velocidades, \mathbf{u} es conocido; el tratamiento de este problema hiperbólico lo hacemos utilizando las técnicas presentadas en [4] y [5]. Para finalizar acoplamos el algoritmo propuesto para ambos modelos.

Bibliografía

- [1] D. N. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin; A stable finite element for the Stokes equations, *Calcolo* **21** (1984), 337–344.
- [2] A. Bermúdez, J. Durany; La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection-diffusion stationnaires, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **21** (1987), 7–26.
- [3] M. E. Gurtin; *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.
- [4] S. Osher, J. A. Sethian; Front propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.* **79** (1988) 12–49.
- [5] M. Sussman, E. Fatemi; An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow, *SIAM J. Sci. Comput.* **20** (1999), 1165–1191.

Hojas con mucho código

Álvaro Lozano Rojo

Dpto. de Matemáticas. Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV-EHU.

14 de Febrero de 2006

Resumen

Una *foliación* es una descomposición \mathcal{F} de una n -variedad M en sub- p -variedades conexas, las *hojas*, de forma que localmente se apilan como los subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ con segunda coordenada constante. En otras palabras, se tiene un atlas $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}\}$ de M , de forma que el cambio de coordenadas se escribe como

$$\varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1}(x_{\beta}, y_{\beta}) = (x_{\alpha}(x_{\beta}, y_{\beta}), y_{\alpha}(y_{\beta})). \quad (1)$$

Cada conjunto $\varphi_{\alpha}^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{*\})$ se denomina *placa*. La unión de placas que se intersecan dos a dos forman una p -subvariedad, una hoja de la foliación \mathcal{F} en el sentido anterior. Se llaman *transversales* a los conjuntos $\varphi_{\alpha}^{-1}(\{*\} \times \mathbb{R}^{n-p})$. Estas últimas contienen mucha información sobre la dinámica de la foliación.

Ejemplo 1 (Suspensiones de giros del círculo). Sea $g_{\lambda}(e^{2\pi t}) = e^{2\pi(t+\lambda)}$ el giro de $2\pi\lambda$ radianes definido sobre el círculo unidad $\mathbb{S}^1 = \{e^{2\pi t} : t \in [0, 1]\}$. Definimos el espacio cociente

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 / (x, s) \sim (x - 1, g_{\lambda}(s)).$$

Dicho espacio no es otra cosa que el toro usual. Además, posee una foliación natural \mathcal{F}_{λ} , inducida en el cociente por la foliación *horizontal* $\mathcal{H} = \{\mathbb{R} \times \{s\} : s \in \mathbb{S}^1\}$ definida sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ (véase Figura 1). Se puede probar que si $\lambda \in \mathbb{Q}$, todas las hojas de \mathcal{F}_{λ} son círculos, y hecho, existe un difeomorfismo $\Phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ que lleva \mathcal{F}_{λ} sobre la foliación horizontal $\mathcal{F}_0 = \{\mathbb{S}^1 \times \{s\} : s \in \mathbb{S}^1\}$. Si en cambio $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, todas las hojas son rectas densas en \mathbb{T}^2 .

Ejemplo 2 (Acciones de grupos de Lie). Supongamos que G es un grupo de Lie que actúa sobre una variedad M . Cada G -órbita de un punto $p \in M$ puede identificarse naturalmente con G/G_p , donde G_p es el grupo de los elementos de G que dejan invariante a p . En general la partición por G -órbitas no es una foliación, ya que dos órbitas distintas podrían tener dimensiones diferentes. Pero, si la acción es localmente libre, es decir, G_p es siempre un grupo discreto, las G -órbitas son las hojas de una foliación sobre M .

PALABRAS CLAVE: laminación, shift de Bernoulli, dinámica simbólica.

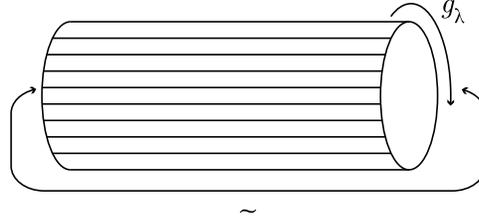


Figura 1: Diagrama de la construcción de la suspensión de g_λ .

Al estudiar foliaciones, en ocasiones, es necesario estudiar subespacios saturados para la foliación, es decir, uniones de hojas. Dichos espacios ya no son en general variedades, sino espacios métricos localmente compactos y separables, dotados de una “estructura foliada” obtenida al restringir el atlas que define la foliación original. Este ejemplo modela la definición de laminación: una *laminación* \mathcal{L} sobre un espacio métrico, localmente compacto y separable M , queda definida mediante un atlas $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^p \times T_\alpha\}$, donde los cambios de coordenadas verifican (1) y T_α es un abierto de Z , un espacio métrico, localmente compacto y separable fijado de antemano. Se dice que Z *modela transversalmente* la laminación \mathcal{L} .

Ejemplo 3. Considerese el conjunto $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de todas las sucesiones de ceros y unos infinitas en ambas direcciones. En este conjunto existe una topología natural que lo convierte en un conjunto de Cantor (el único espacio métrico compacto, totalmente disconexo y perfecto salvo homeomorfismo). Dicha topología viene dada por la métrica

$$d(\alpha, \beta) = e^{-\sup\{N \in \mathbb{N} \mid \alpha_i = \beta_i, \forall i \text{ tal que } |i| \leq N\}}.$$

Es decir, dos sucesiones son cercanas si coinciden en muchas entradas alrededor de la posición 0. En este espacio definimos el *shift de Bernoulli* como $\sigma(\alpha) = \tilde{\alpha}$, con $\tilde{\alpha}_i = \alpha_{i-1}$. Podemos interpretar σ como una traslación de la sucesión a la izquierda:

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha = & \cdots & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ & & & & \downarrow \sigma & & & \\ \sigma(\alpha) = & \cdots & \alpha_{-3} & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \end{array}$$

El shift de Bernoulli es un homeomorfismo de \mathcal{C} , con lo que podemos realizar una construcción como la de las suspensiones de giros del círculo. Consideremos el espacio cociente

$$M = \mathbb{R} \times \mathcal{C} / (x, \alpha) \sim (x - 1, \sigma(\alpha)).$$

Como en el Ejemplo 1, M está dotado de una laminación inducida \mathcal{L} modelada transversalmente por el conjunto de Cantor \mathcal{C} :

$$\mathcal{L} = \{\pi(\mathbb{R} \times \{\alpha\}) \mid \alpha \in \mathcal{C}\},$$

con $\pi : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow M$ la aplicación cociente. En la figura 2 se puede ver una representación del espacio M . Las hojas de \mathcal{L} no son otra cosa que los segmentos horizontales, identificando los puntos extremos como se indica.

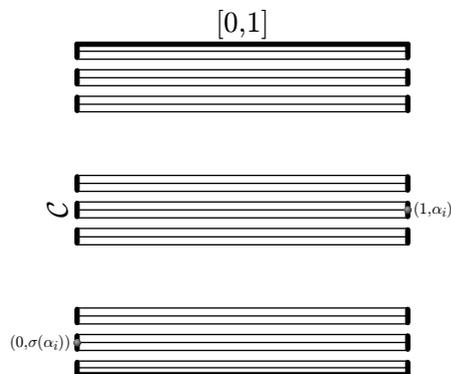


Figura 2: La suspensión del shift de Bernoulli

Las propiedades de la laminación (M, \mathcal{L}) pueden leerse en los *códigos* $\alpha \in \mathcal{C}$. El siguiente diccionario presenta algunas propiedades que se deducen rápidamente observando las sucesiones de \mathcal{C} :

Pequeño diccionario	
Posee una hoja densa, en consecuencia M es conexo	Existe un código en \mathcal{C} con todas las posibles sucesiones finitas
La hoja es un círculo	El código es periódico
La hoja es una recta	El código es aperiódico
Existe una cantidad contable de hojas que son círculos, el resto son rectas	Solo hay una cantidad contable de combinaciones finitas de dos símbolos (los posibles periodos)

En este sencillo ejemplo se puede intuir la idea de *codificación*: tomar una laminación y reducir su dinámica a una relación conocida sobre sucesiones de símbolos. Esta idea ha dado información sobre espacios foliados no tan sencillos como el presentado anteriormente, como por ejemplo los espacios de mosaicos de Penrose o Robinson (véase [3]) o el espacio foliado de Ghys–Kenyon (véase [1]).

Bibliografía

- [1] Á. Lozano Rojo; *La dinámica de la laminación de Ghys–Kenyon*, Trabajo de DEA, UPV–EHU, 2004.
- [2] A. Candel, L. Conlon; *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics **23**, AMS, 2000.
- [3] P. González Sequeiros; *A dinámica dos mosaicos de Robinson*, Publ. Dpto. Geom. Top. **107**, USC, 2006.

¿Que é a curvatura?

Esteban Calviño Louzao

Departamento de Xeometría e Topoloxía

21 de Febreiro de 2006

Resumo

Cando pensamos en algo que está curvado, vénsenos a imaxe da estrada pola que pasamos tódolos días, unha escaleira de caracol..., é dicir, estamos pensando nunha cualidade física que posúen certos obxectos. Agora ben, coma case toda propiedade física que é estudada, posúe unha tradución á linguaxe matemática.

A curvatura é un concepto que saltou do ámbito da Física o ámbito da Matemática, logrando co paso do tempo ser protagonista nos dous eidos. Dentro da Matemática non nos debemos esquecer do papel de Gauss e de Riemann. Aínda que quizais sexa coa aparición de Einstein e da Teoría da Relatividade cando se convertiu nun dos obxectos estrela a estudar tanto por físicos como por matemáticos. É este un concepto moi intuitivo cando estamos en dimensións baixas (no caso de curvas e superficies) perdéndose a intuición cando tratamos de pensar a curvatura de espazos de dimensión tres ou maior. A intención desta charla era a de dar unha pequena aproximación á curvatura dende o punto de vista matemático, tratando de explicar como se matematizou un concepto físico, e mostrar que o concepto de curvatura se estendeu a dimensións maiores dunha forma máis ou menos natural.

Dimensión 1

Parece natural pensar que o primeiro obxecto do que se estudou a súa curvatura foi unha curva. Formalmente defínese a curvatura dunha curva plana γ como

$$k(t) = |\ddot{\gamma}(t)|$$

onde γ está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Aínda que isto pareza algo moi artificioso veremos que xeometricamente posúe unha interpretación sinxela. Collemos un punto da curva $p = \gamma(t)$. Existen moitos círculos tanxentes á curva γ no punto p . Estes círculos pódense parametrizar de tal xeito que o seu vector velocidade en p sexa o mesmo que o de γ nese punto. Dito con outras palabras, son tódalas circunferencias que teñan o seu centro na recta ortogonal a $\dot{\gamma}$ e pasando polo punto p . Agora ben, de todos estes círculos existe só un que ten por vector

PALABRAS CLAVE: Xeometría de Riemann, curvatura.

aceleración en p o mesmo có de γ , o que chamaremos *círculo osculador*. Neste caso a curvatura é $k(t) = 1/R$ onde R é o radio do círculo osculador. Se γ ten vector aceleración nulo nun punto p substituiremos o círculo osculador por unha liña recta, polo que a curvatura de γ nese punto é nula.

É conveniente estender a noción de curvatura para poder falar de curvaturas positivas ou negativas. Isto conséguese sen máis que escoller un campo de vectores unitarios e normais $N(t)$ ó longo da curva e asignándolle o signo positivo á curva se esta está "xirando" a favor do campo de vectores N .

Dimensión 2

No camiño para xeneralizar o concepto de curvatura a dimensións maiores detémonos no caso de superficies. Neste caso o concepto de curvatura complicase considerablemente se o comparamos co caso de curvas, posto que unha superficie se pódese curvar de xeitos distintos dependendo da dirección.

A curvatura dunha superficie no espacio pódese describir usando unicamente dous números que chamaremos *curvaturas principais*. Veremos como calcular ditos números de maneira máis ou menos intuitiva. Para iso consideremos S unha superficie en \mathbb{R}^3 , p un punto en S , e N un vector unitario e normal a S no punto p . Para calcular as curvaturas principais seguiremos os seguintes pasos:

1. Escollemos un plano π que conteña a N e o punto p . Polo tanto a intersección do plano π con S é unha curva $\gamma \subset S$ pasando por p .
2. Calculamos a curvatura (con signo) de γ en p con respecto ó vector N normal e unitario fixado.
3. Repetimos este proceso para tódolos planos normais π . Daquela as curvaturas principais de S en p , k_1 e k_2 non son máis que o máximo e o mínimo das curvaturas (con signo) que se obtiveron.

O que sería interesante é ver que dúas superficies localmente isométricas teñen as mesmas curvaturas principais. Isto en xeral non é certo, se tomamos o plano \mathbb{R}^2 ten por curvaturas principais $k_1 = k_2 = 0$, por outro lado se tomamos o semicilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z > 0\}$ ten por curvaturas principais $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$, e sen embargo son superficies localmente isométricas.

A solución a este problema deuna Gauss no ano 1827 introducindo unha expresión que involucra as curvaturas principais da superficie: a *curvatura de Gauss*, e esta está definida como

$$K = k_1 k_2.$$

Gauss probou que K é un invariante por isometrías. Por exemplo no plano \mathbb{R}^2 tense que a súa curvatura de Gauss é $K = k_1 k_2 = 0$ e a curvatura de Gauss do semicilindro C é $K = k_1 k_2 = 0$.

O seguinte resultado relaciona a xeometría da superficie (mediante a curvatura de Gauss) coa súa topoloxía (mediante a característica de Euler).

Teorema de Gauss-Bonnet. Sexa S unha superficie compacta e orientable. Entón

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S),$$

onde $\chi(S)$ é a característica de Euler de S que é igual a 2 se S é unha esfera, 0 se é un toro, e en xeral $2 - 2g$ se é unha superficie orientable de xénero g . Dun xeito intuitivo unha superficie compacta e orientable de xénero g é aquela que ten g buracos (un toro ten un buraco, dous toros pegados teñen dous buracos, ...).

