SIGMA

REVISTA DE MATEMATICAS

MATEMATIKA ALDIZKARIA

Nº 35 Zka.

Abril · Apirila

SIGMA

REVISTA DE MATEMATICAS

MATEMATIKA ALDIZKARIA

Nº 35 Zka.

Abril · Apirila

EUSKO JAURLARITZA GOBIERNO VASCO

HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE
ETA IKERKETA SAILA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN,
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia
Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco

Vitoria - Gasteiz, 2010

Lan honen bibliografia-erregistroa Eusko Jaurlaritzako Liburutegi Nagusiaren katalogoan aurki daiteke: <http://www.euskadi.net/ejgvbiblioteka>.

Un registro bibliográfico de esta obra puede consultarse en el catálogo de la Biblioteca General del Gobierno Vasco: <http://www.euskadi.net/ejgvbiblioteka>.

Argitaraldia / Edición:	1.a, 2010ko apirila 1ª. abril 2010
Ale-Kopurua / Tirada:	1.600
©	Euskal Autonomi Elkarteko Administrazioa Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Saila Administración de la Comunidad Autónoma del País Vasco Departamento de Educación, Universidades e Investigación
Internet:	www.hezkuntza.ej-gv.net
Helbidea / Dirección:	Berritzegune de Bilbao Tolosa, 6 48002 Bilbao
Arduraduna / Responsable:	Santiago Fernández
Aholkulariak / Asesores:	Fernando Fouz Alberto Bagazgoitia José Manuel López Irastorza Montse Huguet José Ramón Gregorio Félix Alayo
Argitaratzailea / Edita:	Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco Donostia-San Sebastián, 1 - 01010 Vitoria-Gasteiz
Diseinua eta Maketazioa: Diseño y Maquetación:	ZETA Diseño Gráfico - Avda. del Ferrocarril, 2 Epta. Dpto. 1 - 48013 BILBAO (Bizkaia)
Azala / Portada: Egilea / Autora:	Desde el espacio Elena Sarasibar
Traducción y adaptación al euskera de la Editorial: Editorialaren itzulpena eta egokitzapena:	Felipe Juaristi
Inprimaketa / Impresión:	Gráficas Varona, S.A.
ISSN:	1131-7787
L.G. / D.L.:	BI-1530/89

Editoriala

Aldizkariko azken zenbakia literatura eta matematika edukiez ongi osaturik ekarri ondoren, berriro matematikari buruzko gaiak hartzen ditugu. Hasteko, Jesús J. Jiménezen artikulu bat dugu, Lehen Hezkuntzako lehen urteetarako oinarrizko edukiduna: alegia adimen-kalkulua. Gure ikuspegitik, eta matematikaren hezkuntzari dagokionez, tresna garrantzitsu eta beharrezkoa da eta (orrialde hauetatik lehen urteetatik hasita kalkulagailu elektronikoen erabilera defendatu badugu ere), ez da sekula ezabatu behar eta, areago esango genuke, operazio matematikoen agerpenaren hasieratik bertatik bultzatua behar du izan.

Bigarren Hezkuntzari dagokion atala hiru artikuluk osatzen dute. Lehenean, Elisabete Alberdik, gaurko gai bat ekartzen digu, matematika arloko curriculum berrietan ageriko edukia dena, matematika-konpetentziak hain zuzen. Hain zuzen, Batxilergoko Matematikak IIko curriculuma hartzen du ardatz. Batzuetan badirudi, irakasle-multzo batzuentzat, konpetentzien gai hori DBHri dagokiola eta, ez, era berean, Batxilergoari.

Powers of ten bideo ezaguna, laurogeita hamarreko hamarkadan azaldutakoan arrakastatsua izan zena, Josema López Irastorzak erabiltzen du unitate didaktiko bat osatzeko helburuz, eta, bide batez, erakusteko nola ekin dakiokeen potenziazioari.

Berriro ere, 2009ko Euskadiko 7. Matematika-Olinpiadaren azken ekitaldiko nondik norakoa azaltzen dugu. Azken ekitaldi honetan nabaria izan zen lehen sailkatuen maila handia. Urte horretan, eta azpimarratzekoa da, lehen hamabi posturen artean neskak gehiago izan ziren mutilak baino.

Arbel Digitalak Mikel Lezaunen artikulu interesgarri bat dakarkigu EHUko irakaslea

Editorial

Después de un último número de la revista con artículos de amplio contenido literario-matemático, volvemos a retomar temas más propiamente matemáticos. Empezamos con un artículo, cuyo autor es Jesús J. Jiménez, con un contenido fundamental en los primeros años de la Enseñanza Primaria: el cálculo mental. Entendemos que es una herramienta importante y necesaria en la educación matemática y que, aunque desde estas páginas siempre hemos defendido el uso de las calculadoras desde los primeros años, nunca debe ser eliminado y sí, por el contrario, potenciado desde el principio de la aparición de las operaciones aritméticas.

El apartado de *Secundaria* se compone de tres artículos. En el primero, Elisabete Alberdi, nos plantea un tema de actualidad, que forma parte explícita de los nuevos currículos matemáticos, y que son las competencias matemáticas. En particular se centra en el currículo de Matemáticas II de bachillerato. A veces da la sensación que, para algunos colectivos de profesores, este tema de las competencias pertenece a la ESO y no, también, al bachillerato.

El conocido video *Powers of ten,* que tuvo un gran éxito cuando apareció allá a mediados de los noventa, lo utiliza Josema López Irastorza para crear una unidad didáctica como ejemplo de cómo se puede acometer significativamente la potenciación.

De nuevo publicamos el desarrollo de la última edición de la 7ª Olimpiada Matemática de Euskadi del año 2009. Esta última edición contó con un más que apreciable nivel en los primeros clasificados, siendo el año en que hubo más chicas entre los doce primeros puestos.

La Pizarra Digital nos trae un interesante artículo de Mikel Lezaun, profesor de la UPV, bera, *RankPage* algoritmoari buruz. Algoritmo hori Google-k erabiltzen du web orriak sailkatzeko. Artikuluak, Matematiketako edukiak lantzeaz gainera, Informatika alorrean ere bere zeresana du.

Vicente Meavillak berriro geometria gaidun artikulu interesgarria idatzi digu. Jostailu batetik abiaturik, elkarrekin lotutako eraztun multzo batetik hain zuzen, irudi interesgarri bat erakusten digu: *ikosidodekaedroa*. Irudi hori aztertuz, haren antzekoak diren bestelako konfigurazio edo egitura geometrikoak bilatzen ditu.

The Simpson telesail ezagun eta miretsiaren atzetik gidoilari eta produktore talde bat dago. Horien arteko batzuk matematikari eta fisikariak dira. Heziketa zientifikoa badela nabaria da serieko zenbait ataletan. Artikuluan, hain zuzen, *Terrorearen etxe zuhaitza VI* azaltzen da. Homer labirintu baten erdian aurkitzen da, non algebra-erlazio ezagun zenbait ageri diren: *π, e, i, 1, 0*rako Eulerren erlazioa; Fermaten azken teorema, etab... Abel Martinek eta Marta Martín Sierrak idatzi dute artikulua.

Elisabete Alberdik atal honetan *Eulerren metodoa integral zehaztuaren kalkulurako* izena duen bigarren artikulua aurkezten digu. Eudoxoren exhaustio metodotik abiaturik, Riemannen aldaerak sartzen ditu bihurgune batean itxitako esparrua kalkulatzeko. Integralaren ikurra nola sortzen den aipatzen du eta zein ekuazio diferentzial erakusten diren batxilergoan.

Inmaculada Fernándezek *Zenbaki miresgarri eta misteriotsu horren zifrak* izeneko artikulua ekarri digu. Bertan *π* zenbakia kalkulatzeko Newtonen lana garatzen du. Artikuluak Isaak Newtonekiko miresmena eta maitasuna erakusten ditu.

Problemen ebazpenari dagokionez, protokoloak lan-tresna interesgarria dira. Irakasleentzat, ikasleak eta beren lan modua

sobre el algoritmo *RankPage* que utiliza Google para ordenar las páginas web. Este artículo puede utilizarse no sólo como contenido de las Matemáticas, sino también del área de Informática.

De nuevo Vicente Meavilla nos aporta un nuevo artículo de contenido geométrico. A partir de un juguete para su mascota, se trata de un conjunto de anillos entrelazados, nos descubre una figura interesante: el *icosidodecaedro*. A partir de ahí busca otras figuras o estructuras geométricas semejantes a ella.

Detrás de la conocida y admirada serie *Los Simpson,* se encuentra en grupo de guionistas y productores entre los que se encuentran varios físicos y matemáticos. Esta formación científica trasciende a algunos de los capítulos de la serie, en concreto, en el artículo aparece el capítulo titulado *La casa árbol del terror VI*. Homer se encuentra en un laberinto en que aparecen conocidas relaciones algebraicas como: la relación de Euler para *π, e, i, 1, 0,* el último teorema de Fermat, etc. Este artículo está escrito por Abel Martín y Marta Martín Sierra.

Elisabete Alberdi nos presenta en este apartado un segundo artículo sobre *El método de Euler para el cálculo de la integral definida*. A partir del método de *exhaustión* de Eudoxo, introduce las modificaciones de Riemann para el cálculo del área encerrada por una curva. Cita cómo se crea el signo de integral y qué ecuaciones diferenciales se tratan en el bachillerato.

Inmaculada Fernández nos presenta un artículo titulado *Las cifras de ese maravilloso y misterioso número*, en que desarrolla el trabajo de Newton para el cálculo del número *π*. El artículo transmite su gran admiración y cariño hacia Isaac Newton.

En la resolución de Problemas, los *protocolos* son una interesante herramienta de trabajo que, para los profesores, puede ser una ebaluatzeko era interesgarria izan daiteke. Miguel de Guzmánek gogoeta gisa erabiltzen zuen, lanak ematen zizkion arazoak lantzerakoan eta, horrela bada, erakutsi zizkigun bere *Problemen Ebazpena* liburuan. Javier Sansuánek, Begoña Omatosek eta Manuel Sadak hiru problemaren ebazpenak aurkezten dizkigute, bakoitza bere protokoloarekin, eta bertan ikus daitezke pentsamendu prozesuak, zalantzak, ideiak, besteak beste.

Olinpiako Bazterra inauguratu berriko atalean, Pedro Alegríak erronka berriak ekarri dizkigu problema interesgarrien bidez, baita aurrekoen soluzioak ere. Gaian gehiegi sartuta ez daudenentzat esan behar, artikulua Polyaren heuristika ezagunarekin hasten dela.

Amaitzeko interes handiko lau liburuei buruzko iruzkinak daude.

interesante forma de evaluar a los alumnos y el proceso de trabajo. Miguel de Guzmán lo utilizaba como reflexión de su proceso de trabajo con los problemas con los que tenía especial pelea y, así, nos lo mostró en sus libros sobre Resolución de Problemas. Javier Sansuán, Begoña Omatos y Manuel Sada nos presentan la resolución de tres problemas con sus consiguientes protocoles donde se expresan sus procesos de pensamiento.

En el ya instaurado apartado del *Rincón Olímpic*o, Pedro Alegría nos vuelve a aportar nuevos desafíos con problemas interesantes, junto con soluciones de los anteriores. Para los poco avezados en el tema, el artículo comienza con la conocida heurística de Polya.

Se completa con las reseñan de cuatro libro de indudable interés.

índice

infantil-primaria
haur eta lehen hezkuntza

Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental

Jesús Javier JIménez Ibáñez (*)

Resumen

Si el cálculo mental lo trabajamos desde edades tempranas, conseguiremos que nuestros alumnos dispongan de estrategias que permiten mejorar su confianza y seguridad. Las "Tablas de cálculo", ideadas para mejorar la rapidez del cálculo de operaciones aritméticas, algebraicas y situaciones matemáticas básicas, conforman un método que pretende introducir de forma sistemática el cálculo mental en nuestras clases de matemáticas tanto en primaria como en secundaria. Con un tiempo reducido (5 minutos semanales) de aplicación en clase, quedarán **registrados los resultados** obtenidos por el alumnado y serán de gran **utilidad** para el *profesorado*, el propio *alumnado* y para sus *familias*.

1. Introducción

No parece muy complicado argumentar la importancia de trabajar el cálculo mental en nuestras clases de matemáticas. Podríamos comenzar destacando su **utilidad** para enfrentarse con numerosas situaciones de la vida cotidiana: compras, viajes, cenas, bares,… etc, seguir resaltando el **valor formativo** de esta "gimnasia mental", pues favorece el desarrollo de capacidades mentales dotando a los alumnos de estrategias que les permitan mejorar su confianza y seguridad en los cálculos para no ser tan dependientes de la calculadora. Así mismo podemos observar que permite el desarrollo y adquisición de distintas **competencias básicas** que nuestro alumnado debe alcanzar al finalizar la ESO. Más complicado resulta el cómo trabajarlo en clase y reflejar de forma objetiva la evolución de nuestros alumnos.

El cálculo mental se trabaja en clase de matemáticas de forma rutinaria pero normalmente no quedan registros de esa práctica. Desde hace varios años he intentado sistematizarlo en el aula de manera que, dedicando un tiempo reducido en clase, queden registrados los resultados de los alumnos. Entre otras cosas, esto le permite al alumnado conocer su punto de partida, su situación con respecto al resto de la clase y, a lo largo del tiempo, será consciente de su evolución con posibilidades de mejorar. Al profesorado le ayudará a conocer más y mejor a su alumnado, tendrá un ítem más de evaluación para ellos y estará trabajando desde otro punto de vista conceptos matemáticos relacionados con el currículo.

(*) IES Alhama de Corella, Navarra. E-mail: jjimenei@pnte.cfnavarra.es.

Esto lo he conseguido con lo que llamo "las tablas de cálculo", un método innovador de trabajar sistemáticamente el cálculo mental, que permite mejorar la rapidez de cálculo matemático y que viene a complementar a otros materiales que podemos aplicar en el aula como los problemas graduados para el tratamiento del cálculo global que propone el método del quinzet o distintas actividades y juegos que podemos encontrar en libros de texto o en soporte informático. Te invito a conocerlo.

2. Las tablas de cálculo. Presentación de materiales

Los materiales que forman este método son:

Tablas de cálculo

Cada tabla de cálculo, como vemos en la figura1, está formada por filas (numeradas del 1 al ≈20) y columnas (A, B,.. F, G). El contenido de cada casilla hace referencia a una operación o concepto matemático.

En la parte superior izquierda aparece su nombre y da idea del contenido de la hoja.

En la parte superior derecha aparece un espacio para que el profesor numere la hoja. Escribiremos un 1 para la primera hoja que trabajemos, un 2 la segunda, … etc.

	A	B	C	D	E	F	G
1	34 + 7	31 – 5	15 · 4	65 + 8	36 – 8	45 · 2	6 + 25
2	17 – 5	3 · 11	15 – 9	12 – 3	30 · 2	23 – 7	25 – 8
3	22 · 5	93 + 4	37 + 8	5 · 18	5 + 19	40 · 3	12 # 2
4	74 + 6	12 · 5	24 · 5	11 + 6	16 · 5	19 + 9	35 + 2
5	45 – 6	54 + 8	17 + 4	24 – 5	13 – 6	33 – 4	31 – 2
6	8 + 16	15 · 2	28 + 5	55 : 5	19 + 7	18 + 3	29 + 3
7	31 · 3	62 : 2	22 · 3	21 · 2	60 : 4	11 · 7	15 · 3
8	80 : 20	25 + 3	64 + 7	43 + 7	9 + 18	37 + 7	40 : 10
9	9 + 47	23 – 6	100 : 20	2 + 34	23 – 4	84 : 4	18 + 8
10	26 – 9	19 · 3	32 – 5	46 – 7	37 + 3	45 – 6	42 – 4
11	13 · 3	45 – 7	39 + 2	16 · 2	41 – 3	5 + 17	14 · 5
12	39 – 4	10 + 3	29 – 3	60 : 3	25 · 4	40 – 2	24 – 7
13	44 : 4	7 · 2	11 · 4	16 – 8	6 + 23	26 · 5	36 : 3
14	36 – 6	51 – 2	88 – 2	75 – 3	60 – 4	64 – 5	19 – 5
15	11 · 2	6 + 26	28 : 2	5 · 11	11 · 6	100 : 25	8 · 11
16	19 + 5	36 : 3	12 · 6	5 + 16	28 : 2	3 · 12	16 + 5
17	71 – 2	60 – 4	44 – 6	38 – 9	25 · 3	21 – 9	57 – 3
18	26 · 2	9 + 13	17 · 2	30 · 3	37 + 4	8 + 56	24 · 2
19	3 + 29	11 · 9	51 – 2	37 + 4	16 · 3	19 · 2	7 + 36
20	12 · 4	80 – 3	9 + 56	20 · 5	52 – 5	37 + 4	30 · 4

Figura 1. Tabla de cálculo: *Naturales 2*

El alumno **no debe escribir nada** en esta tabla. Los resultados de las operaciones que aparezcan en cada casilla deberán escribirse, en pruebas que durarán un minuto, en otra *hoja de resultados*.

En la parte posterior de cada tabla de cálculo, como vemos en la figura 2, aparece información complementaria para el profesorado:

a. Soluciones que agilizarán las correcciones.
b. Nivel educativo aproximado al que está destinado cada hoja, tipo de tabla de cálculo y bloque de contenidos al que pertenece la tabla.
c. Puntuación aproximada como referencia de calificación.
d. Indicaciones sobre los contenidos que se trabajan.
e. Resultados: para anotar la media y máxima alcanzadas en la clase.
f. Observaciones: para que cada profesor escriba una valoración escueta de la hoja trabajada si lo cree oportuno.

Margarita Philosophica. Gregor Reisch (1508)

Naturales 2 (Soluciones)

	A	B	C	D	E	F	G
1	41	26	60	73	28	90	31
2	12	33	6	9	60	16	17
3	110	97	45	90	24	120	24
4	80	60	120	17	80	28	37
5	39	62	21	19	7	29	29
6	24	30	33	11	26	21	32
7	93	31	66	42	15	77	45
8	4	28	71	50	27	44	4
9	56	17	5	36	19	21	26
10	17	57	27	39	40	39	38
11	39	38	41	32	38	22	70
12	35	13	26	20	100	38	17
13	11	84	44	8	29	130	12
14	30	49	86	72	56	59	14
15	22	32	14	55	66	4	88
16	24	12	72	21	14	36	21
17	69	56	38	29	75	12	54
18	52	22	34	90	41	64	48
19	32	99	49	41	48	38	43
20	48	77	65	100	47	41	120

Nivel educativo	Tipo	Bloque I
Primaria - 1º ESO	Cálculo directo	Naturales

Puntuación aproximada

Puntos	4	6	8	10	12	15	18	21	24	27
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Indicaciones

Con esta hoja trabajaremos:
• Operaciones con números naturales (+, –, ·, /)

- En cada casilla aparece una operación de un número de una cifra con otro de dos cifras.
- Multiplicar por 5 es igual que dividir entre 2 y multiplicar por 10.
  $26 \cdot 5 = = (26 : 2) \cdot 10 = 13 \cdot 10$

Resultados

Grupo: ______________________________

	Puntos
Media de la Clase	
Máxima de la Clase	

Observaciones

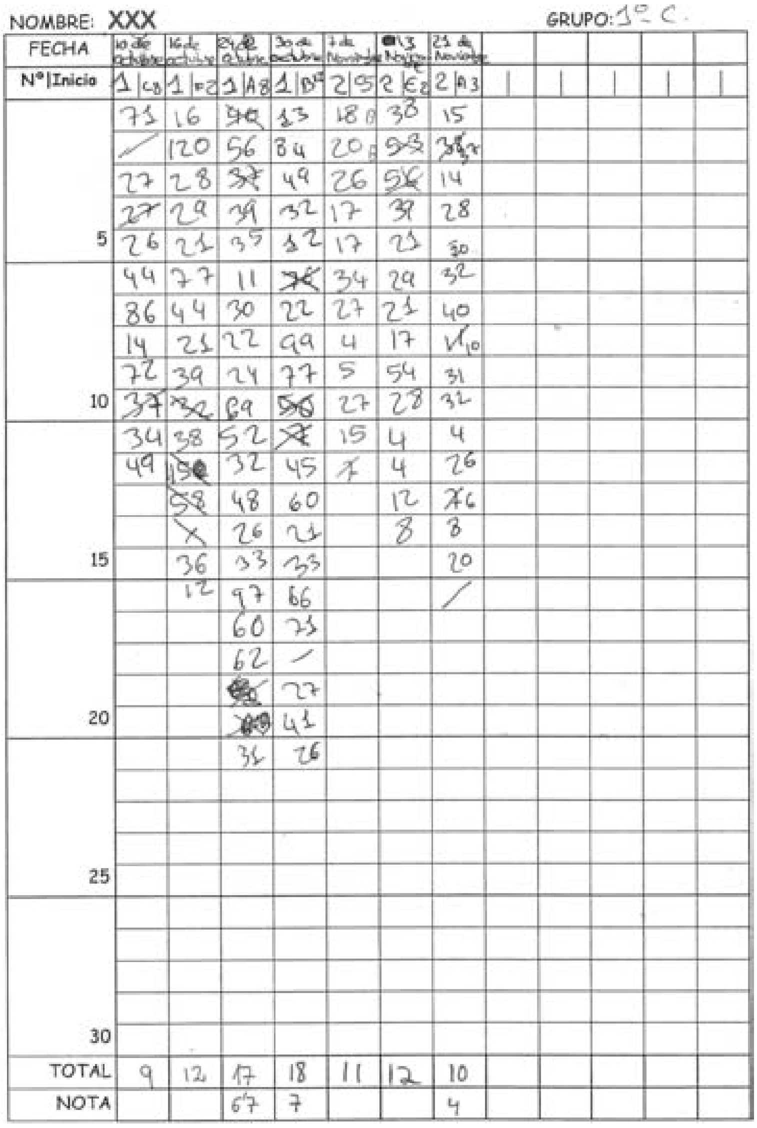
Figura 2. Parte posterior de la tabla de cálculo: *Naturales 2*

Cada tabla de cálculo se trabaja durante cuatro sesiones, una cada semana.

Hoja de resultados

El alumno escribirá en ella su nombre y el grupo al que pertenece.

En cada sesión de cálculo mental, el alumno rellenará una columna de la hoja de resultados. Previamente, indicará la **fecha,** el **número** de la tabla que estamos trabajando (1 , 2 , 3,...), la casilla de **Inicio** (1B , 3F,...) de la prueba (que durará un minuto) y con la mayor rapidez que pueda, los **resultados** de la tabla de cálculo a partir de la casilla de inicio y en orden descendente. En la figura 3, vemos la hoja de resultados de un alumno. Observemos como en cada sesión, se va completando únicamente una columna. Las cuatro primeras columnas corresponden a registros de la primera tabla de cálculo (*Naturales 2*) que trabajaron en el curso.


NOMBRE: XXX GRUPO: 1º C.

FECHA	10 de octubre	16 de octubre	24 de octubre	30 de octubre	7 de noviembre	13 noviembre	21 de noviembre					
Nº|Inicio	1|C8	1|E2	1|A8	1|D[illegible]	2|G5	2|E8	2|A3					
	71	16	[illegible]	13	18	30	15					
		120	56	84	20	93	35					
	27	28	32	49	26	56	14					
	27	29	39	32	17	37	28					
5	26	21	35	12	17	21	30					
	44	77	11	36	34	29	32					
	86	44	30	22	27	21	40					
	14	21	22	99	4	17	11 10					
	72	39	24	77	5	54	31					
10	37	32	69	56	27	28	32					
	34	38	52	7	15	4	4					
	49	15	32	45	7	4	26					
		58	48	60		12	76					
		X	26	21		8	8					
15		36	33	33			20					
		12	97	66								
			60	73								
			62									
			[illegible]	27								
20			[illegible]	41								
			36	26								
25												
30												
TOTAL	9	12	17	18	11	12	10					
NOTA			6,7	7			4					

Figura 3. Hoja de resultados de un alumno

Una vez corregida la prueba, en la parte inferior de la columna quedará registrado el número **total** de aciertos que ha tenido el alumno y la **nota** asociada.

Hoja de gráficas

El alumno irá dibujando una gráfica indicando el número de aciertos obtenidos en cada sesión para visualizar su evolución.

Considero interesante señalar en la gráfica, con una línea discontinua, la **media** obtenida por la clase y la **máxima** puntuación obtenida por un alumno en la tercera sesión, con el objetivo de que cada alumno sepa su situación con respecto del resto de la clase y le sirva de estímulo para superarse de cara a la cuarta y última sesión. La figura 4 nos ilustra una hoja de gráficas en la que vemos la evolución de un alumno a lo largo de las cuatro sesiones de trabajo de la tabla de cálculo *Naturales 2*. En la tercera sesión estaba ligeramente por encima de los 14 puntos de media de la clase pero lejos de los 28 aciertos, que fue la máxima puntuación obtenida por un compañero de clase.

Si un profesor no estima oportuno que los alumnos reflejen en la gráfica estos dos datos, en el propio modelo para la representación gráfica, aparecen dos líneas discontinuas más marcadas, a la altura de 10 y 20 puntos. De esta forma que quedan definidas tres zonas, inferior, media y superior que corresponden, más o menos, a niveles bajos, medios o altos de rendimiento de los alumnos.

En la parte derecha de la hoja de gráficas, aparece una tabla para que el alumno refleje los criterios de calificación que utiliza el profesor para evaluar sus resultados. Cada tabla de cálculo tiene sus criterios de calificación y el alumno debe conocerlos.

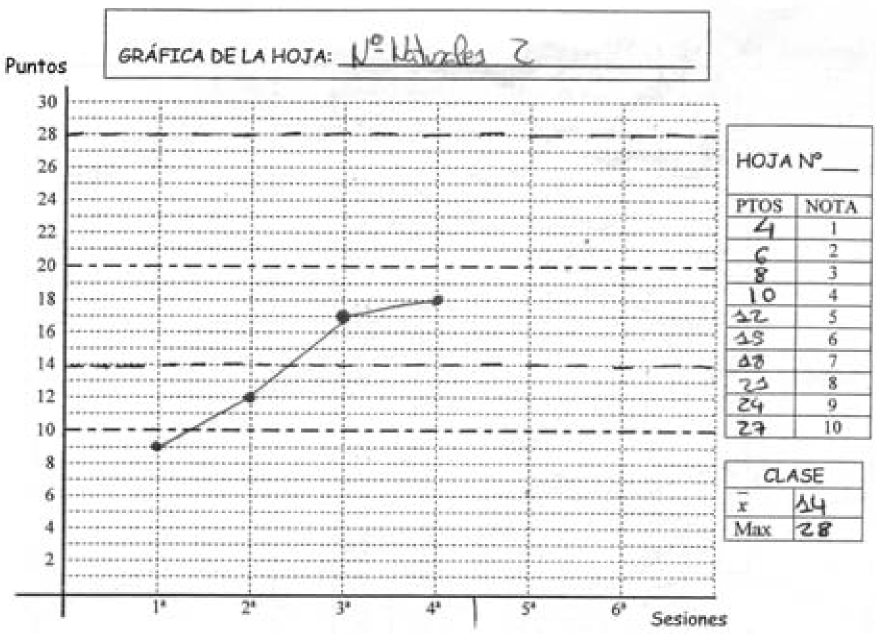


Figura 4: Hoja de gráficas de un alumno

3. Desarrollo en el aula

La propuesta consiste en trabajar las tablas de cálculo mental, los **cinco primeros minutos de clase, una vez por semana.** Debemos acordar con los alumnos el día de la semana evitando, a ser posible, las primeras y últimas horas de clase.

Cada tabla de cálculo la trabajaremos durante **cuatro sesiones** y es importante comenzar siempre eligiendo una tabla de cálculo sencilla para los alumnos se familiaricen con el método.

Al comenzar cada sesión, el alumno debe tener dos hojas: la tabla de cálculo, en la que no puede escribir y la hoja de registro de resultados. Además, en la parte posterior de la hoja de resultados estará la hoja de gráficas.

Los tres primeros minutos de clase servirán para encontrar y discutir con los alumnos **estrategias** o "atajos" que les permita mejorar la rapidez de respuesta. También es el momento de **concentración** previo a "la prueba del minuto".

A continuación, el profesor indica la casilla de la tabla de cálculo desde la que se va a comenzar la prueba, por ejemplo 4B indicará la casilla situada en la fila 4 y columna B, y durante **un minuto** (cronometrado) los alumnos escriben en orden descendente, el mayor número de respuestas posibles en la otra hoja de resultados.

Acabado ese minuto, los alumnos se intercambian las hojas y el profesor da las soluciones corrigiéndose entre ellos los fallos, a excepción de los días en los que el profesor recogerá los resultados para evaluarlos. Sugiero hacer, por ejemplo, dos sesiones de prueba y dos de puntuación.

Los **criterios de calificación** (ver figura 5) de cada hoja son independientes y podemos utilizar a modo de referencia los que vienen en la parte posterior de cada tabla de cálculo. También podemos concretarlos en la tercera sesión (primera que el profesor utiliza de puntuación) después de conocer la media de la clase. Pero en cualquier caso, cada profesor puede elegir sus criterios de calificación en función de los alumnos que tenga, la dificultad de la hoja, … etc. Es importante elegir criterios que faciliten a todos los alumnos estar cerca del aprobado pero que sean exigentes para obtener notas altas.

Nº aciertos	4	6	8	10	12	15	18	21	24	27
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Figura 5. Ejemplo de criterios de calificación de una tabla de cálculo

Finalmente, cada alumno hará una **gráfica personal** indicando en el eje de abscisas las sesiones y en el de ordenadas el número total de aciertos de cada sesión, para poder analizar su evolución en el tiempo. También es interesante indicar en la gráfica datos como la media de la clase o la máxima puntuación obtenida por un alumno. Para ello, el profesor debe dar estos dos datos después de la tercera sesión (primera de puntuación) para que el alumno tenga un estímulo más de superación de cara a la cuarta y última sesión.

4. Tipos de tablas de cálculo

En función de la forma de presentar los contenidos de estas tablas las podemos clasificar en tres grupos:

a. **Cálculo directo (CD):** Aparecen operaciones diversas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias) y hay que obtener el resultado de dichas operaciones. Ejemplo figura 6.

Prioridad de operaciones 3 (+, -, ·, /) **HOJA Nº:** ________

	A	B	C	D	E	F
1	$5+2\cdot 3$	$9+3\cdot 4$	$7\cdot 2+5$	$5+5\cdot 3$	$2+4\cdot 7$	$8+2\cdot 6$
2	$3\cdot(4+3)$	$5\cdot 3+9$	$4+6\cdot 3$	$(3+5)\cdot 7$	$8\cdot 4+6$	$7\cdot 5+5$
3	$9+3\cdot 2$	$8\cdot 6+7$	$4\cdot(3+6)$	$3\cdot(7+3)$	$3\cdot 4+5\cdot 8$	$5+3+7$

Figura 6. Vista parcial de una tabla de cálculo directo

b. **Completar (COM):** Aparecen expresiones con huecos que tendremos que completar para que sean ciertas. Ejemplo figura 7.

Unidades de longitud **HOJA Nº:** ________

: 10 · 10

km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*

	A	B	C	D	E	F
1	5 km = ...m	80 cm = ...m	0,8 km = ...m	650 cm = ...m	3,2 km = ...m	300 cm = ...m
2	350 cm = ...m	4,3 m = ...dm	35 cm = ...m	0,5 m = ...dm	100 cm = ...m	3 m = ...dm
3	415 dm = ...m	8,2 m = ...cm	415 dm = ...m	7 m = ...cm	85 dm = ...m	2,1 m = ...cm

Figura 7. Vista parcial de una tabla de completar

c. **Interpretar (INT):** En éstas, los alumnos tendrán que identificar elementos, sustituir un valor en una expresión, interpretar un texto o un símbolo,…etc. Ejemplo figura 8.

Valor numérico (expresiones algebraicas) **HOJA Nº:** ________

	A		B		C		D		E		F	
1	x + 3	-5	a - 4	2	3b	-8	5 + z	-3	1 - y	-4	-2m	-3
2	2b + 10	3	3c - 5	-1	6 + 4a	-4	7 - 2x	5	3 ·(m - 1)	0	(1 - y)·2	4
3	2m - m	4	5 a + a	3	$\frac{2n}{n}$	3	x^2	-6	$-2y^2$	2	(z - z)·5	7

Figura 8. Vista parcial de una tabla de interpretar

5. Clasificación de las tablas de cálculo

En función de los contenidos matemáticos de estas tablas, las podemos clasificar en siete bloques temáticos:

a. **Bloque I:** Números naturales. Ejemplo figura 9.

	A	B	C	D	E	F
1	2 + □ = 10	70 - □ = 35	35 + □ = 70	25 - □ = 10	23 + □ = 46	54 - □ = 50

Figura 9. Vista parcial de una tabla del bloque I.

b. **Bloque II:** Números enteros. Ejemplo figura 10.

	A	B	C	D	E	F	G
1	(- 1) + 7	3 · (-4)	5 – 10	(-5) + 8	(-56) : 8	7 – (-7)	35 : (-7)

Figura 10. Vista parcial de una tabla del bloque II

c. **Bloque III:** Números decimales y fracciones. Ejemplo figura 11.

	A	B	C	D	E	F
1	$\frac{1}{2}$ de 146	10% de 340	La tercera parte de 12	$\frac{2}{3}$ de 18	50% de 304	$\frac{3}{4}$ de 20

Figura 11. Vista parcial de una tabla del bloque III

d. **Bloque IV:** Potencias y raíces. Ejemplo figura 12.

	A	B	C	D	E	F	G
1	2^2	$\left(\frac{7}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}$	$\left(-\frac{7}{10}\right)^2$	6^2	$(-1)^{15}$	7^{-1}

Figura 12. Vista parcial de una tabla del bloque IV

e. **Bloque V:** Álgebra. Ejemplo figura 13.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x-7 = 0	-x = 13	-5x = 20	4x = -8	x+9 = 6	7x = -21	9x = 27

Figura 13. Vista parcial de una tabla del bloque V

f. **Bloque VI:** Geometría y medida. Ejemplo figura 14.