Dimensión $n \geq 3$

Para rematar veremos que pasa cando estamos en dimensións maiores. Aínda que o proceso sexa similar ó de superficies, complícase considerablemente posto que temos moitas máis direccións nas que a variedade se pode curvar. Vexamos intuitivamente que é a curvatura nunha variedade de Riemann arbitraria. Consideremos M unha variedade de Riemann n -dimensional, p un punto de M e $T_p M$ o espacio tanxente a M en p . Entón:

1. Consideremos π un subespacio de dimensión dous de $T_p M$.
2. Consideremos todas as xeodésicas que pasando por p teñen vectores tanxentes iniciais contidos no plano π elexido. Con isto temos unha certa subvariedade 2-dimensional S_π de M que contén a p . Ademais herda a métrica riemanniana de M .
3. Calculamos a curvatura de Gauss da superficie S_π no punto p . Con isto obtemos un número $K(\pi)$ chamado *curvatura seccional* de M en p asociada ó plano π .

Polo tanto a “curvatura” de M en p pode interpretarse como unha aplicación

$$K : \{\text{subespacios 2-dimensionales en } T_p M\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

El aluminio, ¿sabemos cómo se comporta?

M^a Cristina Naya Riveiro

Departamento de Matemática Aplicada

7 de Marzo de 2006

Resumen

El aluminio es el elemento metálico más abundante en la corteza terrestre; además, después del hierro es el metal más empleado en la industria en forma de aleaciones ligeras. Sus buenas propiedades mecánicas (su ligereza, conductividad eléctrica, resistencia a la corrosión y bajo punto de fusión) le convierten en un material idóneo para multitud de aplicaciones: transporte aéreo, terrestre, fabricación de perfiles y estructuras para la construcción, fabricación de envases, etc. Sin embargo, la elevada cantidad de energía necesaria para su obtención (el punto de fusión de la alúmina es de 2.000 °C) dificulta su mayor utilización, dificultad que puede compensarse por su bajo coste de reciclado, su dilatada vida útil y la estabilidad de su precio. ¿Sabemos cómo se comporta? Mediante la experimentación, se obtiene que el aluminio sigue una ley de comportamiento de tipo termoviscoelástico, veremos cómo es esta ley.

Notación

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ un abierto, acotado, conexo con frontera lipschitziana. Se considera un sistema de coordenadas cartesianas $Ox_1x_2x_3$ fijo con el cuerpo.

Se denota por S_n el espacio de tensores simétricos de orden dos sobre \mathbb{R}^n dotado del producto escalar habitual: $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\xi} = \tau_{ij}\xi_{ij}$, $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi} \in S_n$, donde los subíndices latinos toman valores en el conjunto $\{1, 2, 3\}$, y se utiliza la notación de Einstein de suma en índices repetidos. Además, $|\boldsymbol{\tau}|$ denota la norma inducida por este producto escalar.

Dada una función escalar $g(x, t)$, se representa por:

- $g(t)$ la función $x \longrightarrow g(x, t)$,
- $\dot{g}(x, t)$ la derivada parcial con respecto a t ,
- $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ la derivada parcial con respecto a la variable x_i .

Consideraremos $[0, t_f]$ el intervalo de tiempo en el que se realiza la modelización mecánica. Denotaremos el campo de desplazamientos por $\mathbf{u}(x, t)$ y el tensor de tensiones por $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$ y se supone conocida la temperatura $T(x, t)$ en cada punto $x \in \Omega$ y en cada instante de tiempo $t \in (0, t_f]$.

PALABRAS CLAVE: aluminio, comportamiento, viscoelástico, térmico.

Ley de comportamiento

La ley de comportamiento considerada es de tipo termoviscoelástico, de manera que el tensor de deformación en cada instante de tiempo es la superposición de las contribuciones debidas al comportamiento viscoelástico del material y las tensiones térmicas debidas a las variaciones de temperatura.

Por tanto, la variación del tensor linealizado de deformación viene dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v(\mathbf{u}) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(\mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (1)$$

donde

- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ es el tensor linealizado de deformación, definido por

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u})$ es el tensor viscoelástico, que obedece una ley de Maxwell-Norton,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u})\mathbf{I}$ es el tensor térmico, siendo \mathbf{I} el tensor identidad.

Ley de comportamiento viscoelástica

Los ensayos experimentales muestran que en la mayoría de los casos, en pequeñas deformaciones, el comportamiento elástico no se ve modificado por las deformaciones viscoplásticas; por tanto, es razonable descomponer el tensor de deformaciones en la suma de la deformación elástica lineal, $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u})$, y la deformación viscoplástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{u})$ (ver Friaâ [4]):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{u}). \quad (2)$$

Se asume que las deformaciones elásticas están relacionadas con el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ mediante la ley de Hooke, dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}) = \Lambda \boldsymbol{\sigma}. \quad (3)$$

Para introducir la dependencia de este tensor con respecto a la temperatura se define una función respuesta $\widehat{\Lambda} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que:

$$\Lambda(x, t) = \widehat{\Lambda}(T(x, t)),$$

siendo $\widehat{\Lambda}(T)$ el automorfismo definido sobre S_n por la relación

$$\Lambda \boldsymbol{\sigma} = \widehat{\Lambda}(T) \boldsymbol{\sigma} = \frac{1 + \widehat{\nu}(T)}{\widehat{E}(T)} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\widehat{\nu}(T)}{\widehat{E}(T)} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}. \quad (4)$$

En (4), $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii}$ es el operador traza y $\widehat{E}(T)$, $\widehat{\nu}(T)$ denotan el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, respectivamente, ambos dependientes de la temperatura.

Recíprocamente, se puede expresar el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ en términos del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u})$ como

$$\Lambda^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}) = \widehat{\Lambda}^{-1}(T)\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}) = \widehat{\lambda}(T)\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}))\mathbf{I} + 2\widehat{\mu}(T)\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}),$$

siendo $\widehat{\lambda}(T)$ y $\widehat{\mu}(T)$ los coeficientes de Lamé, que también se suponen dependientes de la temperatura. Los coeficientes de Lamé están relacionados con \widehat{E} y con $\widehat{\nu}$ por las expresiones

$$\widehat{\lambda}(T) = \frac{\widehat{E}(T)\widehat{\nu}(T)}{(1 + \widehat{\nu}(T))(1 - 2\widehat{\nu}(T))}, \quad \widehat{\mu}(T) = \frac{\widehat{E}(T)}{2(1 + \widehat{\nu}(T))}.$$

En los materiales de Maxwell-Norton, la ley viscoplástica viene dada por la ley de Norton-Hoff clásica

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{u}) = \partial\phi_q(\boldsymbol{\sigma}) = \theta|\boldsymbol{\sigma}^D|^{q-2}\boldsymbol{\sigma}^D, \quad (5)$$

siendo:

- ϕ_q el potencial de plasticidad definido por

$$\phi_q(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\theta}{q}|\boldsymbol{\tau}^D|^q, \quad \boldsymbol{\tau} \in S_n, \quad (6)$$

donde q es una constante característica del material estrictamente positiva y $\boldsymbol{\tau}^D$ representa el tensor desviatorio:

$$\boldsymbol{\tau}^D = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{I}.$$

- ∂ la subdiferencial con respecto a $\boldsymbol{\sigma}$,
- θ un coeficiente dependiente de la temperatura, para el cual se define una función respuesta $\widehat{\theta} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$\theta(x, t) = \widehat{\theta}(T(x, t)), \quad \widehat{\theta}(T) = \theta_0 e^{\frac{-G}{R(T+273)}}, \quad (7)$$

donde θ_0 es una constante del material estrictamente positiva, G la energía de activación del proceso y R la constante de los gases.

Propiedades del potencial de plasticidad

Se resumen a continuación las principales propiedades del potencial ϕ_q :

- ϕ_q es una función convexa, propia y semicontinua inferiormente en S_n (ver [4], pág. 8).
- ϕ_q es continua y diferenciable en S_n , por tanto su subdiferencial coincide con su derivada (ver [4], pág. 9).
- Puesto que ϕ_q es convexa y diferenciable, la $\partial\phi_q$ es monótona en S_n (ver [3]).
- $\partial\phi_q$ es hemicontinua (ver [5], pág. 157), es decir $\forall \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3 \in S_n$ la función

$$s \rightarrow \partial\phi_q(\boldsymbol{\tau}_1 + s\boldsymbol{\tau}_2) : \boldsymbol{\tau}_3, \quad (8)$$

es continua de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

• Además, puesto que ϕ_q es convexa, su integral en Ω también lo es (ver [3]) y se tiene (ver [2], pág. 197),

$$\int_{\Omega} \phi_q(\boldsymbol{\tau}_1) dx - \int_{\Omega} \phi_q(\boldsymbol{\tau}_2) dx \leq \int_{\Omega} \partial\phi_q(\boldsymbol{\tau}_1) : (\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2) dx, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in S_n. \quad (9)$$

Ley de comportamiento térmica

Se considera que la ley térmica es una generalización de la ley de Arrhenius:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) = \int_{T_0}^T \widehat{\alpha}(r) dr, \quad (10)$$

donde T_0 es la temperatura inicial y $\widehat{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función respuesta del coeficiente de dilatación térmica α , es decir, $\alpha(x, t) = \widehat{\alpha}(T(x, t))$. La función $\widehat{\alpha}$ viene dada por

$$\widehat{\alpha}(T) = -\frac{1}{3} \frac{\rho_0^{\frac{1}{3}}}{\rho(T)^{\frac{4}{3}}} \frac{d\rho(T)}{dT},$$

donde $\rho_0 = \rho(T_0)$ es la densidad a la temperatura inicial (ver [1]).

Resumiendo, si se sustituye en (1) y (2), las expresiones (3), (5) y (10), la ley de comportamiento resultante es

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) = \widehat{\Lambda}(T)\boldsymbol{\sigma} + \partial\phi_q(\boldsymbol{\sigma}) + \widehat{\alpha}(T)\dot{T}\mathbf{I} \quad \text{en } \Omega \times (0, t_f]. \quad (11)$$

Bibliografía

- [1] P. Barral; *Análisis matemático y simulación numérica del comportamiento termomecánico de una colada de aluminio*, Tesis, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2001.
- [2] M. Djaoua, P. Suquet; *Évolution Quasi-Statique des Milieux Visco-Plastiques de Maxwell-Norton*, *Math. Methods Appl. Sci.* **6** (1984), 192–205.
- [3] I. Ekeland, R. Teman; *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Études Mathématiques, Dunod, París, 1974.
- [4] A. Friaâ; *La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*, Tesis, Université Pierre et Marie Curie, París, 1979.
- [5] J. L. Lions; *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, París, 1969.

Estimación de conjuntos

Alberto Rodríguez Casal

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

14 de Marzo de 2006

Resumen

El problema de aproximar un conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ a partir de una muestra aleatoria de puntos X_1, \dots, X_n tomados dentro de S tiene aplicaciones en control de calidad [5], análisis de conglomerados [3], [4], análisis de imágenes [7], [9], [2] o en clasificación [8].

Para medir la calidad de las diferentes aproximaciones de S es necesario contar con una distancia entre conjuntos. Una distancia muy empleada es la distancia de Hausdorff que para dos conjuntos compactos $S, T \subset \mathbb{R}^d$ está definida como

$$d_H(S, T) = \max \left\{ \sup_{x \in T} d(x, S), \sup_{y \in S} d(y, T) \right\} \\ = \inf \{ \epsilon > 0 : T \subset B(S, \epsilon), S \subset B(T, \epsilon) \},$$

donde $d(x, S) = \inf \{ \|x - y\| : y \in S \}$, $B(S, \epsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^d : d(x, S) \leq \epsilon \}$ y $\| \cdot \|$ denota la norma Euclídea.

La distancia de Hausdorff cuantifica la *proximidad visual* entre dos conjuntos. Sin embargo, no es totalmente satisfactoria para medir la similitud entre las *formas* de ambos conjuntos. Recientemente [1] se propuso la distancia de Hausdorff entre las fronteras, $d_H(\partial S, \partial T)$, para evaluar la calidad de los estimadores.

Existe mucha literatura sobre cómo reconstruir S cuando se asume que es convexo. En este caso existe un estimador obvio: la envoltura convexa de la muestra $H_n = \text{conv}(X_1, \dots, X_n)$, esto es, el menor conjunto convexo que contiene a la muestra. El análisis de las propiedades asintóticas de $d_H(S, H_n)$ para dimensión d general fue realizado en [6].

La suposición de que S sea convexo es muy restrictiva en la práctica. En este trabajo se propone un estimador de S bajo la hipótesis de que S sea r -convexo. Un conjunto S se dice que es r -convexo si S es la intersección de los complementarios de todas las bolas abiertas de radio r que no intersecan a S . Este concepto extiende la noción de conjunto convexo reemplazando hiperplanos cerrados por complementarios de bolas abiertas de radio r . De hecho, si r es grande, ambos conceptos son similares. Además de esta relación con la convexidad la noción de conjunto r -convexo tiene

PALABRAS CLAVE: conjunto convexo, conjunto r -convexo, análisis de imágenes.

otra interpretación geométrica muy intuitiva ya que un conjunto S es r -convexo si una bola de radio r rueda libremente dentro del complementario de S , esto es, todo punto de la frontera puede ser alcanzado por una bola de radio r que no toca al interior de S .

Al igual que se hace para el caso convexo, si S es r -convexo se puede definir como estimador de S el cierre r -convexo de la muestra, es decir, el menor conjunto r -convexo que contiene a la muestra. En la Figura 1 aparece dibujado el estimador propuesto para cuatro valores diferentes de r y una muestra uniforme de tamaño 1000 tomada en la mariposa que aparece dibujada en la Figura 2.