	A		B		C		D		E		F	
1	2 cm	A	2 m 5 m 6 m	P	2 m 7 m	A	4 cm	A	2 m 4 m	P	3 m 6 m	A

Figura 14. Vista parcial de una tabla del bloque VI

g. **Bloque VII:** Funciones y sucesiones. Ejemplo figura 15.

	A		B		C		D		E		F	
1	$2n+5$	a_4	$-n^2$	a_8	$\frac{6}{n+1}$	a_1	n^2-7	a_2	$(-1)^n \cdot n^2$	a_7	$5 \cdot 2^{n+1}$	a_1

Figura 15. Vista parcial de una tabla del bloque VII

6. Características del método: "Las tablas de cálculo"

Este método de **las tablas de cálculo,** posee una serie de características sobre las que invito reflexionar y tal vez nos ayuden a tomar la decisión de probarlo en el aula:

- Es un método **muy práctico y realista** dado que la puesta en práctica en el aula es sencilla y sin demasiadas exigencias de tiempo. Además, como se realiza los primeros minutos de clase y la prueba exige silencio y concentración, nos genera un **orden** muy beneficioso para continuar con la sesión.
- **Es cercano al currículo de matemáticas.** Se pueden crear tablas de prácticamente cualquier tema: números naturales, enteros, fracciones, porcentajes, polinomios, funciones,…etc, por lo que es muy útil para repasar y consolidar los conceptos que enseñamos en nuestra asignatura.
- **Tiene un largo recorrido educativo** porque se puede poner en práctica tanto en diversos cursos de primaria como en secundaria.
- **Se adapta a la gran diversidad de nuestro alumnado.** Se puede utilizar tanto en grupos ordinarios como en grupos que se apliquen medidas de atención a la diversidad. Incluso el carácter universal de nuestro sistema de numeración, hace que también pueda ser factible para alumnos inmigrantes con desconocimiento del castellano.
- Cada profesor puede **adaptar** el método en función de sus intereses. Puede modificar las tablas, el número de sesiones que dedique, los criterios de evaluación, el tiempo de la prueba e incluso la metodología y trabajarlas de forma oral. Cada profesor, grupo o alumno es un mundo y el método es lo suficientemente **flexible** para poder ser acomodado a distintas personas y situaciones. Ahora bien, si no se trabaja de forma sistemática, perdería todo su sentido.
- La novedad del método lo convierte en un elemento de **motivación** para nuestros alumnos por ser algo "distinto" y que rompe la rutina diaria.
- Supone un entrenamiento que dota a nuestros alumnos de **agilidad mental** y de estrategias que permiten mejorar su **confianza y seguridad** en los cálculos y les ayuda a no ser tan dependientes de la calculadora.
- Este método permite tener **registros escritos** de la evolución individual del alumno y su situación con respecto de la clase, por lo que serán útiles para el triángulo clave en la educación:
    a. **Profesorado:** Podemos conocer más a nuestros alumnos, descubrir nuevas capacidades en ellos y disponer de otro instrumento para calificarles de forma muy transparente enriqueciendo así su evaluación.

b. **Alumnado:** Le permite afrontar retos de superación. En este método es fácil de asociar el entrenamiento, esfuerzo y trabajo a mejora de resultados.

c. **Familias:** Pueden hacer un seguimiento de la evolución de sus hijos e incluso implicarse en la mejora de resultados ayudándoles a practicar en casa, por ejemplo controlando el minuto de tiempo de la prueba.

Si te ha parecido interesante este innovador método de las **tablas de cálculo** para trabajar de forma sistemática el cálculo mental en clase de matemáticas y lo quieres poner en práctica con tus alumnos, puedes encontrar más información en la siguiente página Web:

http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/

Joseph Fourier (1768-1830)

secundaria

bigarren hezkuntza

La resolución de problemas: clave para mejorar la competencia matemática en el bachillerato

Elisabete Alberdi Celaya (*)

1. Introducción

Como profesores de Matemáticas uno de los problemas o retos que solemos tener entre manos y al que necesariamente hemos de dar una respuesta es crear en los alumnos interés hacia las matemáticas. Las matemáticas sobre todo son "saber hacer", siendo indispensable el dominio del conocimiento. El aprendizaje de las matemáticas tiene que impulsar al alumno a la toma de decisiones aprendiendo de esta manera a decidir, tiene que acostumbrarle a estar en situaciones distintas y a enfrentarse a ellas, a desarrollar la abstracción y la capacidad de generalización, a ser crítico, a trabajar la creatividad y a utilizar el lenguaje de una forma concisa y fuera de cualquier ambigüedad.

El nuevo currículo de bachillerato (BOPV, Nº 2009041, del 27 de febrero de 2009) se presenta como el conjunto de competencias que tiene que adquirir el alumno al finalizar esta etapa. Esta reformulación hace necesario que nos replanteemos los aspectos que intervienen en la práctica educativa (el papel del profesor, el papel del alumno, la interacción educativa, etc.) así como la reflexión de conceptos como competencia, conocimiento, evaluación, etc. para que la inmersión de las competencias en las aulas se haga de una forma correcta y natural. Además, es esencial que como profesores de matemáticas nos demos cuenta del hecho de que resolver un problema matemático condiciona el nivel en competencia matemática que se adquiere.

2. Competencias

Se entiende por competencia "la combinación integrada de conocimientos, destrezas y habilidades, aptitudes y valores adecuados al contexto, que adquiere el alumnado que cursa las materias comunes, de modalidad y optativas del bachillerato"[(1)]. Se puede decir que la persona que posea cierta competencia es capaz de adecuarse a situaciones nuevas, de transferir sus conocimientos, destrezas y habilidades a otros campos.

(*) Profesora de Lea Artibai ikastetxea. Licenciada en Ciencias Matemáticas..

Se observa que dentro del concepto o término competencia se integran los distintos conocimientos del currículo, que son los siguientes:

- El saber: Conocimientos técnicos, culturales, etc.
- Competencia metodológica: El saber hacer.
- Competencias personales: Saber ser.
- Competencias participativas: Saber estar.

En el nuevo currículo del bachillerato se distinguen dos tipos de competencias: por una parte las competencias educativas generales y por otro, las competencias básicas. Las competencias educativas generales, comunes a todas las materias de bachillerato, son las siguientes: *aprender a vivir responsablemente, aprender a aprender a pensar, aprender a comunicarse, aprender a vivir juntos, aprender a desarrollarse como persona, aprender a hacer y emprender*.

Son competencias que ligan el desarrollo de la persona con el hecho de que ésta se hace a sí misma dentro de una sociedad, es decir, que no se puede entender a la persona sin que ésta sea parte activa en ella. Este hecho hace necesario que la persona aprenda a pensar, a vivir responsablemente y a convivir. El idioma permite estructurar el pensamiento, expresar ideas e interiorizar conceptos. Asimismo, es la herramienta que permite a la persona participar en la sociedad siendo por ello imprescindible que aprendamos a comunicarnos. Además, el hecho de que las personas que forman una sociedad adopten una actitud emprendedora, hará posible que esa sociedad avance en la conservación del medioambiente, el desarrollo cultural y educativo, en la práctica de relaciones de respeto, en el desarrollo de actividades empresariales, etc.

Figura 1. Conocimientos que se integran dentro del término competencia

Las competencias básicas del Bachillerato, cuyo grado de cumplimiento en cada una de ellas depende del itinerario curricular que cada alumno haya elegido, a su vez se subdividen en competencias básicas *transversales* y competencias básicas *interdisciplinares*.

Sólo subrayar la importancia de que los alumnos aprendan a aprender. El bachillerato es un puente hacia estudios futuros (Ciclos Formativos de Grado Superior o estudios universitarios) y como tal es importante que el alumno sepa trabajar por sí sólo, analizando sus estrategias de trabajo y eligiendo aquéllas que mejor resultado le dan.

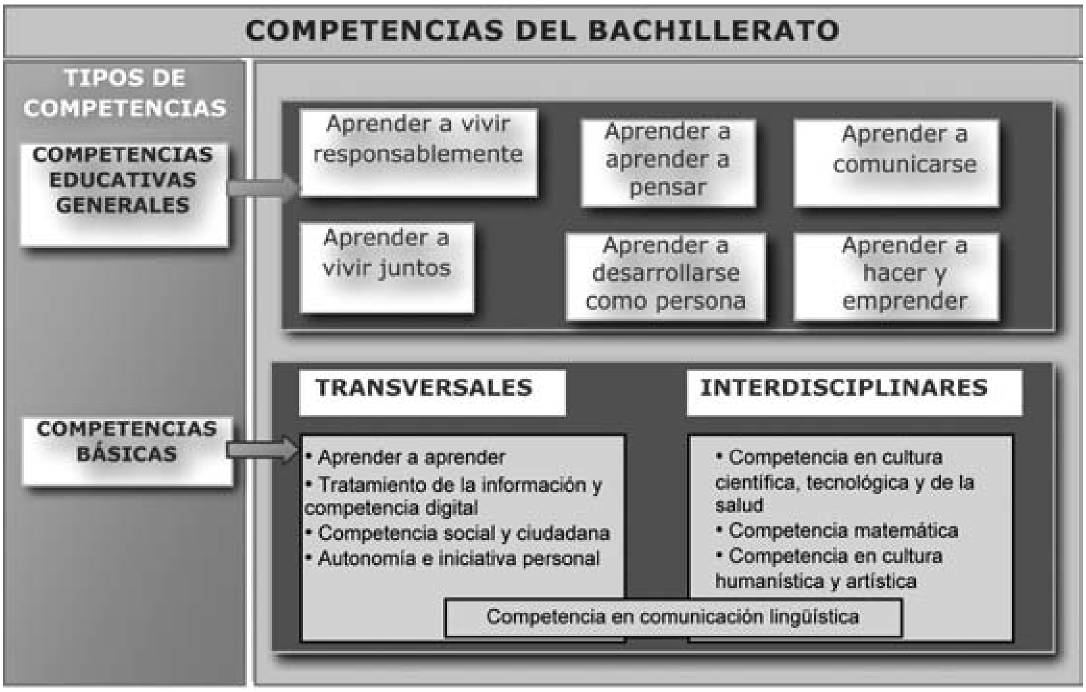


Figura 2. Competencias del Bachillerato

3. Pirámide del conocimiento

La Taxonomía de los objetivos de la educación, se conoce como taxonomía de Bloom (por ser propuesta por Benjamín Bloom), en ella se hace una clasificación de objetivos y habilidades. Se trata de una taxonomía jerárquica donde es imprescindible la adquisición del conocimiento y de las habilidades de niveles inferiores para poder acceder a niveles superiores.

En la taxonomía de Bloom hay tres dimensiones: *la dimensión afectiva, la psicomotora y la cognitiva*. La dimensión afectiva hace referencia a nuestras reacciones emocionales; la psicomotora se refiere a la destreza de manipular físicamente algo y el cognitivo se centra en el conocimiento y la comprensión. Nos centraremos en la dimensión cognitiva de la taxonomía de Bloom la cual se compone de seis niveles en los objetivos de aprendizaje. Estos niveles son los siguientes en orden ascendente:

- Conocimiento: El objetivo de este nivel es el de recordar sucesos, definiciones, principios que se han aprendido previamente.
- Comprensión: El objetivo es demostrar que se entienden hechos e ideas valiéndose de la organización, comparación, clasificación y categorización, etc.
- Aplicación: Consiste en utilizar conceptos, principios, técnicas, métodos, etc.
- Análisis: Consiste en identificar las distintas componentes de una situación, así como la relación que existe entre ellas y la forma de clasificarlas. Se es capaz de identificar casos límite y de encontrar las evidencias que permiten fundamentar generalizaciones.
- Síntesis: Se trata de compilar la información y las conclusiones procedentes de distintas pruebas para poder generalizar reglas o fórmulas.
- Evaluación: Consiste en crear y defender una opinión juzgando la información en relación a un conjunto de criterios.

Figura 3. Taxonomía de Bloom en forma piramidal

4. Evaluación de las competencias

En la referencia bibliográfica [1] se define evaluación como la formulación de un juicio o la valoración sobre la calidad de aquello que es evaluado o evaluable. En el artículo 22.3 del BOPV Nº 2009041 se dice sobre la evaluación que:

> **El profesor de cada materia decidirá, al término del curso, si el alumno o la alumna ha alcanzado las competencias previstas, tomando como referente fundamental los criterios de evaluación.**

En el artículo 18.3 del mismo boletín se habla de las distintas formas en las que el alumno tiene que ser capaz de trabajar:

Las actividades educativas en el Bachillerato favorecerán la capacidad del alumnado para aprender por sí mismo, para trabajar en equipo y para aplicar los métodos de investigación apropiados. El profesorado facilitará la realización, por parte del alumnado, de trabajos de investigación, monográficos, interdisciplinares y otros de naturaleza análoga que impliquen a uno o varios departamentos didácticos.

Por tanto, tenemos la necesidad de diseñar herramientas de evaluación que por una parte sean coherentes con los métodos pedagógicos utilizados (podremos utilizar evaluaciones personalizadas, autoevaluaciones y coevaluaciones) y por otra parte, que sean capaces de establecer el grado de cumplimiento de una competencia. En las referencias [2] y [3] se presenta la siguiente escala para la medición de las competencias, así como las actitudes ligadas a cada uno de los niveles de la escala:

1. Sensibilización (1-2):
   - Conocer la existencia de algo, saber que existe.
   - Saber que algo existe, porque lo has visto. Ser capaz de repetir lo que se ha dicho o sobre lo que sé o he visto.
   - Saber que algo existe porque he visto su influencia. Ser capaz de formular un enunciado que demuestre que he asimilado la idea.
2. Acostumbramiento-aplicación (3-4-5):
   - Entiendo los conocimientos y los puedo utilizar en situaciones iguales, siempre que se me den consignas concretas y valiéndome de alguna ayuda.
   - Entiendo los conocimientos y los puedo utilizar con unas pocas consignas y con cierta ayuda de alguien.
   - Entiendo los conocimientos y los puedo aplicar completamente con unas mínimas consignas, sin cometer ningún error.
3. Dominio (6-7-8):
   - Entiendo los conocimientos y los puedo aplicar a situaciones distintas teniendo un poco de ayuda.
   - Entiendo especialmente bien algunos conocimientos y soy capaz de aplicarlos a situaciones distintas sin ningún tipo de ayuda (autónomamente).
   - Entiendo los conocimientos y soy capaz de aplicarlos a situaciones nuevas de forma autónoma. Incluso soy capaz de explicar el proceso que se ha seguido de forma clara.
4. Experto (9-10):
   - He entendido los conocimientos y soy capaz de generar aplicaciones nuevas de ese conocimiento en el mismo campo.
   - Soy capaz de explicar los principios y normas que utilizo a la hora de aplicar los conocimientos.

- Soy capaz de generar aplicaciones distintas de los conocimientos adquiridos en otros campos. Soy capaz de explicar las normas, principios y límites de estas aplicaciones.
- Dominio del conocimiento y de su aplicación en distintos campos. Soy capaz de explicar las normas, principios y límites de los conocimientos cuando éstos se aplican en otros campos.

Figura 4. Niveles de logro de una competencia

Es interesante establecer una relación entre la taxonomía de Bloom y la escala de las competencias propuesta en [2] y [3] con el fin de darnos cuenta de que estamos hablando de dos cosas en el fondo iguales.

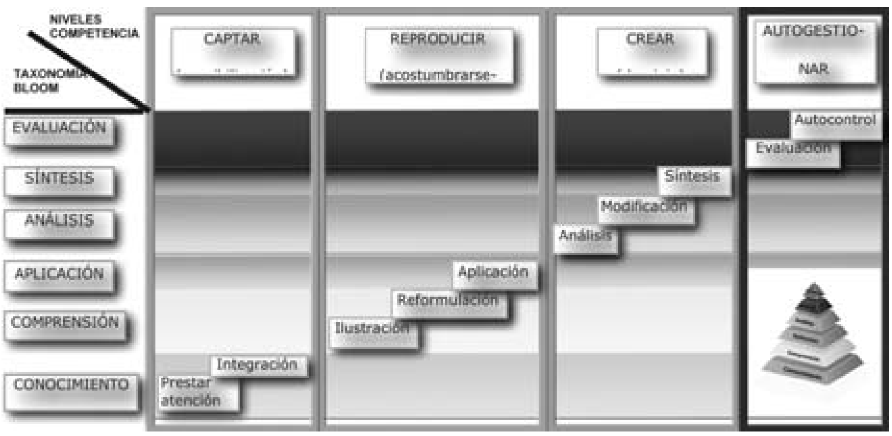


Figura 5. Relación entre la taxonomía de Bloom y el nivel de logro de una competencia

5. Las competencias en las Matemáticas de Bachillerato

Tanto en la modalidad de Ciencias y Tecnología como en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales hay distintas opciones de matemáticas. En la primera modalidad recibe el nombre de Matemáticas I y II y en la segunda se le llama Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II. En ambas modalidades los contenidos de la asignatura se organizan con un doble objetivo: por una parte, el de proporcionar al alumno los conocimientos y herramientas necesarias para la continuación de estudios posteriores y por otra parte, el proporcionar las herramientas necesarias para desenvolverse de manera adecuada en una sociedad en continuo cambio tecnológico. Las matemáticas que se imparten en las dos modalidades se orientan prioritariamente a garantizar el desarrollo de la competencia matemática, al mismo tiempo que contribuyen en la adquisición del resto de competencias básicas (tales como, la competencia en la cultura científica, tecnológica y de la salud; competencia en el tratamiento de la información y competencia digital; competencia de aprender a aprender; competencia para la autonomía e iniciativa personal; competencia en comunicación lingüística; competencia en cultura humanística y artística; competencia social y ciudadana).

En este contexto en el que las asignaturas deben estar orientadas a la adquisición de las competencias anteriormente citadas es esencial que nuestras programaciones didácticas se enfoquen en este sentido. El primer paso podría ser el de *establecer en qué medida se tiene que dar el cumplimiento de la competencia matemática* en las asignaturas de matemáticas del bachillerato. Para ello, se podría utilizar la escala de competencias que se ha citado y la taxonomía de Bloom. A un nivel más general incluso se podría establecer el nivel que se tiene que conseguir en bachillerato en cada competencia. Es decir, teniendo en cuenta todas las asignaturas y estableciendo la aportación de cada una de las asignaturas en la globalidad de la adquisición de las competencias. Para establecer el nivel que hay que conseguir en la competencia matemática se pueden utilizar los objetivos y los contenidos de la asignatura. Así, el primer objetivo de las asignaturas Matemáticas I y II, "plantear y resolver, problemas de las propias matemáticas o de otras ciencias, eligiendo y utilizando diferentes estrategias, razonando el proceso de resolución, interpretando y justificando los resultados y aplicándolos a nuevas situaciones para poder actuar de manera más eficiente en el medio social", nos sitúa en el nivel de creación dentro de los niveles de competencias o dentro del nivel de análisis en la taxonomía de Bloom ya que este objetivo habla de aplicar los conocimientos y estrategias a situaciones distintas. De igual manera, el primer objetivo de las asignaturas Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II habla de "plantear y resolver, problemas acerca de la realidad social o de las propias matemáticas, formulando hipótesis, eligiendo y utilizando diferentes estrategias, razonando el proceso de resolución, interpretando y justificando los resultados y aplicándolos a nuevas situaciones para poder actuar de manera más eficiente ante los retos que plantea la sociedad actual". Objetivo que como el anterior se podría situar en el nivel de creación o análisis, ya que la diferencia existente entre los dos objetivos citados se basa en el tipo de problema que se va a resolver (*problemas de otras ciencias* en el caso de la modalidad de ciencias y tecnología y *problemas de realidad social* en la modalidad de humanidades y ciencias sociales).

Una vez establecido el nivel deseado en la competencia matemática tenemos que poner los medios para que éste se materialice. El nivel establecido en la competencia matemática determinará el tipo de ejercicios y/o problemas que el alumno tiene que ser capaz de realizar y la metodología didáctica que tenemos que seguir. Es importante ser riguroso en la selección de éstas porque no todas las formas de enseñar y aprender matemáticas ayudarán en la adquisición del nivel de la competencia matemática que hemos establecido.

Por último, tendremos que medir el nivel de logro de la competencia. Para ello, tendremos que crear herramientas que ayuden a este fin.

Todo este esquema nos permite establecer vínculos claros entre competencias y objetivos, contenidos y sistema de evaluación. Al final, éstos (los objetivos, contenidos y las herramientas de evaluación) cobran sentido en la medida que están orientados a la adquisición del nivel de competencia establecido.

6. La importancia de la resolución de problemas

A la hora de avanzar en la escala de competencias cobra gran importancia el hecho de ser capaz de hacer ejercicios, resolver problemas o el ser capaz de investigar. Así, mientras que hacer un ejercicio se puede situar en un nivel de reproducción dentro de la escala de competencias, el resolver un problema se puede unir con la creación, mientras que una investigación ocuparía el nivel de autogestión.

En el punto 5 de este artículo situábamos un objetivo concreto de las asignaturas Matemáticas I y II y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II en el nivel de la creación, ya que hablaba de la capacidad de resolver problemas. En general, la resolución de problemas es uno de los objetivos más importantes de las matemáticas siendo una de las metas obligadas la de crear actitudes y aptitudes que ayuden a los estudiantes en la resolución de los mismos. Así, la resolución de problemas es uno de los bloques de contenidos que aparece tanto en la asignatura de matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología, en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Además, también tiene su presencia en los demás bloques temáticos de la asignatura como herramienta o bloque transversal.

Como se dice en la referencia [4] conviene distinguir entre ejercicio y problema ya que ahí está la clave de situarnos en un nivel u otro dentro de la escala de competencias. Mientras que un ejercicio consiste en identificar la técnica que se precisa y aplicarla correctamente,

> **“un problema es una tarea cuyos términos y propósitos son globalmente comprensibles para el alumno y alumna, pero no sabe de momento cómo abordarlo. Para un estudiante, descomponer un número en factores es un ejercicio. Averiguar cuántos divisores tiene el número 15.000, cómo son los números que tienen exactamente tres divisores, supone un problema”[2].**

George Polya y Miguel de Guzmán figuran entre los más destacados investigadores en el campo de resolución de problemas matemáticos. Polya defendió el método heurístico en la enseñanza de las matemáticas que consiste en formular conjeturas que serán rechazadas o aceptadas en la medida que encontremos contraejemplos que las refuten o justificaciones que las demuestren. Polya recomienda ciertas directrices para abordar un problema que son las siguientes: comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y examinar la solución obtenida. Miguel de Guzmán en su libro *Aventuras Matemáticas* da una serie de pautas –parecidas a las propuestas por Polya– para la resolución de un problema. Miguel de Guzmán distingue cinco fases a la hora de resolver un problema: comprensión del enunciado, comprensión del problema, búsqueda de estrategias para resolverlo, selección de una estrategia, reflexión sobre el camino seguido. Además de un proceso para resolver un problema, también existen técnicas que nos ayudan a resolver problemas. Entre estas técnicas se encuentran: *la codificación, la organización, la experimentación, la búsqueda de analogías, la exploración, la introducción de elementos auxiliares, el dividir el problema en partes, la búsqueda de regularidades, el suponer el problema resuelto, etc*.

6.1 Análisis de un problema de la asignatura Matemáticas II:

En la prueba de selectividad de junio 2009 se ha planteado el siguiente problema:

Sea S una función definida de la siguiente manera: La imagen de un número es la suma de sus dígitos, por ejemplo:

$$S\left(2009\right) = 2+0+0+9 = 11$$

Calcular $S\left(10^{100}-10^{2}\right)$.

Dentro de las fases que plantea Polya para la resolución de un problema la primera consiste en entender el problema. Para ello, tenemos que entender cuáles son los datos y cuál es la incógnita. El dato que tenemos es una función *S* que nos proporciona una cifra resultante de sumar los dígitos de un número. La incógnita es el valor de $S\left(10^{100}-10^{2}\right)$. Podemos concluir a partir de los datos que se nos proporciona que la incógnita es un número entero positivo y que además será 0 en el único caso en que estemos calculando *S*(0). Como en este caso no se nos planeta que calculemos la imagen de 0 según la función *S*, la incógnita es un número entero positivo.

La siguiente fase que tenemos que afrontar es la de concebir un plan. Para ello tenemos que pensar en estrategias. En esta etapa el alumno se debe plantear si el problema que tiene entre manos es similar a otros problemas que conoce, si hay posibilidades de simplificar el problema, etc. Concentrarse en ejemplos concretos le ayudará a entender mejor el problema. También le ayudará el experimentar con casos particulares más sencillos que el planteado. Dentro de la fase de planificación, sería interesante que el alumno se planteara si la imagen de una suma es igual a la suma de imágenes, ya que es la imagen de la resta de dos números el que tiene que calcular. Es decir: si se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} S\left(a+b\right) = S(a)+S(b) \\ S\left(a-b\right) = S(a)-S(b) \end{cases}$$

El alumno conoce esta propiedad ya que en el tema de derivación e integración ha visto que la derivada/integral de una suma/resta es la suma/resta de las derivadas/integrales de los sumandos. Por tanto, sí que conoce el funcionamiento de esta propiedad en otro tipo de operadores. En este punto no es necesario que pasemos a la demostración de estas hipótesis, sino que puede ser suficiente refutarla analizando casos concretos. Así, nos damos cuenta de que:

$$\begin{cases} S(18+7)=S(25)=7 \\ S(18)+S(7)=9+7=16 \end{cases} \Rightarrow S(18+7)\neq S(18)+S(7)$$

Y con este caso concreto podemos concluir que $S(a+b)\neq S(a)+S(b)$.

En el caso de la resta podemos coger un ejemplo similar que nos haga ver que $S(a-b)\neq S(a)-S(b)$. Una vez llegado a este punto este punto el alumno es capaz de decir que: $S(10^{100}-10^{2})\neq S(10^{100})-S(10^{2})$. En cuanto a la elección de ejemplos hay que destacar la importancia de elegirlos hábilmente ya que ejemplos como $S(12+7)=S(12)+S(7)$, $S(24-2)=S(24)-S(2)$ o $S(78-25)=S(78)-S(25)$ le pueden conducir a conclusiones erróneas. Es imprescindible en pensar en ejemplos en los que la suma de dos números dé un número cuyos dígitos son menores que los dígitos de los sumandos. Ahí está la clave.

En la fase de ejecución del plan, hay que seleccionar una estrategia y trabajar con ella. Aunque nos hubiese gustado que se cumpliera la igualdad $S(a-b)=S(a)-S(b)$, ya que esto nos evitaría el trabajo de calcular el número $10^{100}-10^{2}$, no nos queda más remedio que ver de qué número estamos hablando. Para ello recordamos el número de ceros que tienen las potencias de 10. Puede ser útil hacer una lista de este tipo y utilizar la inferencia o la inducción, en la que llegamos a leyes generales a partir de la observación de casos particulares.

$$\begin{cases} 10^{1}=10 \Rightarrow 1\ cero \\ 10^{2}=100 \Rightarrow 2\ ceros \\ \vdots \\ 10^{5}=100000 \Rightarrow 5\ ceros \end{cases} \Rightarrow 10^{n} \text{ tiene } n \text{ ceros}$$

Por inducción, la potencia coincide con la cantidad de ceros del número. Por tanto, 10^{100} consta de un uno y de 100 ceros. En cuanto a la resta que se nos plantea repetimos el procedimiento anterior:

$$\begin{cases} 10^{2}-10^{2}=0 \\ 10^{3}-10^{2}=900 \\ 10^{4}-10^{2}=9900 \\ \vdots \\ 10^{7}-10^{2}=9999900 \end{cases}$$

De nuevo utilizando la inducción podemos decir que $10^{100}-10^{2}$ consiste en 98 nueves y dos ceros. Es decir que el número cuya imagen hay que calcular queda perfectamente definido: $S(10^{100}-10^{2})=9\cdot 98+0\cdot 2=882$, que es el resultado del problema.

En la última fase examinaremos la solución obtenida. Por una parte, el resultado obtenido cumple lo que ya sabíamos en la fase de comprensión del problema: que la incógnita era un número entero positivo. Además, el hecho de que en la fase de concebir un plan nos hayamos dado cuenta de que no se cumplían las dos igualdades propuestas ha evitado que cayésemos en el error de decir que $S\left(10^{100}-10^{2}\right)=0$. Como además hemos sido capaces de calcular valores como $S\left(10^{3}-10^{2}\right), S\left(10^{4}-10^{2}\right)$ nos hace pensar que el método utilizado puede ser válido y que el resultado también puede ser el correcto.

A un nivel de investigación el alumno se plantearía preguntas sobre este problema e intentaría responderlas, intentaría hacer modificaciones en el problema y resolverlo según estas modificaciones. En el problema que tenemos entre manos, el alumno podría definir una nueva función S_1 que consistiría en sumar los dígitos de un número hasta que la imagen obtenida sea un número de un único dígito. Es decir, que estaríamos hablando de una composición de la función *S* tantas veces como sea necesario con el fin de obtener una cifra de un solo dígito. Así: $S_1(2009)=(S\circ S)(2009)=S(S(2009))=S(2+0+0+9)=S(11)=2$. En este caso nos ha bastado con aplicar dos veces la función para obtener un número de una única cifra. Dada esta función se podría plantear si las propiedades que anteriormente no se cumplían con la función *S* se cumplen con esta función nueva, etc. Estaría realizando una investigación.

6.2 Análisis de un ejercicio de la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

En la prueba de selectividad de junio de 2008, en la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II se planteó el siguiente ejercicio.

Encontrar el valor del parámetro *a* > 0 para que las siguientes áreas sean iguales:

$$A_1=\int_0^a x\cdot dx \quad \text{y} \quad A_2=\int_0^a x^2\cdot dx.$$

Representar gráficamente los dominios correspondientes a cada una de las integrales.

Este ejercicio puede resultar mecánico para los alumnos, ya que están acostumbrados a calcular integrales definidas de este tipo. Seguramente el ejercicio se empiece resolviendo cada una de las integrales definidas e igualando los valores obtenidos para poder llegar al valor del parámetro *a*:

$$\left.\begin{aligned} A_1&=\int_0^a x\cdot dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a=\frac{a^2}{2}\\ A_2&=\int_0^a x^2\cdot dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a=\frac{a^3}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{3}\Rightarrow a=0,\frac{3}{2}$$

Si *a* = 0 tendríamos la solución trivial en las que las áreas serían nulas. Además el enunciado nos dice que queremos hallar un valor del parámetro *a* > 0, por lo que la solución válida es *a* = 3/2. A continuación pasaríamos a dibujar los dominios, que son los que se muestran en la siguiente figura.

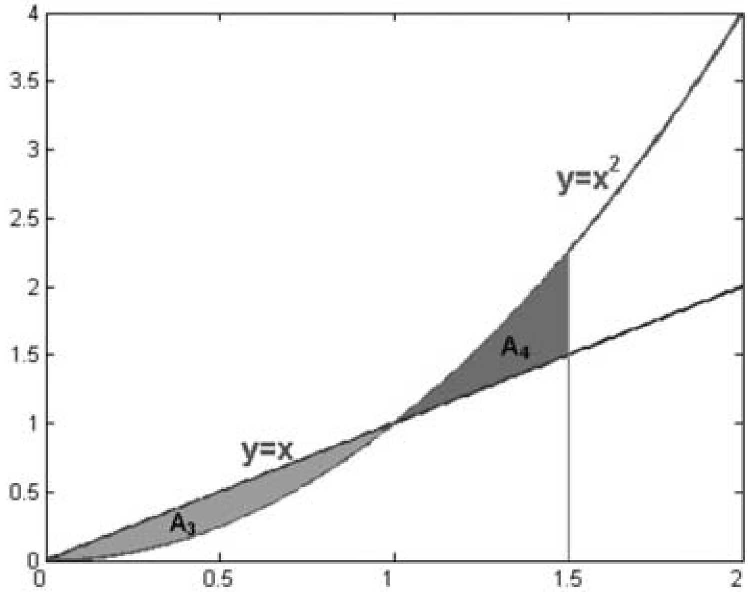


Figura 6. Representación gráfica de los dominios cuyas áreas hemos calculado

Una vez que hemos hecho las gráficas resulta lógico que el resultado al problema sea un número perteneciente al intervalo (1,2). Puede despertar la curiosidad del alumno el hecho de que el área que queda entre la recta y la parábola en el intervalo (0,1) se compense con el área que queda entre la parábola y la recta en el intervalo $\left(1,\frac{3}{2}\right)$, ya que el área que está debajo de la recta y el que está debajo de la parábola difieren en estos dos subdominios. Haciendo los cálculos tenemos:

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= \int_0^1 \left(x - x^2\right) \cdot dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{6} \\ A_4 &= \int_1^{3/2} \left(x^2 - x\right) \cdot dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_1^{3/2} = \frac{27}{24} - \frac{9}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}\right\}$$

El alumno que haya hecho esta comprobación no sólo ha calculado bien el parámetro que se le pedía sino que ha verificado el resultado: dándose cuenta de que el parámetro que se buscaba pertenece al intervalo (1,2) y comprobando que el subdominio que falta en la parábola (área A_3) y el que sobra (área A_4) son de igual área. Podríamos decir que la cuarta fase que propone Polya para resolver un problema, el de comprobación del resultado obtenido, se ha cubierto satisfactoriamente aunque no se trate de un problema (las primeras tres fases de la resolución de un problema son muy sencillas en este caso).

Bibliografía

[1] **A. Bautista García-Vera,** 1998: *Programación y evaluación curricular*. ICE de la UCM.

[2] **G. Paquette,** 2002: *L'ingénierie pédagogique, pour construire l'apprentissage en réseau*. Presses de l'Université du Québec.

[3] **G. Paquette,** 2002: *Modelisation des connaisances et des compétences*. Presses de l'Université du Quévec.

[4] **J. Brihuega, M. B. Molero Aparicio, A. Salvador Alcalde,** 1998: *Didáctica de las matemáticas*. ICE de la UCM.

[5] **J. W. Burke,** 2005: *Competency based education and training*. The Falmer Press, Taylor & Francis Inc.

Páginas web

[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Taxonomía_de_objetivos_de_la_educación

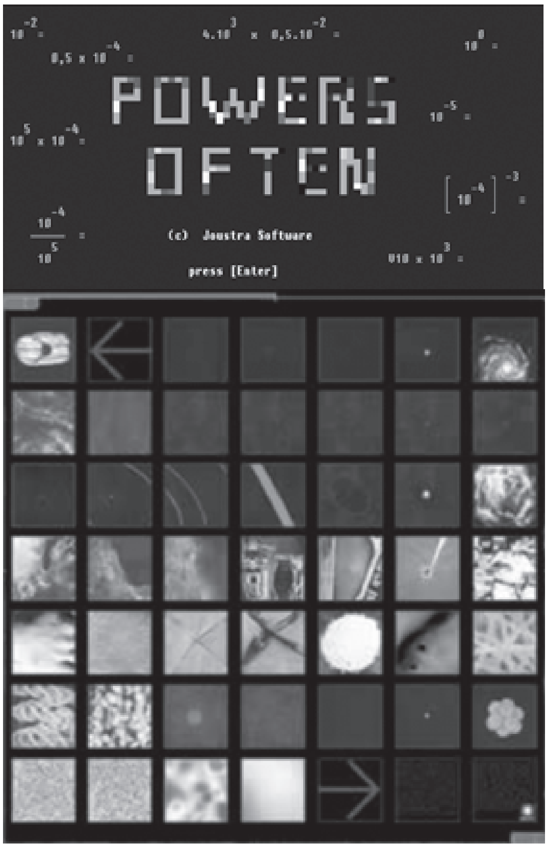
Notas

(1) Artículo 5.1 del POPV Nº 2009041.

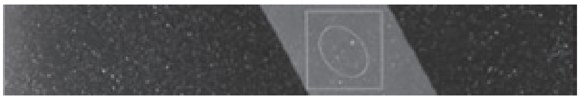
(2) M.E.C. (1992): Matemáticas. Secundaria Obligatoria (dentro de la colección denominada "Cajas Rojas").

Powers of ten. Unidad didáctica de matemáticas sobre potencias para trabajar las competencias básicas

Nivel: 2º de la ESO (*). José Manuel López Irastorza (**)



Número de sesiones: 12-14



1. Materia: Matemática

2. Tema: Powers of Ten (Potencias, notación científica, proporcionalidad, mapas, escalas y modelización)

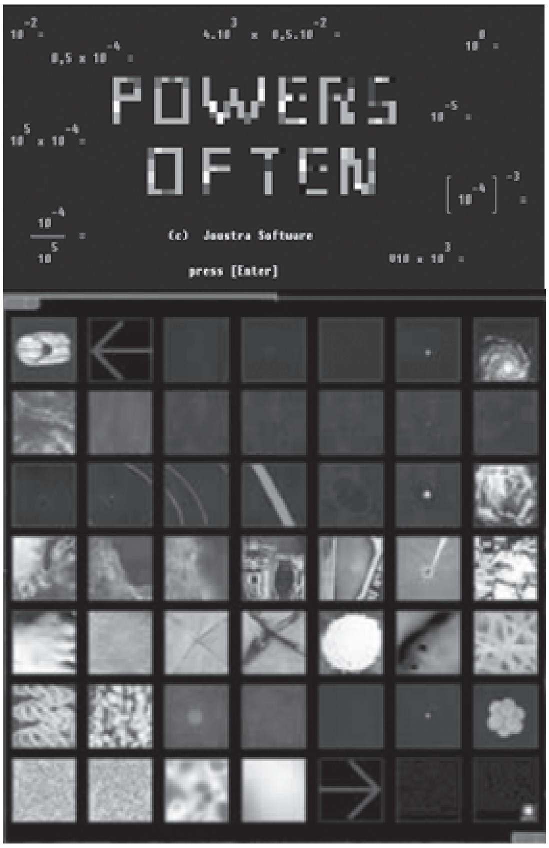
3. Nivel: 2º de la ESO (12-14 sesiones)

(*) La unidad, el video y los recursos complementarios se pueden encontrar en: http://www2.elkarrekin.org/web/powersoften. Fuente: powersof10.com

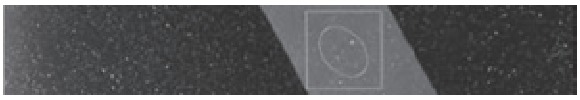
(**) Berritzegune Nagusia.

Powers of ten. Berreketak aitzaki matematikatik oinarrizko konpetentziak lantzeko unitate didaktikoa

Maila: 2. D.B.H. (*). José Manuel López Irastorza (**)



Saio kopurua: 12-14



1. Materia: Matematika

2. Gaia: Powers of Ten (Berreketak, notazio zientifikoa, proportzionaltasuna, mapak, eskalak eta modelizazioa)

3. Maila: 2. D.B.H. (12-14 saio)

(*) Unitatea, bideoa eta baliabide osagarriak honako helbide honetan aurki daitezke: http://www2.elkarrekin.org/web/powersoften. Iturria: powersof10.com

(**) Berritzegune Nagusia.

4. Contexto de la propuesta

Powers of Ten es un documental de nueve minutos grabado en 1977 por la pareja Charles y Ray Eames. La película simula un viaje que parte de la imagen de una persona sesteando en un parque de Chicago y se aleja hasta los confines del universo. Seguidamente, y en sentido inverso, retorna al punto de partida para introducirse en la mano del hombre dormido hasta alcanzar detalles subatómicos del interior de su cuerpo.

Millones de personas habían visto ya la película antes incluso de que estuviera disponible en Internet. Creemos que su estudio puede ser una experiencia interesante y una herramienta válida para entender las potencias, las raíces, la notación científica y los ordenes de magnitud.

Partiremos de un cuadrado de 1 m de lado ($10^0 = 1$) y la visión de sucesivos cuadrados cuyos lados son de órdenes de magnitud crecientes (hasta 10^{25}) y decrecientes (hasta 10^{-16}) podrá ayudarnos a ofrecer funcionalidad a las potencias y un apoyo al aprendizaje significativo.

La película se puede ver en Youtube, el parque en el que comienza con Google Maps, la Wikipedia tiene un artículo sobre el documental y existe una web oficial de la cual se puede obtener información. En Internet, además, se pueden encontrar presentaciones y herramientas diversas que nos pueden ayudar a entender los órdenes de magnitud y la escala logarítmica descrita en *Powers of Ten*.

Las actividades se realizarán en grupos de 3-5 componentes y podrán utilizar calculadoras y ordenadores. Al principio de cada sesión el profesor repasará los conceptos y procedimientos relacionados con la actividad, pero no de forma exhaustiva para posibilitar el intercambio y la investigación interactiva en el grupo.

La atención a la diversidad se contemplará en la formación de los grupos en donde se potenciará el intercambio y en el reparto de las tareas entre los componentes: todos deben de aportar buscando un equilibrio entre las disposiciones y capacidades, buscando que el resultado o solución sea una obra de todos ellos e integre las aportaciones de cada uno.

Las actividades propuestas en la secuencia no son cerradas y cada profesor habrá de seleccionar aquéllas que mejor se adapten a las características y capacidades de sus alumnos. Cada actividad se puede desarrollar en una o más sesiones según el detalle con que cada profesor quiera afrontarlas. En este sentido, los materiales complementarios se ofrecen en la web http://www.elkarrekin.org/web/powersoften en formatos editables y adaptables a cada grupo. Allí se pueden encontrar también los enlaces a las diferentes versiones del video y otros complementos. El hecho de que mucha de la información sobre la grabación se encuentre en inglés y el lenguaje visual innovador que describe el viaje por las dimensiones del universo nos hará movilizar diferentes recursos y sería deseable un trabajo en común con compañeros de otras áreas (son evidentes las conexiones posibles con las áreas de lenguas –hay versiones del vídeo en inglés, francés y euskera en Youtube–, expresión artística, Ciencias Naturales…).

4. Proposamenaren testuingurua:

Powers of Ten 1977an Charles eta Ray Eames bikoteak grabatutako 9 minutuko dokumentala da. Filmak bidaia bat kontatzen du eta kamera Chicagoko parke batean etzanda dagoen pertsona baten eskutik hasi eta unibertso zabalera urrutiratzen da. Segidan, hasierako puntura itzuli, gizonaren eskuan sartu eta gorputzaren alderdi mikroskopikoetan murgiltzen da, osagai subatomikoetaraino.

Milioika pertsonek ikusia zuten filma jada Interneten argitaratu aurretik. Haren azterketa esperientzia interesgarria izan daitekeen ustea dugu, eta baita berreketak, erroketak, notazio zientifikoa eta magnitude ordenen lanketarako aukera bat ere.

Metro bateko aldea ($10^0 = 1$) duen karratutik abiatu eta magnitude ordena gero eta handiagoko aldea duten hurrenez hurreneko karratuak ikusteak (10^{25} eraino), hasieran, eta gero eta txikiagoak (10^{-16} eraino), ondoren, berreketen esanahia ulertzen lagundu dezake eta ikaskuntza esanguratsuari aukera bat eskaini.

Filma Youtuben ikus daiteke, eta hasierako parkea, Google Maps-ekin. Wikipediak, gainera, badu artikulu bat filmari buruz, eta web gune ofizialen informazio gehiago aurki daiteke. Interneten, bestalde, aurkezpenak eta beste hainbat tresna erabil daitezke *Powers of Ten*-en agertutako magnitude ordenak eta eskala logaritmikoa ulertzeko.

Jarduerak 3-5 partaidetako taldeetan gauzatuko dira eta kalkulagailua eta beste zenbait tresna erabili ahal izango dira. Saio bakoitzaren hasieran irakasleak gaiarekin erlazionaturiko zenbait kontzeptu eta prozedura birpasatuko ditu, baina beti ere gainetik, lantaldeko kideen arteko trukea eta ikerketa interaktiboa bideratzeko.

Taldeak osatzerakoan aniztasuna kontuan hartuko dugu taldekideen arteko eginbeharretan: denok lagunduko dute euren kapazitate eta jarreren arteko oreka bilatuz eta, horren ondorioz, bukaerako lanak partaide guztien ekarpenak bilduko ditu eta denen emaitza izango da.

Aurkeztutako jarduerak ez dira itxiak, alegia, irakasle bakoitzak erabaki beharko du zeintzuk egokitzen diren hobekien bere ikasleen ezaugarrietara, zeintzuk behar dituzten egokitzapenak, bai eta zeintzuk izan daitezkeen desegokiak ere. Jarduera bakoitza saio batean ala gehiagotan gauzatu daiteke, eman nahi diogun sakontasunaren arabera. Horregatik, material osagarriak http://www.elkarrekin.org/web/powersoften helbidean eskaintzen dira, formatu moldagarrietan egokitzapen horietarako. Bertan, bideoaren bertsio desberdinetarako loturak aurki daitezke eta baita beste zenbait tresna ere. Bideoaren inguruko informazio asko ingelesez egoteak ez du arazo izan behar, aukera baizik, eta horrek eta bideoak eskaintzen duen komunikazio hizkuntza berritzaileak beste zenbait gaitako kideekin lan egiteko parada irekiko digu (loturak berehalakoak dira hizkuntzekin –bideoaren bertsioak ingelesez, frantsesez eta euskaraz daude–, adierazpen artistikoa, Natur Zientziak…).

5. Competencias básicas trabajadas

Competencias básicas trabajadas	Actividades
1) Competencia en cultura científica, tecnológica y de la salud:	1/2/4/9
• Posibilitar una mejor comprensión del universo elaborando modelos y figuras planas y espaciales para mejorar la interpretación de planos y mapas. • Mediante la medida mejorar el conocimiento de los aspectos cuantificables de la realidad para poder emitir y contrastar informaciones del entorno. • Trabajar la modelización matemática del universo para interpretar mejor su desarrollo y evolución.	
2) Competencia para aprender a aprender:	0/2//9
• Desarrollo de la autonomía, el esfuerzo y la constancia para saber abordar problemas variados y de creciente complejidad, transfiriendo lo aprendido a otros contextos semejantes. • Habilitar una mirada crítica al tiempo que integramos las opiniones de los compañeros para ser capaces de expresar con eficacia nuestras conclusiones.	
3) Competencia matemática:	1/4/5/6/7/9
• Utilizar y desarrollar razonamientos comprendiendo las potencias y sus operaciones, tanto en el macro como en el microcosmos, para comprender mejor el universo. • Reconocer y usar los elementos matemáticos que se presentan en la realidad para resolver diferentes tipos de problemas. • Utilizar herramientas matemáticas para obtener conclusiones y tomar decisiones con confianza. • Poner énfasis en la funcionalidad para comprender mejor el mundo y valerse de las estrategias de la resolución de problemas en los diferentes ámbitos de la vida.	
4) Competencia en comunicación lingüística:	1/2/9
• Incorporar los órdenes de magnitud y las escalas logarítmicas a la expresión habitual con adecuada precisión en su uso. • Desarrollo de destrezas comunicativas escuchando las explicaciones de los demás con espíritu crítico y formulando las propias de forma oral y escrita utilizando la terminología adecuada.	
5) Competencia en el tratamiento de la información y competencia digital:	1/2/8/9
• Proporciona y utilizar destrezas en el uso de los números, su comparación y su aproximación para entender mejor informaciones o medidas. • Mejorar la utilización del lenguaje gráfico y simbólico para interpretar mejor la información de los diferentes ámbitos de la realidad. • Utilizar programas y asistentes matemáticos para la comprensión y resolución de problemas.	

5. Landutako oinarrizko gaitasunak

Landutako oinarrizko gaitasunak	Jarduerak
1) Zientzia-, teknologia- eta osasun-kulturarako gaitasuna:	1/2/4/9
• Unibertsoa hobeto ulertzeko modelo eta figura planoak sortu, plano eta mapen ulermena errazteko. • Neurriaren bitartez errealitate kuantifikagarriaren ezagutza areagotu, inguruko informazioaren gaineko iritzi propioa izateko. • Unibertsoaren modelizazio matematikoa landu, haren garapen eta eboluzioa hobeto ezagutzeko.	
2) Ikasten ikasteko gaitasuna:	0/2//9
• Autonomia, ahalegin eta irmotasuna garatu, era askotako problemen aurrean nola jokatu jakiteko, aurretik ikasitakoa antzeko beste hainbat eremutan erabiliz. • Begirada zorrotza landu, besteen iritziak kontuan hartuz gurearen zorroztasuna areagotzeko.	
3) Matematikarako gaitasuna:	1/4/5/6/7/9
• Berreketen esanahia jaso eta osatu, makro eta mikrokosmosak hobeto ulertzeko. • Errealitatean topa daitezkeen elementu matematikoak antzeman, hainbat problemari aurre egiteko. • Tresna matematikoak erabili, errealitatea aztertzeko eta funtsezko erabakiak hartzeko. • Funtzionaltasunari erreparatu, mundua hobeto ezagutzeko eta problemak ebazteko prozeduretan iaioago izateko.	
4) Hizkuntza-komunikaziorako gaitasuna:	1/2/9
• Magnitude-ordenak eta eskala logaritmikaoak ohiko mintzairan zehaztazunez erabili. • Komunikazio trebetasunak garatu, besteen azalpenak iritzi kritikoarekin jaso eta norberarenak ahoz eta hitz egokiak erabiliz azaldu.	
5) Informazioa tratatzeko eta teknologia digitala erabiltzeko gaitasuna:	1/2/8/9
• Zenbakiak trebetasunez erabili, konparaketa eta hurbilketen bitartez, informazioa eta neurriak modu egokiz ulertzeko. • Informazioa jasotzeko bideak aberastu, hizkuntza grafiko eta sinbolikoaren ulermena areagotuz. • Programa eta laguntzaile matematikoez baliatu, problemak ulertu eta ebazteko.	

Competencias básicas trabajadas	Actividades
6) Competencia social y ciudadana:	2/3/7/9
• Saber trabajar en equipo, aceptar otros puntos de vista y ponerse en el lugar del otro para saber adoptar la mejor estrategia en la resolución de problemas. • Hacerse una mejor idea de las dimensiones de los problemas medioambientales para poder madurar opiniones y colaborar en decisiones fundamentadas.	
7) Competencia en cultura humanística y artística:	1/2/3/8/9
• Apreciar la contribución de la matemática al desarrollo cultural materializado en un documental patrimonio de todos. • Descubrir valores estéticos en las formas geométricas, en la propia escala logarítmica y en la representación y el lenguaje visual desarrollado en el documental.	
8) Competencia para la autonomía e iniciativa personal:	1/9
• Comprender la descripción del universo del matrimonio Eames, integrarla en nuestra propia visión y ser capaz de trazar un plan y elaborar una estrategia para darla a conocer a compañeros de otros grupos. • Saber afrontar situaciones abiertas e inciertas desde la autonomía personal y sabiendo requerir colaboración y consejo, argumentando los puntos de vista e iniciativas personales.	

6. Objetivos didácticos

1. Realizar cálculos en los que intervengan potencias utilizando las propiedades más importantes y decidiendo si es necesaria una respuesta exacta o aproximada.
2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de operaciones con potencias, realizando cálculos y valorando la adecuación del resultado al contexto.
3. Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada, comprendiendo los procesos de medida y aplicándolos a la resolución de problemas del entorno macro y microscópico.
4. Resolver problemas utilizando un modelo heurístico: analizando el enunciado, eligiendo las estrategias adecuadas (ensayo-error, resolución de un problema más sencillo, división del problema en pequeños problemas, dibujar un esquema, etc.) realizando los cálculos pertinentes, comprobando la solución obtenida y expresando, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.
5. Valorar y utilizar sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como curiosidad, perseverancia y confianza en las propias capacidades, orden o revisión sistemática. Así mismo integrarse en el trabajo en grupo, respetando y valorando las opiniones ajenas como fuente de aprendizaje y colaborando en el logro de un objetivo común.

Landutako oinarrizko gaitasunak	Actividades
6) Gizarterako eta herritartasunerako gaitasuna:	2/3/7/9
• Talde-lanean eta problemak ebazterakoan jokaera baikor eta lagunkorra erabili. • Ingurumen-arazoen aurrean, ongi oinarritutako iritziak eta neurriko jokaerak erabakitzeko tentuz jokatu.	
7) Giza eta arte-kulturarako gaitasuna:	1/2/3/8/9
• Matematikak denon ondarea den bideo batean duen eginkizuna baloratzen jakin. • Balore estetikoak errekonozitu, dokumentalean erabilitako forma geometrikoetan, eskala logaritmikoan eta adierazitako beste hizkuntza bisualetan.	
8) Norberaren autonomiarako eta ekimenerako gaitasuna:	1/9
• Eames bikoteak transmititu nahi digun ikuspegia jaso, gureganatu eta kideei aurkezpen batean transmititzeko gai izan. • Egoera ireki eta ziurgabeei aurre egiteko trebeziak izan era autonomoaz baina laguntza eta aholkua eskatzeko baliabideak izanik, eta norberaren ikuspuntuak eta jokaerak defenditzeko argudioak izanik.	

6. Helburu didaktikoak

1. Kalkuluak egin berreketekin, euren propietateak erabiliz eta erantzun zehatza ala hurbila behar den erabakiz.
2. Berreketak behar dituzten problemak ebatzi, kalkuluak eginez eta emaitzak testuinguruari begira egokiak diren ala ez baloratuz.
3. Luzera, azalera eta bolumenen estimazio eta kalkuluak egin, zehaztasun egokiaz, neurri-unitate egokiekin eta neurtzeko prozedurak ulertuz inguru makro eta mikroskopikoan.
4. Problemak ebatzi modelo heuristikoaren bitartez: enuntziatua analizatu, estrategia egokiak erabili (saio-errorea, errazagotik hasi, problema zatitu, eskema marraztu e.a.), kalkuluak egin, emaitza egiaztatu, eta erabilitako bidea azaldu mailara egokitutako hizkuntza matematikoaren bitartez.
5. Matematikari lotutako jakin-mina, pertseberantzia, konfiantza norbere buruarengan, ordena, e.a. baloratu eta erabili. Era berean, talde-lanean egoki integratu, kideen iritziak errespetatu eta jakintza-bidetzat jaso, eta elkarlanari ekin helburu komun bati begira.

7. Contenidos

- Resolver problemas relacionados con pautas numéricas y gráficas.
- Utilizar asistentes matemáticos para resolver problemas y realizar dibujos sencillos.
- Potencias de números enteros con exponente natural. Opcionalmente de exponente entero. Operaciones y propiedades con potencias. Notación científica para representar números grandes (y opcionalmente muy pequeños).
- Proporcionalidad directa. Análisis de tablas y gráficas sencillas. Razón de proporcionalidad.
- Figuras del plano: elementos y características. Cálculos métricos. Semejanza de figuras. Proporcionalidad entre segmentos. Razón entre las áreas de figuras semejantes. Teorema de Thales.
- Representación a escala. Mapas
- Estimación y cálculo de perímetros, áreas y volúmenes mediante diversos procedimientos.

8. Secuencia de actividades

Las actividades para los alumnos se encuentran en la web:
http://www2.elkarrekin.org/web/powersoften

Motivación e iniciación

ACTIVIDAD 0: Organización y Preevaluación

En esta actividad trataremos de introducir el tema evaluando los conocimientos previos que sobre estos contenidos dominan los alumnos. (Mirar actividad 0: Preevaluación).

Anunciaremos que la tarea última es construir en grupo, de forma autónoma, un modelo de Sistema Solar a escala, obteniendo los datos, procesándolos y construyéndolo de forma que resulte ilustrativo para otros compañeros.

Previamente formaremos los grupos que habrán de ser diversos en cuanto a género, capacidades y, en su caso, ámbitos culturales. El profesor defenderá la pertinencia de que los grupos de trabajo no sean reflejo de los grupos de amistad y la conveniencia de integrar la diversidad.

Cada grupo se autoorganizará con diferentes funciones (una misma persona puede realizar varias de las tareas) y reflejará los acuerdos en el Contrato de trabajo:

- Coordinador: acordará el reparto de tareas con el resto de los componentes del grupo velando porque éstas se asignen en razón de los gustos y en proporción a las capacidades de los diferentes componentes.
- Portavoz: será la voz del grupo en las puestas en común y en las presentaciones de los resultados.
- Secretario: recogerá y ordenará la documentación (textos, ejercicios, dibujos, imágenes, vídeos…) tanto de las distintas actividades como muy especialmente del trabajo final de creación, a escala, de un sistema solar en el patio del centro.
- Responsable del material: será el encargado de que todo el material de la actividad final esté disponible y se responsabilizará de su custodia.

7. Edukiak

- Erregela numeriko eta grafikoekin erlazionaturiko problemak ebatzi.
- Laguntzaile matematikoak erabili, problemak ebazteko eta irudi xumeak egiteko.
- Berretzaile arruntetako zenbaki osoen berreketak. Aukeran, berretzaile osoetakoak. Berreketen propietateak eta eragiketak. Notazio zientifikoa, zenbaki handiak eta, aukeran, txikiak adierazteko.
- Proportzionaltasun zuzena. Taula eta grafiko xumeak aztertu eta proportzionaltasun arrazoia bereizi.
- Planoko figurak: elementuak eta berezitasunak. Kalkuluak eta antzekotasunak. Zuzenkien arteko proportzionaltasuna. Antzeko irudien arteko azaleren arrazoia. Thales-en teorema.
- Adierazpena eskalan. Mapak.
- Perimetro, azalera eta bolumenen estimazioa eta kalkulua, hainbat prozedura erabiliz.

8. Jardueren sekuentzia

Ikasleentzako jarduerak webgunean aurki daitezke:
http://www2.elkarrekin.org/web/powersoften

Motibazioa eta hasiera

0. JARDUERA: Antolaketa eta aurre-ebaluazioa

Gaiari zuzenean ekin urretik ikasleek haren inguruan dituzten aurre-ezagutzak ebaluatzen saiatuko gara. (Begiratu 0 jarduera: Aurreebaluazioa).

Lanean hasi baino lehen, bukaerako helburua zein den argi utziko dugu: Eguzki-sistemaren modelo bat eraikitzea, talde lanean eta era autonomoan; datuak eskuratu, prozesatu, eta ondoren eraiki, ikaskideentzat adierazgarria izan dadin.

Aldez aurretik, lan-taldeak osatuko ditugu, anitzak genero, gaitasun eta, behar izanez gero, jatorri kulturalekiko. Irakasleak dibertsitatea integratzeko garrantzia azpimarratuko du, alegia, lan-taldeak lagun-taldeen ispilu ez izatearen abantailak.

Talde bakoitzak hainbat funtzio egokituko dizkio partaide bakoitzari (taldekide batek eginbehar bati baino gehiagori heldu badiezaioke ere) eta adostutako puntuak Lan kontratuan adieraziko ditu:

- Koordinatzailea: gainontzeko partaideekin eginbeharren banaketa adostuko du, bakoitzaren zaletasun eta gaitasunen araberako izan dadin saiatuz.
- Bozeramailea: eztabaidetan eta gaiaren aurkezpenean taldekideen ahotsa izango da.
- Idazkaria: erabiltzen dituzten dokumentuak bildu eta antolatuko ditu (testuak, ariketak, irudiak, bideoak…), bai jarduera desberdinetan bai, eta batez ere, bukaerako lanerako.
- Materialaren arduraduna: bukaerako modeloa eraikitzeko behar den materiala biltzen eta gordetzen arduratuko da.

- Recopilador de información en Internet: se encargará de la búsqueda, organización y mantenimiento de los recursos de la red relacionados con este tema.

Formados ya los grupos los alumnos responderán a los cuestionarios sobre ideas previas:

- En primer lugar cada alumno responderá al cuestionario individual.
- A continuación el grupo recogerá los resultados en el cuestionario de grupo y señalará en una puesta en común aquellos aspectos del tema en los que han detectado más lagunas y que, por tanto, requieren una mayor atención en el desarrollo de la unidad.

ACTIVIDAD 1: Repaso de potencias y presentación del video

Comenzamos repasando los conceptos de potencia, sus propiedades y el de raíz. Tras ello conversaremos con los alumnos sobre las situaciones en las que se puede necesitar expresar cantidades en forma de potencias. Orientamos la conversación hacia los grandes números del macro y microcosmos para ser conscientes de la necesidad de las potencias para expresarlos.

Por último el profesor mencionará el video “Powers of Ten” que vio en su día y que sería bueno para ilustrar el tema de las potencias. ¿Sería posible verlo en clase? Él no sabe cómo pero invitará a los alumnos a encontrar la forma de hacerlo. Seguro que algún alumno lo encuentra en Youtube.

Apuntes de potencias de 1º de la ESO: definición de potencias, propiedades, raíces y autoevaluación: http://www.ieslacucarela.com/PaginaIES/dptos/Matematicas/UDenPDF/UDPotRai1eso.pdf

Unidad didáctica de potencias y raíces en Descartes:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Potencias_y_raices/index.htm

ACTIVIDAD 2: Ver el video en grupo, buscar información y editar el artículo de la Wikipedia sobre Powers of Ten

Alguno de nuestros alumnos ya habrá encontrado el video en Youtube o en otra web de Internet y podemos proyectarlo en clase (en la web de esta unidad didáctica, en el apartado recursos se encuentran los enlaces a las versiones en inglés, francés y euskera).

Un primer visionado podría ser los 9 minutos seguidos (atendiendo a la explicación) y en un segundo comentaremos los elementos que aparecen en cada orden de magnitud: $10^0 = 1m$ personas, $10^1 = 10m$ jardín, $10^2 = 100m$ edificios, $10^3 = 1.000m$ puerto, $10^4 = 10.000m$ ciudad… y los elementos del universo tanto macro como microscópico.

A continuación los grupos buscarán información en la Wikipedia y podrán comprobar que la disponible en inglés es más completa que la de la versión en castellano. Su tarea será preparar un texto que completa la versión que se pueda leer en la Wikipedia en castellano en ese momento y crear otro artículo (actividad opcional) sobre un tema de su interés que no se pueda encontrar en la enciclopedia.

Versión en inglés del video:
http://www.youtube.com/watch?v=A2cmlhfdxuY

- Interneteko informazio biltzailea: jarduerak eta bukaerako lana aurrera eramateko behar den informazioa jasotzen, antolatzen eta gordetzen saiatuko da.

Taldeak osatu ondoren, ikasleek aurretiko ideien galdetegiak erantzungo dituzte:

- Estreinakoz, ikasle bakoitzak bakarrik berea.
- Ondoren, taldekideenak laburbilduko dira taldeko galdetegian, eta gabezia gehienak sumatu dituzten eta, beraz, atentzio gehien eskatzen duten atalak zehaztuko dituzte bateratze-saioan.

1. JARDUERA: Berreketen errepasoa eta bideoaren aurkezpena

Berreketaren kontzeptua eta haren propietateak errepasatuz hasiko gara. Ondoren, ikasleei galdetuko diegu ea zein egoeratan iruditzen zaien berreketak beharrezkoak direla. Hizketaldian makro eta mikrokosmoseko zenbaki handi eta txikien beharra azalduko dugu.
Irakasleak "Powers of Ten" bideoaren berri emango du. Bideo hori gaia argitzeko egokia izango litzatekeela esango du, baina berak ez dakiela bideoa nola lortu. Ikasleei galdetuko die ea baten batek dakien nola eskuratu, eta lortzekotan klasean ikusteko parada izango luketela. Ikasleren batek, seguruenik, hurrengo egunean helbidea eskainiko digu.
DBHrako berreketak, propietateak, erroketak eta auto-ebaluazioa: http://www.ieslacucarela.com/PaginaIES/dptos/Matematicas/UDenPDF/UDPotRai1eso.pdf
"Berreketak eta erroketak" unitate didaktikoa Descartesen:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Potencias_y_raices/index.htm

2. JARDUERA: Bideoa ikusi gelan, informazioa bilatu eta Wikipedian editatu Powers of ten artikulua

Gure ikasleren batek, hurrengo egunerako, bilatuko zuen bideoa Youtuben-edo seguru aski, eta beraz gelan ikus dezakezu (unitate honen webgunean, baliabideen atalean aurki daitezke ingelesezko, frantsesezko eta euskarazko bertsioetarako loturak).

Lehenengo ikustaldian filma osoa segidan ikus dezakegu, eta bigarrengo batean, aldiz, komentarioak tartekatu magnitude ordena desberdinetan: $10^0 = 1m$ pertsonak, $10^1 = 10m$ lorategia, $10^2 = 100m$ eraikinak, $10^3 = 1.000m$ portua, $10^4 = 10.000m$ hiria… eta unibertso makro zein mikroskopikoaren gainontzeko elementuak.
Segidan taldeek informazioa bilatuko dute Wikipedian eta ingelesezko bertsioan euskarazkoan baino informazio gehiago dutela baieztatuko dute. Euren lana euskarazkoan irakur daitekeen testua osatuko duen bertsio berri bat osatzea eta Wikipedian argitaratzea litzateke. Aukeran beste gairen baten inguruan euskarazko Wikipedian aurki ezin daitekeen beste artikuluren bat sor dezakete.
Bideoaren ingelesezko bertsioa: http://www.youtube.com/watch?v=A2cmlhfdxuY
Euskarazkoa: http://www.youtube.com/watch?v=ms5f9AKEV7Y

Desarrollo

ACTIVIDAD 3: Mikel y Ana visiones distintas

Es un tópico cada vez menos oído pero que perdura en algunos ambientes el de la pureza de origen de los habitantes de un determinado ámbito. Si se asignan veinticinco años a cada generación, hace 750 años (30 generaciones) el número de antepasados de una persona serían más de 1.000 millones (2^{30}), es decir una cantidad superior a la de habitantes de la tierra en esa época.

Eso significa que, entre los antepasados de cada uno de nosotros hay necesariamente múltiples cruces, que muchos son antepasados nuestros por varios caminos. Si no existieran estos cruces, nuestra generación cuadragésima, que vivió hacia el año mil constaría de 2^{40} = 1 099 511 627 776 personas, más de un billón de personas. En la tierra no hemos sido nunca tantos. O sea, los cruces entre ascendientes han sido mucho más numerosos de lo que podemos imaginar. Por tanto, además de hermanos todos somos, un poco o un mucho, primos.

Argumentos a favor de Ana: http://bejar.biz/node/2658

Argumentos más complejos considerando diferentes grados de consanguinidad:
http://tiopetrus.blogia.com/2003/091802--matematicas-contra-el-racismo-.php

ACTIVIDAD 4: Descripción de una de las imágenes del video y expresión en notación científica de una distancia, un área y un volumen de alguno de los objetos que aparecen en ella

Esta actividad nos obliga a utilizar con precisión el lenguaje matemático para describir alguna de las imágenes. Pensemos que uno de nuestros compañeros es invidente y hemos de contarle qué se ve en el video.

La imagen es un cuadrado de hierba verde de unos 5 m de lado sobre el que se ha dispuesto una manta de rayas, también cuadrada, de unos 2 m de lado. Sobre la manta hay dos personas: una mujer de rodillas sentada sobre sus talones en el ángulo inferior izquierdo y un hombre sentado con las piernas cruzadas en la zona media de la mitad derecha de la manta. Ambos miran a la zona central de la manta en donde hay un pequeño mantel cuadrado de 80 cm de lado. En la zona superior derecha de la manta hay un pan circular y un cesto ovalado. A la izquierda, en la zona media, se ve un portafolio grande de 40 x 30 cm.

Garapena

3. JARDUERA: Mikelek eta Anak, ikuspegi desberdinak

Nonbaiteko herritarrak nahastu gabeak, puruak, direla gero eta gutxiago entzuten den aurreiritzi bat da. Hala ere, oraindik gutxi batzuengan aurkitu daiteke. Belaunaldi bakoitzak 25 urte irauten baditu, orain dela 750 urtetik hona 30 belaunaldi izan dira eta gutariko bakoitzak 1000 milloi (2^{30}) arbaso izango genituen nahasterik gerta izan ez balitz.

Beraz gure arbasoak "arbaso" dira bide desberdinetatik. Nahaste horiek gabe orain dela 1000 urteko gure 40. arbasoen belaunaldian 2^{40} =1 099 511 627 776 pertsona, hau da, biloi bat baino arbaso gehiago izango genituzke. Argi dago ezinezkoa dela, inoiz ez baikara izan horrenbeste Lurrean. Beraz, anai-arrebak omen gara ere nahasteak maiz gertatu behar izan direlako lehengusuak ere ba garela esan daiteke.