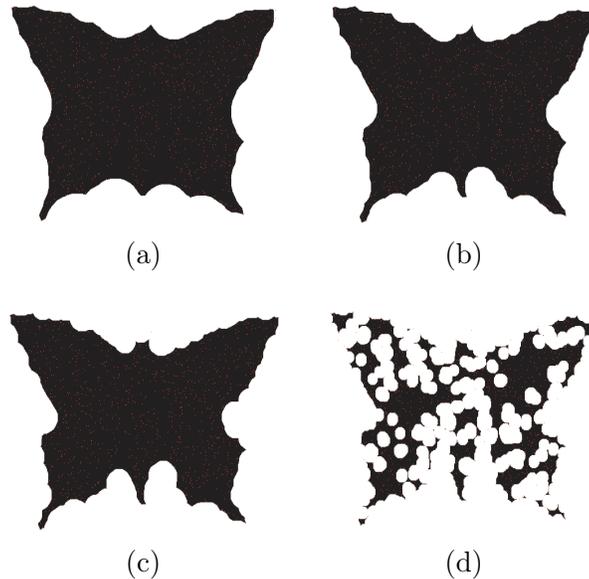


Figura 1: El estimador propuesto para $n = 1000$ y (a) $r=1/12$; (b) $r=1/20$; (c) $r=1/30$; (d) $r=1/60$



Figura 2: La imagen a reconstruir

El objetivo del trabajo que se presentó es analizar el comportamiento asintótico de este nuevo estimador extendiendo los resultados de [6] para el caso convexo.

Bibliografía

- [1] A. Baíllo, A. Cuevas; On the estimation of a star-shaped set, *Adv. in Appl. Probab.* **33** (2001), 717–726.
- [2] V. Bertholet, J. P. Rasson, S. Lissour; About the automatic detection of training sets for multispectral images classification, en *Advances in Data Science and Classification*, Springer, Berlin, 1988, 221–226.
- [3] A. Cuevas, M. Febrero, R. Fraiman; Estimating the number of clusters, *Canad. J. Statistics* **28** (2000), 367–382.
- [4] A. Cuevas, M. Febrero, R. Fraiman; Cluster analysis: a further approach based on density estimation, *Comput. Statist. Data Anal* **36** (2001), 441–459.
- [5] L. Devroye, G. L. Wise; Detection of abnormal behavior via nonparametric estimation of the support, *SIAM J. Appl. Math.* **38** (1980), 480–488.
- [6] L. Dümbgen, G. Walther; Rates of convergence for random approximations of convex sets, *Adv. in Appl. Probab.* **28** (1996), 384–393.
- [7] D. Marr; *Vision*, Freeman and Co, 1982.
- [8] A. B. Tsybakov; Optimal aggregation of classifiers in statistical learning, *Ann. Statist.* **1** (2004), 135–166.
- [9] M. Rudemo, H. Stryhn; Approximating the distribution of maximum likelihood contour estimators in two-region images, *Scand. J. Statist.* **21** (1994), 41–55.

Complexificando a Xeometría

Alexandre Andrés Cortés Ayaso
 Departamento de Xeometría e Topoloxía

21 de Marzo de 2006

Resumo

A álgebra é unha ferramenta fundamental no estudio da xeometría das variedades. Veremos aquí un exemplo máis da utilidade que ten a álgebra na xeometría a través da complexificación de espacios vectoriais reais, que se trasladará na xeometría de variedades ao caso do espacio tanxente á variedade nun punto, T_pM .

Complexificación dun espacio vectorial

No espacio vectorial complexo n -dimensional $\mathbb{C}^n = \{z = (z^1, \dots, z^n) / z^j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n\}$ podemos definir a distancia:

$$d(z, w) = \max_{j=1, \dots, n} |z^j - w^j|.$$

Así construído, (\mathbb{C}^n, d) é un espacio métrico que induce unha topoloxía métrica coa cal é homeomorfo ao espacio vectorial real $2n$ -dimensional \mathbb{R}^{2n} coa topoloxía usual,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (z^1, \dots, z^n) &\rightsquigarrow (x^1, y^1, \dots, x^n, y^n) \end{aligned}$$

onde $z^j = x^j + iy^j$.

Imos construír o complexificado dun espacio vectorial real de xeito análogo a como se constrúe \mathbb{C} a partir de \mathbb{R} . Dado F un espacio vectorial real n -dimensional, construímos o **complexificado de F** :

$$F^{\mathbb{C}} = \{u + iv / u, v \in F\},$$

que vai ser un espacio vectorial n -dimensional sobre \mathbb{C} dados a suma interna e o produto por complexos seguintes:

$$\begin{aligned} (u + iv) + (u' + iv') &= u + u' + i(v + v'), \\ (a + ib) \cdot (u + iv) &= au - bv + i(bu + av), \end{aligned}$$

PALABRAS CLAVE: complexificación, funcións holomorfas, variedades complexas, estrutura case-complexa.

onde $u + iv, u' + iv' \in \mathbb{F}^{\mathbb{C}}$ e $a + ib \in \mathbb{C}$.

Se $\{e^1, \dots, e^n\}$ é base do espacío vectorial real F entón $\{e^1, \dots, e^n\}$ é base do espacío vectorial complexo $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}$.

O espacío dual de $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}$, $(\mathbb{F}^{\mathbb{C}})^* = \{\alpha : \mathbb{F}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C} / \alpha \text{ aplicación linear}\}$, tamén é un espacío vectorial complexo n -dimensional. Imos ver un isomorfismo natural entre o espacío dual de $\mathbb{F}^{\mathbb{C}}$ e o complexificado de F^* , $(\mathbb{F}^{\mathbb{C}})^* \cong (F^*)^{\mathbb{C}}$.

Dada $f \in F^*$ definimos a súa extensión $\tilde{f} \in (\mathbb{F}^{\mathbb{C}})^*$ como $\tilde{f}(u + iv) = \widetilde{f(u)} + i\widetilde{f(v)}$. Verifícase que se $\{f^1, \dots, f^n\}$ é base de F^* dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$, entón $\{\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^n\}$ é base de $(\mathbb{F}^{\mathbb{C}})^*$ dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$. Podemos definir así o seguinte isomorfismo de espacíos vectoriais:

$$h = f + ig \in (F^*)^{\mathbb{C}} \longmapsto \tilde{h} \in (\mathbb{F}^{\mathbb{C}})^*,$$

onde $\tilde{h}(z) = \tilde{f}(z) + i\tilde{g}(z)$.

Funcións holomorfas

Dado $p \in \mathbb{R}^{2n}$, sexan T_p o espacío tanxente a \mathbb{R}^{2n} en p (isto pódese pensar como o conxunto de todos os vectores con orixe en p e é isomorfo a \mathbb{R}^{2n}) e T_p^* o espacío cotanxente a \mathbb{R}^{2n} en p .

Se $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$ é un sistema de coordenadas en \mathbb{R}^{2n} , entón $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, (\frac{\partial}{\partial y^1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p, (\frac{\partial}{\partial y^n})_p\}$ é base de T_p ($(\frac{\partial}{\partial x^k})_p, (\frac{\partial}{\partial y^k})_p$ son as derivadas usuais respecto ás coordenadas x^k e y^k respectivamente) e $\{(dx^1)_p, (dy^1)_p, \dots, (dx^n)_p, (dy^n)_p\}$ é base de T_p^* .

Consideremos os espacíos complexificados $T_p^{\mathbb{C}}, (T_p^*)^{\mathbb{C}}$ e denotemos $z^k = x^k + iy^k$. Definimos

$$\begin{aligned} (dz^k)_p &= (dx^k)_p + i(dy^k)_p, \\ (d\bar{z}^k)_p &= (dx^k)_p - i(dy^k)_p, \\ (\frac{\partial}{\partial z^k})_p &= \frac{1}{2}\{(\frac{\partial}{\partial x^k})_p + (\frac{\partial}{\partial y^k})_p\}, \\ (\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k})_p &= \frac{1}{2}\{(\frac{\partial}{\partial x^k})_p - (\frac{\partial}{\partial y^k})_p\} \end{aligned}$$

Lembramos no caso 1-dimensional, unha función $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dise **holomorfa** en $z_0 = x_0 + iy_0$ se e só se u e v son de clase 1 en z_0 como funcións reais e se satisfan ademais as ecuacións de Cauchy–Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

A condición de Cauchy–Riemann equivale a dicir que $(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}})_{z_0} = 0$.

No caso xeral, $f = u + iv : \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, temos que f é holomorfa en z_0 se e só se u e v son de clase 1 en z_0 e ademais $(\frac{\partial f}{\partial z^k})_{z_0} = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Variedades complejas

Sexa M un espacio topolóxico Hausdorff. M é unha variedade diferenciable n -dimensional se temos un atlas de todo M , i.e., temos un conxunto de *cartas* (M pode ser todo o raro que queiramos, pero podémolo *representar* en \mathbb{R}^n) no que se recollen tódolos puntos e de xeito que se cambiamos dunha *carta* a outra as cousas *seguen a funcionar*. Máis formalmente, temos $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimento aberto de M tal que $\forall \alpha \in A$ existe un homeomorfismo

$$\Psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow D_\alpha$$

onde D_α é un aberto de \mathbb{R}^n . Así temos as *cartas* para cada punto. A condición para que as cousas sigan a funcionar vén dada porque os cambios de cartas sexan diferenciables, i.e., se $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ entón os cambios de cartas

$$\begin{aligned} \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) &\rightarrow \Psi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta), \\ \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) &\rightarrow \Psi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \end{aligned}$$

son ambos diferenciables.

Do mesmo xeito M dise unha **variedade complexa** n -dimensional, se as cartas Ψ_α van en abertos $D \subset \mathbb{C}^n$ e os cambios de cartas, $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$ e $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$, son holomorfos.

A composición de Ψ_α coas proxeccións $\pi_k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, chámanse funcións coordenadas.

É obvio que se M é unha variedade complexa n -dimensional, entón M será unha variedade real $2n$ -dimensional.

Novamente a álgebra xoga un papel vital. Se V é un espacio vectorial complexo n -dimensional, temos definido o produto por i :

$$\begin{aligned} J : V &\rightarrow V \\ v &\rightsquigarrow J(v) = iv. \end{aligned}$$

É evidente que $J^2 = -Id$ e verificase ademais que se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de V (sobre \mathbb{C}) entón $\{e_1, \dots, e_n, J(e_1), \dots, J(e_n)\}$ é base de V (sobre \mathbb{R}).

Reciprocamente, se W é un espacio vectorial real e existe $J : W \rightarrow W$ tal que $J^2 = -Id$ (unha transformación tal chámase **estructura complexa** de W), entón W ten dimensión par e transfórmase nun espacio vectorial complexo, definindo

$$(a + ib)v = av + J(bv).$$

En cada punto $p \in M$ teremos definido o espacio tanxente $T_p M$ con base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$. Así en cada punto temos definida unha estrutura complexa de $T_p M$, $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$, definida por:

$$\begin{aligned} J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p, \\ J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p &= -\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p. \end{aligned}$$

Temos que J_p está ben definida e $(J_p)^2 = -Id$. J_p chámase **estructura case-complexa asociada á variedade complexa M** .

En xeral, se temos unha variedade real M de dimensión par e en cada punto $p \in M$ temos definida unha estrutura complexa sobre T_pM , i.e. $J_p : T_pM \rightarrow T_pM$ tal que $(J_p)^2 = -Id$, con compoñentes diferenciables sobre os abertos de M , diremos que temos definida unha estrutura case-complexa, J , sobre M .

Se ademais temos unha métrica g definida sobre M , é dicir, unha métrica g_p definida sobre cada espacio tanxente T_pM , esta dise que é unha **métrica case-hermítica** sobre (M, J) se é invariante por J , i.e.

$$g_p(Ju, Jv) = g_p(u, v) \quad \forall p \in M \quad \forall u, v \in T_pM.$$

O estudio das estruturas case-complexas sobre a variedade danos información sobre a topoloxía da variedade. No caso das métricas case-hermíticas, obtemos tamén información sobre a curvatura da variedade.

O reto de Galois

Ana Belén Rodríguez Raposo

Departamento de Álgebra

28 de Marzo de 2006

Resumo

Breve introducción histórica

Moitas veces os problemas máis abstractos das Matemáticas teñen a súa orixe en problemas tan sinxelos no seu plantexamento coma difíciles na súa solución. Pensemos, por exemplo, no teorema de Fermat, a conxectura de Goldbach ou a cuadratura do círculo. No caso que nos ocupa atopamos as raíces da teoría que imos expoñer a continuación na resolución da ecuación polinómica xeral de grao n . Mirando atrás na historia, vemos que a resolución de ecuacións polinómicas foi un problema que preocupou ós matemáticos dende a prehistoria. Xa no antigo Exipto se coñecían formas de resolver certas ecuacións de segundo grao. Pero os avances que máis impulsaron o estudio deste campo producíronse sen dúbida no renacemento italiano de mans de matemáticos coma Gerolamo Cardano (1501-1576), Niccolo Tartaglia (1500-1557) ou Scipione del Ferro (1465-1526), que chegaron a encontrar a solución da ecuación cuártica. Chegados a este punto, o seguinte paso foi o de atopar a solución da ecuación de grao 5, e en xeral, unha fórmula para resolver a ecuación de grao n . Debido a que tras moitos intentos por parte de importantes matemáticos só se facían avances parciais na obtención desta solución xeral, a comunidade matemática comezou a preguntarse se sería posible atopar tal fórmula. Deste xeito, dende o século XVI ata o século XIX a investigación en Álgebra estivo guiada fundamentalmente por estas dúas preguntas:

1. ¿É posible achar unha forma xeral de resolver por radicais a ecuación xeral de grao n ?
2. Se non é posible, ¿cando se pode facer?