Ana-ren aldeko argudioak: http://bejar.biz/node/2658

Argudio sakonagoak odolkidetasun maila desberdinak kontuan hartuz:
http://tiopetrus.blogia.com/2003/091802--matematicas-contra-el-racismo-.php

4. JARDUERA: Bideoaren irudi baten deskribapena eta bertan agertzen den elementuren baten distantzia, azalera eta bolumenaren adierazpena notazio zientifikoan

Jarduera honetan hizkuntza matematikoa zehaztasunez erabili behar dugu irudiren baten deskribapena egiterakoan. Horretarako, gure kide bat itsua dela pentsa dezakegu eta bideoan ikusten dena kontatu behar diogula.

Irudia 5x5 m-ko belaze batean 2 m-ko aldea duen manta arraiadun bat erakusten du. Mantan bi pertsona daude: emakume bat ezker aldean belauniko eta orpoen gainean eserita, eta gizonezko bat eskuin aldeko erdi aldera eserita baina hankak gurutzatuta. Biak manta erdian dagoen eta 80 cm-ko aldea duen mantel karratu bati so daude. Mantaren goialdean ogi borobil bat eta zesto obalatu bat ikus daitezke. Ezker aldeko erdialdean karpeta handi bat dago, 40x30 cm-koa.

ACTIVIDAD 5: Notación científica

Explicaremos el concepto de notación científica y realizaremos algunos ejercicios relacionados con el tema.

Se pueden realizar ejercicios de afianzamiento de la notación científica en:

- Descartes:
  http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/notacion/notacion_cientifica.htm
- Genmagic: http://www.genmagic.org/mates2/nc1c.swf

Los ejercicios pueden realizarse en una primera aproximación solamente con exponentes positivos. Una vez afianzados algunos alumnos podrían realizarlos también con exponentes negativos.

ACTIVIDAD 6: Proporcionalidad

Explicaremos el concepto de proporcionalidad, razón de semejanza y semejanza entre áreas y volúmenes. Para afianzar el concepto de proporcionalidad se pueden realizar ejercicios basándose en el contexto del aula. También se puede motivar a los alumnos para que apliquen el concepto en contextos particulares: su casa, su habitación, el campo de fútbol…

Para una visión intuitiva de la proporcionalidad sería deseable utilizar las herramientas de la red Google maps http://maps.google.es/ (se puede utilizar directamente) y Google Earth http://earth.google.es/ (precisa de instalación).

Sería interesante, tanto en esta actividad como en la 8, conocer y estudiar el Mapa de Peters en el que la tamaño de los continentes reflejan su extensión real (aunque inevitablemente deformando los ángulos), a diferencia de los habituales. http://www.petersmap.com

ACTIVIDAD 7: Magnitudes y cambio de unidades de medida

Trabajaremos las magnitudes y los cambios entre diferentes unidades.

Se pueden realizar ejercicios de afianzamiento de magnitudes y medida en:

- Descartes: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/magnitudymedida/index.html
- Un guión de actividades para trabajar con Descartes:
  http://platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0708/1_eso/unidades_medida.doc

5. JARDUERA: Notazio zientifikoa

Notazio zientifikoaren kontzeptua azaldu eta gaiarekin erlazionaturiko zenbait ariketa egingo ditugu.

Notazio zientifikoa indartzeko ariketak honako webgune hauetan egin daitezke:

- Descartes: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/notacion/notacion_cientifica.htm
- Genmagic: http://www.genmagic.org/mates2/nc1c.swf

Hasieran berretzaile arruntetako ariketak egingo ditugu. Horiek menperatzerakoan berretzaile negatibo dituztenekin has gintezke.

6. JARDUERA: Proportzionaltasuna

Honako kontzeptu hauek azalduko ditugu: proportzionaltasuna, antzekotasun arrazoia eta azalera zein bolumenen antzekotasuna. Proportzionaltasuna bereganatzeko ikasleek gelari lotutako ariketak egin ditzakete. Ondoren, kontzeptua erabiliz, etxea, gela, futbol-zelaiari aplika diezaiokegu proportzionaltasun kontzeptua.

Proportzionaltasunaren ikuspegi intuitiboa lantzeko mapak lantzeko Google-ren tresnak erabil daitezke: Google Maps http://maps.google.es/ (zuzenean erabil daitekeena) eta Google Earth http://earth.google.es/ (software baten instalazioa eskatzen duena).

Bai jarduera honetan baita 8.ean ere Peters-en mapa http://www.petersmap.com erabiltzea interesgarria izango litzateke: bertan, herrialde eta kontinente desberdinen azalerak benetakoen proportzionalak dira (nahiz eta horretarako, jakina, angeluak, hau da, formak eraldatu behar diren).

7. JARDUERA: Magnitude eta neurri unitateen aldaketa

Magnitudeak eta unitate desberdinen arteko aldaketak landuko ditugu.

Magnitude eta neurrien ariketak honako helbide hauetan landu daitezke:

- Descartes: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/magnitudymedida/index.html
- Descartesekin ikasgelan lan egiteko klase gidoi bat: http://platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0708/1_eso/unidades_medida.doc

ACTIVIDAD 8: Mapas y escalas

En esta actividad nos acercaremos al mundo de la representación gráfica de la realidad y a las transformaciones numéricas necesarias para realizar los mapas a escala. Trabajaremos tanto con la escala numérica como con la gráfica para realizar cálculos y estimaciones.

Google maps: http://maps.google.es

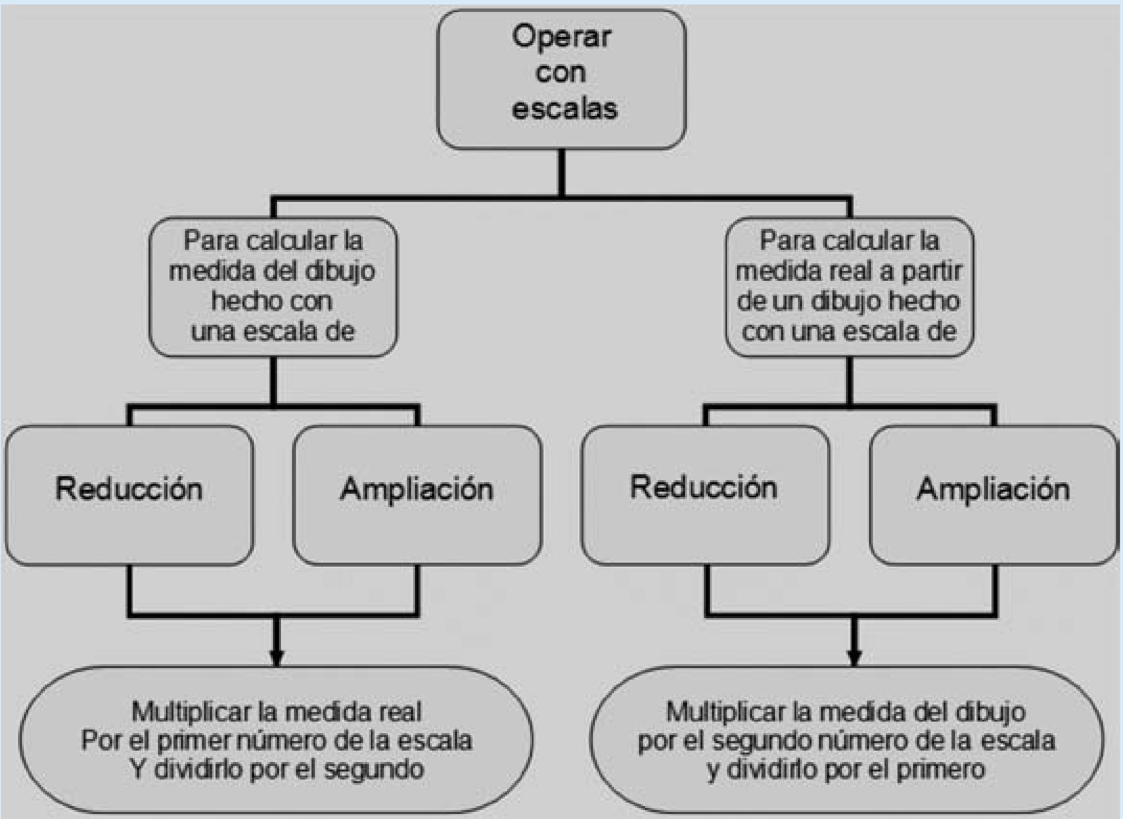
Álava: http://carto.alava.net/Cartografia/

Gipuzkoa: http://b5m.gipuzkoa.net/web5000/

Bizkaia: http://web.bizkaia.net/home/ca_carto.htm

Recordar Google Maps, Google Earth y el mapa de Peters.

Estudiar el esquema de referencia y tras realizar ejercicios de escalas se les puede ofrecer una base orientadora en forma de mapa conceptual como el siguiente cuadro pero con algunos de sus elementos vacíos:



8. JARDUERA: Mapa eta eskalak

Jarduera honetan errealitatearen adierazpen grafikoa landuko dugu eta mapak eskala jakin batean gauzatzeko egin beharreko zenbaki-kalkuluetara inguratuko gara. Zenbaki eskala eta eskala grafikoan oinarriturik estimazio eta kalkuluak gauzatuko ditugu.

Google maps: http://maps.google.es

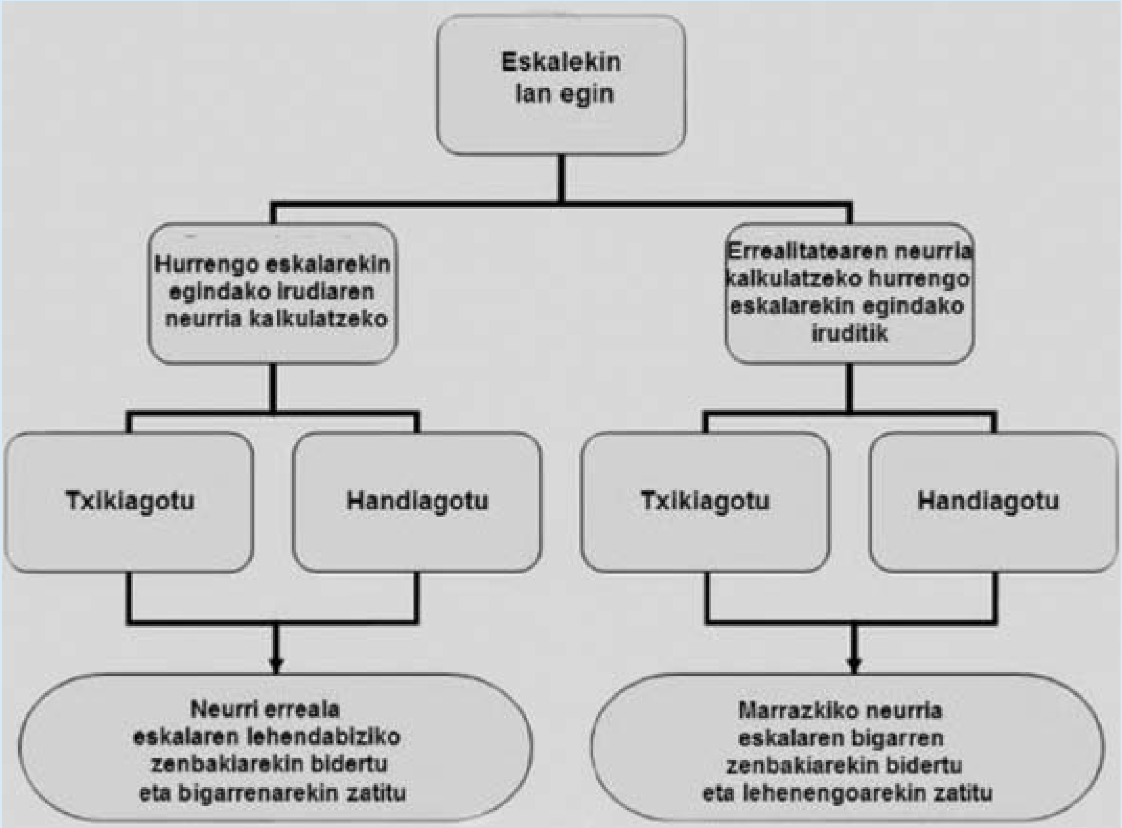
Araba: http://carto.alava.net/Cartografia/default_eus.htm

Gipuzkoa: http://b5m.gipuzkoa.net/web5000/eu/

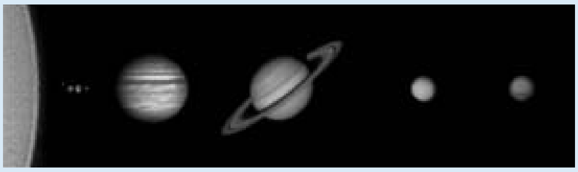
Bizkaia: http://web.bizkaia.net/home/eu_carto.htm

Gogoan izan Google Maps, Google Earth eta Peters-en mapa.

Erreferentzia eskema ikasi eta eskalen ariketak egin ondoren mapa kontzeptual moduan orientazio oinarri bat eskain diezaiekegu, honako koadroaren modukoa baina zenbait atal hutsik dutelarik:



Aplicación



ACTIVIDAD 9: El sistema solar en nuestro centro

La actividad final, en la que nuestros alumnos habrán de emplear muchos de los conceptos y herramientas que han trabajado a lo largo de la unidad, consistirá en idear un sistema solar a escala que quepa en el patio de nuestro centro. En la confección del modelo tanto el tamaño de los astros como las distancias entre ellos deberán de mantener una escala adecuada para que por un lado la máxima distancia (desde el sol a neptuno) quepa en el patio y los planetas y el sol tengan el mayor tamaño posible.

Una ayuda completa se puede ver en la web del INTA (Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial) http://www.inta.es/descubreAprende/htm/modelo_sistema_solar.htm#comienzo

Otra descripción en la que el sol es un balón:
http://www.tuobra.unam.mx/publicadas/040413171436-Un.html

Descripción en Educastur: www.google.com [educar un modelo para el sistema solar]

Son varios los intentos de representar el sistema solar al tamaño de diferentes países:

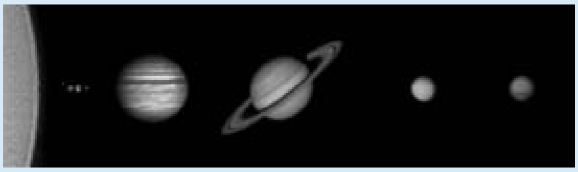
- Un modelo sueco: http://ttt.astro.su.se/swesolsyst/englishsum.html
- El modelo británico: http://www.spacedout-uk.com/

En Internet abundan los recursos:

- Representación a escala del tamaño de los planetas:
  http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/astronomia/chicos/sistema_solar/escala/ss_escala.htm
- Otra: http://www.troybrophy.com/projects/solarsystem/index.html#saturn
- Más completa con 88 astros distintos representados:
  http://kokogiak.com/solarsystembodies_metric.jpg
- Fotografías de los planetas a escala: http://www.peroqueblog.com/?p=102
- La siguiente tabla recoge los datos que los alumnos habrán de encontrar en Internet.

Objeto	Distancia al Sol	Diámetro (km)
Sol	-	1.390.000
Mercurio	58.000.000	4.880
Venus	108.000.000	12.100
Tierra	150.000.000	12.800
Marte	228.000.000	6.800
Júpiter	780.000.000	143.000
Diámetro del anillo exterior	-	261.000
Saturno	1.430.000.000	120.000
Diámetro del anillo exterior	-	273.000
Urano	2.870.000.000	51.000
Diámetro del anillo exterior	-	100.000
Neptuno	4.500.000.000	49.000
Diámetro del anillo exterior	-	106.000

Ezarpena



9. JARDUERA: Eguzki sistemaren modeloa eraikitzen gure patioan

Bukaerako jarduera honetan gure ikasleek unitatean zehar erabilitako kontzeptu eta tresnak abian jarriko dituzte, eskalan egindako eguzki sistema bat eraikitzen, ikastetxeko patioan. Eraikitzerakoan bai astroen arteko distantziak baita astro beraiena ere eskala egokian egin beharko dituzte, alde batetik Eguzkia eta Neptunoren arteko distantziarik luzeena patioan kabitzeko eta, beste batetik, Eguzkiak eta planetek ahalik eta tamainarik handiena izan dezaten.

Laguntza ederra aurki daiteke INTA (Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial)-ren webgunean:
http://www.inta.es/descubreAprende/htm/modelo_sistema_solar.htm#comienzo

Hurrengoan deskribapen bat non Eguzkia baloi bati zango den:
http://www.tuobra.unam.mx/publicadas/040413171436-Un.html

Deskribapen interesgarria Educasturren Google www.google.com [bilatzailean hurrengoa idatziz]

Zenbait adibide badaude Eguzki Sistema herrialde desberdinetara egokitutako eskalan gauzatzeko:

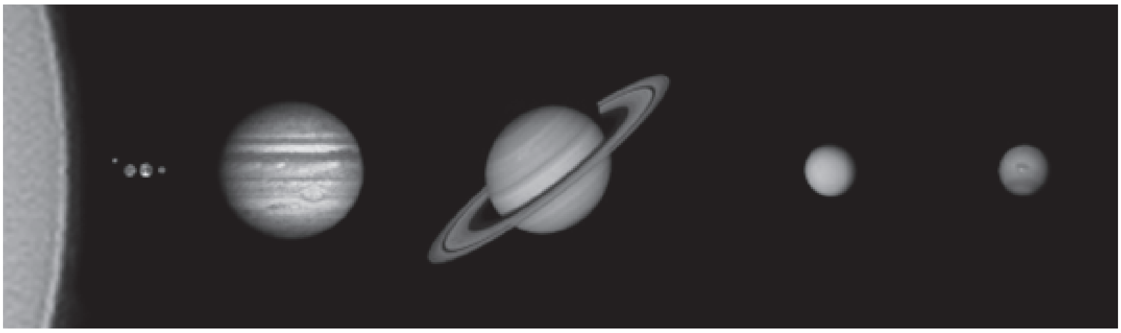
- Suediakoa: http://ttt.astro.su.se/swesolsyst/englishsum.html
- Britainia Handikoa: http://www.spacedout-uk.com/

Badaude beste zenbait baliabide Interneten:

- Planetak eskalan adierazten duen honako irudikapen hau: http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/astronomia/chicos/sistema_solar/escala/ss_escala.htm
- Beste bat: http://www.troybrophy.com/projects/solarsystem/index.html#saturn
- Osatuago bat, 88 astro desberdin irdikatzen dituena: http://kokogiak.com/solarsystembodies_metric.jpg
- Planeten argazkiak eskalan: http://www.peroqueblog.com/?p=102
- Ondorengo taulak ikasleek interneten bilatu eta jaso beharko dituzten datuak antolatzen ditu.

Astroa	Eguzkirainoko distantzia (km)	Diametroa (km)
Eguzkia	-	1.390.000
Merkurio	58.000.000	4.880
Artizarra	108.000.000	12.100
Lurra	150.000.000	12.800
Martitz	228.000.000	6.800
Jupiter	780.000.000	143.000
Jupiterren eraztunaren diametroa	-	261.000
Saturno	1.430.000.000	120.000
Saturnoren eraztunaren diametroa	-	273.000
Urano	2.870.000.000	51.000
Uranoren eraztunaren diametroa	-	100.000
Neptuno	4.500.000.000	49.000
Uranoren eraztunaren diametroa	-	106.000

Los tamaños relativos de los planetas y del sol se reflejan en la siguiente imagen:



Hay que tener en cuenta que las distancias entre los planetas son inmensas en comparación con las de los propios astros. Por ejemplo, la distancia de la tierra al sol es 10.000 veces mayor que el diámetro de nuestro planeta.

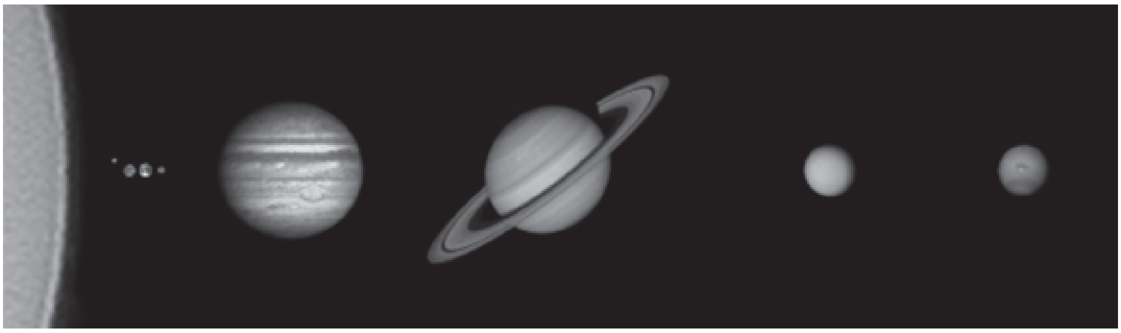
Necesitaréis una cuerda de 60 m, cinta métrica, celo, plastilina y palillos.

Debéis de dibujar, fotografiar y grabar videos de todo el proceso de diseño y construcción y recogerlos en una memoria junto con los cálculos realizados y una descripción del proceso realizado. Además de presentarla a vuestro profesor podéis enviar una copia a mateguay@gmail.com y vuestro trabajo y las imágenes y videos que hayáis grabado parecerán en la web de la unidad http://www2.elkarrekin.org/web/powersoften y podrán ser de ayuda a otros grupos de alumnos que se dispongan a crear su modelo del sistema solar.

La construcción del modelo puede constar de las siguientes fases:

1. Con los datos de la tabla anterior deberéis de calcular un factor de escala adecuado para que los 60 metros de cuerda sean suficientes para representar la distancia entre el sol y Neptuno. ¡Ojo! Esta decisión es crucial y sería conveniente que contarais con la aprobación del profesor al factor de escala que hayáis decidido adoptar.
2. Toma en la cuerda la longitud que sea la distancia a escala entre el sol y Neptuno, más unos 30 cm. Con esos cm de más haz una esfera, cuyo diámetro sea el del sol a escala, y pégala con celo. Corta el resto de los 30 cm. Cuelga en la esfera una etiqueta que diga sol.
3. A partir de ese sol, marca con el metro la posición de cada planeta en la cuerda. Pega una etiqueta de unos 10 cm con el nombre del planeta. Si ese planeta tiene lunas, dibuja en la etiqueta, a escala, la distancia de la luna más exterior.
4. Intenta hacer con plastilina pequeñas esferas que representen a los planetas a esa escala. Pégalas a la etiqueta del planeta correspondiente. Con ello completarás el modelo del sistema solar a escala.
5. El modelo que has construido te sirve para apreciar las distancias y tamaños de las órbitas del sistema solar. Los planetas en nuestro modelo se encuentran alineados pero en la realidad cada uno sigue una orbita independiente y los alineamientos entre algunos de ellos son casuales y temporales.

Eguzki eta planeten tamaina erlatiboak hurrengo irudian adierazi dira:



Kontutan izan beharreko ideia inportante bat da planeten tamainak oso-oso txikiak direla euren arteko distantziekin konparatzen baldin baditugu. Esate baterako, Lurratik Eguzkiraino dagoen distantzia Lurrak berak duen diametroa baino 10.000 aldiz handiago da.

Modeloa eraikitzeko 60 m-ko soka bat, neurketa-zinta, zeloa, plastilina (kolore desberdinetakoa) eta zotzak beharko dituzue.

Proiektuaren lanketan argazkiak eta bideoak grabatuko dituzue, diseinatzen eta eraikitzen ari zareten bitartean, eta bukaerako memorian gehitu, egindako kalkuluekin eta gauzatutako prozesuaren deskripziorekin batera. Zuen irakasleari aurkezteaz gain, kopia bat bidal dezakezue mateguay@gmail.com helbidera eta zuen lana eta ateratako argazki eta bideoak unitatearen web gunean http://www2.elkarrekin.org/web/powersoften agertuko dira eguzki-sistema eraikitzeko asmoa duten ikaskideei laguntza eskainiz.

Modeloaren eraikuntzak hurrengo faseak izan ditzake:

1. Aurreko taulan jaso dituzuen datuentzako eskala-faktore bat aukeratu behar duzue, izan ere, 60 m sokarekin eguzkia eta Neptunoren arteko distantzia adierazi beharko duzue. Adi! Erabaki hau garrantzizkoa da eta behin hartu ondoren zuen irakaslearen onarpena jasotzea komeni zaizue.
2. Moztu ezazue eskala-faktore aplikatzerakoan Eguzki eta Neptunoren arteko distantzia gehi 30 cm-ko luzera. 30 cm horiekin Eguzkiak izan beharko lukeen diametroko borobila egizue eta moztu 30 cm arte sobratzen zaizuena. Borobil horretan Eguzkia dioen etiketa bat zintzilika ezazu.
3. Eguzkitik hasita eta neurketa-zintaz baliaturik zehaztu ezazue planeta bakoitzaren kokapena sokaren luzeran zehar. Planetei dagozkien lekuetan euren izena jasoko duen 10 cm-ko etiketa itsatsi ezazue. Osatuagoa nahi baduzue zuen modeloa, planetak sateliteк baldin baditu etiketan eskalan adieraz ditzakezue, irudi batean.
4. Planetak, eskala aplikatuz dagozkien tamainako plastilinazko esfera batekin adieraz itzazue. Itsatsi esferok planetari dagokion etiketari, eta horrekin Eguzki-sistemaren modeloa bukatutzat jo dezakezue.
5. Sortu duzuen modeloak astroen tamainak eta euren orbitenak irudikatzeko balio dizue. Gure modeloan planetak lerrokatuta daude, baina errealitatean bakoitzak bere orbita jarraitzen du eta lerrokatzeak gutxitan eta laburrak dira.

No olvidéis recoger datos, dibujos, imágenes y videos del proceso de construcción del modelo a escala. Si recogéis toda esa información en un trabajo final bien organizado podréis utilizarlo para escribir un artículo en la revista de vuestro centro, contar el proceso seguido en vuestros hogares o hacer una presentación a los compañeros de un grupo de los cursos inferiores.

Evaluación

Criterios e indicadores	Instrumentos
Compara y ordena números expresados en forma de potencias	ECPI / ECPG / EA1 / EA4
Comprende e interpreta mensajes de tipo numérico	TF / EA1 / EA2 / EA3
Encuentra, de forma autónoma, información en Internet y la analiza con espíritu crítico	TF / EA2
Integra los conocimientos numéricos y los utiliza para resolver problemas y ejercicios	TF / PTF / EA1 / EA3
Muestra habilidades para el trabajo en grupo aportando e integrando las aportaciones del resto de los integrantes del grupo	TF / PTF / EA2
Aplica las propiedades y reglas de las operaciones	ECPI / ECPG / EA1
Realiza estimaciones de las operaciones a realizar y juzga si los resultados obtenidos son razonables	ECPI / ECPG / TF / EA3 / EA4 / A6
Conoce y maneja el Sistema Métrico Decimal	ECPI / ECPG / PTF / A8
Identifica, en diferentes contextos, relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica	A6 / A7
Identifica figuras semejantes y calcula la razón de semejanza entre ellos	A6 / A7
Realiza estimaciones ajustadas de las medidas a realizar	TF / EA1 / EA3 / A8
Aplica las formulas pertinentes para calcular perímetros, área y volúmenes de las figuras más elementales	TF / EA4
Utiliza un vocabulario geométrico para describir informaciones relativas al espacio físico y resolver problemas	TF / PTF / EA2 / A7
Representa, reproduce y construye figuras planas y espaciales	TF / A6 / A8
Lee y representa tablas de doble entrada	TF / A6 / A7
Encuentra información de forma autónoma y valiéndose de diferentes recursos	TF / EA2
Es capaz de sintetizar la información y de presentarla de forma amena	TF / PTF / EA2

ECPI - Evaluación de conocimientos previos individual
ECPG - Evaluación de conocimientos previos de grupo
EA1 - Evaluación actividad 1
A6 - Actividad 6
TF - Trabajo final
PTF - Presentación al Grupo del Trabajo Final

Ez ezazue ahaztu zuen lanaren datuak gordetzea: marrazkiak, irudiak, argazkiak, bideoak… Horrela eginez gero, zuen ikastetxeko aldizkarirako artikulu bat idatzi, zuen etxeetan egindako lanaren berri eman edota beste gelako kideei aurkezpen bat egin ahal izango duzue.

Ebaluazioa

Irizpide eta indikadoreak	Tresnak
Berreketa eran adierazitako zenbakiak konparatu eta ordenatzen ditu	AEEB / AEET / J1E / J4E
Zenbaki-mezuak ulertu eta interpretatzen ditu	TF / J1E / J2E / J3E
Interneten informazioa era autonomoan bilatzeko eta kritikoki analizatzeko gai da	BL / J2E
Zenbaki-ezaguerak egunerokotasunean integratzen ditu eta problema eta ariketak ebazteko erabiltzen ditu	BL / PTF / J1E / J3E
Talde-lanerako trebeziak erakusten ditu ekarpenak eginez eta kideenak aintzat hartuz	BL / BLAT / J2E
Eragiketen propietateak ezagutu eta aplikatzen ditu	AEEB / AEET / J1E
Egin behar dituen eragiketen estimazioak egiten ditu eta lortutako emaitzak arrazoizkoak ote diren jakiteko gai da	AEEB / AEET / BL / J3E / J4E / J6
Sistema metriko hamartarra ezagutu eta erabiltzen du	AEEB / AEET / BLAT / A8
Proportzionaltasun erlazioak ezagutzen ditu, zenbaki zein geometrikoak, testuinguru desberdinetan	J6 / A7
Antzeko irudiak identifikatzen ditu eta euren arteko antzekotasun arrazoia kalkula dezake	J6 / A7
Egin beharreko neurketen estimazio egokiak egiteko gai da	BL / J1E / J3E / J8
Oinarrizko figuren perimetro, azalera eta bolumenen kalkuluak egiten ditu	BL / J4E
Inguru fisikoa deskribatzeko eta problemak ebazteko geometria hiztegia erabiltzen du	BL / BLAT / J2E / J7
Planoko eta espazioko figurak adierazi, errepikatu eta eraikitzeko gai da	BL / J6 / J8
Sarrera bikoitzeko taulak irakurri eta adierazten ditu	BL / J6 / J7
Informazioa era autonomoan eta baliabide anitzak erabiliz bilatzen du	BL / J2E
Informazioaren muina atera eta era erakargarrian aurkezteko gai da	BL / BLAT / J2E

AEEB - Aurretiko ezagueren ebaluazio banakakoa
AEET - Aurretiko ezagueren ebaluazio taldekoa
J1E - Jarduera 1en ebaluazioa
J6 - Jarduera 6
BL - Bukaerako lana
BLAT - Bukaerako lanaren aurkezpen ataldeari

ACTIVIDAD 0: Preevaluación:

Evaluación de conocimientos previos (individual y en grupo)

Nuestro objetivo en esta unidad es poder cuantificar todo el universo desde sus aspectos macro a los micro, es decir, poder expresar en números las grandes distancias de las galaxias y las ínfimas de los átomos.

1. ***Sabrías estimar los valores de las siguientes distancias:***

Lista de distancias	Distancia en Km
Distancia París-Madrid	
Diámetro de la tierra	
Distancia de la tierra al Sol	
Distancia del sol a Plutón	
Diámetro de nuestra galaxia	
Distancia de nuestra galaxia a la de Andrómeda	
Radio del universo conocido	
Lista de distancias	Distancia en mm
Anchura de un dedo	
Grosor de una uña	
Diámetro de un poro de la piel	
Diámetro de un glóbulo rojo	
Anchura de un cromosoma	
Diámetro del átomo de carbono	
Radio de un electrón	

2. ***Sabrías expresar de otra forma más sencilla o resumida las siguientes operaciones y calcular el resultado:***

a) $3+3+3+3+3+3+3=$

b) $(-5) + (-5) + (-5) + (-5) =$

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

d) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$

e) $3^2 =$

f) $10^3 =$

g) $2^2 \cdot 2^3 =$

h) $10^4 / 5^4$

3. ***Sabrías poner en forma de potencias:***

a) 10.000 b) 3.000.000 c) 0,0001 d) 0,0000005

4. ***Sabes escribir en forma decimal las cantidades que expresan las siguientes potencias:***

a) $5^3 =$ b) $10^{12} =$ c) $10^{+5} =$ d) $10^0 =$

0 JARDUERA: Aurrebaluazioa

Aurretiko ezagueren ebaluazioa (banakakoa eta taldekoa)

Gure helburua unitate honetan Unibertsoa zenbakien bitartez zuzentasunez adieraztea hala makro zein mikro alderdietan, hau da, galaxietako zenbaki handiak eta atomoetako txikiak adierazteko tresnak erabiltzen jakitea.

1. ***Hurrengo distantziak estimatzen jakingo al zenuke?***

Distantzien zerrenda	Distantzia km-etan
Paris-Madril distantzia	
Lurraren diametroa	
Lurretik Eguzkirainoko distantzia	
Eguzkik Plutonerainoko distantzia	
Gure galaxiaren diametroa	
Gure galaxiatik Andromeda izenekorainoko distantzia	
Ezagututako Unibertsoaren erradioa	
Distantzien zerrenda	Distantzia mm-etan
Atzamar baten zabalera	
Azkazal baten lodiera	
Larruazaleko poro baten diametroa	
Globulu gorri baten diametroa	
Kromosoma baten zabalera	
Karbonoa tomo baten diametroa	
Elektroi baten erradioa	

2. ***Jakingo al zenuke hurrengo eragiketak laburtzen eta emaitza kalkulatzen?***

a) 3+3+3+3+3+3+3= b) (-5)+ (-5)+ (-5)+ (-5)=
c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ d) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) =$
e) $3^2 =$ f) $10^3 =$
g) $2^2 \cdot 2^3 =$ h) $10^4 / 5^4$

3. ***Honako zenbaki hauek berreketa moduan jartzen jakingo al zenuke?***

a) 10.000 b) 3.000.000 c) 0,0001 d) 0,0000005

4. ***Hurrengo berreketek adierazitakoa era hamartarrean adierazten gai izango al zinateke?***

a) $5^3 =$ b) $10^{12} =$ c) $10^{+5} =$ d) $10^0 =$

Cuando hayas terminado este cuestionario comparte y comenta tus respuestas con el resto de los componentes de tu grupo y acordar una respuesta en los casos que la conozcáis y señalar, también, aquéllas que no sepáis responder.