Avances importantes na resposta destas cuestións foron investigadas por Gauss, en especial coa súa demostración do teorema fundamental da álgebra, Euler ou Newton. Pero a clave da resposta está nos traballos de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e o seu estudio de funcións simétricas. As ideas de Lagrange baséanse no seguinte: por unha banda, para obter a solución por radicais dunha ecuación polinómica hai que dar unha serie de pasos nos que se transforman os coeficientes

PALABRAS CLAVE: extensión de corpos, extensión de Hopf-Galois.

da ecuación mediante unha serie de normas ata chegar á solución. Pola outra banda, os coeficientes son unha función simétrica das raíces, é dicir, que na expresión dos coeficientes en función das raíces podemos permutar unhas coas outras sen que por iso varíe o resultado. Lagrange observou que a medida que se avanza na obtención das solucións da ecuación, se van obtendo sucesivas funcións das raíces para obter os coeficientes, e que en cada etapa se eliminan permutacións que deixen invariantes estas funcións. De feito, chegou a demostrar que atopando estas sucesivas funcións e as correspondentes permutacións eliminadas sería posible resolver a ecuación xeral de grao n . O único problema que quedaba entón era demostrar se atopar estas funcións era posible en tódolos casos. Isto correu a cargo de Niels Henrick Abel (1802-1829), que demostrou que non era posible dar unha forma xeral de atopar estas funcións, é dicir, que nalgúns casos o procedemento podía chegar a ser infinito. Estaba así contestada a primeira grande pregunta relativa á resolución de ecuacións polinómicas. A segunda pregunta foi contestada por Evariste Galois (1811-1832), outro xenio de morte prematura. Galois relacionou a resolución de ecuacións coa resolubilidade de grupos de permutacións, sentando ademáis as bases da teoría de grupos e da teoría de corpos.

Extensións de Galois

Recordemos que o corpo F é unha extensión do corpo K se $K \subseteq F$, é dicir, se K é un subcorpo de F . Neste caso diremos que $F|K$ é unha *extensión de corpos*. É ademáis sinxelo comprobar que F é un K -espacio vectorial. Diremos que a extensión é *finita* se $\dim_K F < \infty$.

Exemplo 1 Un caso particular de extensión finita de corpos é o seguinte: supoñamos que $f \in K[x]$ e que $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ son as raíces de f , sendo $L|K$ unha extensión de corpos. Entón podemos definir o corpo $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, que é o menor corpo que contén a K e a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e que evidentemente está contido en L . Nótese que $\dim_K F \leq n$, xa que o conxunto $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ xenera F .

Definición 1 Se temos unha extensión de corpos $F|K$, definimos o *grupo de Galois de F sobre K* coma o conxunto de tódolos K -automorfismos de corpos de F . É dicir

$$\text{Gal}(F, K) = \{f : F \rightarrow F; f \text{ automorfismo de corpos e de } K\text{-espacios vectoriais}\}$$

Supoñamos agora que F é un corpo e que G é un grupo de automorfismos de F . Definimos o *subcorpo fixo por G* coma o maior subcorpo de F que queda invariante por G . É dicir:

$$F^G = \{k \in F; g(k) = k \forall g \in G\}$$

Diremos entón que a extensión $F|K$ é unha *extensión de Galois* se $K = F^{\text{Gal}(F, K)}$, é dicir, se o maior corpo que queda fixo polos K -automorfismos de corpos de F é o propio K .

Estes conceptos pódense traducir á teoría de álxebras de Hopf substituindo o corpo K por unha *álgebra de Hopf* (véxase [1]) e o corpo F por un K -*comódulo álgebra*.

Vexamos entón antes de continuar que é un comódulo e que é un comódulo sobre unha álgebra de Hopf:

Definición 2 Sexa H unha álgebra de Hopf sobre un corpo R .

O R -espacio vectorial M é un R -comódulo (pola dereita) se existe un homomorfismo de R -espacios vectoriais

$$\rho_M : M \rightarrow M \otimes H, \quad m \mapsto \rho_M(m) = m_{[0]} \otimes m_{[1]}$$

que satisfai as seguintes condicións:

- $\rho_M(m_{[0]}) \otimes m_{[1]} = m_{[0]} \otimes \delta_H(m_{[1]})$, onde $\delta_H : H \rightarrow H \otimes H$ é a comultiplicación da álgebra de Hopf H .
- $m_{[0]} \otimes \varepsilon_H(m_{[1]}) = m$, onde $\varepsilon_H : H \rightarrow R$ é a counidade da álgebra de Hopf H .

Obsérvese que a definición de comódulo é dual da definición de módulo, e que se temos un módulo nunha determinada categoría \mathcal{C} (sexa esta categoría de espazos vectoriais, de módulos, etc), teremos un comódulo na categoría dual \mathcal{C}^{op} .

Diremos que M é un H -comódulo álgebra se é un H -comódulo, é unha álgebra e ademais satisfai:

- $\rho_M(mn) = m_{[0]}n_{[0]} \otimes m_{[1]}n_{[1]} \quad \forall m, n \in M$, é dicir, que é o mesmo facer a multiplicación da álgebra e despois aplicar a coestructura de comódulo que aplicar primeiro a coestructura de comódulo e despois multiplicar os elementos de M por un lado e os elementos de H por outro.
- $\rho_M(1_M) = 1_M \otimes 1_H$, é dicir, que se lle aplicamos a coestructura á unidade de M obtemos a unidade de M e a unidade de H .

Estamos entón en condicións de definir que é unha extensión de Hopf-Galois:

Definición 3 Sexa H unha álgebra de Hopf e B un H -comódulo álgebra. Definimos a *subálgebra de coinvariantes de B* coma

$$B^{coH} = \{b \in B; \rho_B(b) = b \otimes 1_H\}$$

que é unha subálgebra de B . Diremos que a extensión $B|B^{coH}$ é unha *extensión de Hopf-Galois* se o seguinte homomorfismo, chamado *morfismo canónico*, é bixectivo:

$$B \otimes_{B^{coH}} B \rightarrow B \otimes H, \quad b \otimes b' \mapsto bb'_{[0]} \otimes b'_{[1]}$$

E agora a pregunta é: ¿como encaixan as extensións de Galois clásicas dentro desta teoría? Ben, supoñamos que $F|K$ é unha extensión de corpos, e que G é un grupo de automorfismos de F (podemos supoñer que é o grupo de Galois de F sobre K), e consideremos o K -espacio vectorial $K[G]$ xerado polos elementos de G . Este espacio vectorial pode dotarse dunha estrutura de álgebra dando a multiplicación

nos elementos da base e extendéndoos por linearidade ó resto dos elementos do segunite xeito:

$$K[G] \otimes K[G] \rightarrow K[G], g \otimes h \mapsto gh$$

Pode dotarse ademáis dunha estrutura de coálgebra onde a comultiplicación ven dada por:

$$\delta_{K[G]} : K[G] \rightarrow K[G] \otimes K[G], g \mapsto g \otimes g$$

e a counidade:

$$\varepsilon_{K[G]} : K[G] \rightarrow K, g \mapsto 1_K$$

Estas dúas estruturas fan de $K[G]$ unha álgebra de Hopf que actúa sobre F , é dicir, que fai que F sexa un $K[G]$ -módulo dun xeito natural. Nótese que se $h \in K[G]$ entón $h = \sum_{g \in G} k_g g$, $k_g \in K \forall g \in G$ e ademáis $k_g = 0$ para case todo $g \in G$. Así:

$$hx = \left(\sum_{g \in G} k_g g \right)(x) = \sum_{g \in G} k_g g(x) \quad \forall x \in F$$

define unha estrutura de $K[G]$ -módulo sobre F . Se pensamos na estrutura dual, e no significado da subálgebra de coinvariantes, obtemos que o cálculo da mesma é equivalente ó cálculo do subcorpo fixo por G , e que o feito de ser $F|K$ unha extensión de Galois equivale a ser unha extensión de Hopf-Galois. O feito de considerar a álgebra de Hopf $K[G]$ en lugar de considerar o corpo K supón certas ventaxas, xa que isto evita ter que considerar dous obxectos distintos (un corpo K e un grupo G), e permítenos realizar os cálculos con maior economía.

O feito de considerar coestructuras (a coestructura de comódulo) é unha necesidade imposta pola física cuántica e a procura dun modelo alxébrico axeitado no que se poidan combinar a relatividade e as teorías cuánticas. Recentemente sospeitase que a xeometría a escala cuántica (digamos a escalas moi pequenas) non é unha xeometría conmutativa, é dicir, non é unha xeometría construída a partires dun corpo conmutativo como pode ser \mathbb{C} , senón que é unha xeometría non conmutativa. Neste senso, as extensións de Hopf-Galois resultan unha ferramenta moi poderosa, xa que se corresponden con certos obxectos xeométricos fundamentais no estudio destas xeometrías non conmutativas.

Bibliografía

- [1] A. B. Rodríguez Raposo; Unha introducción á álgebra (cuántica), en *Actas do Seminario de Iniciación á Investigación*, Instituto de Matemáticas, USC, 2005, 9-13.

Universos y dioses de juguete

María Pérez Fernández de Córdoba

Departamento de Geometría y Topología

4 de Abril de 2006

Resumen

Introducción

Gracias a los sucesivos avances de la ciencia, a partir de mediados del siglo XX se observó que los parámetros cosmológicos que hacen posible el desarrollo de vida en nuestro Universo toman valores en un rango extremadamente pequeño. A esta precisión de los parámetros se le denomina *ajuste fino*.

El término *principio antrópico* fue empleado por primera vez en 1973 por el físico B. Carter durante un congreso celebrado en Polonia en conmemoración del V centenario del nacimiento de Copérnico. Paradójicamente, Carter declaraba que la humanidad juega un papel especial en el Universo, aunque no necesariamente central. A partir de este momento surgen distintas versiones del principio antrópico. Entre todas ellas, elegimos la versión de los cosmólogos J. Barrow y F. Tipler por ser más sencilla y comprensible:

Los valores observados de todas las cantidades físicas y cosmológicas no son equiprobables, sino que toman valores restringidos por el requisito de que existan lugares donde pueda evolucionar la vida basada en el carbono y por el requisito de que el Universo sea lo suficientemente viejo para que esta evolución haya ocurrido de hecho.

Esta versión del principio antrópico no ha sido demasiado cuestionada e incluso muchos la consideran una simple tautología. El hecho de considerar el principio antrópico como argumento válido para obtener cierto conocimiento de la naturaleza constituye la base de los argumentos antrópicos.

La controversia fundamental que surge en torno a dicho principio tiene que ver con las razones más ideológicas que científicas, que subyacen en algunos argumentos antrópicos.

Entre estos, el más polémico es el denominado *argumento del ajuste fino*. Este considera que la precisión observada en las condiciones iniciales (el mencionado *ajuste*

PALABRAS CLAVE: grafos, árboles, probabilidad y principio antrópico.

fino) es tan excepcional que apunta claramente a la existencia de un Planificador. Entre los defensores de la existencia de tal Planificador se encuentra el físico H. Ross que enumera más de 20 ejemplos de parámetros cosmológicos ajustados, a su parecer, de manera demasiado precisa como para no haber sido fruto de una elección. Este tipo de argumentaciones resultan poco adecuadas desde un punto de vista científico, ya que, en cierto modo, asimilan lo improbable con lo imposible, haciendo necesario un "milagro" que asegure la existencia de vida. Los razonamientos de H. Ross son un claro ejemplo del cariz ideológico de la discusión antrópica.

Algunas respuestas naturalistas al argumento del ajuste fino se basan en teorías sobre la existencia de un multiuniverso formado por infinitos universos, en los cuales se dan distintas combinaciones de constantes y magnitudes cosmológicas. De esa manera, no sería sorprendente encontrar un universo con condiciones favorables al desarrollo de la vida. Incluso existen teorías que dudan de que el rango de combinaciones de constantes necesarias para el desarrollo de la vida sea tan reducido como presupone el ajuste fino.

Hay quienes usan otro tipo de consideraciones para abordar la cuestión. Destacan los argumentos probabilísticos de D.J. Bartholomew y D. Kwon en favor de la idea de un Planificador y los contraargumentos naturalistas de J. Ikeda y B. Jefferys. Al contrario que Ross, estos autores no afirman haber probado la existencia o inexistencia de un Planificador, sino que se limitan a dar argumentos en favor de una u otra idea. En sus artículos, la formulación del principio antrópico en lenguaje probabilístico se reduce a $P(F|V) = 1$, donde $F = \{\text{el universo es favorable a la vida}\}$, y $V = \{\text{el universo existe y tiene vida}\}$. En estos términos, el ajuste fino significa que la probabilidad $P(F)$ es muy pequeña.

Para que todos sus razonamientos tengan validez desde un punto de vista matemático, necesariamente suponen $P(F) > 0$, es decir, la probabilidad del suceso "ser favorable a la vida" es muy pequeña, pero siempre **positiva**. Sin embargo, ningún hecho experimental o teórico justifica esta suposición. Conviene recordar que un suceso con probabilidad nula no es necesariamente el suceso vacío. Es precisamente en este punto donde nuestro trabajo difiere de los razonamientos anteriores.

Construcción de los universos de juguete

Se contruye un espacio foliado por grafos llamado *espacio foliado de Ghys-Kenyon*. Podemos identificar cada hoja con un árbol aperiódico (i.e., ninguna traslación lo deja invariante) y repetitivo, de manera que es imposible saber en qué punto del árbol nos encontramos si observamos únicamente un entorno acotado. Todos estos árboles resultan indistinguibles desde un punto de vista local, es decir, si nos situamos en un vértice de cualquiera de ellos y observamos un entorno finito, nos es imposible averiguar de qué árbol se trata.

Sin embargo, desde un punto de vista global nuestros árboles son muy diferentes. F. Alcalde, A. Lozano y M. Macho han descrito un proceso de construcción de árboles

repetitivos y aperiódicos a partir de sucesiones de cuatro símbolos. Sorprendentemente se pueden codificar todas las hojas del espacio foliado de Ghys-Kenyon, salvo una hoja especial, representada por el llamado árbol de Kenyon. Dicho árbol resulta ser el único incodificable.

En un estudio más profundo de los árboles que forman el minimal de Ghys-Kenyon, se comprueba que los árboles codificables tienen 1 o 2 finales (rayos geodésicos infinitos), mientras que nuestro árbol especial es el único que tiene 4 finales. Es más, se construye una medida de probabilidad sobre el espacio foliado de Ghys-Kenyon, P , de manera que respecto a dicha medida se concluye:

1. El conjunto de hojas con 1 final es un conjunto residual y de medida total.
2. El conjunto de hojas con 2 finales es un conjunto magro y de medida nula.
3. Hay una única hoja con 4 finales y es de medida nula.

Las hojas del espacio foliado de Ghys-Kenyon serán a partir de ahora nuestros universos de juguete.

Conclusiones

Todos los argumentos probabilísticos sobre la existencia de un Planificador que mencionamos en la introducción parten de la base de que, entre la infinidad de universos posibles, sólo uno es real y, puesto que existimos, tiene vida. Además, la probabilidad de que el universo real fuese favorable a la vida se supone muy pequeña (ajuste fino) pero **positiva**, $P(F) > 0$.

Nuestro trabajo consiste en la construcción de un espacio de universos de juguete donde el ajuste fino es extremo, es decir la probabilidad de que el universo real sea favorable a la vida, es nula y sin embargo, no es necesario ningún Planificador que haga posible la existencia de vida.

Como anunciamos en la sección anterior, nuestros universos son las hojas del espacio de Ghys-Kenyon. El hecho de ser localmente indistinguibles lo interpretamos como que todos ellos se rigen por las mismas leyes físicas locales. La propiedad de que cada universo sea repetitivo significa que en todos los puntos de dicho universo actúan las mismas leyes de la física. Tanto en el caso real como en nuestro juego, es imposible conocer en que tipo de universo estamos porque nuestra información siempre será limitada, no podemos tener una visión global.

La característica "ser favorable a la vida" en nuestro espacio de universos la identificamos con la propiedad geométrica "tener 4 finales", de modo que el único universo que puede desarrollar vida rigiéndose sólo por leyes naturales es el árbol de Kenyon y, en consecuencia, es el universo real.

Puesto que la medida de probabilidad P definida en la sección anterior aplicada al árbol de Kenyon (única hoja con 4 finales) es nula, tenemos $P(F) = 0$ siendo

$F = \{\text{el universo real es favorable a la vida}\}$. Es decir, tenemos ajuste fino y además es extremo, sin embargo F no es el suceso vacío. Podemos concluir que, a pesar de la existencia de ajuste fino, no ha sido necesaria la intervención de un Planificador para el posible desarrollo de vida, ya que tal propiedad es intrínseca al universo de Kenyon.

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo, M. Macho Stadler; Dynamique et géométrie non commutative de la lamination de Ghys-Kenyon, en preparación.
- [2] Frank J. Tipler, John R. Barrow; *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
- [3] D. J. Bartholomew; Probability, statistics and theology. With discussion and a reply by the author, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A* **151** (1988), 137–178.
- [4] I. García Jurado; Algunas consideraciones probabilísticas sobre el principio antrópico y el ajuste fino, en *Unha andaida pola Matemática 2002/03*, Facultad de Matemáticas, USC, 2003.
<http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/Andaina/index.asp>
- [5] E. Ghys; Laminations par surfaces de Riemann, *Panoramas et Synthèses* **8** (1999), 49–95.
- [6] M. Ikeda, B. Jefferys; The Anthropic Principle Does Not Support Supernaturalism.
<http://quasar.as.utexas.edu/anthropic.html>

¿Quen é mellor?

José Carlos Díaz Ramos e Julio González Díaz

Departamentos de Xeometría e Topoloxía e de Estatística e Investigación Operativa

25 de Abril e 2 de Maio de 2006

Resumo

Introducción

Cando temos un entorno competitivo nunha poboación (os elementos da cal chamaremos xogadores), un problema fundamental é dar unha clasificación de acordo coa forza de cadaquén. É habitual que os enfrontamentos tomen a forma dun torneo e por tanto, ó final do mesmo, a idea é dar unha ordenación dos xogadores.

En xadrez a meirande parte dos torneos son abertos. Isto significa que habitualmente existe unha grande cantidade de xogadores, que se dan premios en diversas categorías e que, naturalmente, se necesita que o torneo non se extenda durante moitos días.

O método eliminatorio ou KO (*play-off*) non precisa de moitas rondas para decidir un gañador, pero é bastante pouco práctico en xadrez por diversas razóns. Primeiro porque en xadrez os empates son moi habituais o cal dificulta en cada ronda eliminar xogadores. Tamén, o feito de que as brancas teñan unha pequena vantaxe inicial significa que en cada ronda os xogadores deben ter dereito a xogar o mesmo número de partidas con brancas que con negras. Ademais, é moi difícil dar unha ordenación final do torneo e por tanto dilucidar premios en distintas categorías. Todo isto, xunto co feito de que un xogador podería quedar eliminado moi cedo no torneo, fai deste método un sistema pouco popular en disciplinas como o xadrez.

Unha liga (*round-robin*) soluciona en grande medida o problema das táboas, a vantaxe das brancas e o problema de dar unha clasificación final. Non obstante, o número de rondas necesario para unha liga é prohibitivo na maior parte dos casos. Por iso, en xadrez necesítase un método de emparellamento que combine as virtudes da liga e do método eliminatorio. Isto é o que fai o *sistema de emparellamento suízo*. Esencialmente a idea deste sistema é outorgar puntos en cada ronda en función dos resultados obtidos en cada enfrontamento (como nunha liga), pero emparellando aqueles xogadores que estean xogando ó mesmo nivel no torneo (esencialmente, emparellando a aqueles que teñan os mesmos puntos). Isto significa que con só un número relativamente pequeno de rondas (aproximadamente o mesmo que no método eliminatorio) é posible dar unha clasificación do torneo. Véxase a Figura 1.

PALABRAS CLAVE: xadrez, desempate, métodos iterativos.

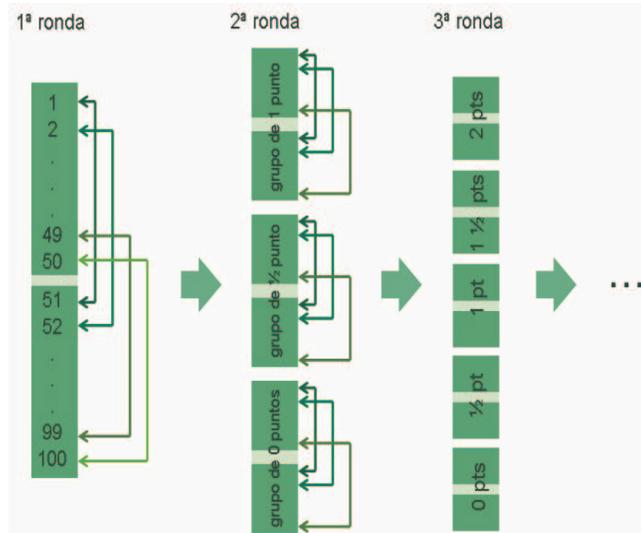


Figura 1: Esquema dun torneo suízo.

Pola propia idea do sistema de emparellamento suízo, está claro que o feito de que o número de rondas sexa baixo, significa que vai haber unha grande cantidade de xogadores co mesmo número de puntos. Por iso é necesario un bo método de desempate á hora de decidir unha clasificación entre xogadores que teñen os mesmos puntos. A idea detrás dos sistemas de desempate empregados no método suízo consiste en clasificar diante (entre os xogadores cos mesmos puntos) a aqueles xogadores que tiveron un torneo máis difícil (é dicir, que tiveron rivais máis fortes). Esta idea é empregada polo método de desempate *Buchholz*, que consiste en sumar os puntos dos rivais dun xogador. Canto máis grande sexa este número, máis duro foi o torneo do xogador e por tanto debería de ser clasificado máis arriba.

O obxectivo desta charla é presentar un método de desempate que mellora o sistema Buchholz. Unha discusión máis completa deste método pode ser atopada en [1].

Definicións básicas: torneos

Partimos dun entorno competitivo no que se producen, ó longo do tempo, enfrontamentos dous a dous entre os xogadores dunha certa poboación. Neste entorno hay unha *función de comparacións* F que describe as probabilidades asociadas ós distintos resultados que se poden producir nunha partida; dados dous xogadores con forzas r_i e r_j , a probabilidade de que i derrote a j é $F(r_i, r_j)$. Por tanto, $F(r_i, r_j) = 1 - F(r_j, r_i)$.¹ A estas forzas r_i chamarémoslles *ratings*.

Traballaremos dentro do *modelo lineal de comparacións emparelladas* (linear

¹Por citar un par de exemplos, tanto en xadrez coma en Othello úsanse sistemas de rating baseados en funcións de comparacións amplamente testadas.

paired comparison model [2]). Máis especificamente, asumimos a existencia dunha función de distribución continua e estrictamente crecente $F_l : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ tal que $F(r_1, r_2) = F_l(r_1 - r_2)$, é dicir, o resultado dunha partida só depende da diferenza de ratings entre os dous contendentes.

Denotamos por $\mathcal{M}_{k \times l}$ o espazo real de matrices $k \times l$. Un *torneo* é un par (N, A) , onde $N = \{1, \dots, n\}$ é o conxunto de xogadores e $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ é a *matriz do torneo*. A matriz A é non-negativa e a diagonal principal está formada por ceros. O elemento A_{ij} contén a puntuación obtida polo xogador i nos seus enfrontamentos contra o xogador j . A cada torneo (N, A) podemos asociarlle unha *matriz (simétrica) de emparellamentos* $M := A + A^t$, é dicir, M_{ij} é o número de partidas entre i e j . Como os n xogadores participan no torneo, cada fila de M debe ter algunha entrada distinta de cero. Para cada xogador i , definimos $m_i := \sum_{j=1}^n M_{ij}$, o número total de enfrontamentos xogados por i . Por outro lado, $r \in \mathbb{R}^n$ é un vector esóxeno de ratings dos xogadores do torneo (N, A) . Ó vector r chamáremoslle *vector de ratings iniciais*.

Dado un torneo (N, A) e un vector de ratings r , definimos a *forza total do torneo* como $\sigma^r := \sum_{i=1}^n m_i r_i$, é dicir, a contribución de cada xogador está ponderada polo número de partidas disputadas por el.

Dicimos que dous torneos son *equivalentes* se son iguais salvo por unha permutación dos seus xogadores. Dous torneos equivalentes teñen matrices de torneo semellantes (e tamén matrices de emparellamentos semellantes).

Unha matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ é *diagonal por bloques*, respectivamente *anti-diagonal por bloques*, se

$$B = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right), \text{ respectivamente } B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array} \right).$$

Dado un torneo (N, A) , A é diagonal (anti-diagonal) por bloques se e só se M é diagonal (anti-diagonal) por bloques. De agora en diante traballaremos con torneos que verifiquen as seguintes hipóteses:

A1. O torneo (N, A) non é equivalente a un torneo (N', A') no que A' sexa diagonal por bloques.

Se a matriz do torneo A' é diagonal por bloques, entón o torneo ten unha división interna: hai dous subconxuntos disxuntos de xogadores tal que ningún dos xogadores dun conxunto ten xogado con ningún xogador do outro. Este suposto é estándar na literatura de ordenacións (*rankings*) xa que cada bloque podería ser considerado como un torneo independente.

A2. O torneo (N, A) non é equivalente a un torneo (N', A') no que A' sexa anti-diagonal por bloques.

Se A' é anti-diagonal por bloques, o torneo pode verse como un torneo por equipos. Hai dous subconxuntos disxuntos (equipos) tal que os xogadores dun equipo teñen xogado, unicamente, contra xogadores do outro.

A idea de actuación (*performance*)

Tomemos un torneo (N, A) . O vector de puntuacións medias, s , defínese como $s_i := \sum_j A_{ij}/m_i$. De aquí en diante asumimos que $s \in (0, 1)^n$. Definimos $D^M := \text{diag}(m_1, \dots, m_n) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ e $\bar{M} := (D^M)^{-1}M \in \mathcal{M}_{n \times n}$, é dicir, $\bar{M}_{ij} = M_{ij}/m_i$ é o número de enfrontamentos entre i e j dividido polo número total de partidas xogadas por i .

Tomemos o vector de ratings iniciais $r \in \mathbb{R}^n$ e a función de comparación do modelo lineal de comparacións emparelladas F . O vector de r -actuacións, $p^r \in \mathbb{R}^n$, defínese como

$$p^r := \bar{M}r + c, \quad \text{onde } c_i := F_i^{-1}(s_i).$$

Nótese que $(\bar{M}r)_i$ coincide co rating medio dos rivais do xogador i . Por tanto, a r -actuación do xogador i é o único rating p_i^r tal que $F(p_i^r, (\bar{M}r)_i) = s_i$. Entón, podemos dicir que s_i é a puntuación esperada por i cando se enfronta a un xogador con rating $(\bar{M}r)_i$ se e só se i ten rating p_i^r . Isto xustifica o nome de actuación.

O vector p^r depende do torneo e da función de comparacións do entorno competitivo no que se encadre dito torneo. Non obstante, tamén depende do vector de ratings iniciais, que é esóxeno ó torneo. Por outra banda, a r -actuación do xogador i usa as forzas dos seus rivais; nós consideramos que tamén as forzas dos rivais dos rivais de i deberían ser usadas para calcular a forza dos rivais de i , e as r -actuacións non o fan.