Contrato de trabajo
Construcción de un modelo de Sistema Solar en el patio del Centro

Los componentes del grupo ______________ del Centro ________________________ formado por:

____

____

____

____

____

Acordamos la siguiente distribución de tareas:

- Coordinador: ______________________________________ acordará el reparto de tareas con el resto de los componentes del grupo velando porque éstas se asignen en razón de los gustos y en proporción a las capacidades de los diferentes componentes.
- Portavoz: ____ será la voz del grupo en las puestas en común y en las presentaciones de los resultados.
- Secretario: _______________________________________ recogerá y ordenará la documentación (textos, ejercicios, dibujos, imágenes, vídeos…) tanto de las distintas actividades como muy especialmente del trabajo final de creación, a escala, de un sistema solar en el patio del centro.
- Responsable del material: _____________________________ será el encargado de que todo el material de la actividad final esté disponible y se responsabilizara de su custodia.
- Recopilador de información de Internet: ______________________________ se encargará de la búsqueda, organización y mantenimiento de los recursos de la red relacionados con este tema.

Nos comprometemos a cumplir con nuestras funciones y colaborar de forma constructiva con nuestras/os compañeras/os:

Firmado: en ______________________________ a _______ de ________________ de 20 ___

Secretaria/o

La/El Portavoz

Coordinador/a

Profesor/a

Responsable de material

Recopilador de información De Internet:

Orri honetako galdetegia bukatzerakoan zure taldekideekin komenta itzazu eta adostu erantzun bat, ezagutzen duzuen kasuan eta aipatu zeintzuk ez dakizkizuen.

Lan kontratua
Eguzki sistemaren modelo baten eraikuntza ikastetxearen patioan

______________ taldeko, _________________________ ikastetxearen hurrengo partaideok:

____

____

____

____

____

Hurrengo atazen banaketa adostu dugu:

- Koordinatzailea: ______________________________________ , gainontzeko partaideekin eginbeharren banaketa adostuko du bakoitzaren zaletasun eta gaitasunen araberako izan dadin saiatuz.
- Bozeramailea: ____ , debateetan eta gaiaren aurkezpenean taldekideen ahotsa izango da.
- Idazkaria: _____________________________________ , erabiltzen dituzten dokumentuak bildu eta jasoko ditu (testuak, ariketak, irudiak, bideoak…), bai jarduera desberdinetan bai, eta batez ere, bukaerako lanerako.
- Material arduraduna: ________________________ , bukaerako modeloa eraikitzeko behar den materiala biltzen eta gordetzen arduratuko da.
- Interneteko informazio biltzailea: _________________________ , jarduerak eta bukaerako lana aurrera eramateko behar den informazioa jasotzen, biltzen eta gordetzen saiatuko da.

Gure betebeharretan saiatzeko hitza ematen dugu eta gure taldekideekin modu eraikigarrian eta elkarlanean lan egiteko asmoa azaldu:

____________________________ n _______ ko ______________ a()ren ___(e)an izenpetua

Idazkaria Bozeramalea Koordinatzailea

Irakaslea Material arduraduna Interneteko informazio bilatzailea

7ª Olimpiada Matemática de Euskadi para alumnado de 2º de ESO

OLIMPIADA EDUARDO CHILLIDA

Alberto Bagazgoitia (*)

Durante el curso 2008-09 se celebró en Euskadi la 7ª Olimpiada Matemática para alumnos de 2º de ESO, Olimpiada Eduardo Chillida, convocada por el Departamento de Educación Universidades e Investigación del Gobierno Vasco.

Haciendo un somero balance hay que empezar diciendo que la participación ha sido de 87 Centros, lo que supone una muy buena respuesta por parte del profesorado, a quien desde estas líneas queremos reconocerle y agradecerle su dedicación y esfuerzo, pues sin ellos esta actividad no podría llevarse adelante.

De manera que, en este sentido, el balance es completamente positivo. Y, aunque ya lo comentamos en la edición anterior, no está de más recordar que, una vez implantado el nuevo currículo para la Educación Secundaria Obligatoria, cobra fuerza la idea de competencia matemática, con lo que conlleva de aplicación de los conocimientos y destrezas a distintos contextos, la importancia de la resolución de problemas o el desarrollo de las capacidades de razonamiento.

Y en esta línea de trabajo la Olimpiada Matemática cobra, si cabe, mayor actualidad, pues éstos son los grandes ejes que guían la propuesta de actividades que se plantean desde esta Olimpiada. Es tarea de todos el incorporar a las actividades ordinarias del aula la resolución de problemas, como contenido y como metodología, que permita desarrollar, de forma equilibrada, el conjunto de capacidades necesarias para lograr una buena educación matemática.

Los objetivos, convocatoria y desarrollo de la 7ª Olimpiada pueden encontrarse en la página web www.saretik.net/mateolinpiada. Simplemente recordaremos aquí que se estructura en dos fases:

La primera, que se realiza en cada uno de los centros participantes, (se celebró el 13 de marzo) y en la que cada centro selecciona dos o tres alumnos, dependiendo del número de grupos de 2º de ESO. Éstos son los que pasarían a la segunda fase.

(*) Asesor de Matemáticas del Berritzegune de Vitoria.

Euskadiko 7. Olinpiada Matematikoa DBHko 2.mailako ikasleentzat

EDUARDO CHILLIDA OLINPIADA

Alberto Bagazgoitia (*)

Aurreko ikasturtean, 2008-09 alegia, DBHko 2.mailako ikasleentzat 7. Olinpiada Matematikoa, Eduardo Chillida Olinpiada, Eusko Jaurlaritzako Hezkuntza Sailak deituta, burutu zen Euskadin.

Balorazio azkarra eginda, esan behar den lehenengo gauza da 87 ikastetxek hartu dutela parte. Beraz, irakasleen erantzuna oso ona izan da eta hemendik eskertu nahi diegu beraien esfortzu eta laguntzagatik, ezinbestekoa baita Olinpiada aurrera eraman ahal izateko.

Hortaz, zentzu horretan, balantzea positiboa izan da. Eta, aurreko edizioan jada komentatu arren, gogoratu nahi dugu berriro Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzarako curriculum berria behin indarrean sartuta, konpetentzia edo gaitasun kontzeptuak indarra hartu du eta horrek, besteak beste, ezagutza eta prozedurak testuinguru ezberdinetara aplikatzera, problemen ebazpenaren garrantzia kontuan hartzera eta arrazoinamendu-gaitasunen garapena indartzera garamatza.

Eta lan-ildo honetan Olinpiada Matematikoak gaurkotasun gehiago hartzen du, izan ere horiek dira Olinpiada honetatik bultzatzen diren jardueren lerro nagusiak. Denon ardura da ikasgelako ohiko jardueretara problemen ebazpena eramatea, bai eduki moduan bai metodologia moduan. Horrela hezkuntza matematikoa on bat lortzeko beharrezkoak diren gaitasun guztiak garatuko ditugu era orekatuan.

7. Olinpiadaren helburuak, deialdia eta garapenari buruzko informazio zehatza www.saretik.net/mateolinpiada web orrialdean aurkituko duzue.

Bakarrik hemen gogoratuko dugu bi alditan egin zela:

Lehenengoa martxoaren 13an burutu zen, ikastetxe partehartzaile bakoitzean. Ikastetxe bakoitzak bigarren aldira pasatuko ziren bi edo hiru ikasle hautatu behar zituen, DBHko 2.mailako talde-kopuruaren arabera.

(*) Asesor de Matemáticas del Berritzegune de Vitoria.

Para esta primera fase se inscribieron 87 centros de la Comunidad, repartidos de la siguiente forma:

CENTROS	PÚBL.	PRIV.	TOTAL
ÁLAVA	8	10	18
GIPUZKOA	13	11	24
BIZKAIA	19	26	45
TOTAL	40	47	87

La segunda fase se realizó el sábado 9 de mayo de 10h. a 12h., en cada una de las tres capitales de la CAV:

- En Bilbao: en el IES Miguel de Unamuno.
- En Donostia: en el IES Usandizaga-Peñaflorida.
- En Vitoria-Gasteiz: en el IES Samaniego.

Tenemos que agradecer especialmente la colaboración de los profesores de estos centros, que ayudaron a organizar esta segunda fase en la que en total tomaron parte 188 alumnos.

La entrega de premios tuvo lugar en Lakua, en el edificio del Gobierno Vasco en Vitoria, y a ella estuvieron invitados además de los 12 alumnos clasificados en los primeros lugares, sus padres y profesores. El acto fue presidido por la Sra. Consejera de Educación, Universidades e Investigación Dª Isabel Celaá, acompañada en la mesa por D. Luis Chillida quien, en una breve intervención, recordó la relación de su padre con las matemáticas y por el Director de Centros D. Marcelino Hernández.

Tras la entrega de premios intervino D. Pedro Alegría, profesor titular del Departamento de Matemáticas de la UPV, con la charla titulada "Geometría y Paradojas", donde puso de manifiesto diferentes situaciones, difíciles de explicar a primera vista, y en las que la presencia de las matemáticas resulta imprescindible para poder comprenderlas.

Terminamos agradeciendo a todo el profesorado su participación y esperamos contar de nuevo con todos vosotros y también con aquellos que todavía no se han animado en la 8ª Olimpiada Matemática de Euskadi "Olimpiada Eduardo Chillida", de cuya convocatoria tendréis puntual información a lo largo de este curso 2009-10.

Lehenengo aldi honetarako Erkidegoko 87 ikastetxek eman zuten izena. Hona hemen lurralde bakoitzeko zenbakiak:

IKASTETX.	PUBL.	PRIB.	GUZT.
ARABA	8	10	18
GIPUZKOA	13	11	24
BIZKAIA	19	26	45
GUZTIRA	40	47	87

2. aldia EAEko hiru hiriburuetan burutu zen, maiatzaren 9an 10etatik 12etara:

- Bilbon: Miguel de Unamuno BHI.
- Donostian: Usandizaga-Peñaflorida BHI.
- Vitoria-Gasteizen: Samaniego BHI.

2. aldi honetan 188 ikasle hartu zuten parte eta eskerrak eman nahi dizkiegu bereziki antolatzen lagundu zuten ikastetxe hauetako irakasleei.

Sari-banaketa Eusko Jaurlaritzaren Lakuako egoitzan burutu zen, eta 12 ikasle sarituez gain guraso eta irakasleak ere bertan izan ziren. Hezkuntza Unibertsitate eta Ikerkuntza Sailburua den Isabel Celaá andrea ekitaldiaren buru izan zen eta berarekin batera Luis Chillida jauna –nork bere aitak matematikarekiko zituen harremanak gogoratu zituen– eta Ikastetxeen Zuzendaria Marcelino Hernández bertan egon ziren.

Sari-banaketaren ondoren Pedro Alegríak, EHUko Matematika Departamenduko irakasle titularrak, "Geometría y paradojas" hitzaldia eman zuen. Agerian utzi zigun matematikaren presentzia ezinbestekoa dela ulertu ahal izateko lehenengo momentuan ulertezinak diren hainbat egoera ezberdin.

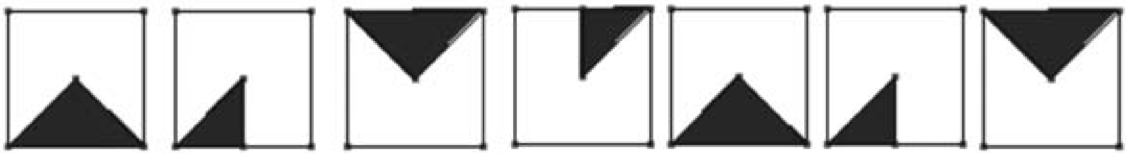
Bukatzeko, eskerrik asko berriro guztiei zuen parte hartzeagatik eta Euskadiko 8.Olinpiada Matematikoan elkar ikusiko dugulakoan, jakinarazi nahi dizuegu ikasturte honetan zehar, deiaren informazio zehatza jasoko duzuela eta dagoeneko gonbidatuta zaudete parte hartzera.

Anexos

Anexo 1: Problemas de la 1ª Fase

1. El pasillo

En un pasillo hemos encontrado una fila de baldosas con una zona coloreada, que sigue la siguiente pauta:



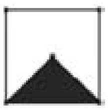
Si cada baldosa tiene 10 cm de lado y en total hay 237 baldosas:

a) ¿Cómo será la última baldosa?

b) ¿Cuánto mide la superficie total coloreada?

c) ¿Cuál sería el número máximo de baldosas que podemos pintar si disponemos de pintura para pintar 1 m^2?

Solución:

a) 237 = 4 x 59 + 1. La ultima baldosa será 

b) Cada bloque de cuatro baldosas: 100 x 3/4 = 75 cm^2
75 x 59 + 25 = 4450 cm^2

c) 10.000 = 133 x 75 + 25
Nº total baldosas: 133 x 4 + 1 = 533 baldosas.

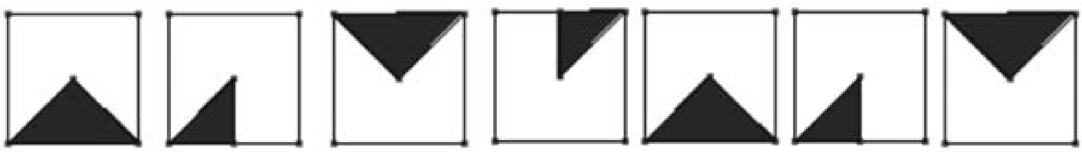
Eranskinak

1. 1.aldiko problemak.
2. Azken aldiko problemak.
3. Irabazleen zerrenda.
4. Sari-zerrenda.
5. Parte hartu duten ikastetxeen zerrenda.
6. Sari-banaketa: argazkiak.
7. Olinpiada nazionaleko banakako froga.

1. Eranskina: 1.Aldiko problemak

1. Korridorea

Korridore batean baldosa-ilara bat ikusi dugu. Baldosa bakoitzak ondorengo ereduari jarraitzen dion kolorezko zati bat dauka:



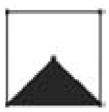
Baldosa bakoitzaren aldea 10 cmkoa baldin bada eta guztira 237 baldosa baldin badaude:

a) Nolakoa izango da azken baldosa?

b) Zenbat neurtuko du guztira azal koloredunak?

c) Gehien jota, zenbat baldosa margo genitzake 1 m^2 margotu ahal izateko baino ez bagenu pinturarik?

Soluzioa:

a) 237 = 4 x 59 + 1. Azken baldosa izango da 

b) Lau baldosako multzo bakoitza: 100 x 3/4 = 75 cm^2

75 x 59 + 25 = 4450 cm^2

c) 10.000 = 133 x 75 + 25

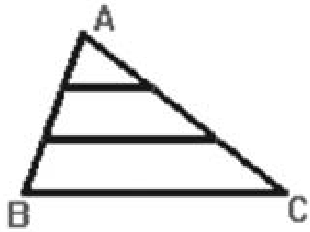
Baldosa kopuru osoa: 133 x 4 + 1 = 533 baldosa.

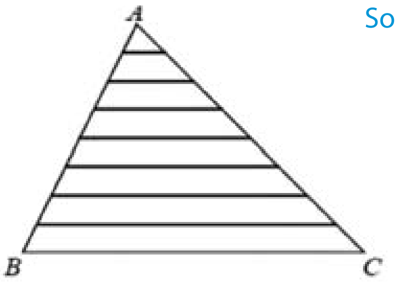
2. Dividiendo el triángulo

En el triángulo ABC, cuyo lado BC mide 20 cm, dibujamos:

a) Dos segmentos paralelos al lado BC, que dividen en tres partes iguales al lado AB. ¿Cuál es la suma de las longitudes de esos dos segmentos?

b) Siete segmentos paralelos al lado BC, que dividen en ocho partes iguales al lado AB. ¿Cuál es la suma de las longitudes de los siete segmentos?



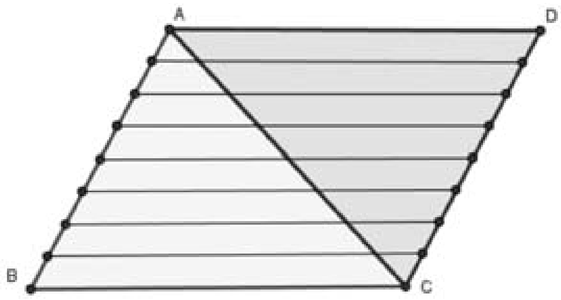


Solución:

a) 20 cm

b) 70 cm

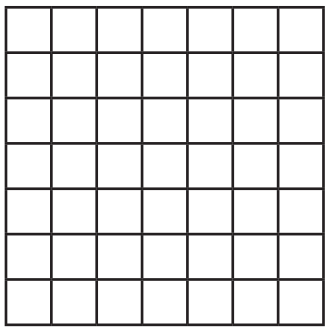
Hay varias maneras de resolverlo, una de las más elegantes es la siguiente; construimos el mismo triángulo pegado al lado del original, como muestra la figura:



Como puede verse en el paralelogramo que se forma todos los segmentos que se generan son paralelos entre sí y además de la misma longitud (20 centímetros), por tanto la suma de los siete segmentos es igual a (7 x 20)/ 2= 70 centímetros.

3. Cortando el tablero

Tenemos un tablero cuadrado formado por 7 x 7 cuadraditos. Divide el tablero mediante cinco cortes rectos (cortando por líneas de la cuadrícula) en seis trozos de manera que, reagrupándolos y utilizándolos todos, formes otros tres cuadrados. (Los trozos no se pueden superponer, ni los cuadrados pueden tener huecos).

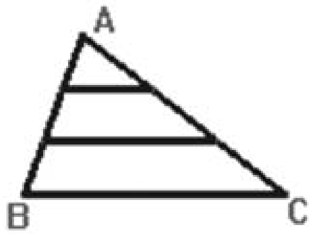


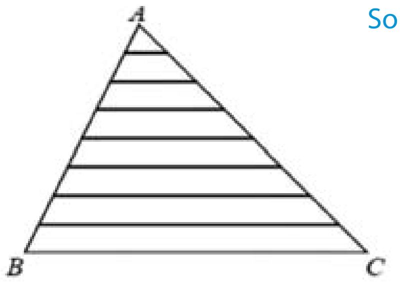
2. Triangelua zatitzen

ABC triangeluaren BC aldea 20 cmkoa da. Triangelu honetan, ondoko irudietan ikus daitekenez:

a) AB aldea 3 zati berdinetan zatitzen duten BC aldearekiko bi segmentu paralelo marraztu ditugu. Zein da bi segmentu horien luzeren batura?

b) AB aldea 8 zati berdinetan zatitzen duten BC aldearekiko 7 segmentu paralelo marraztu ditugu. Zein da 7 segmentu horien luzeren batura?



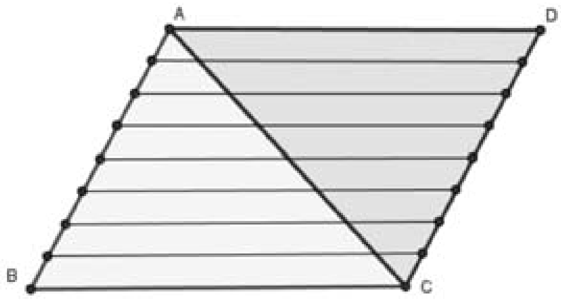


Soluzioa:

a) 20 cm

b) 70 cm

Badaude era ezberdin batzuk ebatzeko. Politenetako bat ondorengoa da: Irudian ikus daitekenez, beste triangelu berdin bat, buelta emanda, marraztu dugu originalaren ondoan:



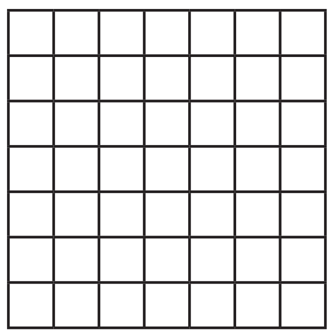
Osatutako paralelogramoan segmentu guztiak luzera berekoak dira (20 cmkoak hain zuzen), beraz zazpi segmentuen batura: (7 x 20)/ 2= 70 cm.

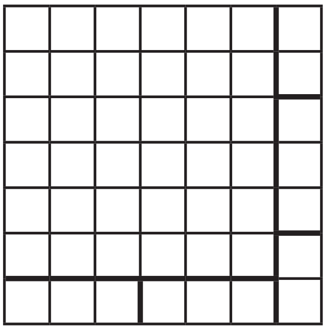
3. Taula mozten

7 x 7 laukitxoko taula karratu bat dugu. Zati ezazu 6 zatitan ondoko bi baldintza hauek betetzen direlarik:

i) 5 ebaki zuzen, koadrikularen lerroei jarraituz egin behar dituzu.

ii) Sei zatien bidez (denak erabiliz, bata bestearen gainetik gainezarri barik ez eta hutsuneak sortu barik) beste hiru karratu egin daitezke.





Solución:

La única descomposición de 49 en tres cuadrados perfectos es 49 = 36 + 9 + 4

Aquí se muestra una posible solución.

4. En el cine

Ana, Beatriz, Carmen y Diana van al cine y se sientan en cuatro asientos consecutivos. Ana quiere sentarse al lado de Beatriz y Carmen no quiere sentarse junto a Diana.

a) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse?

b) Si se incorpora Elena, una nueva amiga, que quiere sentarse junto a Diana, ¿de cuántas formas podrán sentarse?

Solución:

a) Cuatro formas: A y B tendrán que sentarse en los asientos centrales: DABC „ DBAC „ CABD „ CBAD

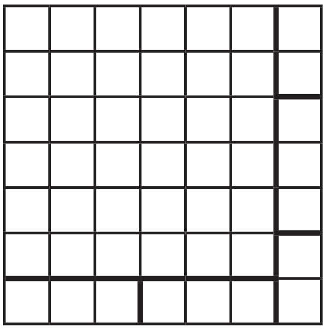
b) Dieciséis formas:

A y B en los dos primeros asientos: ABDEC „ ABCED „ BADEC „ BACED.

A y B en el 2º y 3º: CABDE „ CABED „ CBADE „ CBAED.

A y B en 3º y 4º: Otros cuatro casos como en el apartado anterior.

A y B en 4º y 5º: Otros cuatro casos como en el primer apartado.



Soluzioa:

49ren deskonposaketa bakarra hiru karratu perfektutan da $49 = 36 + 9 + 4$

Hemen duzu ahalko soluzio bat.

4. Zineman

Ana, Beatriz, Carmen eta Diana zinemara joan dira eta lau ondoz ondoko aulkitan eseri dira. Anak Beatrizen ondoan eseri nahi du eta Carmenek ez du Dianaren ondoan eseri nahi.

a) Zenbat era ezberdinetan eseri daitezke?

b) Bosgarren lagun bat, Elena, baletor, eta honek Dianaren ondoan eseri nahi izango balu, zenbat era ezberdinetan eser litezke bost lagunak?

Soluzioa:

a) 4 era: A eta B erdiko aulkietan eseri beharko dira:
DABC ,, DBAC ,, CABD ,, CBAD

b) 16 era:

A eta B lehenengo 2etan: ABDEC ,, ABCED ,, BADEC ,, BACED.

A eta B 2.ean eta 3.ean: CABDE ,, CABED ,, CBADE ,, CBAED.

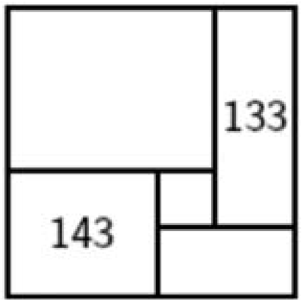
A eta B 3.ean eta 4.ean: Beste 4 kasu aurreko atal moduan.

A eta B 4.ean eta 5.ean: Beste 4 kasu aurreko atal moduan.

Anexo 2: Problemas de la fase final

1. Rellenando el hueco

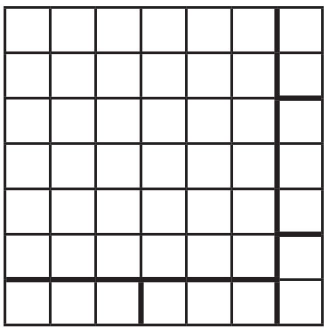
Un cuadrado se cubre mediante cuatro rectángulos y un cuadrado cuyos lados son enteros mayores que uno, como lo muestra la figura. Las áreas de dos de los rectángulos están escritas sobre ellos.



¿Cuál es el área del cuadrado pequeño?

Solución:

Las únicas formas de escribir 143 y 133 como producto de enteros mayores que uno son $143 = 11 \times 13$ y $133 = 7 \times 19$, de modo que conocemos los lados de estos dos rectángulos.



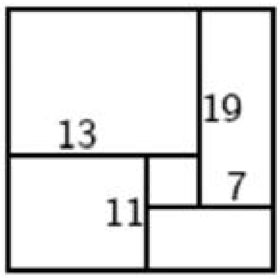
Solución:

La única descomposición de 49 en tres cuadrados perfectos es $49 = 36 + 9 + 4$

Aquí se muestra una posible solución.

Si llamamos x al lado del cuadrado pequeño, de la figura deducimos:

$13 + x + 7 = 19 + 11 - x \rightarrow x = 5$ y por tanto la superficie 25



2. En clase de matemáticas

El profesor de matemáticas realizó tres pruebas para calificar a sus alumnos. Todos los alumnos debían realizar por lo menos dos de ellas y hubo 12 alumnos que realizaron las tres. El 70% realizó la primera prueba, el 80% la segunda y el 90% la tercera.

a) ¿Cuántos alumnos había en la clase?. Explica el razonamiento.

b) Si elegimos un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado solamente las dos primeras pruebas?

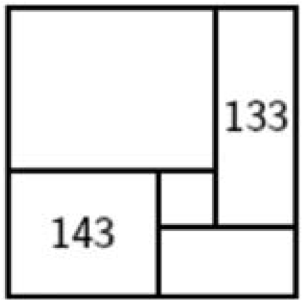
Solución:

a) $2n + 12 = 0'7n + 0'8n + 0'9n \implies n = 30$

b) (nº alumnos que hacen la 1ª): A=21
(nº alumnos que hacen la 2ª): B = 24

2. Eranskina: azken aldiko problemak

1. Hutsunea betetzen

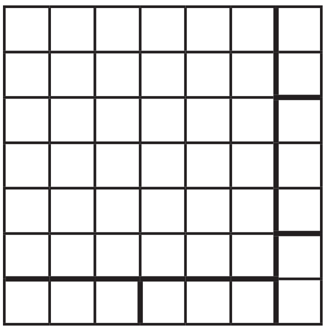


Karratu bat lau laukizuzen eta beste karratu batez estali egin da. Irudian ikus dezakezunez lau laukizuzenetatik bien azalerak ezagunak dira.

Zein da karratu txikiaren azalera laukizuzen guztien alde guztien neurriak 1 baino handiagoak diren balio arruntak direla kontuan hartuta?

Soluzioa:

143 eta 133 deskonposa daitezke era bakar batean (1 baino faktore handiagotan). 143 = 11 x 13 eta 133 = 7 x 19.

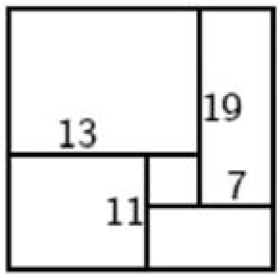


Soluzioa:

49ren deskonposaketa bakarra hiru karratu perfektutan da

49 = 36 + 9 + 4

Hemen duzu ahalko soluzio bat.



Beraz, laukizuzenen aldeak ezagunak dira:

Karratu txikiaren aldeari x deitzen badiogu, erraz ikusten da:

13 + x + 7 = 19 + 11-x → x = 5 eta azalera = 25

2. Matematika eskolan

Matematika irakasleak bere ikasleak kalifikatzeko hiru froga egin zituen. Ikasle guztiek gutxienez bi froga egin behar izan zituzten eta 12 ikaslek hirurak egin zituzten. %70k lehenengo froga egin zuen, %80k bigarrena eta %90k hirugarrena.

a) Zenbat ikasle zeuden ikasgelan? Azaldu arrazoinamendua.

b) Ikasle bat zoriz aukeratuko bagenu, zein izango litzateke ikasle horrek bakarrik lehenengo bi frogak egingo zituenaren probabilitatea?

Soluzioa:

a) 2n + 12 = 0’7n + 0’8n + 0’9n ==> n = 30

b) (1.froga egin duten ikasleen kopurua): A=21
(2.froga egin duten ikasleen kopurua): B = 24

Como AUB = 30 ,, Las dos primeras pruebas las habrán hecho: 21 + 24 - 30 = 15 y como hay 12 alumnos que han hecho las tres : 15 – 12 = 3 alumnos

Probabilidad buscada: 1/10

3. En la granja

Un granjero tiene ante sí seis cestas con huevos. Cada una tiene huevos de una clase, de gallina o de pata. Cada cesta tiene el número de huevos que se indica: 6, 15, 29, 12, 14 y 23.

El granjero dice señalando una cesta: "si vendo esta cesta, me quedará el doble de huevos de gallina que de pata" ¿A qué cesta se refiere?

Solución:

Se refiere a la cesta de 12 huevos.

En total hay 99 huevos. Al quitar una cesta quedarán x huevos de pata y 2x de gallina:
En total 3x.

Por tanto 99 – y = 3x ==> la cesta vendida tiene que tener y = múltiplo de tres huevos.

Posibilidades:

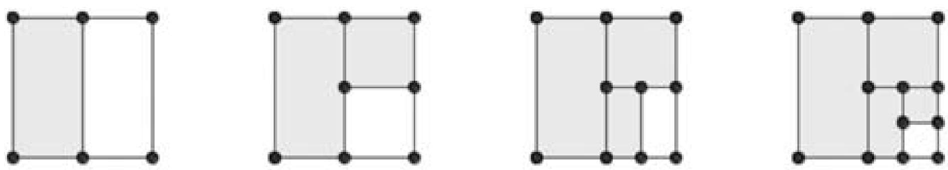
Y = 6; quedarían 93, pero no se pueden obtener 31 y 62 sumando las distintas cestas.

Y = 12: quedarían 87; Si se pueden obtener 29 y 58 (de más de una forma).

Y = 15 No hay solución.

4. ¿Tienes buena vista?

a)

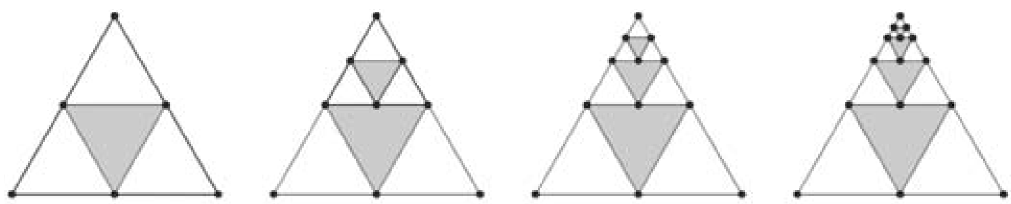


1/2 1/2 + 1/4 1/2 + 1/4 + 1/8 1/2+1/4+1/8+1/16

¿Cuánto vale la suma infinita $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$?

Explícalo y justifícalo mediante las figuras

b)



1/4 1/4 + $(1/4)^2$ 1/4 + $(1/4)^2$ + $(1/4)^3$ 1/4+$(1/4)^2$+$(1/4)^3$+$(1/4)^4$

Bestalde AUB = 30, beraz lehenengo bi frogak 21+24-30 = 15 ikaslek egin dituzte eta hirurak egin dituztenak 12 direnez : 15 – 12 = 3 ikaslek dira lehenengo bi frogak bakarrik egin dituztenak.

Eskatutako probabilitatea: 1/10

3. Basetxean

Baserritar batek sei arrautza-saski ditu. Saski bakoitzean arrautza mota bakar bat dago: oilo arrautzak ala ahate arrautzak. Sei saskien arrautza kopuruak honako hauek dira: 6, 15, 29, 12, 14 eta 23.

Baserritarrak saski zehatz bat seinalatzen duela zera esaten du: "Saski hau salduko banu geratuko litzaidakeen oilo arrautzen kopurua ahate arrautzenaren bikoitza litzateke". Zein izango da aipatutako saskia?

Soluzioa:

Aipatutako saskia 12 arrautza dauzkana da.

Guztira 99 arrautz daude. Saski bat kentzean x ahate arrautza eta 2x oilo arrautza geratuko dira: Guztira 3x.

Beraz 99 – y =3x ==> Saldutako saskiaren arrautza kopurua y = 3-ren multiploren bat izango da.

Aukerak:

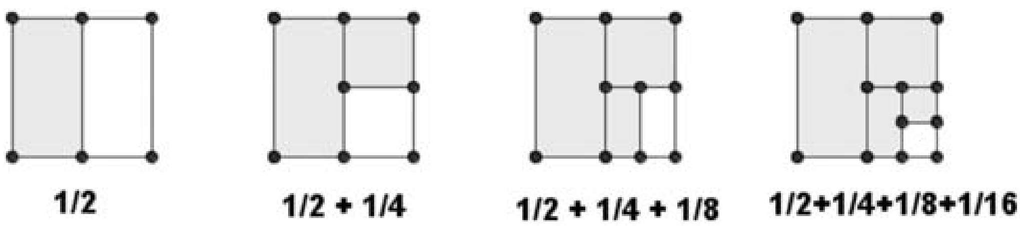
Y = 6 ; 93 geratuko lirateke, baina horrela ezin da lortu 31 eta 62 gainontzeko saskiak batzen

Y = 12: 87 geratuko lirateke; eta horrela BAI lor daitekela 29 eta 58 (era batean baino gehiagotan).

Y = 15 Ez dago soluziorik.

4.- Argi ikusten duzu?