Exemplo 1. A Federación Internacional de Xadrez (FIDE) ten un sistema oficial de rating chamado Elo. A fórmula de Elo considera a función de comparacións dada por $F_i(\lambda) = 1/(1 + 10^{-\frac{\lambda}{400}})$. Por tanto, a r -actuación do xogador i nun torneo defínese como $p_i^r = (\bar{M}r)_i - 400 \log_{10}(1/s_i - 1)$, é dicir, a media dos Elos dos seus rivais máis un factor corrector que depende da porcentaxe de puntos conseguida por dito xogador. É de destacar que esta é unha das regras de desempate recomendadas pola FIDE para torneos de xadrez.

Actuación recursiva (*recursive performance*)

O ranking asociado co vector de r -actuacións proporciona unha ordenación razoable para o torneo, pero depende demasiado dos ratings iniciais r_1, \dots, r_n , sendo esta última unha medida da forza histórica dos xogadores que non ten por que corresponderse coa forza exhibida polos xogadores no torneo. É natural calcular unhas novas actuacións reemplazando os ratings iniciais co vector de actuacións. Isto tería dous efectos: por un lado atenuaría a dependencia de r e, dado un xogador i , o novo rating tería en conta, non soamente os rivais de i , senón tamén os seus resultados. Isto suxire o método iterativo $p^{(0)} := p^r (= \bar{M}r + c)$, $p^{(l+1)} := p^{p^{(l)}} (= \bar{M}p^{(l)} + c)$. Desafortunadamente, este método non ten por que converxer. Por outro lado, a forza total do torneo, $\sigma^r (= \sum_{i=1}^n m_i r_i)$, non é preservada pola r -actuación, é dicir, en xeral $\sum_i m_i r_i \neq \sum_i m_i p_i^r$. O factor de inflación (deflación) resulta ser $\sum_i m_i c_i$. Redistribuindo este factor entre os xogadores, podemos definir un novo método iterativo que si preserve a forza total do torneo.

Sexa $e \in \mathbb{R}^n$ o vector $e = (1, \dots, 1)$, podemos considerar o seguinte reescalamento de c ,

$$\hat{c} := c - \left(\frac{\sum_i m_i c_i}{\sum_i m_i} \right) e.$$

Agora definimos a *actuación iterada* como o método iterativo

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(0)} &:= \bar{M}r + \hat{c} \\ \hat{p}^{(l)} &:= \bar{M}\hat{p}^{(l-1)} + \hat{c}, \quad l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En cada paso l , este método iterativo devolve o mesmo rating que o outro método salvo unha constante proporcional a e ; por tanto *a ordenación proposta é sempre a mesma*.

Teorema 1. *Sexa (N, A) un torneo cumprindo A1, A2 e tal que $\bar{A}_{ij} \in (0, 1)$ sempre que $M_{ij} \neq 0$. Sexa $r \in \mathbb{R}^n$ o vector de ratings iniciais e F_l a función de comparacións. Entón a actuación iterada converge.*

Motivados polo Teorema 1, definimos o concepto principal deste traballo, a *actuación recursiva*, como o límite da actuación iterada: $\hat{p} := \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{p}^{(l)}$. Tomando límites na igualdade $\hat{p}^{(l)} = \bar{M}\hat{p}^{(l-1)} + \hat{c}$, temos que \hat{p} é unha solución do sistema linear

$$(I - \bar{M})x = \hat{c}, \quad (1)$$

onde $I \in \mathcal{M}_{n \times n}$ é a matriz identidade. Se A1 se verifica, entón a matriz $I - \bar{M}$ ten rango $n - 1$. Entón, dado que $\bar{M}e = e$, o conxunto de solucións de (1) está dado por $\hat{p} + \text{span}\{e\}$. As diferentes solucións de (1) proveñen dos distintos vectores de ratings iniciais r . É importante destacar que *todas as solucións propoñen a mesma ordenación*.

Seguindo a discusión anterior, incluso se A2 non se verifica, podemos asociar de xeito non ambiguo unha ordenación a cada sistema linear (1) con tal que A1 se satisfaga.

A actuación recursiva só depende dos ratings iniciais a través da suma dos mesmos. A ordenación proposta pola actuación recursiva non depende dos ratings iniciais. Por tanto, a actuación recursiva pode definirse sen ambigüidade para torneos nos que hai xogadores sen rating inicial. Ademais, a actuación recursiva é robusta no sentido de que pequenos cambios na función de comparación inducen pequenos cambios nos ratings propostos. Finalmente, a actuación recursiva non é esixente computacionalmente.

Bibliografía

- [1] M. Brozos-Vázquez, M. A. Campo-Cabana, J. C. Díaz-Ramos, J. González-Díaz; Ranking participants in a tournament by means of rating functions, arXiv:math.GM/0601053.

- [2] H. A. David; *The method of paired comparisons*, Chapman and Hall, London, 1998.

¿Cuánto me das si te dejas pasar?

Manuel A. Mosquera Rodríguez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

9 de Mayo de 2006

Resumen

En este seminario vamos a hablar de cómo un grupo de agentes que se enfrentan a una situación de optimización se pueden repartir la cantidad de dinero que se ahorran si actúan de forma óptima.

Esta clase de problemas se enmarcan dentro de la clase que en teoría de juegos se llama *operations research games*. La base común de los problemas dentro de esta clase es que se toma un problema de investigación operativa (secuenciación, colas, inventario, ...), se considera que los agentes involucrados en el problema pueden cooperar y los agentes tienen que repartirse los ahorros/costes que se producen de dicha cooperación. Una buena herramienta que nos puede ayudar a repartir los ahorros es la teoría de juegos cooperativos con utilidad transferible (TU), entonces se define una clase de juegos TU asociada a cada clase de problemas en las condiciones anteriores y se busca alguna de las siguientes soluciones: proporcionar reglas de reparto que hayan sido ampliamente estudiadas dentro de la teoría de juegos; o bien, buscar otras posibles reglas de reparto, específicas para cada problema, que posean buenas propiedades desde el punto de vista de *estabilidad* o *justicia*. Una amplia revisión de estos problemas puede encontrarse en [1].

Concretamente, en este seminario trabajaremos con un problema de optimización del secuenciado de trabajos a través de diversas máquinas y de cómo los propietarios de cada trabajo se podrían repartir los ahorros generados por una reordenación de los mismos. El modelo con el que trabajaremos es el siguiente: tenemos un conjunto finito de trabajos N (cada trabajo pertenece a un agente distinto) que tienen que ser procesados a través de una secuencia fija y finita de máquinas M . Cada trabajo $i \in N$ tiene un tiempo de procesado $p_i \in \mathbb{R}_{++}$ igual en todas las máquinas. Notar que \mathbb{R}_{++} denota el conjunto de los números reales estrictamente positivos. Cada agente tiene que pagar un coste por usar las máquinas. Este coste es proporcional al tiempo que el trabajo de cada agente permanece en el sistema (tiempo que está esperando a ser procesado más tiempo que tarda en ser procesado por todas las máquinas) y está determinado por el peso $\alpha_i \in \mathbb{R}_{++}$, i.e., $C_i(t) = \alpha_i t$. Así, la tupla (N, M, p, α) , representará un problema de secuenciación de estas características,

PALABRAS CLAVE: juegos cooperativos, valor de Shapley, convexidad.

también conocido con el nombre de **problema *flow-shop* (cadena de montaje) proporcional** (PFS).

Supongamos que inicialmente los trabajos se encuentran ordenados según la ordenación dada por la biyección $\sigma_0 : N \rightarrow N$, donde para cada trabajo $i \in N$, $\sigma_0(i)$ representa la posición en la que el trabajo i es procesado. Para cada agente $i \in N$, $C_i^{\sigma_0}$ representa el tiempo que el trabajo i está en el sistema si es procesado en el orden dado por σ_0 . Entonces, el coste total que tienen que pagar los agentes si sus trabajos son procesados según σ_0 es igual a

$$c_N(\sigma_0) = \sum_{i \in N} \alpha_i C_i^{\sigma_0}.$$

El problema de optimización al que nos enfrentamos es el de encontrar una ordenación $\hat{\sigma}$ de forma que el anterior coste sea mínimo. En [2] se estudia este problema de optimización y se describe un algoritmo que proporciona una solución óptima. Una vez encontrada esta solución, el ahorro generado con respecto a la situación inicial es igual a $c_N(\sigma_0) - c_N(\hat{\sigma})$. Inmediatamente surge el problema de cómo repartir estos ahorros entre los agentes involucrados. Para resolverlo haremos uso de la teoría de juegos cooperativos TU.

Antes de proceder con el análisis del problema daremos una breve introducción a los juegos cooperativos. Un **juego cooperativo con utilidad transferible** (TU) es un par (N, v) donde N representa el conjunto finito de agentes y $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que a cada coalición (subconjunto) de agentes $S \subseteq N$ le asigna el beneficio $v(S)$ que obtendría si sus agentes cooperasen. Por convenio se asume que $v(\emptyset) = 0$. Una clase muy importante de juegos TU son los juegos convexos: se dice que un juego TU (N, v) es **convexo** si para cualquier par de coaliciones $S, T \subseteq N$ se verifica que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$. El objetivo de la teoría de juegos TU es proporcionar posibles repartos del beneficio total $v(N)$ entre los agentes de N de forma que se verifiquen ciertas propiedades de *estabilidad* o *justicia*. Un **reparto** del beneficio total no es más que un vector $x \in \mathbb{R}^{|N|}$ tal que $x(N) = \sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Diremos que un reparto es **estable** si, para cada coalición $S \subset N$, se tiene que $x(S) \geq v(S)$. El conjunto de todos los repartos estables se llama **núcleo** del juego y se representa por

$$\mathcal{C}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{|N|} \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) \text{ para cada } S \subset N \right\}.$$

Una propiedad importante de los juegos convexos es que su núcleo es siempre no vacío, y por tanto siempre podremos seleccionar repartos estables. Debido a que el núcleo puede contener infinidad de repartos, se intentan seleccionar algunos de ellos atendiendo a distintas propiedades que necesitemos en cada momento. Una **regla de reparto** es una función φ que a cada juego TU (N, v) le asigna el reparto $\varphi(v) \in \mathbb{R}^{|N|}$. Una regla de reparto muy conocida y bien estudiada en teoría de juegos es el valor de Shapley. Dado un juego TU (N, v) , el **valor de Shapley** para

el agente $i \in N$ está dado por la siguiente fórmula

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Si el juego es convexo, entonces el valor de Shapley pertenece al núcleo del juego. Además, el valor de Shapley tiene una interpretación sencilla: supongamos que los agentes van llegando de uno en uno a una habitación y cada agente recibe un pago igual a la cantidad que aporta a los agentes que hay en la habitación, i.e., si en la habitación están los agentes de S y llega el agente i , entonces éste recibirá un pago igual a $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Si tomamos todos los posibles ordenes de llegada como equiprobables y calculamos el valor medio del pago que recibe cada jugador, entonces obtendremos el valor de Shapley.

A continuación, aplicamos estas nociones de la teoría de juegos al problema PFS que estamos tratando. Primero, definimos el juego TU (N, v) asociado a un problema PFS y a una ordenación inicial σ_0 , como

$$v(S) = \max_{\sigma \in \mathcal{A}(S)} \{c_N(\sigma_0) - c_N(\sigma)\}$$

para cada $S \subseteq N$, donde $\mathcal{A}(S)$ representa el conjunto de ordenaciones admisibles para S . Una ordenación σ se dice **admisibles** para S si, para cada agente $i \notin S$, el conjunto de agentes que poseen trabajos ordenados antes que el trabajo de i es el mismo tanto si ordenamos los trabajos según σ_0 o si los ordenamos según σ . Entonces, $v(S)$ se define como la máxima ganancia que pueden obtener los agentes de S sin afectar a los agentes que no están en S .

Asociado a cada agente $i \in N$ definimos su **índice de urgencia** como $u_i = \frac{\alpha_i}{p_i}$. Llamamos una **ordenación de urgencia** a una ordenación σ_u donde los trabajos están ordenados de forma no decreciente según su índice de urgencia.

Los principales resultados de este trabajo son los siguientes.

- **Cualquier juego TU asociado a un problema PFS y con orden inicial igual a un orden de urgencia es convexo.**
- **El valor de Shapley puede ser calculado siguiendo el algoritmo propuesto en [2].** Así, no es necesario conocer quién es el juego (N, v) para calcular el valor de Shapley.

Bibliografía

- [1] P. Borm, H. Hamers, R. Hendrickx; Operations Research Games: A Survey, *Top* **9** (2001), 139–216.
- [2] N. Shakhlevich, H. Hoogeveen, M. Pinedo; Minimizing total weighted completion time in a proportionate flow shop, *Journal of Scheduling* **1** (1998), 157–168.

¡¡¡De tres dimensiones a solo una!!!

María Teresa Sánchez Rúa
 Departamento de Matemática Aplicada

23 de Mayo de 2006

Resumen

Una *viga* es un sólido tridimensional en el cual su longitud predomina sobre las otras dos dimensiones, es decir, el tamaño de su sección transversal es mucho más pequeño que su longitud. Esta propiedad se aprovechó para introducir algunas hipótesis *a priori* que permitieron simplificar mucho el problema de elasticidad tridimensional asociado a vigas, reduciéndolo a un modelo unidimensional. Estas hipótesis dependían del tipo de fuerzas aplicadas, de flexión o torsión. De esta manera, surgieron infinidad de teorías de vigas: Euler-Bernoulli, Bernoulli-Navier, Timoshenko, Vlassov, etc. Por ejemplo, de la teoría de Euler-Bernoulli se deducen las siguientes ecuaciones diferenciales para el comportamiento de una viga:

$$\begin{cases} (EI_\alpha u''_\alpha)'' = F_\alpha, & \alpha = 1, 2, \\ -(EAu'_3)' = F_3, \end{cases} \quad (1)$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es el campo de desplazamientos (u_2 denota el desplazamiento vertical) que sufre la viga al aplicarle fuerzas de intensidad $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. A denota el área de la sección transversal, E es el módulo de Young del material e I_α son los módulos de inercia con respecto a la sección transversal.