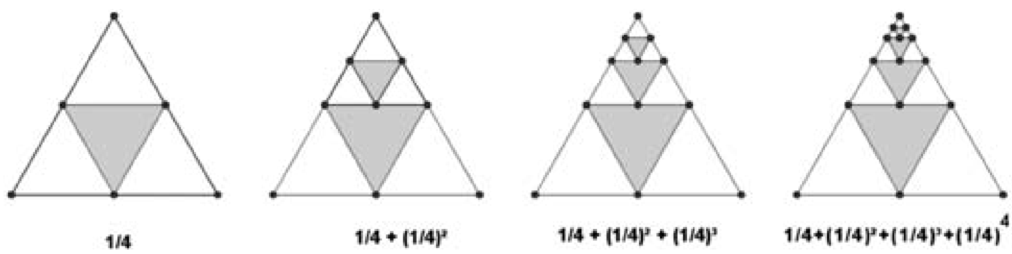
a)



Zenbat balio du $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$ batura infinitoak?

Irudietan oinarrituta, azaldu eta justifikatu.

b)



¿Cuánto vale la suma infinita $S = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots$?

Explícalo y justifícalo mediante las figuras.

Solución:

Lo importante es el razonamiento

a) 1

b) 1/3

Zenbat balio du $S=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\dots$ batura infinitoak?

Irudietan oinarrituta, azaldu eta justifikatu.

Soluzioa:

Inportanteena arrazoinamendua da

a) 1

b) 1/3

Anexo 3: Relación de ganadores

1.	Ibai Genua Gamio	IES Usandizaga-Peñaflorida BHI-Donostia
2.	Leire Benito Ortiz de Urbina	IPI Ikasbidea Ikastola–Vitoria-Gasteiz
3.	Daniel Lerchundi Herce	CPEIPS Vizcaya HLBHIP-Zamudio
4.	Zuriñe Tapia Sánchez	CPEIPS Ander Deuna Ikast-HLBHIP-Sopelana
5.	Joaquín Sopelana Ortiz	CPEIPS P. Andrés Urdaneta HLBHIP-Loiu
6.	Jon Kepa Oria Urbina	IES Loinazpe BHI- Beasain
7.	Nerea Ugartondo Asensio	IES Mendebaldea BHI Vitoria-Gasteiz
8.	Carlos Cancio Sancho	CPEIPS Católico Santa María HLBHIP-Donostia
9.	María Fuertes Arenal	CPEPS Nª Sra. Begoña HLBHIP-Bilbao
10.	Imanol Naharro Villafañe	CPEIPS La Asunción HLBHIP-Donostia
11.	Mónica Artola Boogen	CPEIPS Alemán San Bonifacio HLBHIP-Bilbao
12.	Patricia Peña Torre	CPEIPS Berrio-Otxoa HLBHIP-Bilbao

Anexo 4: Relación de premios

1º y 2º Clasificados:

- Diploma.
- Beca del G.V. para estudiar inglés durante un mes en Inglaterra.
- Libro: *Ernesto el aprendiz de matemago.*
- Invitación a participar en la Olimpiada Española, que se celebró del 24 al 28 de junio en Tenerife.

3º y 4º Clasificados:

- Diploma.
- Beca del G.V. para estudiar inglés durante un mes en Inglaterra.
- Libro: *Ernesto el aprendiz de matemago.*

5º y 6º Clasificados:

- Cámara digital.
- Libro: *Ernesto el aprendiz de matemago.*

7º al 12º Clasificados:

- Calculadora gráfica.
- Libro: *Ernesto el aprendiz de matemago.*
- Libro: *¿Es Dios un matemático?*

3. Eranskina: irabazleen zerrenda

1.	Ibai Genua Gamio	IES Usandizaga-Peñaflorida BHI-Donostia
2.	Leire Benito Ortiz de Urbina	IPI Ikasbidea Ikastola –Vitoria-Gasteiz
3.	Daniel Lerchundi Herce	CPEIPS Vizcaya HLBHIP- Zamudio
4.	Zuriñe Tapia Sánchez	CPEIPS Ander Deuna Ikast- HLBHIP-Sopelana
5.	Joaquín Sopelana Ortiz	CPEIPS P. Andrés Urdaneta HLBHIP-Loiu
6.	Jon Kepa Oria Urbina	IES Loinazpe BHI- Beasain
7.	Nerea Ugartondo Asensio	IES Mendebaldea BHI Vitoria-Gasteiz
8.	Carlos Cancio Sancho	CPEIPS Católico Santa María HLBHIP-Donostia
9.	María Fuertes Arenal	CPEPS NªSra.Begoña HLBHIP- Bilbao
10.	Imanol Naharro Villafañe	CPEIPS La Asunción HLBHIP- Donostia
11.	Mónica Artola Boogen	CPEIPS Alemán San Bonifacio HLBHIP- Bilbao
12.	Patricia Peña Torre	CPEIPS Berrio-Otxoa HLBHIP- Bilbao

4. Eranskina: sari-zerrenda

1. eta 2. sailkatuak:

- Diploma
- E.J.ko hilabeteko beka bana Ingalaterrean ingelesa ikasteko.
- Liburua: *Ernesto el aprendiz de matemago*.
- Tenerifen ekainaren 24 –28 bitartean, egin zen Olinpiada espainarrean parte hartzeko gonbidapena.

3. eta 4. sailkatuak:

- Diploma.
- E.J.ko hilabeteko beka bana Ingalaterrean ingelesa ikasteko.
- Liburua: *Ernesto el aprendiz de matemago*.

5. eta 6. sailkatuak:

- Kamara digitala.
- Liburua: *Ernesto el aprendiz de matemago*.

7.etik 12.era sailkatuak:

- Kalkulagailu grafiko bana.
- Liburua: *Ernesto el aprendiz de matemago*.
- Liburua: *¿Es Dios un matemático?*

5. Eranskina/Anexo 5:
Parte hartu duten ikastetxeen zerrenda/ Relación de centros participantes

Araba/Álava:

CENTRO/IKASTETXEA	LOCALIDAD/HERRIA
IES ANITURRI BHI	AGURAIN/SALVATIERRA
IPI IKAS BIDEA IKASTOLA IPI	ARRAZUA-UBARRUNDIA
IES CAMPEZO BHI	KANPEZU/CAMPEZO
IES SAMANIEGO-LAGUARDIA BHI	LAGUARDIA
CPEIPS LA MILAGROSA HLBHIP	LAUDIO/LLODIO
CPEIPS CALASANCIO HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPEIPS HOGAR SAN JOSE HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPEIPS NIÑO JESUS HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPEIPS NTRA. SRA. DE LAS MERCEDES HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPEIPS PADRE RAIMUNDO OLABIDE HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPEIPS SAGRADO CORAZON HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPEIPS SAGRADO CORAZON HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPEIPS VIRGEN NIÑA HLBHIP	VITORIA-GASTEIZ
CPES JESUS OBRERO BHIP	VITORIA-GASTEIZ
IES EKIALDEA BHI	VITORIA-GASTEIZ
IES KOLDO MITXELENA BHI	VITORIA-GASTEIZ
IES MENDEBALDEA BHI	VITORIA-GASTEIZ
IES MIGUEL DE UNAMUNO BHI	VITORIA-GASTEIZ

Gipuzkoa:

CENTRO/IKASTETXEA	LOCALIDAD/HERRIA
IES ARALAR BHI	ALEGIA
CPEIPS SAN VIATOR HLBHIP	ARRASATE/MONDRAGON
IES ARRASATE BHI	ARRASATE/MONDRAGON
IES UROLA IK. AZKOITIA-AZPEITIA BHI	AZPEITIA
IES LOINAZPE BHI	BEASAIN
CPEIPS MARIAREN LAGUNDIA IKASTOLA HLBHIP	BERGARA
CPEIPS AXULAR LIZEOA HLBHIP	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
CPEIPS CATOLICO STA. MARIA HLBHIP	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN

CPEIPS EKINTZA HLBHIP	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
CPEIPS LA ASUNCION HLBHIP	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
CPEIPS NIÑO JESUS DE PRAGA HLBHIP	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
CPEIPS NTRA. SRA. DE ARANZAZU HLBHIP	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
CPEIPS SAN ALBERTO MAGNO HLBHIP	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
IES ALTZA BHI	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
IES USANDIZAGA-PEÑAFLORIDA-AMARA BHI	DONOSTIA-SAN SEBASTIAN
IES MOGEL ISASI BHI	EIBAR
IES CRISTOBAL GAMON BHI	ERRENTERIA
IES ELIZATXO BHI	HERNANI
IES OLAZABAL BHI	LEGAZPI
IES LEZO BHI	LEZO
CPEIPS TXANTXIKU HLBHIP	OÑATI
CPES HIRUKIDE ESKOLAPIOAK BHIP	TOLOSA
IES J.M. IPARRAGIRRE BHI	URRETXU
IES ZUMAIA BHI	ZUMAIA

Bizkaia:

CENTRO/IKASTETXEA	LOCALIDAD/HERRIA
IES ABADIÑO BHI	ABADIÑO
CPEIPS LAUAXETA IKASTOLA HLBHIP	AMOREBIETA-ETXANO
IES BALMASEDA BHI	BALMASEDA
CPEIPS EL REGATO HLBHIP	BARAKALDO
CPEIPS NTRA. SRA. DE BEGOÑA HLBHIP	BARAKALDO
CPEIPS SAN PAULINO DE NOLA HLBHIP	BARAKALDO
IES MINAS BHI	BARAKALDO
CPEIPS THE AMERICAN SCHOOL OF BILBAO HLBHIP	BERANGO
CPEIPS ALEMAN SAN BONIFACIO HLBHIP	BILBAO
CPEIPS BERRIO-OTXOA HLBHIP	BILBAO
CPEIPS EL SALVADOR HLBHIP	BILBAO
CPEIPS FATIMA HLBHIP	BILBAO
CPEIPS KIRIKIÑO IKASTOLA HLBHIP	BILBAO
CPEIPS LA SALLE BILBAO HLBHIP	BILBAO
CPEIPS PUREZA DE MARIA HLBHIP	BILBAO
CPEPS NTRA. SRA. DE BEGOÑA LBHIP	BILBAO
IES GABRIEL ARESTI BHI	BILBAO

IES KARMELO IKASTOLA-SOLOKOETXE BHI	BILBAO
IES LUIS BRIÑAS-SANTUTXU BHI	BILBAO
IES MIGUEL DE UNAMUNO BHI	BILBAO
IES SAN ADRIAN BHI	BILBAO
IES TXURDINAGA BEHEKOA BHI	BILBAO
IPI DEUSTUKO IKASTOLA IPI	BILBAO
CPEIPS SAN ANTONIO-STA. RITA HLBHIP	DURANGO
CPEIPS SAN JOSE-JESUITAK HLBHIP	DURANGO
CPEIPS SAN FIDEL IKASTOLA HLBHIP	GERNIKA-LUMO
IES AIXERROTA BHI	GETXO
IES ARRATIA BHI	IGORRE
IES CARRANZA BHI	KARRANTZA HARANA/VALLE DE C
CPEPS GAZTELUETA LBHIP	LEIOA
IES ARTAZA-ROMO BHI	LEIOA
IES JOSE MIGUEL BARANDIARAN BHI	LEIOA
CPEIPS AYALDE HLBHIP	LOIU
CPEIPS LAURO IKASTOLA HLBHIP	LOIU
CPEIPS PADRE ANDRES URDANETA HLBHIP	LOIU
CPEIPS ASTI-LEKU IKASTOLA HLBHIP	PORTUGALETE
IES JUAN ANTONIO ZUNZUNEGUI BHI	PORTUGALETE
CPEIPS BIHOTZ GAZTEA IKASTOLA HLBHIP	SANTURTZI
CPEIPS SAN JOSE HLBHIP	SANTURTZI
CPEIPS STA. MARIA-HIJAS DE LA CRUZ HLBHIP	SANTURTZI
IES AXULAR BHI	SANTURTZI
CPEIPS ANDER DEUNA IKASTOLA HLBHIP	SOPELANA
IES SOPELANA BHI	SOPELANA
IES ZALLA BHI	ZALLA
CPEIPS VIZCAYA HLBHIP	ZAMUDIO

6. Eranskina/Anexo 6: Sari-banaketa/Entrega de Premios

Acto de entrega de premios en el que intervinieron la Sra. Consejera de Educación Universidades e Investigación Dª Isabel Celaá, D. Luis Chillida y el Director de Centros D. Marcelino Hernández.

Sari-banaketaren ekitaldi honetan parte hartu zuten: Isabel Celaá andreak, Hezkuntza Unibertsitate eta Ikerkuntza Sailburua, Luis Chillida jaunak eta Marcelino Hernández jaunak, Ikastetxeen Zuzendaria.

Fotos de los ganadores

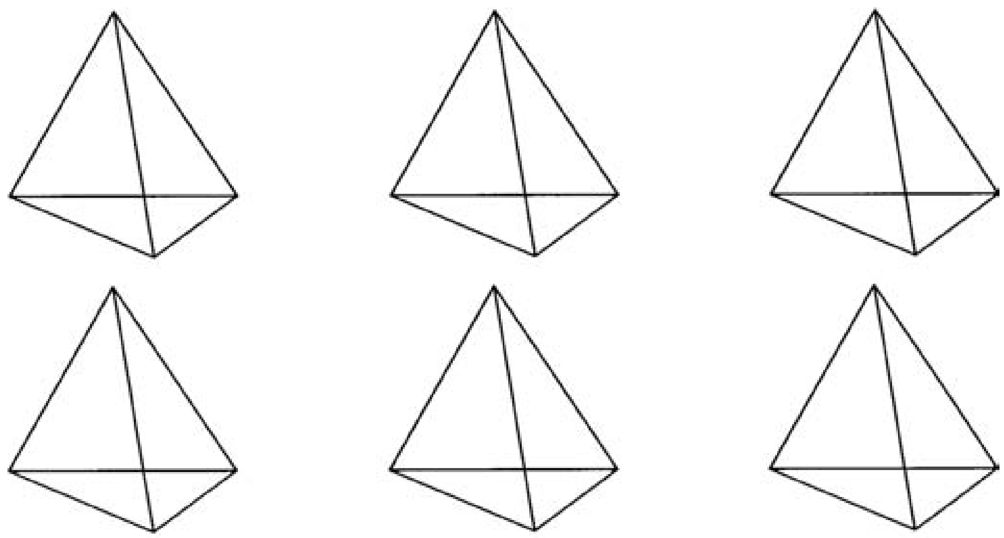
Anexo 7: Prueba individual de la XX Olimpiada nacional

(TENERIFE JUNIO 2009)

Problema nº 1: Tetraedro entero

A cada vértice de un tetraedro se le asigna un valor que puede ser +1 o -1. A cada cara se le asigna el valor resultante del producto de sus tres vértices. ¿Es posible que la suma de las caras sea un número impar? ¿Por qué? ¿Puede ser esa suma cero en algún caso?

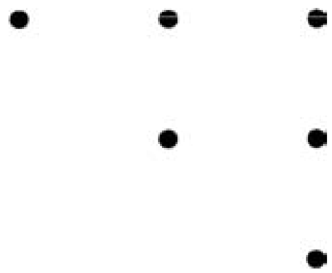
¿Qué valores puede tomar la suma de todas las caras?



Utiliza los tetraedros dibujados para explorar las cuestiones planteadas.

Problema nº 2: Triángulos y geoplano

Se tiene un geoplano con la siguiente trama de puntos:



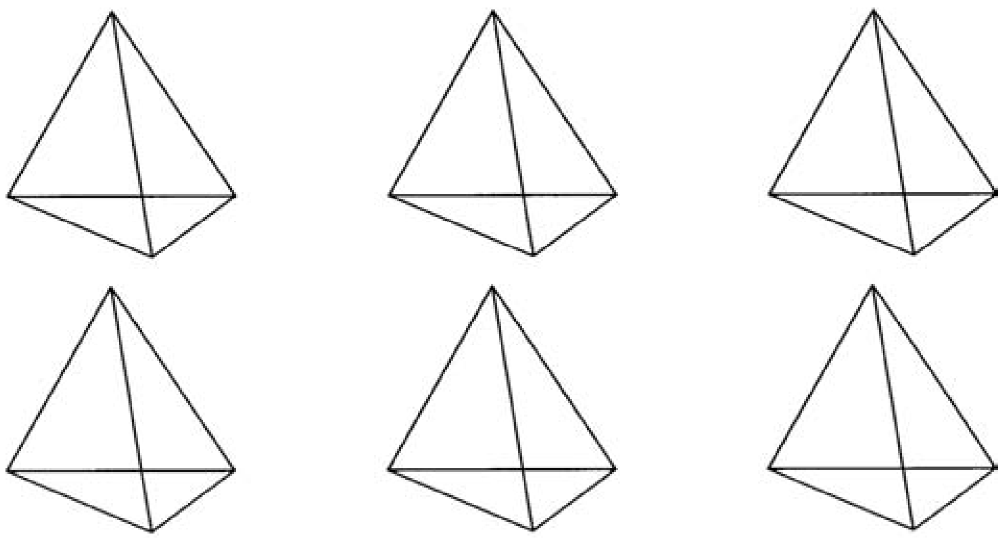
7. Eranskina: Espainako XX. Olinpiadako banakako froga

(TENERIFE 2009)

1. Problema: Tetraedro osoa

Tetraedro baten erpin bakoitzari +1 ala -1 izan daitekeen balio bat lotzen zaio. Aurpegi bakoitzari hiru erpinen biderkadura elkartzen zaio. Posible al da aurpegien batura zenbaki bakoitia izatea? Zergatik? Batura hori 0 izan daiteke kasuren batean?

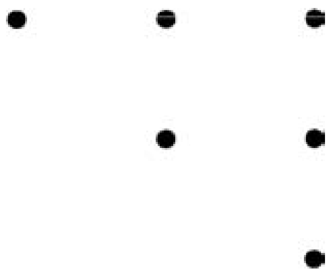
Zeintzuk dira aurpegi guztien baturak har ditzakeen balioak?

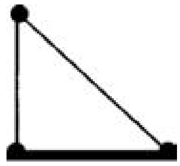


Erabili irudietan dituzuen tetraedroak aurreko galderak aztertzeko.

2. Problema: Triangeluak eta geoplanoa

Geoplano bat dugu hurrengo puntuen egiturarekin:





La distancia entre dos puntos consecutivos, tanto en horizontal como en vertical, es de valor 1.

Si unimos los puntos entre sí para formar triángulos:

¿Cuántos habrá de perímetro 2 + Ö2?

¿Cuántos de perímetro 3 + Ö5?

¿Cuántos de perímetro 2 + 2 Ö2?

¿Cuántos de 1 + Ö2 + Ö5?

¿Cuántos triángulos se pueden formar, en total, con sus vértices en los puntos? Utiliza la trama de puntos por detrás de la hoja para explorar las cuestiones planteadas.

Problema nº 3: Las cosas de Mario

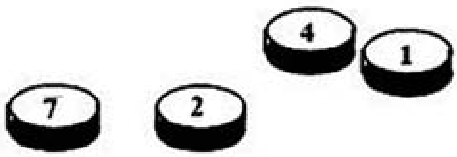
Mario quiere descomponer el número 46 en dos sumandos que sean números naturales, de tal manera que si uno se divide entre 7 y el otro entre 3, la suma de los cocientes es 10. ¿Cuál sería esa descomposición?

¿Y si la suma fuese 14?

Explica cómo has encontrado tu respuesta.

Problema nº 4: Las fichas de Lucía

Lucía tiene cuatro fichas. Observa que sobre cada una de las ocho caras está indicado un número distinto, del 1 al 8. Ella lanza sus cuatro fichas una primera vez y ve aparecer 7, 2, 4 y 1, como está representado en el dibujo de aquí abajo.



Lucía lanza sus fichas una segunda vez y obtiene 6, 4, 5 y 2.

Después una tercera vez y obtiene 8, 2, 6 y 5.

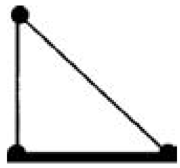
Finalmente, la cuarta vez, obtiene 7, 4, 3 y 5.

¿Cuáles son los números dibujados en cada ficha, uno sobre una cara y el otro sobre la opuesta?

Explica cómo has hallado tu solución.

Problema nº 5: Los hexágonos de Pablo

Pablo tiene un juego con muchas piezas iguales para encajar, con forma de rombo con dos ángulos de 60 grados (60º).



Elkarren segidako bi puntuen arteko distantzia, bai horizontalean bai bertikalean, 1 da.

Puntuak elkartzen baditugu triangeluak osatzeko:

Zenbat izango dira 2 + Ö2 perimetrokoak?

Zenbat izango dira 3 + Ö5 perimetrokoak?

Zenbat izango dira 2 + 2 Ö2 perimetrokoak?

Zenbat izango dira 1 + Ö2 + Ö5 perimetrokoak?

Zenbat triangelu egin daitezke, guztira, erpinak puntu horietan izanik? Atzeko orrialdean trama bat duzu hori guztia aztertzeko.

3. Problema : Marioren gauzak

Mariok 46 zenbakia bi batugai arruntetan deskonposatu nahi du. Bietako bat 7z eta bestea 3z zatituz gero, zatiduren batura 10 izango da. Zein izango da deskonposaketa hori?

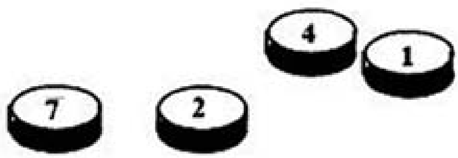
Eta, batura 14 izango balitz?

Azaldu nola aurkitu duzun erantzuna.

4. Problema : Luziaren fitxak

Luziak lau fitxa dauzka. Zortzi aurpegi bakoitzean, 1etik 8ra, zenbaki ezberdin idatzita daude.

Lehenengo aldiz fitxak jaurti ondoren 7, 2, 4 eta 1, agertu dira, ondoko irudian ikus dezakezunez.



Luziak berriro jaurti ditu fitxak eta 6, 4, 5 eta 2 lortu ditu.

Hirugarren aldiz 8, 2, 6 eta 5 lortu ditu.

Azkenean, laugarren aldiz, 7, 4, 3 eta 5 atera dira.

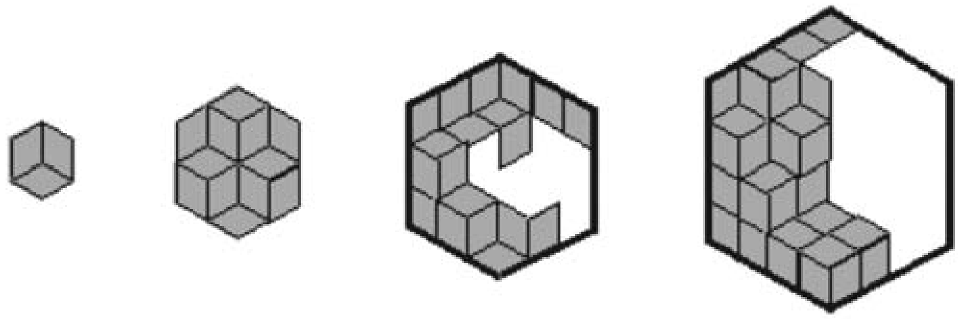
Zeintzuk dira fitxa bakoitzaren bi aurpegietan idatzitako zenbakiak?

Azaldu nola lortu duzun erantzuna

5. Problema : Pabloren hexagonoak

Pablok joko bat dauka pieza askorekin lotzeko. Pieza guztiak berdinak dira, erronboak eta 60 graduko bi angelurekin.

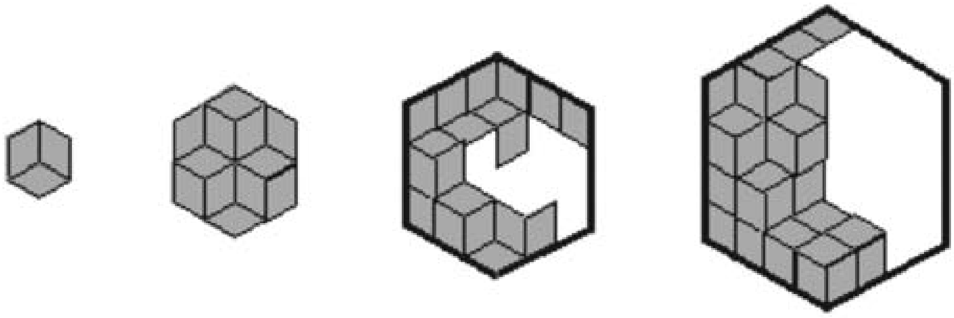
Con estas piezas, Pablo construye hexágonos regulares. Para construir el hexágono más pequeño (dimensión 1), usa tres rombos. Para construir el siguiente (dimensión 2) usa doce y así sucesivamente (en el dibujo se ven los hexágonos completos de dimensión 1 y 2 con una posible disposición de los rombos, y el inicio de los hexágonos de dimensiones 3 y 4 respectivamente):



¿Cuántos rombos necesitará Pablo para construir el hexágono de dimensión 8?

Explica cómo has encontrado tu respuesta.

Pieza hauekin Pablok hexagono erregularrak egiten ditu. Hexagono txikiena (1 dimentsiokoa) egiteko hiru erronbo erabili ditu. Hurrengoa egiteko (2 dimentsiokoa) hamabi erabili ditu eta horrela hurrenez hurren. (Irudian 1 eta 2 dimentsiokoak ikus ditzakezu erronboen ahalko egitura batekin, eta 3 eta 4 dimentsioko hexagonoen hasiera:



Zenbat erronbo beharko ditu Pablok 8 dimentsioko hexagonoa egiteko?

Azaldu nola aurkitu duzun zure erantzuna.


A. L. Cauchy (1789-1857)

la pizarra electrónica
arbela elektronikoa

Álgebra lineal para la ordenación de Google de las páginas web

Mikel Lezaun (*)

Introducción

El buscador Google fue diseñado en 1998 por dos estudiantes de doctorado de Informática de la Universidad de Stanford: Sergei Brin, licenciado en Ciencias Matemáticas y Ciencias de la Computación, y Lawrence Page, licenciado en Informática. Sergei Brin nació en Moscu el 21 de agosto de 1973 y a los seis años se trasladó con su familia a los Estados Unidos. Lawrence Edward "Larry" Page nació el 26 de marzo de 1973 en Michigan, Estados Unidos. Los dos se conocieron en 1995 en un acto organizado por la Universidad de Stanford e iniciaron su colaboración en enero de 1996. Cuando fundaron la empresa, en 1998, tenían 25 años.

Sergei Brin

Lawrence Page

El diseño de un buscador debe resolver con eficacia cuestiones computacionales relativas al almacenamiento de toda la información, a cómo actualizarla, a la gestión de las peticiones de búsqueda, a cómo buscar en las gigantescas bases de datos, etc. Con ser todo esto muy importante, el gran éxito de Google deriva de la gran novedad que introdujo: ordenar las páginas web de forma que los primeros resultados de una búsqueda sean interesantes. Así, desde el comienzo Brin y Page se propusieron como objetivo que en la gran mayoría de los casos, al menos una de las diez primeras páginas que se muestren contenga información útil para quien realice la consulta. Cualquier utilizador habitual de Google constata todos los días hasta qué punto se cumple este objetivo.

(*) Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea.

Este artículo trata de contestar a la cuestión ¿cómo se ordenan las páginas web para conseguir que las diez primeras páginas mostradas contengan información útil para el usuario? La respuesta la da el Algoritmo PageRank diseñado por Brin y Page para ordenar las páginas web. Como se verá, las matemáticas de este algoritmo son del nivel de los cursos básicos de licenciatura. Ahora bien, aunque aquí no se traten, para alcanzar el éxito también ha habido una cuidadosa y eficiente implementación del algoritmo y un esmerado diseño de las cuestiones computacionales inherentes al problema.

Algoritmo PageRank

El objetivo propuesto es ordenar todas las páginas web P_1, P_2, P_3,….., P_{n-1}, P_n atendiendo a alguna valoración de importancia que se deberá establecer. Luego, cuando se muestre el resultado de una búsqueda, las páginas aparecerán ordenadas de mayor a menor importancia.

Todo usuario de Google está acostumbrado a navegar de unas páginas a otras siguiendo los enlaces que contienen las páginas. Los enlaces no son recíprocos, la página P_i puede tener un enlace a la página P_j pero no al revés. La importancia de una página web no se definirá a priori por sus contenidos, se sustentará en la cantidad y calidad de los enlaces que haya de las restantes páginas a ella. Veremos que la importancia de una página web vendrá determinada por el cumplimiento de los siguientes principios que involucran a los enlaces de todas las páginas.

1. Una página web tendrá mayor importancia cuanto mayor sea el número de páginas que enlazan con ella.
2. La importancia de una página web dependerá de la importancia de las páginas que enlazan con ella, cuanto más importante sean mejor.
3. La importancia de una página será mayor si además de importantes, las páginas que enlazan con ella tienen pocos enlaces. Es decir se valoran más los enlaces que vienen de una página si ésta tiene pocos enlaces.

Para traducir estos principios a lenguaje matemático se comenzará por asignar al concepto de importancia un valor numérico. Así, para cada página P_i su importancia será un número x_i positivo. Obviamente la ordenación por importancia será la ordenación de los números x_i.

Los tres criterios anteriores pivotan sobre los enlaces de unas páginas a otras. Para representar numéricamente que la página web P_j enlaza o no con la página P_i se introducen los parámetros γ_{ij} que valen 1 si la página P_j enlaza con la página P_i y 0 en caso contrario. Como una página no enlaza con sí misma, siempre se tendrá que $\gamma_{ii} = 0$. Para cada página P_j se denota por N_j el número de enlaces que salen de ella. Por tanto $N_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}$. Como se supondrá que todas las páginas tendrán al menos un enlace, los N_j serán enteros positivos. Los valores γ_{ij} y en consecuencia los N_j son datos, ya que se sabe si la página P_j enlaza o no con la página P_i.

Veamos dos ejemplos sencillos con solo seis páginas web: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6. El objetivo es definir la importancia x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 de cada una para luego ordenarlas de mayor a menor. Comencemos por describir las relaciones de unas páginas con otras.

Ejemplo 1

- La página P_1 enlaza con las páginas P_2, P_3 y P_5;
- la página P_2 enlaza con las páginas P_1 y P_5;
- la página P_3 enlaza con las páginas P_1, P_2, P_5 y P_6;
- la página P_4 enlaza con las páginas P_2 y P_5;
- la página P_5 enlaza con las páginas P_1, P_2, P_3, P_4 y P_6;
- la página P_6 enlaza con las páginas P_2, P_3, P_4 y P_5.

Los valores γ_{ij} se pueden escribir en forma de matriz y se tiene

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumando las columnas se obtienen los N_j. En este ejemplo $N_1 = 3$, $N_2 = 2$, $N_3 = 4$, $N_4 = 2$, $N_5 = 5$, $N_6 = 4$.

Ejemplo 2

- La página P_1 enlaza con las páginas P_2 y P_3;
- la página P_2 enlaza con las páginas P_1 y P_3;
- la página P_3 enlaza con las páginas P_1 y P_2;
- la página P_4 enlaza con las páginas P_1, P_2, P_3, P_5 y P_6;
- la página P_5 enlaza con las páginas P_2, P_3, P_4 y P_6;
- la página P_6 enlaza con las páginas P_1, P_2 y P_5.

La matriz de los valores γ_{ij} es

$$M_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La suma de los elementos de cada columna es $N_1 = 2$, $N_2 = 2$, $N_3 = 2$, $N_4 = 5$, $N_5 = 4$, $N_6 = 3$.

Volvamos a la situación general. La primera opción, la más sencilla, es definir la importancia x_i de la página P_i como la suma de la importancia de las páginas que enlazan con ella dividida cada una por el número de sus enlaces. Esto en lenguaje matemático, en forma de ecuaciones se escribe

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_{ij}}{N_j} x_j \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n. \qquad (1)$$

Se observa que si todos los x_j son positivos, la importancia x_i será mayor:

- Cuantos más sumandos no nulos haya en el segundo miembro, es decir cuanto más páginas enlazan con la página P_i;
- Cuanto mayores sean los números x_j, o lo que es lo mismo cuanto mayor sea la importancia de las páginas que enlazan con la P_i;
- Cuanto menores sean los N_j, cuanto menos enlaces tengan las páginas que enlazan con la página P_i.

Se tiene así un sistema de n ecuaciones con n incógnitas x_i. Pasando todas las x_j al primer miembro, se observa que éste es un sistema homogéneo.

La primera cuestión que se plantea es: ¿se puede asegurar que el sistema anterior tiene una solución no nula, una solución no trivial? La respuesta será afirmativa si el determinante de coeficientes del sistema homogéneo es igual a cero. Veamos pues cuanto vale este determinante.

Si se escribe el sistema (1) en forma homogénea, es decir si se pasan los segundos miembros al primero para obtener expresiones igualadas a cero, los elementos de la matriz M_1 de coeficientes del sistema son

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ -\dfrac{\gamma_{ij}}{N_j} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Debido a como se han definido los N_j, la suma de los elementos de cada columna es cero. Así pues, las filas de la matriz traspuesta M_1^T suman cero, y es inmediato comprobar que el sistema homogéneo en el que la matriz de coeficientes es la traspuesta tiene la solución no trivial con todas las incógnitas iguales a uno. Como este sistema tiene soluciones no triviales, el determinante de la matriz traspuesta M_1^T vale cero. El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales, por tanto el determinante de M_1 se anula y en consecuencia el sistema (1) tiene soluciones no triviales. Respondida la primera cuestión, la pregunta ahora es ¿las soluciones no triviales tienen todas sus componentes x_i positivas? Veamos lo que ocurre en los dos ejemplos anteriores.

En el primer ejemplo el sistema (1) es

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \\ x_4 = \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \\ x_5 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_6 \\ x_6 = \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_5 \end{cases}$$

Pasando todos los segundos miembros al primero, es decir escribiendo las ecuaciones como expresiones igualadas a cero, se obtiene un sistema homogéneo en el que la matriz de coeficientes es

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/4 & 0 & -1/5 & 0 \\ -1/3 & 1 & -1/4 & -1/2 & -1/5 & -1/4 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/4 \\ -1/3 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

La suma de los elementos de cada columna es cero y se ha demostrado que el determinante vale cero. Con el programa MATHEMATICA u otro similar se obtiene la solución no trivial

$$x_1 \approx 0.732,\ x_2 = 0.8,\ x_3 \approx 0.527,\ x_4 \approx 0.283,\ x_5 = 1,\ x_6 \approx 0.332,$$

en la que todos los valores son positivos.