En los años 70 comenzó el uso de métodos asintóticos para obtener y justificar diferentes modelos unidimensionales de vigas. La principal idea de estos métodos es aproximar la solución tridimensional de las ecuaciones de elasticidad por sucesivos términos de una serie de potencias donde el diámetro de la viga –el tamaño de su sección transversal– es un parámetro que tiende a cero. Los primeros trabajos en esta dirección se deben a Rigolot [2] y Bermúdez y Viaño [1].

Problema tridimensional asociado a la viga

Sea ω un subconjunto abierto, acotado y conexo de \mathbb{R}^2 con área $A = 1$ y $\gamma = \partial\omega$ su frontera. Supongamos que el sistema de coordenadas $0x_1x_2$ es un sistema principal de inercia asociado a ω , es decir

$$\int_\omega x_1 d\omega = \int_\omega x_2 d\omega = \int_\omega x_1 x_2 d\omega = 0.$$

PALABRAS CLAVE: formulación débil, análisis asintótico.

Dado $\epsilon \leq 1$, denotamos $\omega^\epsilon = \epsilon\omega$, $\gamma^\epsilon = \partial\omega^\epsilon$ y consideramos una viga que ocupa en reposo el dominio $\Omega^\epsilon = \omega^\epsilon \times (0, L)$, de modo que el parámetro ϵ se corresponde con el tamaño del diámetro de la sección transversal ω^ϵ . Denotamos por $\Gamma^\epsilon = \gamma^\epsilon \times (0, L)$ la frontera lateral de la viga Ω^ϵ y por $\Gamma_0^\epsilon = \omega^\epsilon \times \{0\}$, $\Gamma_L^\epsilon = \omega^\epsilon \times \{L\}$ sus extremos. Por último, $\mathbf{x}^\epsilon = (x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon)$ denota un punto arbitrario de Ω^ϵ y \mathbf{n}^ϵ el vector normal unitario exterior a la frontera de Ω^ϵ . Además, $\omega = \omega^1$, $\Omega = \Omega^1$, $\Gamma = \Gamma^1$ y $\gamma = \gamma^1$.

Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, el comportamiento de la viga viene dado por las ecuaciones de equilibrio usuales. Suponemos que la viga está hecha de un material elástico e isótropo – su deformación no depende de la dirección –, de tal modo que el tensor de deformaciones está relacionado con el tensor de tensiones a través de una ley de comportamiento lineal, dada por la ley de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon))\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon), \quad \varepsilon_{ij}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_j^\epsilon} + \frac{\partial u_j^\epsilon}{\partial x_i^\epsilon} \right),$$

donde λ, μ son los parámetros de Lamé del material relacionados con el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν mediante las relaciones usuales:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Además, consideramos las siguientes condiciones de contorno sobre la frontera de la viga: la viga está sujeta en sus extremos (es decir, el desplazamiento es nulo) y se aplica una fuerza superficial de densidad \mathbf{h}^ϵ sobre la superficie lateral Γ^ϵ .

La formulación débil del problema que queremos resolver es la siguiente:

Problema (PD^ϵ):

Encontrar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^\epsilon \in \mathbf{H}_D^1(\Omega^\epsilon)$ tal que

$$\int_{\Omega^\epsilon} \boldsymbol{\sigma}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}^\epsilon(\mathbf{v}^\epsilon) dx^\epsilon = \int_{\Omega^\epsilon} \mathbf{f}^\epsilon \cdot \mathbf{v}^\epsilon dx^\epsilon + \int_{\Gamma^\epsilon} \mathbf{h}^\epsilon \cdot \mathbf{v}^\epsilon d\Gamma^\epsilon, \quad \forall \mathbf{v}^\epsilon \in \mathbf{H}_D^1(\Omega^\epsilon), \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon))\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon), \quad (3)$$

donde $\mathbf{H}_D^1(\Omega^\epsilon) = \{\mathbf{v}^\epsilon \in [H^1(\Omega^\epsilon)]^3; \mathbf{v}^\epsilon = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_0^\epsilon \cup \Gamma_L^\epsilon\}$, \mathbf{f}^ϵ son las fuerzas de volumen y $\cdot : \cdot$ denota el producto tensorial.

Método de desarrollos asintóticos

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de \mathbf{u}^ϵ cuando ϵ tiende a cero, es decir, intentamos reducir el problema tridimensional a un problema unidimensional, eliminando la dependencia con respecto al diámetro de la sección transversal ϵ . Para ello utilizamos el método de desarrollos asintóticos (véase [3]). En primer lugar, definimos un problema equivalente (en el cual la dependencia con respecto a ϵ es explícita) utilizando un cambio de variable a un dominio fijo y el consiguiente reescalado del campo de desplazamientos. Introducimos el cambio de variable (véase

[1])

$$\begin{aligned} \Pi^\epsilon : \bar{\Omega} &\rightarrow \bar{\Omega}^\epsilon \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) &\rightsquigarrow \Pi^\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\epsilon = (\epsilon x_1, \epsilon x_2, x_3), \end{aligned} \quad (4)$$

y reescalamos el campo de desplazamientos:

$$u_\alpha(\epsilon)(\mathbf{x}) = \epsilon u_\alpha^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon), \quad u_3(\epsilon)(\mathbf{x}) = u_3^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon), \quad (5)$$

$$v_\alpha(\mathbf{x}) = \epsilon v_\alpha^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon), \quad v_3(\mathbf{x}) = v_3^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon), \quad \forall \mathbf{v}^\epsilon \in \mathbf{H}_D^1(\Omega^\epsilon). \quad (6)$$

Además, consideramos los siguientes órdenes de magnitud para las fuerzas aplicadas:

$$\begin{aligned} f_\alpha^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) &= \epsilon f_\alpha(\mathbf{x}), \quad f_3^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) = f_3(\mathbf{x}), \\ h_\alpha^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) &= \epsilon^2 h_\alpha(\mathbf{x}), \quad h_3^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) = \epsilon h_3(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^3$ y $\mathbf{h} \in [L^2(\Gamma)]^3$ son independientes de ϵ .

Por lo tanto, cálculos simples basados en el cambio de variable en integración nos permiten escribir el siguiente resultado:

El campo de desplazamientos reescalado $\mathbf{u}(\epsilon)$ obtenido de \mathbf{u}^ϵ , solución del Problema (PD^ϵ) , a través de la transformación (5) es la única solución del siguiente problema débil definido en Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\epsilon) &\in \mathbf{H}_D^1(\Omega), \\ a_0(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) + \epsilon^2 a_2(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) + \epsilon^4 a_4(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) &= \epsilon^4 F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega), \end{aligned} \quad (7)$$

donde para todos $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_D^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} [\lambda \varepsilon_{\alpha\alpha}(\mathbf{w}) \varepsilon_{\beta\beta}(\mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{w}) \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{v})] dx, \\ a_2(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} [\lambda \varepsilon_{\alpha\alpha}(\mathbf{w}) \varepsilon_{33}(\mathbf{v}) + 4\mu \varepsilon_{3\alpha}(\mathbf{w}) \varepsilon_{3\alpha}(\mathbf{v}) + \lambda \varepsilon_{33}(\mathbf{w}) \varepsilon_{\alpha\alpha}(\mathbf{v})] dx, \\ a_4(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33}(\mathbf{w}) \varepsilon_{33}(\mathbf{v}) dx, \\ F(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma} h_i v_i d\Gamma. \end{aligned}$$

El método de desarrollos asintóticos consiste en los siguientes pasos (véase [3]):

1. Escribimos $\mathbf{u}(\epsilon)$ en serie de potencias

$$\mathbf{u}(\epsilon) = \mathbf{u}^0 + \epsilon \mathbf{u}^1 + \epsilon^2 \mathbf{u}^2 + \epsilon^3 \mathbf{u}^3 + \epsilon^4 \mathbf{u}^4 + \dots$$

2. Sustituimos la expresión asintótica anterior en el problema tridimensional (7).
3. Identificamos coeficientes de la misma potencia de ϵ .

De esta manera, obtenemos problemas más sencillos para cada uno de los términos de la expansión asintótica. En particular, se puede demostrar que los términos de orden cero verifican

$$u_\alpha^0(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^0(x_3), \quad u_3^0(x_1, x_2, x_3) = \underline{u}_3^0(x_3) - x_\alpha \partial_3 u_\alpha^0(x_3),$$

donde

$$\begin{aligned} u_\alpha^0 &\in \mathcal{C}^1(-L, L), \quad u_\alpha^0(0) = u_\alpha^0(L) = 0, \\ \int_{-L}^L EI_\alpha \partial_{33} u_\alpha^0 \partial_{33} v_\alpha^0 dx_3 &= \int_{-L}^L \int_\omega f_\alpha v_\alpha^0 d\omega dx_3 + \int_{-\delta}^\delta \int_\gamma h_2 v_\alpha^0 d\gamma dx_3, \quad (8) \\ \forall v_\alpha^0 &\in \mathcal{C}^1(-L, L), \quad v_\alpha^0(0) = v_\alpha^0(L) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_3^0 &\in \mathcal{C}^0(-L, L), \quad \underline{u}_3^0(0) = \underline{u}_3^0(L) = 0, \\ \int_{-L}^L EA \partial_3 \underline{u}_3^0 \partial_3 v_3^0 dx_3 &= \int_{-L}^L \int_\omega f_3 v_3^0 d\omega dx_3 + \int_{-\delta}^\delta \int_\gamma h_3 v_3^0 d\gamma dx_3, \quad (9) \\ \forall v_3^0 &\in \mathcal{C}^0(-L, L), \quad v_3^0(0) = v_3^0(L) = 0. \end{aligned}$$

Utilizando estimaciones *a priori* y resultados clásicos de análisis funcional, se demuestra que $\mathbf{u}(\epsilon)$ converge fuertemente a \mathbf{u}^0 en $H^1(\Omega)$, por lo que podemos decir que \mathbf{u}^0 es una buena aproximación de $\mathbf{u}(\epsilon)$, y en consecuencia, de \mathbf{u}^ϵ (utilizando simplemente el cambio de variable inverso).

Por lo tanto, hemos obtenido una simplificación del Problema (PD^ϵ) que viene dada por tres problemas unidimensionales mucho más sencillos. Además, es fácil comprobar que los problemas variacionales (8) y (9) se corresponden con los problemas diferenciales (1) utilizados en ingeniería. En consecuencia, hemos justificado matemáticamente la teoría clásica de Euler-Bernoulli.

Bibliografía

- [1] A. Bermúdez, J. M. Viaño; Une justification des équations de la thermo-élasticité des poutres à section variable par des méthodes asymptotiques, *RAIRO Anal. Numér.* **18** (1984), 347–376.
- [2] A. Rigolot; Déplacements et petites deformations des poutres droites: Analyse asymptotique de la solution à grande distance des bases, *J. Méc. Appl.* **1** (1977), 175–206.
- [3] L. Trabucho, J.M. Viaño; Mathematical modelling of rods, en *Handbook of Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1996, 487–974.

Las ecuaciones del millón de dólares

Francisco Javier Fernández Fernández

Departamento de Matemática Aplicada

6 de Junio del 2006.

Resumen

Las ecuaciones de Navier Stokes modelan el movimiento de un fluido viscoso. Desde el punto de vista de la física o la ingeniería son muy importantes, pues nos permiten predecir el comportamiento de un fluido en multitud de situaciones como, por ejemplo, las turbulencias que crea un avión al surcar los cielos o el comportamiento de las mareas. Quizás estos dos últimos ejemplos sean representativos de todos los demás, pues en el caso del avión el fluido que nos interesa es el aire (fluido compresible) y en el caso de las mareas es el agua (fluido incompresible). Las ecuaciones de Navier Stokes se pueden obtener a partir de dos principios básicos de la física:

- **Ley de Conservación de la Masa** (La materia no se crea ni se destruye)

$$\forall \mathcal{P} \subset \Omega \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

- $\mathcal{X} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (movimiento del fluido).
- $\mathbf{u}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{X}(p(x, t), t)$ (velocidad del fluido).

- **Ley de Conservación del Movimiento** (Segunda ley de Newton; fuerza = masa \times aceleración)

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_c$$

- $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}$ (Derivada material de la velocidad)
- \mathbf{f}_e fuerzas externas como la gravedad.
- $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_v$ fuerzas de contacto.
 - * $\mathbf{f}_p = -\nabla p$ componente de presión (Euler, Bernoulli, ...)
 - * $\mathbf{f}_v = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}$ componente viscosa (Navier y Stokes)

Por lo tanto, si tenemos en cuenta lo anterior, las ecuaciones de Navier Stokes se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} \right) + \nabla p - \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_e \end{cases}$$

PALABRAS CLAVE: Mecánica de Fluidos, Navier-Stokes, elementos finitos.

La demostración de algunos de los aspectos relativos a la regularidad y unicidad de solución de las ecuaciones de Navier Stokes en \mathbb{R}^3 , es uno de los problemas que se anunciaron el 24 de Mayo de 2000 en el *Collège de France de Paris* conocidos como los *Millennium Prize Problems*, patrocinados por el *Clay Mathematics Institute*:

1. P versus NP (Teoría de la computación).
2. Conjetura de Hodge (Geometría Algebraica).
3. Conjetura de Poincaré (Geometría y Topología, ya resuelto por Perelman).
4. Hipótesis de Riemann (Teoría de Números y Análisis).
5. Existencia de Yang-Mills y salto de masa (Física teórica).
6. Existencia y regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes (Mecánica de Fluidos y EDPs).
7. Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer (Geometría aritmética algebraica).