En el segundo ejemplo el sistema (1) es

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_4 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_6 \\ x_5 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_6 \\ x_6 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema escrito en forma homogénea es

$$M_{12}=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & -1/5 & 0 & -1/3 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & -1/5 & -1/4 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & -1/5 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

La suma de los elementos de cada columna es cero y por tanto el determinante vale cero. Es fácil llegar a la solución no trivial

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0,$$

que no tiene todos sus valores positivos.

Observación. Es inmediato comprobar que cualquier múltiplo de una solución no trivial de un sistema homogéneo, también es solución. Así, para evitar ambigüedades, todas las soluciones se escalan para que tengan la mayor componente igual a uno.

Del segundo ejemplo se deduce que no está asegurada la existencia de una solución no trivial con todas las componentes positivas. Para desbloquear esta situación, se amplía el marco de existencia de solución modificando un poco la definición anterior de importancia, diciendo que la importancia x_i de la página P_i es *proporcional* a la suma de la importancia de las páginas que enlazan con ella, dividida cada una por el número de sus enlaces. Naturalmente, para todas las importancias la constante de proporcionalidad será la misma. Las ecuaciones del nuevo sistema por tanto son

$$x_i = \beta \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_{ij}}{N_j} x_j \qquad i = 1\ , 2,\ldots\ldots n. \qquad (2)$$

Aquí β es una constante de proporcionalidad que está sin definir, lo importante es que el sistema tenga solución para algún β positivo, sin que en principio importe cual sea su valor. Al no precisar β, el sistema (2) es más general que el (1), este último se obtiene tomando en (2) el valor $\beta = 1$.

El sistema (2) en forma matricial se escribe $X = \beta MX$, o lo que es lo mismo

$$MX = \lambda X \qquad \text{o} \qquad (M - \lambda I)X = 0 \qquad \text{con} \qquad \lambda = 1/\beta, \qquad (3)$$

donde X es el vector columna de elementos las incógnitas x_i y M la matriz $n \times n$ de elementos

$$m_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{N_j},$$

Este sistema también es homogéneo, por lo que tendrá soluciones no triviales sólo si el determinante de la matriz $M - \lambda I$ es igual a cero. Así pues, los valores de λ para los que el sistema (3) tiene solución no trivial son las raíces de la ecuación $|M - \lambda I| = 0$. Ésta es una ecuación de incógnita λ y de grado n. Por tanto tendrá n soluciones reales o complejas. Los valores λ que verifican el sistema (3) se denominan valores propios de la matriz M y los X correspondientes vectores propios. Como se ha indicado antes, si X es un vector propio de M asociado al valor propio λ, todo múltiplo de X también es vector propio de M asociado a λ. El estudio de valores propios y vectores propios de una matriz cuadrada es un capítulo importante del Álgebra Lineal.

La cuestión ahora es ¿se puede asegurar que al menos existe un número λ positivo y un vector columna X con todos sus elementos x_i positivos tales que $MX = \lambda X$? Volvamos a los dos ejemplos considerados.

En ejemplo 1 la matriz M es = $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/5 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/5 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$

Con el programa MATHEMATICA se obtiene que esta matriz tiene cuatro valores propios complejos y dos reales: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 \approx -0.314$. Un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$ tiene las componentes

$$x_1 \approx 0.732,\ x_2 = 0.8,\ x_3 \approx 0.527,\ x_4 \approx 0.283,\ x_5 = 1,\ x_6 \approx 0.332,$$

todas ellas positivas.

En el ejemplo 2 la matriz M es $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/5 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/5 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/5 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

Con MATHEMATICA se obtiene que los seis valores propios de esta matriz son reales: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -0.5$, $\lambda_3 = -0.5$, $\lambda_4 =\approx 0.416$, $\lambda_2 \approx -0.266$, $\lambda_2 = -0.151$. Tomemos los dos positivos. Para $\lambda_1 = 1$ un vector propio es

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0.$$

Para $\lambda_4 = 0.416368$ se tiene el vector propio

$$x_1 \approx 0.947,\ x_2 \approx 0.661,\ x_3 = 1,\ x_4 \approx -0.629,\ x_5 = -1.048,\ x_6 \approx -0.931.$$

Se observa que ninguno de los vectores propios asociados a los dos valores propios positivos tiene todas sus componentes positivas.

Hasta aquí, el problema de asignar la importancia a las páginas web sigue sin resolverse. Una forma de hacerlo es aprovechar el

Teorema de Perron (1907): Sea A una matriz cuadrada de elementos positivos. Entonces:

- existe un valor propio $\lambda > 0$ tal que $AX = \lambda X$ donde todos los elementos x_i del vector propio X son positivos;
- este valor propio es mayor, en módulo, que todos los demás valores propios;
- cualquier otro vector propio X con todos sus elementos positivos es múltiplo del anterior.

Se puede decir que este es un teorema completo, ya que contiene tres aspectos fundamentales en matemáticas: existencia, unicidad y caracterización de la solución. Así, el teorema demuestra que existe un valor propio $\lambda > 0$ con vectores propios (múltiplos unos de otros) con componentes positivas, da una caracterización de este valor propio al afirmar que el módulo de todos los otros es menor que λ, y establece que éste es el único que tiene un vector propio con todas las componentes positivas. En consecuencia, si se convierte la matriz M del sistema (2) en una con todos sus elementos positivos se tendrá lo deseado. Para conseguirlo se utiliza un truco muy socorrido en matemáticas. En la definición de importancia x_i, en todos los segundos miembros del sistema (2) se añade una misma cantidad, la suma $\beta \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} x_i$.

El nuevo sistema a resolver es

$$x_i = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_{ij}}{N_j} + \frac{1}{n} \right) x_j \qquad i = 1 , 2, \ldots\ldots n. \tag{4}$$

Ahora sí, la nueva matriz M' tiene todos sus elementos $m'_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{N_j} + \frac{1}{n}$ positivos, se verifican las hipótesis del Teorema de Perron y por tanto M' tiene un mayor valor propio $\lambda > 0$ para el que los elementos x_i del vector propio X son positivos. Como este vector propio X es único salvo múltiplos, para determinarlo de forma única se toma tal que la mayor componente valga uno. Esto no supone incorporar nada nuevo ya que en el fondo lo que interesa es la ordenación por la importancia, no la importancia en sí misma, y vectores múltiplos positivos tienen igual ordenación. En consecuencia las importancias x_i valdrán entre cero y uno y estarán unívocamente determinadas.

La introducción de los términos $\beta \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} x_i$ en el sistema (2) no desvirtúa la definición de importancia pues a todas las importancias x_i se ha sumado la misma cantidad.

En el ejemplo 1 considerado la matriz M' es

$$M'_1 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2+1/6 & 1/4+1/6 & 1/6 & 1/5+1/6 & 1/6 \\ 1/3+1/6 & 1/6 & 1/4+1/6 & 1/2+1/6 & 1/5+1/6 & 1/4+1/6 \\ 1/3+1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/5+1/6 & 1/4+1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/5+1/6 & 1/4+1/6 \\ 1/3+1/6 & 1/2+1/6 & 1/4+1/6 & 1/2+1/6 & 1/6 & 1/4+1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/4+1/6 & 1/6 & 1/5+1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

y en el ejemplo 2

$$M'_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2+1/6 & 1/2+1/6 & 1/5+1/6 & 1/6 & 1/3+1/6 \\ 1/2+1/6 & 1/6 & 1/2+1/6 & 1/5+1/6 & 1/4+1/6 & 1/3+1/6 \\ 1/2+1/6 & 1/2+1/6 & 1/6 & 1/5+1/6 & 1/4+1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/4+1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/5+1/6 & 1/6 & 1/3+1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/5+1/6 & 1/4+1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Ya no hay ninguna duda en la existencia de una buena ordenación por importancia, ni en cual es esa ordenación. Ahora bien, el Teorema de Perron no responde a la última cuestión que falta: ¿cómo se obtiene el vector propio que dará la ordenación? ¿Cómo se obtienen los x_i positivos y menores o iguales que 1 solución del sistema (4) para el valor propio positivo mayor en módulo? Para esto está el método de las potencias, que permite calcular aproximadamente un vector propio asociado al mayor valor propio de la matriz M'. Este método es un método iterativo. Se inicia con un vector X^0 de componentes no negativas, la mayor de ellas igual a 1. Se calcula la primera iteración $Y^1 = M' X^0$. Se normaliza el vector Y^1 dividiendo todas sus componentes por la mayor. Se tiene así el vector X^1. A partir de este se calcula la segunda iteración $Y^2 = M' X^1$. Se normaliza el vector Y^2 dividiendo todas sus componentes por la mayor. Se tiene así el vector X^2. A partir de éste se calcula la tercera iteración y se continúa sucesivamente. Se obtiene así la sucesión de vectores $\{X^m\}$ todos ellos de mayor componente la unidad. Pues bien se demuestra que el límite de esta sucesión de vectores es el vector propio X buscado. En la práctica, basta hacer unas pocas iteraciones para obtener una aproximación X^m con todas sus componentes positivas. Ésta será la solución que medirá la importancia de cada página, la cual nos ordenará las páginas web de mayor a menor importancia.

Apliquemos el método de las potencias a los dos ejemplos. Para simplificar la escritura todos los vectores X e Y los escribimos como vectores fila, aunque en realidad son vectores columna.

Ejemplo 1

Se inicia el proceso, por ejemplo, con el vector $X^0 = (0.9, 0.7, 0.5, 1, 0.6, 0.8)$. Aplicando la matriz M'_1 a X^0 se obtiene $Y^1 \approx (1.345, 1.995, 1.37, 1.07, 2.225, 0.995)$. La división de Y^1 por su mayor componente es $X^1 \approx (0.604, 0.897, 0.616, 0.481, 1, 0.447)$. Aplicando la matriz M'_1 a X^1 se obtiene $Y^2 \approx (1.477, 1.582, 1.187, 0.986, 1.830, 1.028)$. La división de Y^2 por su mayor componente es $X^2 \approx (0.807, 0.864,0.645, 0.539, 1, 0.562)$. Aplicando la matriz M'_1 a X^2 se obtiene $Y^3 \approx (1.531, 1.778, 1.346, 1.077, 2.010, 1.100)$. La división de Y^3 por su mayor componente es $X^3 \approx (0.762, 0.884, 0.670, 0.536, 1, 0.547)$. Aplicando la matriz M'_1 a X^3 se obtiene $Y^4 \approx (1.543, 1.759, 1.324, 1.070, 2.001,1.101)$. La división de Y^4 por su mayor componente es $Y^4 \approx (0.771, 0.879, 0.661, 0.535, 1, 0.550)$.

Se observa que a partir de la segunda iteración, las componentes de los vectores X^2, X^3 y X^4 mantienen la misma ordenación: la mayor es la quinta, la siguiente la segunda, luego la primera, la tercera, la sexta y la más pequeña la cuarta. Con cuatro iteraciones se puede parar el proceso y asignar a las páginas web la ordenación común a los vectores X^2, X^3 y X^4. Por consiguiente la ordenación de las páginas web de mayor a menor importancia es

$$P_5 > P_2 > P_1 > P_3 > P_6 > P_4$$

Con MATHEMATICA se obtiene que el mayor valor propio es $\lambda_2 = 2$ y que el vector propio correspondiente es

$$x_1 = 0.754, x_2 = 0.880, x_3 = 0.662, x_4 = 0.534, x_5 = 0.1, x_6 = 0.550.$$

El vector $X^4 \approx (0.771, 0.879, 0.661, 0.535, 1, 0.550)$ ya es una buena aproximación de este vector propio.

Ejemplo 2

También iniciamos el proceso con el vector $X^0 = (0.9, 0.7, 0.5, 1, 0.6, 0.8)$. Procediendo como antes pero con la matriz M'_2 se van obteniendo sucesivamente los vectores

$$X^1 \approx (0.879, 1, 0.919, 0.435, 0.589, 0.532), \quad X^2 \approx (0.957, 1, 0.933, 0.429, 0.486, 0.471).$$

$$X^3 \approx (0.950, 1, 0.939, 0.413, 0.473, 0.455), \quad X^4 \approx (0.953, 1, 0.939, 0.411, 0.469, 0.452).$$

A partir de la segunda iteración, las componentes de los vectores X^2, X^3 y X^4 mantienen la misma ordenación: la mayor es la segunda, la siguiente la primera, luego la tercera, la quinta, la sexta y la más pequeña la cuarta. Se puede parar el proceso en esta iteración y asignar a las páginas web la ordenación común a los vectores X^2, X^3 y X^4. Por consiguiente la ordenación de las páginas web de mayor a menor importancia es

$$P_2 > P_1 > P_3 > P_5 > P_6 > P_4$$

Con MATHEMATICA se obtiene que el mayor valor propio es $\lambda_2 = 2$ y el vector propio correspondiente es

$$x_1 = 0.953, x_2 = 1, x_3 = 0.940, x_4 = 0.410, x_5 = 0.468, x_6 = 0.452.$$

Para completar la descripción es preciso indicar que en cada consulta particular hay dos ingredientes que añadir al criterio general descrito:

- Google no puntúa igual que un cierto término aparezca o no en el título de la página, que esté escrito en negrita, en un tipo de letra pequeño, etc.
- Para búsquedas combinadas, tampoco es lo mismo que los términos buscados aparezcan en un documento "cerca" o "lejos" unos de otros.

Nota. En realidad el sistema con el que trabaja Google no es el (4), sino uno ligeramente distinto en el que los términos de la matriz M son $m'_{ij} = c\dfrac{\gamma_{ij}}{N_j} + (1-c)\dfrac{1}{n}$ con $c \approx 0.85$. Esta matriz también tiene todos los términos positivos por lo que son válidos los resultados anteriores.

Comentario final

El algoritmo PageRank que hemos descrito para la ordenación de las páginas web no es excesivamente complicado, no pone en juego una matemáticas excesivamente sofisticadas. Ahora bien, debido al enorme número de páginas web que tiene en su índice, varios miles de millones, la ordenación de las páginas no se actualiza diariamente, ni la actualización es instantánea. Las actualizaciones del PageRank se realizan cada dos o tres meses y en el proceso se invierten varios días. A continuación se pueden ver las fechas de actualizaciones del PageRank.

- 2ª semana de abril del 2009.
- 4ª semana de diciembre del 2008.
- 3ª semana de octubre del 2008.

- 4ª semana de julio del 2008.
- 4ª semana de mayo del 2008.
- 2ª semana de marzo del 2008.
- 2ª semana de enero del 2008.
- 4ª semana de octubre del 2007.
- 4ª semana de abril del 2007.
- 3ª semana de enero del 2007.
- 2ª semana de octubre del 2006.
- 2ª semana del mes de julio del 2006.

Uno de los retos a los que se enfrenta Google (y resto de motores de búsqueda.) es cómo mejorar el algoritmo PageRank con el fin de contrarrestar las prácticas dirigidas a aumentar la importancia de determinadas páginas mediante la creación de miles de páginas con el único propósito de enlazar con ellas y así hacer subir su importancia. El algoritmo sobre el que Google trabaja para hacer frente a este reto se denomina TrustRank. El TrustRank parte de la misma base que el PageRank, pero en lugar de valorar la importancia de un enlace en función de la importancia de la página que enlaza con ella, lo hace a partir de una serie de páginas web que han sido consideradas importantes por humanos en lugar de por algoritmos. A las páginas web que los humanos han determinado como importantes se las considera "web semilla" y a sus enlaces se les asignará un valor. Y será ese valor el que se irá transmitiendo por toda la red. De momento no se sabe cuando Google incorporará el TrustRank. El día menos pensado Google lanzará un comunicado e informará de que ya lo ha implementado.

Nota bibliográfica

El contenido de este artículo es estándar y se puede encontrar en muchos textos y páginas web. Para localizarlos nada mejor que buscar uno mismo en Google. Una referencia muy recomendable es el trabajo de Pablo Fernández *El secreto de Google* y *el Álgebra lineal*, publicado en el Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, nº 30, páginas 115-141, 2004. Este artículo fue galardonado con el V Premio SEMA a la Divulgación en Matemática Aplicada del año 2004, y se puede encontrar en la página web del autor: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/. Para todo lo relativo al Teorema de Perron se puede consultar el libro de Carl D. Meyer *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

Nikolái Lobachevsky (1792-1856)

artículos
artikuloak

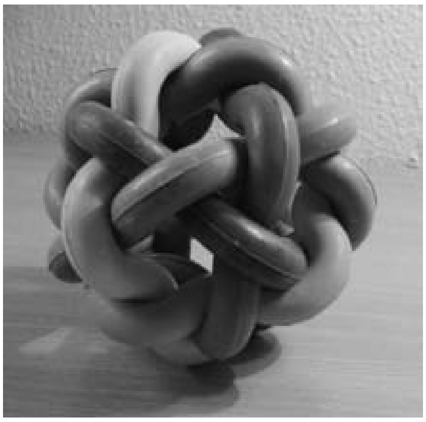
El juguete de "Gos"

Vicente Meavilla Seguí (*)

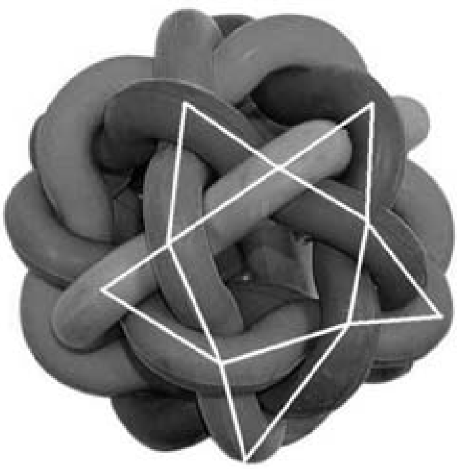
Introducción

Mi mascota "Gos", un chow-chow de tres meses, acaba de recibir un regalo multicolor formado por seis anillos congruentes que configuran una estructura 3D estéticamente atractiva.


"Gos"

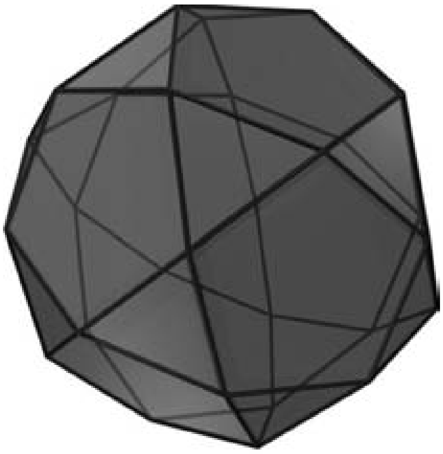

El regalo

Si contemplamos con ojos matemáticos este objeto tridimensional observamos que en él los seis anillos determinan doce "pentágonos regulares" y veinte "triángulos equiláteros". Además, cada pentágono está rodeado por cinco triángulos (véase la figura siguiente).



(*) Departamento de Matemáticas (Área de Didáctica). Universidad de Zaragoza.

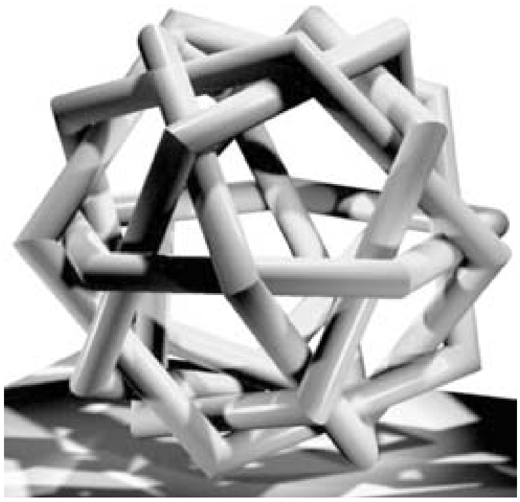
En otras palabras, el juguete de "Gos" está emparentado con uno de los poliedros arquimedianos[1]; a saber: el *icosidodecaedro*, formado por veinte caras triangulares, doce caras pentagonales, treinta vértices tetraedros y sesenta aristas.



Icosidodecaedro

Por otro lado, la regularidad geométrica y la armonía cromática que se perciben en el "átomo de caucho" con el que mi cachorro jugará y desarrollará su dentadura, hacen sospechar que estructuras similares pueden estar presentes en el mundo del arte en general y en el de la escultura en particular.

Un rápido viaje por Internet confirma esta sospecha como puede apreciarse en la sugerente escultura geométrica que hemos capturado de la red.



Rinus Roelofs. *Regular pentagonal polylink*
http://www.rinusroelofs.nl/rhinoceros/rhinoceros-p08.html

En ella, seis pentágonos regulares idénticos, entrelazados de forma conveniente, dan lugar a una estructura perteneciente a un conjunto de seres matemáticos a los que Alan Holden bautizó con el nombre de *regular polylinks* y a los que, de ahora en adelante, llamaremos *polianillos regulares*[(2)]. Notemos que los treinta vértices de nuestro polianillo son los vértices de un icosidodecaedro.

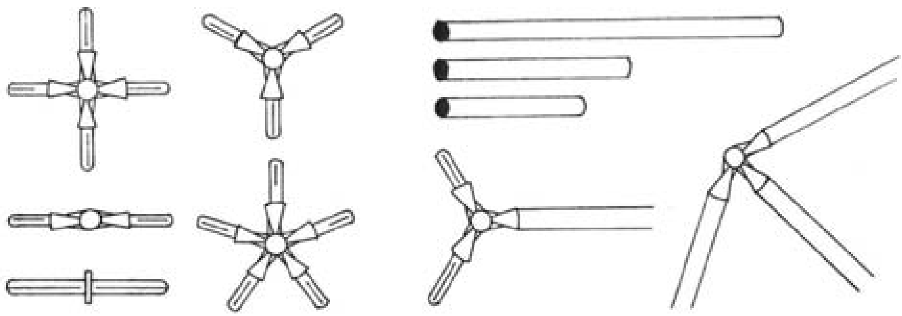
Polianillo regular con cuatro triángulos equiláteros
http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/bridges2005/hart/Image182.gif

Polianillo regular con seis cuadrados
http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/bridges2005/hart/Image174.gif

Cómo visualizar un polianillo regular con seis pentágonos regulares congruentes (aspectos teórico-prácticos)

Dado que los treinta vértices de los seis pentágonos regulares congruentes que integran el *Regular pentagonal polylink* de Roelofs son vértices de un icosidodecaedro, parece natural que para construir una estructura similar a la del artista holandés se materialice, en primera instancia, un andamio icosidodecaédrico.

Para ello recomendamos el uso de un material didáctico compuesto por tres tipos de varillas y por nudos con dos, tres, cuatro y cinco brazos (véase la figura adjunta).



Observemos que las sesenta aristas de nuestro poliedro arquimediano se pueden organizar en seis decágonos regulares que hemos decorado con pinzas azules, naranjas, violetas, verdes, amarillas y rojas, respectivamente (véase la fotografía siguiente).

“Gos” (siete meses) con un andamio icosidodecaédrico

Conectando de dos en dos los vértices de cada uno de los antedichos decágonos se visualizan los seis pentágonos regulares que estábamos buscando.

Dado que cada pareja decágono-pentágono está inscrita en la misma circunferencia, es posible determinar la longitud del lado de cada pentágono en función de la longitud de cada decágono [= longitud de la arista del icosidodecaedro].

Para ello se deben recordar las proposiciones 9 y 10 del libro XIII de los Elementos de Euclides.

> *Proposición 9*. Si se une el lado del hexágono y del decágono inscritos en el mismo círculo, la recta total resultante queda dividida en media y extrema razón y la parte mayor es el lado del hexágono.

> *Proposición 10*. Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado de su lado es igual a los cuadrados de los lados del hexágono y del decágono inscritos en el mismo círculo.

La proposición 9 asegura que la razón entre la longitud del radio de una circunferencia y la longitud del decágono regular inscrito [= L10] en ella es igual al número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En otros términos:

$$\frac{R}{L_{10}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow L_{10} = \frac{2R}{1+\sqrt{5}} = \frac{R}{2}(1+\sqrt{5})$$

Por otro lado, la proposición 10 afirma que si L5 y L10 son las longitudes de los lados del pentágono regular y el decágono regular inscritos en una circunferencia de radio R, entonces:

$$L_5^2 = L_{10}^2 + R^2 \Rightarrow L_5^2 = \left(\frac{R}{2}(1+\sqrt{5})\right)^2 + R^2 = \frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}) \Rightarrow$$

$$L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Por consiguiente:

$$\frac{L_5}{L_{10}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow L_5 = L_{10}\left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}\right]$$

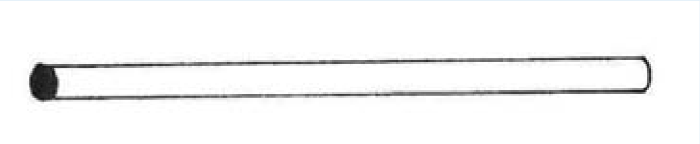
Consideraciones didácticas

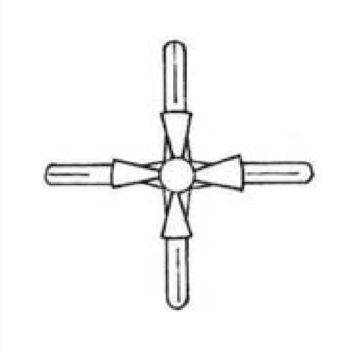
Con el material que hemos presentado en las líneas precedentes se pueden diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje que permiten desarrollar diversos tópicos geométricos (polígonos regulares, poliedros arquimedianos, teorema de Euler, número áureo, polianillos regulares, matemáticas y arte,…) con alumnos de los niveles no universitarios y con estudiantes de carreras universitarias dedicadas a la docencia.

Sirvan de ejemplo las dos actividades siguientes dirigidas a alumnos de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, respectivamente.

UNA ESCULTURA "PENTAGONAL"

1. Busca en GOOGLE la definición de icosidodecaedro.
2. Utilizando piezas del POLYDRON[3] construye un icosidodecaedro.
3. Con sesenta varillas y treinta nudos como los de la figura adjunta construye el "esqueleto" de un icosidodecaedro.



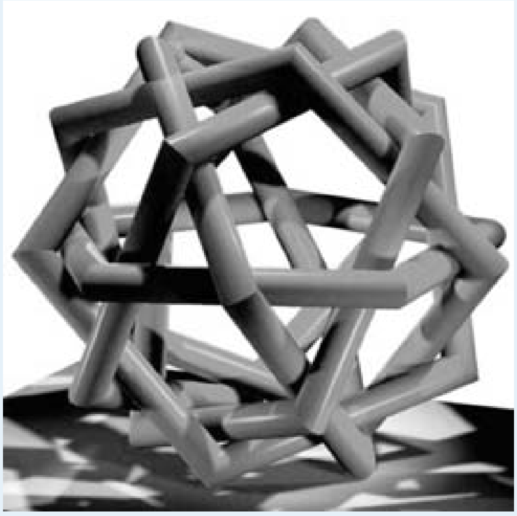


4. ¿Cuántos decágonos regulares ves en el "esqueleto" que acabas de construir?
   Para que puedas distinguirlos, decóralos con lazos de distintos colores.
5. Conecta, de dos en dos, los vértices de cada uno de los antedichos decágonos de modo que agotes todos los vértices del icosidodecaedro.

SUGERENCIA: Utiliza brochetas de madera atadas convenientemente.

¿Cuántos pentágonos regulares has obtenido?

6. Compara la anterior colección de pentágonos regulares con la siguiente escultura del artista holandés Rinus Roelofs.



PROBLEMAS SOBRE UN ICOSIDODECAEDRO

1. Sea L_{10} la longitud del lado de un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio R. Demuestra que:

$$\frac{R}{L_{10}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

NOTA. El número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se llama número áureo y se representa por la letra Φ del alfabeto griego.

SUGERENCIA. Puedes ayudarte de la figura adjunta en la que $AB = L_{10}$, $BC = OA = OB = R$

2. Busca en GOOGLE la definición de *icosidodecaedro*.
   Con sesenta varillas y treinta nudos como los de la figura adjunta construye el "esqueleto" de un icosidodecaedro.

¿Cuántos decágonos regulares ves en el "esqueleto" que acabas de construir?

3. Sea L_{10} la longitud del lado de uno de los decágonos regulares anteriores [= longitud de la arista del icosidodecaedro]. Conecta, de dos en dos, los vértices de dicho decágono.

¿Qué polígono obtienes? Sea L_5 la longitud de su lado.

Sea R el radio de la circunferencia circunscrita a los dos polígonos anteriores.

Demuestra que:

$$\frac{R}{L_{10}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

4. ¿Cuál la longitud de la circunferencia inscrita en cada decágono regular de lado L_{10}?

Epílogo canino

"Gos", con siete meses cumplidos, sigue jugando con su "mordedor". Todavía no sabe que su juguete es un objeto matemático que está emparentado con el icosidodecaedro [= poliedro arquimediano formado por veinte caras triangulares y doce caras pentagonales]. Mi mascota aún es muy joven para comprender ciertos conceptos matemáticos. Dentro de unos años, quizás me atreva a insinuarle la armonía geométrica que encierra su "átomo multicolor". Para entonces, la estructura 3D que le regalaron cuando tenía dos meses ya no será un mero pasatiempo y se habrá convertido en un divertimento intelectual.

Bibliografía

García Fernández, L., 1981: *Poliedros regulares y arquimedianos*. Sociedad Canaria de profesores de Matemáticas.

Heath, T. L., 1956: *The thirteen books of The Elements* (tres volúmenes). New York: Dover Publications, Inc.

Holden, A., 1980: "Regular Polylinks". *Structural Topology*, nº 4, pp- 41-45.

Vera, F., 1970: *Científicos griegos* (dos volúmenes). Madrid: Aguilar, S. A. de editores.

Referencias online

Hart, G. W.: Paper polylinks.
http://www.georgehart.com/orderly-tangles-workshop/paper-polylinks.html

Hart, G. W.: Orderly tangles revisited.
http://images.google.es/imgres?imgurl=http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/bridges2005/hart/Image182.gif&imgrefurl=http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/bridges2005/hart/index.html&usg=__lVRQo2PxcL0CQpiL15Q8WCjEpRs=&h=536&w=529&sz=6&hl=es&start=5&um=1&tbnid=fHei0fbYQrRryM:&tbnh=132&tbnw=130&prev=/images%3Fq%3Dregular%2Bpolylinks%26hl%3Des%26rlz%3D1W1HPEB_es%26sa%3DN%26um%3D1

Notas

(1) Se llama *poliedro arquimediano* a todo poliedro convexo en el que sus caras son regulares, mas no iguales, y tal que sus ángulos poliedros son iguales y no regulares. En un poliedro arquimediano todas las aristas son iguales.

(2) Según Holden, un *polianillo* es un ensamblaje de anillos poligonales planos que forman una estructura rígida. Esta rigidez sólo depende de las conexiones entre los anillos que forman el polianillo. Si los anillos son polígonos regulares congruentes, entonces el polianillo se llama regular.

(3) El POLYDRON es un material didáctico compuesto por polígonos regulares encajables.

El cine de animación como recurso didáctico en el aula de matemáticas: Los Simpson

Abel Martín (*) y Marta Martín Sierra (**)

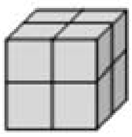
Resumen

Dentro de las acciones que estamos desarrollando para divulgar las matemáticas y su relación con el cine y la televisión, en su versión de películas, incluyendo las de animación, hoy nos encontramos con una joya repleta de guiños matemáticos. Concretamente la historia "Homer^3", perteneciente al capítulo 6 de la temporada 7, titulado *La casa árbol del terror VI*.

El propio título ya encierra un concepto:

Reflexionemos

¿Por qué se dice Homer al cubo?



¿Se podría decir…?

"Homer al caldero" "Homer al prisma" "Homer a la puerta" etc.

Si tenemos 2^3

Decimos "2 elevado al cubo", simplemente porque su representación geométrica es la de un cubo, que tiene de lado 2 unidades.

(*) Profesor de Matemáticas del IES Pérez de Ayala (Oviedo-Asturias).

(**) Facultad de Matemáticas. Universidad de Oviedo.

Efectivamente, comprobamos que está constituida por 8 cubitos:

$$2^3 = 8$$

Es un poliedro. Tiene tres dimensiones: largo, ancho y alto. Si fuese “al cuadrado” estaríamos hablando de dos dimensiones. De ahí que intuyamos que en el capítulo habrá algo que relacione a Homer con la tercera dimensión.

Ante la visita de Patty y Selma, Homer se esconde detrás del armario pero, al apoyarse en la pared, la atraviesa pasando a una dimensión diferente. Es el paso del mundo del papel (el plano), donde se mueven los dibujos animados de la serie, al espacio, a las 3D.

Homer sigue paseando por ese fantástico mundo… y se encuentra con una identidad flotando en el espacio:

$$e^{\pi i} = -1$$

Leonhard Euler encontró esta maravillosa e increíble ecuación considerada, por muchos, la más hermosa de las matemáticas:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

En ella se juntan y se relacionan:

$\pi \rightarrow$ es el número más importante de la Geometría.

$e \rightarrow$ es el número más importante del Análisis Matemático.

$i \rightarrow$ es el número más importante del Álgebra.

0 y $1 \rightarrow$ son las bases de la Aritmética por ser los elementos neutros, respectivamente, de la adición y la multiplicación.

Cabe mencionar que esta igualdad es la protagonista de un best seller y una película que se hizo basada en el mismo:

La ecuación preferida del profesor (Takashi Koizumi, 2006)

Cambiamos nuestro rumbo de indagación y una nueva duda nos asalta cuando vemos la siguiente igualdad en la misma escena:

En la izquierda de la imagen aparece **P=NP**

¿Qué significa esta igualdad?

Vamos a citar muy brevemente, a modo de idea, qué es lo que dice la Wikipedia de este concepto.