Actualmente, sólo se conocen algunos resultados parciales sobre la existencia y unicidad de soluciones globales en el contexto de las soluciones débiles (el lector interesado puede consultar [1] o [2] para más referencias). Aunque no seamos capaces de resolver del todo el problema de la existencia y unicidad de solución, lo que sí podemos hacer es obtener aproximaciones relativamente buenas empleando métodos numéricos. Quizás el método numérico mejor adaptado a la resolución de estas ecuaciones (por la idea de base que se emplea para la demostración de existencia de soluciones débiles) es el método de Elementos Finitos para la discretización espacial y el método de características para la discretización temporal (ver [3]):

- Discretización en Tiempo. Método de características:

$$\frac{Dy}{Dt}(x, t_{n+1}) \simeq \frac{y^{n+1}(x) - y^n(\mathbf{X}^n(x))}{\Delta t}$$

con

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{d\tau}(x, t; \tau) = \vec{y}(\mathbf{X}(x, t; \tau), \tau) \\ \mathbf{X}(x, t; t) = x. \end{cases}$$

- Discretización en Espacio. Método de E. F.

$$\begin{aligned} M_h &= \{q_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}); \forall T \in \tau_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1(T), \int_{\Omega} q_h dx = 0\}, \\ X_h &= \{\vec{v}_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})^3; \\ &\quad \forall T \in \tau_h, \vec{v}_h|_T \in [\mathbb{P}_1(T) \oplus \langle \{\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}\} \rangle]^3 \vec{v}_h|_{\Gamma} = \vec{0}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones totalmente discretizadas se escriben:

$$\vec{y}_h^0 = 0, \quad \pi_h^0 = 0,$$

para $n = 0, \dots, N - 1$, buscar $\vec{y}_h^{n+1} \in X_h, \pi_h^{n+1} \in M_h$ tales que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \int_{\Omega} \vec{y}_h^{n+1} \cdot \vec{v}_h dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{y}_h^{n+1} : \nabla \vec{v}_h dx \\ \quad - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}_h) \pi_h^{n+1} dx = \int_{\Omega} \beta^{n+1} \theta_h^{n+1} \cdot \vec{v}_h dx \\ + \quad \alpha \int_{\Omega} (\vec{y}_h^n \circ \mathbf{X}^n) \cdot \vec{v}_h dx \quad \forall \vec{v}_h \in X_h, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{y}_h^{n+1}) q_h = 0 \quad \forall q_h \in M_h. \end{array} \right.$$

Una vez obtenido el sistema de ecuaciones anterior, lo podemos resolver empleando métodos clásicos del análisis numérico matricial. Es esta forma discretizada la que se emplea para predecir el comportamiento de fluidos en las situaciones que describíamos al principio de este resumen.

Bibliografía

- [1] J. Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier; *Mathematical Geophysics*, Oxford, 2006.
- [2] R. Temam; *Navier-Stokes Equations*, AMS, 2001.
- [3] V. Girault, P. A. Raviart; *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, 1980.

Proxectando a Terra

Miguel Brozos Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía

13 de Xuño de 2006

Resumo

A pesar da trivialidade aparente do enunciado, debido ó achatamento nos polos debemos dicir que a Terra é un *xeoide* (do grego: *xeo*=Terra, *oide*=forma) e non unha esfera, se ben, para os efectos do que segue, asumíremola como tal por simplicidade.

Unha *proxección cartográfica* é unha representación dunha superficie esférica no plano. Dado que a representación máis útil que un poida ter será aquela que sexa máis fiel á realidade, un pretendería en principio atopar unha aplicación isométrica (é dicir, que preserve as distancias) entre a esfera e o plano. Dado que a esfera é compacta e o plano non, non podemos ter unha aplicación continua entre a totalidade da esfera e o plano, pero tampouco é isto o que perseguimos ó facer un mapa. Empezamos por restrinxírmonos ó anaco da esfera que pretendemos representar, mais, aínda así, o *Teorema Egregium de Gauss* (1777-1855) mostra que non é posible construír unha isometría entre este e un pedazo do plano. Este feito era xa coñecido por Euler (1707-1783).

Teorema. Non existe ningunha proxección cartográfica dunha rexión da esfera que conserve as distancias.

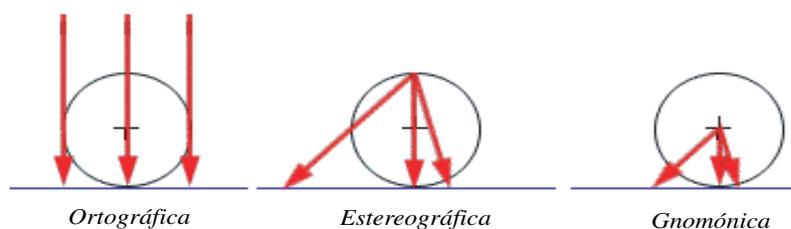
Proba. Unha proba sinxela pódese dar por redución ó absurdo considerando na esfera un triángulo no que os lados son xeodésicas, é dicir, arcos de circunferencias máximas. Dado que a aplicación conserva as distancias, ten que conservar as xeodésicas e os ángulos. Así, o triángulo esférico irá nun triángulo no plano. Pero a suma dos ángulos do triángulo na esfera é estrictamente maior que π , e no plano exactamente π , o que contradí o enunciado. \square

Este resultado motiva a existencia dunha grande variedade de proxeccións, atendendo a que propiedades se desexan conservar. Así, a representación a facer non pode conservar tódalas características (lonxitudes, ángulos, áreas,...) e un debe escoller cal é a propiedade na que está máis interesado, para así conservala na representación e, posiblemente, renunciar ás demais, ou ben dar unha aproximación o máis axeitada posible. Por exemplo, debido a que non existen mapas planos que sexan ó mesmo tempo conformes e isoareais (é dicir, conserven os ángulos e as áreas, respectivamente), un debe sacrificar cando menos unha destas dúas propiedades.

Hai moitos tipos de proxeccións e estas pódense clasificar de moitos xeitos distintos. Aquí destacaremos tres tipos diferenciados en base á súa construción. Cada

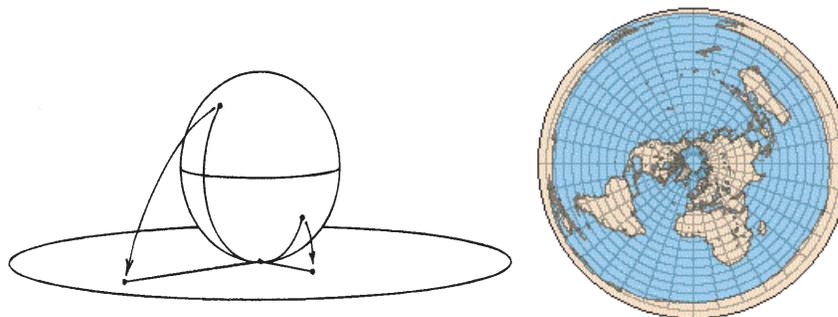
un deles presenta características comúns intrínsecas ó modo en que se construíron, se ben as pequenas modificacións proporcionan unha maior ou menor utilidade para cada obxectivo concreto. Ademais, existen moitos outros tipos de proxeccións con características moi diversas, que non se constrúen de ningún destes xeitos.

1. Proxeccións acimutais. Na maior parte dos casos, este tipo de proxeccións obtéñense proxectando directamente sobre un plano (normalmente tanxente á esfera) dende un certo punto. Dependendo deste punto temos: *proxeccións ortográficas* se o punto é un punto do infinito, *proxeccións estereográficas* se o punto é a antípoda do punto de tanxencia da esfera co plano de proxección, e *proxeccións centrais ou gnomónicas* se proxectamos dende o centro da esfera.



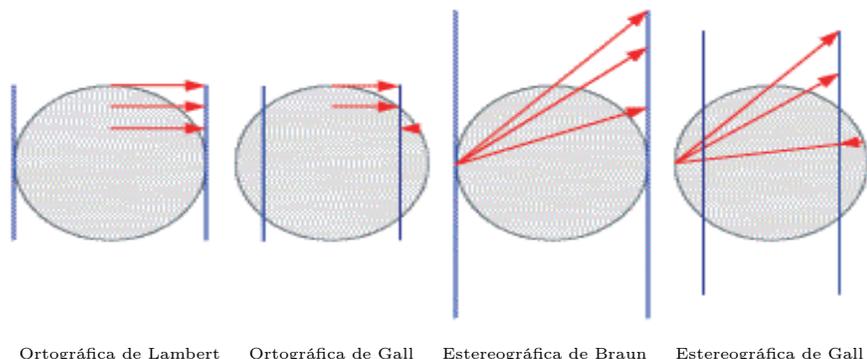
Este diagrama mostra os tres distintos tipos de proxeccións acimutais clásicas.

Outras proxeccións acimutais de interese son a proxección equidistante, que se constrúe como a aplicación exponencial, e a proxección isoareal de Lambert.



Este diagrama mostra como se constrúe a proxección equidistante e a súa representación dende o Polo Norte. Un feito importante referente a ela é que conserva a distancia na dirección dos meridianos.

2. Proxeccións cilíndricas. En vez de proxectar directamente sobre un plano, un pode empregar unha superficie (preferentemente desenrolable) que se axuste máis á esfera. Cando se emprega un cilindro para facer isto, a proxección chámase cilíndrica. O cilindro pode ser tanxente (proxección tanxente) ou secante (proxección transversal) á esfera, obtendo así diferentes tipos de proxeccións.

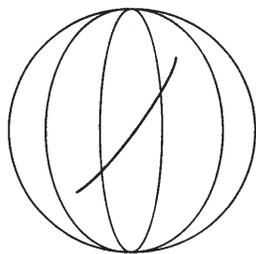


Ortográfica de Lambert Ortográfica de Gall Estereográfica de Braun Estereográfica de Gall

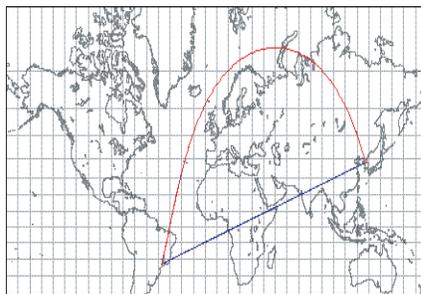
Diferentes técnicas de proxección dan lugar a propiedades moi diversas.

Proxección de Mercator.

A proxección de Mercator xurdiu nun momento histórico en que a navegación posuía unha grande importancia. A súa aparición data de 1569, e débese a Gerardus Krämer (Mercator)(1512–1594). A característica que identifica esta proxección é que as loxodromas da esfera, é dicir, as curvas que forman un ángulo constante con respecto ós meridianos, se representan por liñas rectas. Esta propiedade é fundamental en navegación, pois seguindo en todo momento a dirección marcada pola brúxula describírase unha loxodroma. Porén, debemos ter en conta que estas liñas rectas no mapa non representan o camiño máis curto que une dous puntos, aínda que si unha ruta doada de seguir para chegar ó destino desexado.

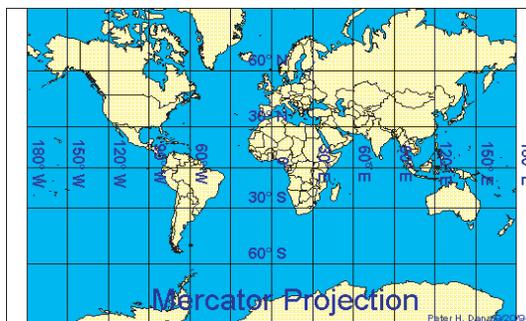


Loxodroma na esfera.



A liña recta representa unha loxodroma e a outra unha xeodésica: as loxodromas non minimizan distancias.

Deste xeito, Mercator atopou unha proxección na que os paralelos e meridianos se representan por liñas horizontais e verticais, respectivamente, e ademais as loxodromas se proxectan en segmentos de recta. Por estes motivos, a proxección de Mercator desempeña, aínda hoxe en día, un papel destacado entre as proxeccións cilíndricas da esfera.



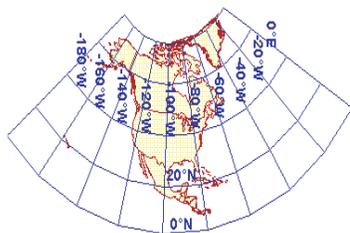
Proxección de Mercator.

A proxección de Mercator pódese construír proxectando dende o centro da esfera sobre un cilindro tanxente á mesma no ecuador, e reaxustando a altura de xeito que a proxección sexa conforme.

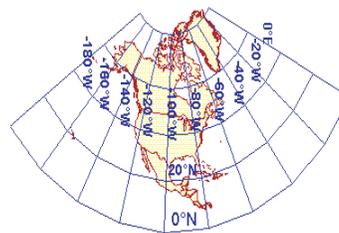
3. Proxeccións cónicas.

Outro tipo de proxeccións a destacar son as denominadas proxeccións cónicas, que se obtéñen empregando como superficie intermedia de proxección un cono tanxente ou secante á esfera. Unha vez que se proxecta a superficie da esfera sobre o cono, este córtase por un meridiano e desenrólase no plano. Deste xeito, a representación das rexións próximas ós lugares de intersección do cono e a esfera é bastante fiel. Por este motivo, e porque a distorsión medra rapidamente ó se alonxar destes puntos, as proxeccións cónicas empréganse na representación de rexións relativamente pequenas e nas que predomina a dirección leste-oeste.

Entre as proxeccións cónicas destacan, por teren desempeñado un papel importante na historia, a *proxección cónica estereográfica de Braun*, a *proxección cónica isoareal de Albers* e a *proxección cónica conforme de Lambert*.



Proxección cónica isoareal de Albers.



Proxección cónica conforme de Lambert.

Exemplos de proxeccións cónicas.

Bibliografía

- [1] E. García-Río; *Proyecciones cartográficas: una introducción a la construcción de mapas*, no forno.

Cando un verdadeiro xenio aparece no mundo, recoñecerédelo por este signo: tódolos necios se conxuran contra el.

Jonathan Swift.