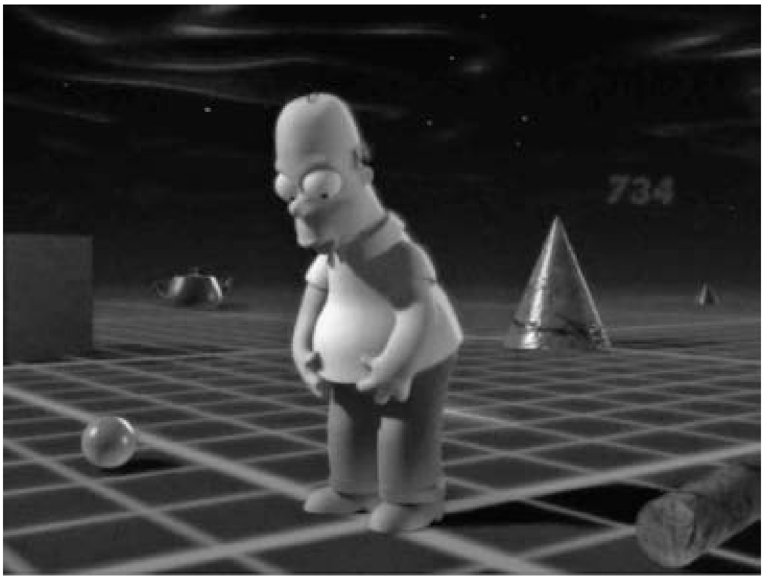
En computación, cuando el tiempo de ejecución de un algoritmo (mediante el cual se obtiene una solución al problema) es menor que un cierto valor calculado a partir del número de variables implicadas (generalmente variables de entrada) usando una fórmula polinómica, se dice que dicho problema se puede resolver en un tiempo polinómico.

Por ejemplo, si determinar el camino óptimo que se debe recorrer para pasar por "n" casas necesita menos de $50 \cdot n^2 + n$ segundos, entonces el problema es resoluble en un "tiempo polinómico".

La clase de complejidad de los problemas de decisión que pueden ser resueltos en tiempo polinómico calculado a partir de la entrada por una máquina de Turing determinista es llamada P. Cuando se trata de una máquina de Turing no-determinista, la clase se llama NP. Una de las preguntas abiertas más importantes en la actualidad es descubrir si estas clases son diferentes o no. El "Clay Mathematics Institute" ofrece un millón de dólares a quien sea capaz de responder a esa pregunta… así que mejor dejamos aquí esta cuestión.

Homer sigue su paseo por la trama cartesiana tridimensional sobre la que podemos ver todo un conjunto de figuras poliédricas que nos permiten hacer un repaso de las mismas.

¡Observa el fenomenal efecto panorámico de 360º!



¿Qué polígonos distingues a lo largo del capítulo?

¿Y qué poliedros?

¿Ves una tetera en la escena?

Es la famosa tetera de Utah, que formó parte fundamental en el desarrollo de los programas y algoritmos de simulación 3D que hoy día hacen posibles desde video juegos hasta los efectos especiales de las películas más taquilleras. Es un homenaje a esta famosa tetera y, en general, los diseñadores la incluyen "oculta", a manera de "huevo de Pascua", en cientos de proyectos y animaciones.

Fue adquirida por Martin y Sandra Newell en 1974.

En aquellos tiempos, para crear un modelo 3D se debían de introducir manualmente los datos geométricos y los valores de las curvas de Bézier, por lo que obtener un objeto fiel al modelo original era extremadamente difícil y requería de cientos de horas de tediosos cálculos e intentos.

Al final Martin logró producir un objeto final muy fiel al original por lo que rápidamente lo envió como demo de su trabajo a varias empresas.

Ahora vamos a observar otros detalles de la escena que pasan desapercibidos para el gran público en general: aparece parpadeando un número…

¿Tendrá algún significado el número natural 734 que aparece en la escena?

Os invitamos a que cada uno intente realizar sus propias investigaciones y sacar conclusiones. Ahí va la nuestra…

Nos inclinamos por la teoría de que las cifras se corresponden a las letras PDI (Pacific Data Images, el estudio de la animación) en un teclado numérico del teléfono.

¿Es rebatible?

Por supuesto. Pero el trabajo y la imaginación se utilizan para algo…

¡Se admiten sugerencias y propuestas alternativas o complementarias!

Unos segundos más adelante, Homer pasa por un fila de números y letras, flotando en el espacio tridimensional…

46 72 69 6E 6B 20 72 75 6C 65 73 21

¿Estarán colocados al azar?

Realmente parece ser un mensaje codificado, pura criptografía o simplemente escritos en otro sistema. Tras su análisis llegamos a la conclusión de que se trata de una serie de números hexadecimales (base 16).

Recordaremos que la notación hexadecimal utiliza los numerales del 0 al 9 y las letras de la “A” a la “F”, donde “A” equivale al decimal 10,”B” al decimal 11, y así hasta llegar a la “F”, que equivale al decimal 15. La solución la podríamos dejar en manos de algún experto que nos pueda echar una mano.

¿Cuál puede ser el mensaje oculto?

Tras una ardua labor de indagación, con la ayuda de mi amigo, el profesor Ángel Aguirre, colaborador habitual en mis devaneos matemáticos, apoyándonos en lo expresado anteriormente y con la utilización de un programa adecuado, se ha obtenido la siguiente expresión:

Frink manda! (en inglés).

Pero… ¿qué es esto? ¿Estamos viendo un capítulo de “Los Simpson” o siguiendo las pistas de unos acertijos?

Si colocamos **Frink rules!** en un buscador de Internet, esta expresión nos manda directamente a una página Web cuya dirección es

http://www.lowb.org/alan/frink/

y que nos va a describir quién es el profesor Frink, sus andanzas, inventos y apariciones en los diferentes capítulos de "Los Simpson". Cabría pensar que uno de los guionistas ha dejado un mensaje con su nombre, pero en este capítulo figuran como tales John Swartzwelder, Steve Tombkins y David X. Cohen, bajo la dirección de Bedlam Bob Anderson.

¡Seguiremos investigando!

Más adelante, Homer se encuentra con una, aparentemente, inocente piscina…

¿Qué hay de matemáticas aquí?

Los tiempos en los que se rueda el capítulo (1995), son momentos en los que se intenta imitar, lo más fielmente posible, el movimiento complejo del agua en 3D. Era todo un reto.

Los efectos especiales resultaban de algoritmos matemáticos, trabajados en el ordenador.

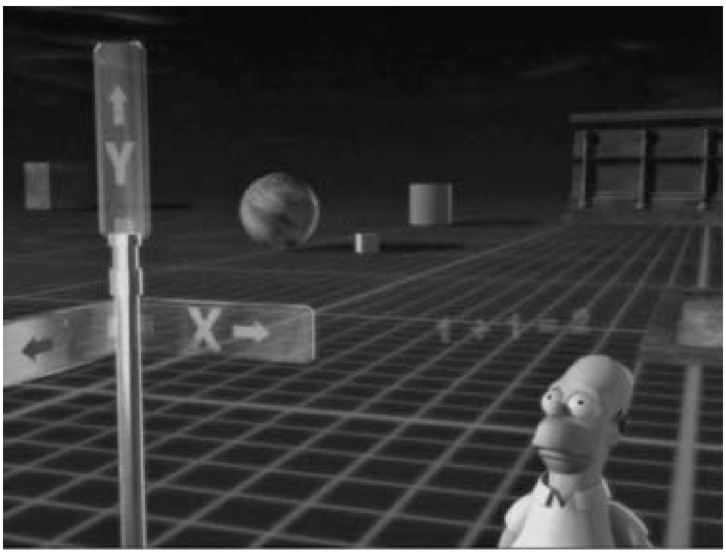
Precisamente en 1998, con la película de animación *Antz*, Nick Foster consigue el Oscar a los efectos especiales, utilizando ecuaciones muy sencillas, las ecuaciones de "Navier-Stokes", y que describen todas las fuerzas que actúan en una pequeña cantidad de agua.

En esta escena, de muy pocos segundos, el equipo de los Simpson consigue un realismo en el movimiento del agua muy interesante, aunque no sabemos exactamente la técnica utilizada.

En su paseo 3D, le toca encontrarse con una sencilla igualdad 1+1=2, quizá para relajarse un poco de esta vorágine de contenido matemático.

Destacar en esta imagen el eje de coordenadas, a modo de señal, con los ejes dispuestos para determinar puntos en el espacio.

¿Entenderá Homer su significado?



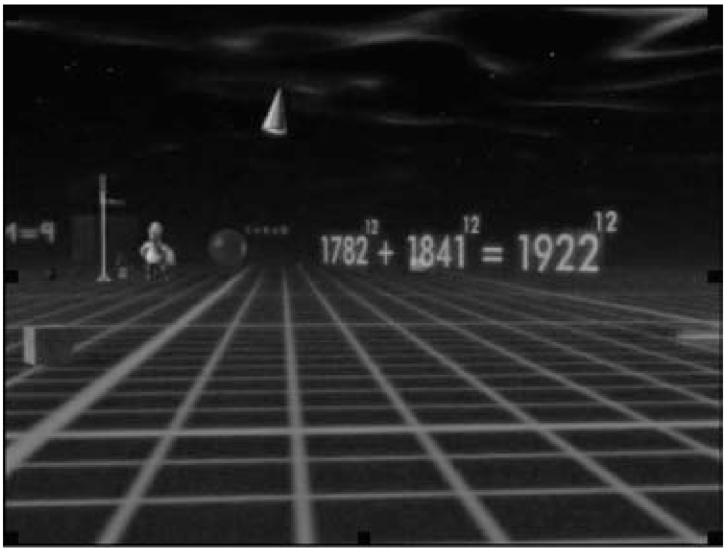
A continuación, otra igualdad no pasa desapercibida para los muy aficionados a las Matemáticas, y sobre la que han corrido ríos de tinta: el Teorema de Fermat.

¿Alguien recuerda el último Teorema de Fermat?

Si "n" es un número entero mayor que 2 $(n > 2)$, entonces no existen números enteros x, y , z (excepto las soluciones triviales $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) tales que cumplan la igualdad:

$$x^n + y^n = z^n$$

Sin embargo los guionistas de los Simpson (como ya apuntaba Alfonso Jesús Población, en el nº 32 de SIGMA) dejan caer un contraejemplo que echa por tierra el famoso Teorema:



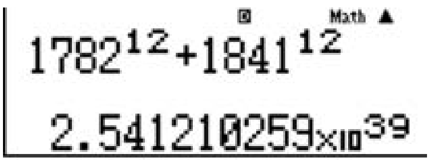
$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

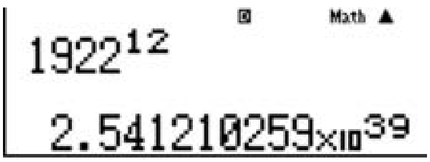
¿Cómo puede ser esto?

Hagamos la comprobación con la calculadora:

Efectúa con la calculadora $1782^{12} + 1841^{12}$ y anota el resultado.

Efectúa con la calculadora 1922^{12} y anota el resultado.



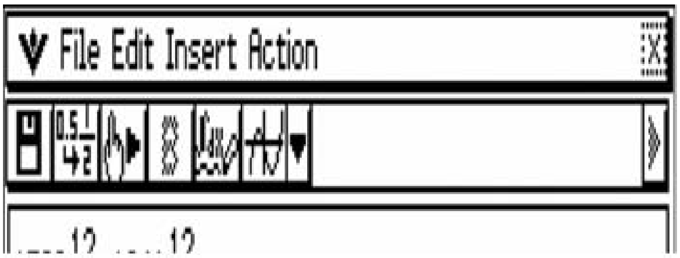


¡Compara los resultados obtenidos!

¿Es posible que los guionistas hayan encontrado un contraejemplo que contradiga este famoso teorema que ha traído de cabeza cerca de 300 años a los más famosos matemáticos?

Así que no nos fiamos y vamos a comprobarlo con una función que tiene esta calculadora denominada "verify", que permite la verificación de igualdades:

De esta forma empezamos a sospechar que algún duendecillo ha influido en estos resultados; acudiremos a la versión 3.0 de ClassPad de CASIO, capaz de realizar cálculos con más cifras. Podéis hacerlo con cualquier programa apto para realizar operaciones con más dígitos.



Como podemos observar, este duendecillo al que aludíamos se llama “redondeo”. La calculadora, cuando nos da el resultado exacto, difiere en la décima cifra. En el primer caso redondea y aproxima por exceso y en el segundo por defecto, produciéndose una engañosa apariencia de igualdad, según se puede ver en la imagen anterior.

Realmente David X. Cohen, uno de los guionistas y productores de Los Simpson vuelve a mostrarnos su formación matemática. No en vano se había pasado muchas horas trabajando en un programa que buscaba combinaciones de x, y, z , n que parecían cumplir el último Teorema de Fermat: el resultado salta a la vista.

David X. Cohen

Buscaba que verificasen la ecuación antes mencionada con un error tan pequeño como se quisiera.

En 1993, en una serie de conferencias en el Instituto Isaac Newton, Andrew Wiles demuestra el Teorema de Fermat: muchos folios de intensas matemáticas, aunque pudo comprobar que había un error que no consiguió resolver de inmediato.

La demostración no fue nada trivial (95 hojas) y tuvo que esperar a que se creara una nueva matemática para poder demostrar algo aparentemente simple, la “teoría de funciones elípticas”, sin la que no hubiera sido posible.

El año del estreno del episodio de los Simpson coincide “curiosamente” con el año en el que Andrew Wiles, con la colaboración de Richard Taylor, lo demuestra, por fin.

El Clay Institute, después de casi cinco años de estudios y comprobaciones, procedería a entregarle el premio.

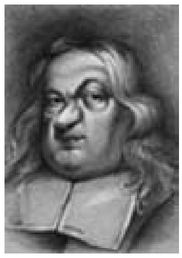
Andrew Wiles

¿Servirán también de contraejemplo para el Teorema de Fermat
estas otras famosas igualdades que aparecen en Geometría?

$5^2 = 4^2 + 3^2$ $\quad$ $6^2 + 8^2 = 10^2$ $\quad$ $5^2 + 12^2 = 13^2$

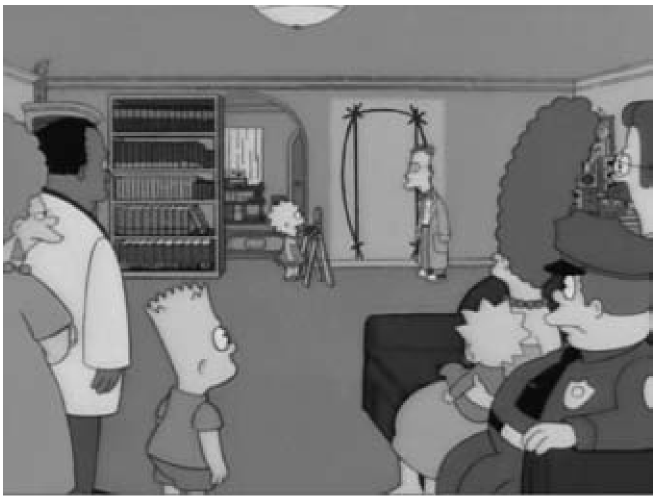
Recuerda que mi teorema es para n > 2

Mientras Homer se encuentra en este “mundo paralelo” y ajeno a todas estas perlas matemáticas con las que se va topando... en su casa, además de su familia, se hallan su médico, su párroco, el señor Flanders, un policía y cómo no...¡el profesor Frink!



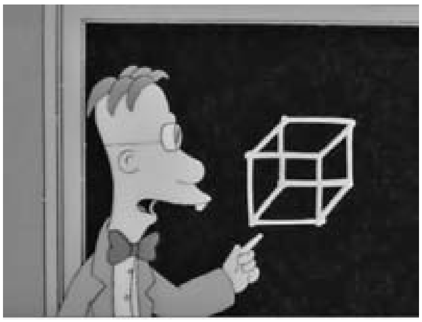
Fermat

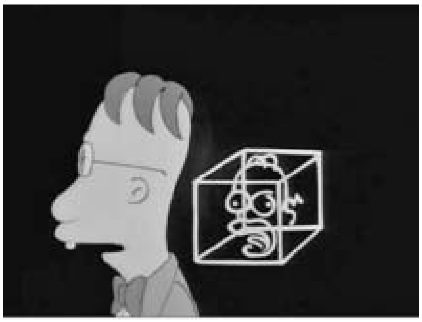
Entre todos intentan buscar una solución para saber dónde está Homer y cómo hacerlo volver. El que parece tener la respuesta es el profesor Frink (como siempre):



– Es obvio para cualquier individuo con dos dedos de frente y con un título superior en topología hiperbólica que... Homer Simpson se ha adentrado en... LA TERCERA DIMENSIÓN.

– Este es un cuadrado corriente y moliente –enuncia el profesor–. Supongamos que desarrollamos el cuadrado en las otras dos dimensiones de nuestro universo siguiendo un eje hipotético. ¡¡Ahhhhh!!! - exclaman todos al unísono.





Se forma así un objeto tridimensional conocido como cubo o "Frinkaedro" en honor a un servidor, su descubridor –dice Frink– por supuesto en su interior se haya el individuo –resalta el profesor–.

Cuando el cono impacta sobre el suelo, comienza a desarrollarse un gran agujero y el Universo empieza a replegarse sobre sí mismo.

¿Qué puede significar la expresión que aparece en la imagen?

Hemos pasado del plano al espacio. Ese valor parece el de la densidad crítica para un Universo plano. En este caso se presenta con el signo ">", ya que este Universo deja de ser plano.

$$\rho > 3\,H_0^{\,2} / 8\pi G$$

Concretamente, creemos que se trata de la parte de la Teoría general de la relatividad de Einstein, donde G es la constante de gravitación universal y Ho es la constante de Hubble.

¡Seguimos admitiendo sugerencias y opiniones!

Asimismo, se hace mención a Stephen Hawking cuando Homer dice:

"Es tanto lo que desconozco de la Astrofísica...¡ojalá hubiera leído el libro de aquel tipo de la silla de ruedas!"

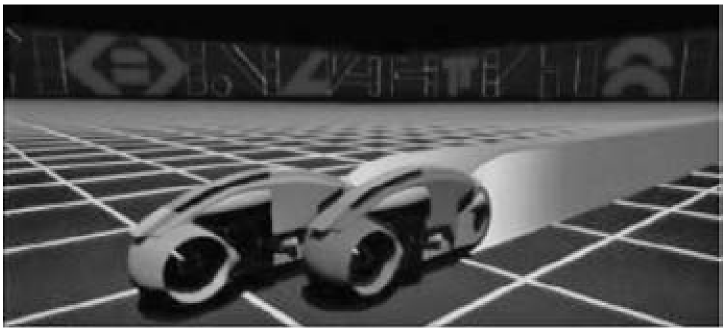
Bart intenta rescatarlo pero Homer tendrá que saltar ese principio de agujero negro.

Seré absorbido por un agujero negro y desapareceré en el olvido. Seré nada, qué será de mí en el otro lado... ¡¡no lo sé!! –grita Homer.

¿Qué será un agujero negro?

Cuando Homer cae se produce una desintegración paulatina de su cuerpo.

Así las cosas, parece casi obligada la referencia que se hace a la película TRON (Steven Lisberger, 1982), que catapultó el tema de la informática y los mundos inimaginables que podría implicar, a las mentes de los espectadores que en ese entonces apenas utilizaban el correo electrónico y los teléfonos móviles. Fue la primera película que dio una idea sobre lo que el ciberespacio podría ser: una dimensión aparte, donde la información fluye y se convierte en una guerra entre el bien y el mal.



Después aparece otro espectacular guiño, donde al replegarse el Universo sobre sí mismo entramos en el mundo 3D, pero no de la animación, sino en el mundo real, en el mundo de los humanos.

La serie de Los Simpson contiene un gran número de referencias al mundo de las matemáticas y del área científico tecnológica… y que iremos desvelando en posteriores artículos.

¿Cuál es la clave de todo esto?

Son muchos los que desconocen que unos cuantos de sus guionistas son licenciados e incluso doctores en Matemáticas, Física, informática, etc.

Así pues, queremos iniciar este pequeño homenaje plasmando una reseña de estos personajes que se encuentran detrás de cada capítulo, en la sombra:

David Samuel Cohen (13/07/1966, Englewood, Nueva Jersey), conocido inicialmente como David S. Cohen y posteriormente como David X. Cohen, es coproductor y guionista de *Los Simpson* y *Futurama*. Licenciado en Física por la Universidad de Harvard en 1988 y Master en Ciencias de la Computación por la Universidad C. Berkeley, publicó el artículo "On the Problem of Sorting Burnt Pancakes" (Discrete Appl. Math. 61 (1995), no. 2, 105–120) junto a Manuel Blum. Dice que le hubiera gustado ser científico... pero que también le gustaba dibujar.

J. Stewart Burns: Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Harvard en 1992 y Master en Matemáticas por U.C. Berkeley en 1993.

Su tesis tuvo como tema "La estructura de las Algebras de Grupo" (The Structure of Group Algebras). Productor y Guionista de *Futurama* y *Los Simpson*.

Al Jean Nació en el 9 de Enero de 1961 en Farmington Hills, Michigan. Durante su juventud, Jean trabajó en la ferretería de su padre, en Michigan. Se graduó de la Escuela Secundaria Harrison y, posteriormente, asistió a la Universidad Harvard, en donde se licenció en Matemáticas. Fue uno de los primeros guionistas de Los Simpson y actual jefe de guionistas.

Al Jean es un productor y escritor. Escribió artículos para la revista *National Lampoon*, y libretos para The Tonight Show, ALF y The PJs. En 1994, junto con Mike Reiss, creó la serie animada *The Critic* (El crítico), la cual fue emitida y cancelada tanto en la ABC como en FOX, antes de tener éxito en reposiciones de Comedy Central. Luego creó una serie de cortos de Internet basados en el personaje Jay Sherman, en el año 2001.

Es productor de *Los Simpson* desde 2001, serie que ha dirigido desde la temporada 13 a la fecha. Fue uno de los productores y guionistas de *The Simpsons Movie*. En un episodio de noche de brujas tuvo el apodo de Al "Family Guy" Jean.

Jean es también el creador de la serie cibernética *Jesus and His brothers*, de Icebox.com.

Ken Keeler: Graduado en la Escuela St. John's en Houston, Texas, obtuvo con honores el título universitario en Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Harvard en 1983. En 1990 recibió su Doctorado en Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Harvard. Luego de doctorarse, Keeler se unió al Departamento de Análisis en los laboratorios de AT&T. Pronto dejó los laboratorios para trabajar como guionista para David Letterman, y posteriormente para varias series de comedia, incluyendo varios episodios de Wings, News Radio, Los Simpson (en donde sufrió fuertes críticas por haber escrito el episodio de la novena temporada *The Principal and the Pauper*), *Futurama*, y *The Critic*, además del programa de corta duración de la FOX *The PJs*.

Jeff Westbrook: Se graduó en Física e Historia de la Ciencia en Harvard. Es doctor en Ciencias Computacionales desde 1989, por la Universidad de Princeton. Fue profesor en Yale y trabajó en los laboratorios AT&T antes de escribir en *Los Simpsons* (2004) y anteriormente en *Futurama*…

Y muchos más que podremos encontrar navegando por la nave cibernética

www.mathsmovies.com

donde podréis ampliar y utilizar actividades para el aula, tutoradas por nuestros amigos *Los Simpson*.

Para cualquier duda, sugerencia…. aulamatematica@gmail.com

A. J. Quételet (1796-1874)

Utilización del método de Euler en el cálculo de la integral definida

Elisabete Alberdi Celaya (*)

1. Inicios del cálculo de áreas

En la Antigua Grecia calculaban las áreas de triángulos, cuadriláteros y de otros muchos polígonos. El método que usaban para ello estaba basado en la disección: se planteaba la partición de una región poligonal en regiones más pequeñas de áreas conocidas, generalmente triángulos. Así, el área de la región más grande se calculaba como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas. En la Antigua Grecia también conocían el área del círculo, aunque éste no se pueda diseccionar exactamente en un número finito de polígonos. Para el cálculo del área del círculo utilizaban la técnica conocida como exhaustión, que consiste en calcular el área del círculo como el límite de las áreas correspondientes a figuras inscritas o circunscritas que aproximan el círculo.

Por ejemplo, para calcular el área del círculo de radio R, se inscribía un polígono regular de N lados dentro del círculo. La longitud de la apotema es $a = R\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$ y la longitud de la cuerda $b = 2R\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$. Por tanto, el área del polígono se puede calcular de la siguiente manera:

$$A = N\frac{a\cdot b}{2} = NR^2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) = R^2\frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

Si hacemos que el número de lados del polígono tienda a infinito, tendremos una aproximación mejor del área del círculo. En el límite, para un polígono de infinitos lados, tenemos esta área:

$$\lim_{N\to\infty} A_N = \lim_{N\to\infty} R^2\frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

Al principio nos queda una indeterminación del tipo ∞·0 que la resolvemos utilizando la regla de L´Hopital:

$$\lim_{N\to\infty} A_N = \lim_{N\to\infty} R^2\frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{R^2\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{2/N} \underset{L'Hopital}{\overset{=}{\downarrow}} \lim_{N\to\infty}\frac{R^2\left(\frac{-2\pi}{N^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{-2/N^2} = \pi R^2$$

(*) Licenciada en Matemáticas, profesora de Lea Artibai ikastetxea y doctoranda).

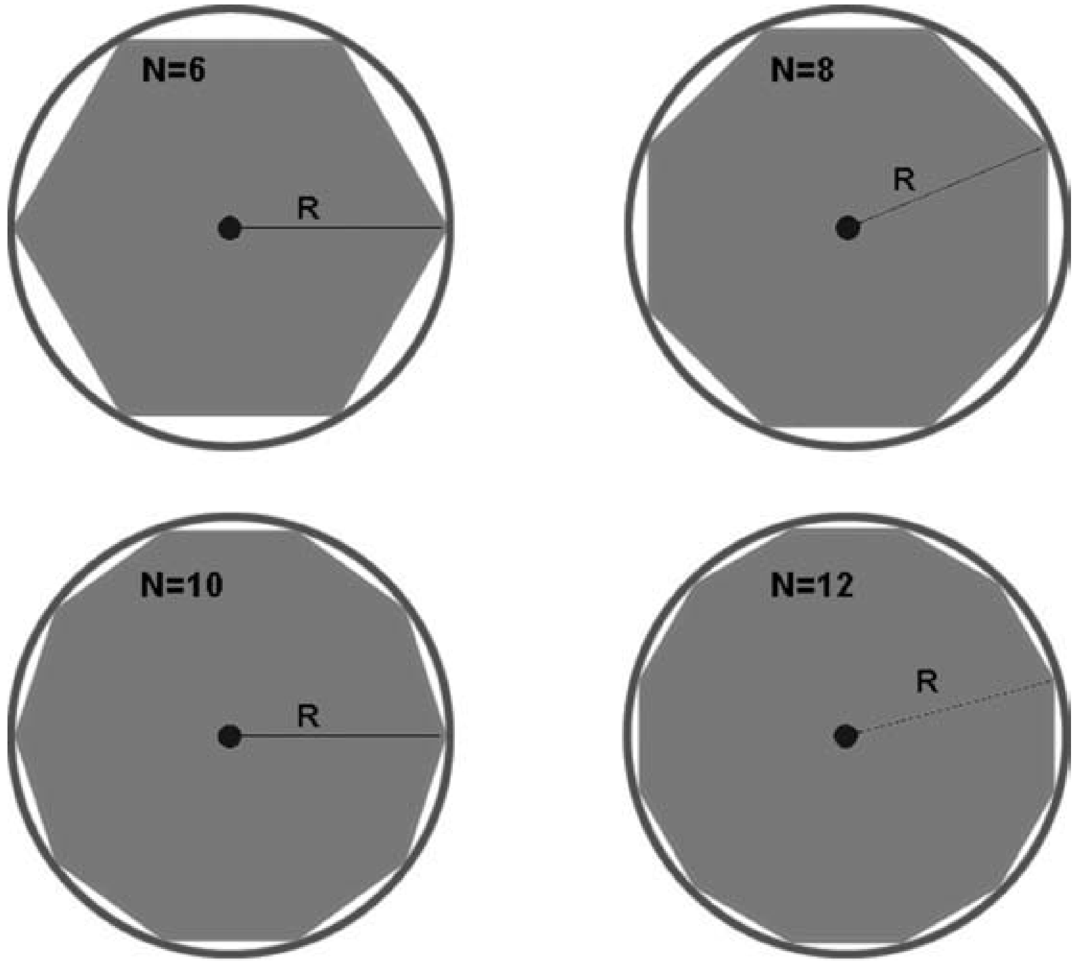


Figura 1. Imagen donde se inscribe un polígono regular de N lados inscrito en un círculo de radio R

2. Integral definida

Una versión más sofisticada del método de exhaustión se la debemos a Riemann. En los programas de segundo curso de bachillerato se incluye el cálculo de integrales y el cálculo de la integral definida. El problema suele consistir en calcular el área comprendida debajo de una función $y=f(x)$. Para ello, se hace una partición del intervalo $\left[a,b\right]$, considerándolo a este como la unión de una serie de subintervalos que no se solapan entre sí. Es decir, que podemos escribir que: $\left[a,b\right]=\left[x_0,x_1\right]\cup\left[x_1,x_2\right]\cup\ldots\cup\left[x_{n-1},x_n\right]$. Más sencillamente hablar de partición de un intervalo es equivalente a hablar de una sucesión de números ordenados de la siguiente manera:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

La longitud del subintervalo $\left[x_{k-1},x_k\right]$ lo denotaremos por Δx_k y viene dado por la siguiente expresión: $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$

Sumas de Riemann: Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $a \le x \le b$. Dada la partición $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a,b]$ y dado el elemento x_k^* perteneciente al subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a, x = b$ se puede aproximar por la unión de *n* franjas verticales. Si denotamos $y_k^* = f(x_k^*)$ la altura en el punto x_k^*, el área de esta franja será la siguiente:

$$A_k = y_k^* \Delta x_k$$

El área total de la unión de todas las franjas será la suma de las áreas de las franjas verticales y es la que se conoce como suma de Riemann:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} y_k^* \Delta x_k$$

Se trata de una aproximación al área que queremos calcular. Hay varias opciones de partición y también hay varias opciones para calcular los números x_k^*, como pueden ser las siguientes:

- Cuando se elige el valor mínimo de cada intervalo: denotamos por $y_{k,\min}$ el valor mínimo del intervalo k-ésimo, es decir: $y_{k,\min} = \min\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$. El área que calcularemos en este caso lo denotaremos por $A_{\min}$ y tendrá el siguiente valor:

$$A_{\min} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,\min} = \sum_{k=1}^{n} y_{k,\min} \Delta x_k \,.$$

- Cuando se elige el valor máximo del intervalo, es decir: $y_{k,\max} = \max\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$. El área que calcularemos en este caso es la siguiente:

$$A_{\max} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,\max} = \sum_{k=1}^{n} y_{k,\max} \Delta x_k \,.$$

La integral de Riemann o integral definida: El método de la integral de Riemann consiste en calcular $A_{\min}$ y $A_{\max}$ para una partición cuya longitud de subintervalo tiende a cero (subintervalos muy pequeños). Cuando los siguientes límites están definidos y son iguales

$$\lim_{n\to\infty} A_{\min} = \lim_{n\to\infty} A_{\max}$$

se dice que la integral de Riemann existe y a este límite común se le conoce como integral de Riemann o integral definida: $A = \int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{h\to 0} A_{\min} = \lim_{h\to 0} A_{\max}$

La relación entre las áreas aproximadas y la integral de Riemann es la siguiente:

$$A_{\min} \le A \le A_{\max}$$

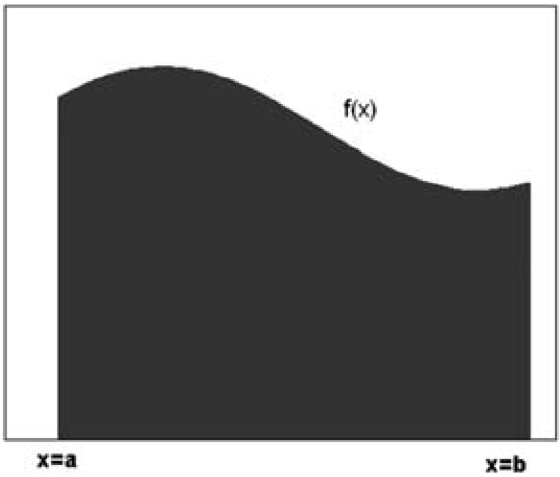
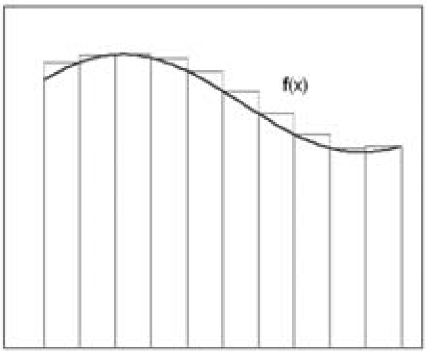


Figura 2. Área comprendida entre las funciones: $y = f(x)$, el eje OX, $x = a$, $x = b$ que se calcula mediante la integral de Riemann o integral definida: $A = \int_a^b f(x) \cdot dx$



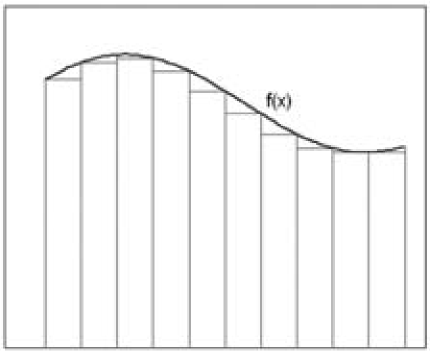


Figura 3. Figuras donde se muestran las aproximaciones a *A* mediante la utilización del valor máximo y mínimo en cada intervalo

3. El signo del operador integral

El signo que se utiliza para denotar la operación de integrar fue propuesto por el matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Leibniz quiso expresar con este símbolo la suma de las ordenadas diferenciales que se sitúan debajo de una curva. El símbolo que se utiliza para denotar la integración es una S estilizada, que no es más que la inicial de la palabra latina summa, "suma" escrito *summa*, de la que Leibniz tomó la inicial. La inicial es una s larga y se trata de una antigua variante de la letra S, que era una forma que tomaba la letra S sin que por ello cambiara su pronunciación. Dependiendo de la posición que ocupaba la s dentro de la palabra, ésta se escribía de distintas maneras. La s redonda (la que utilizamos nosotros) se escribía al final de las palabras y la s larga en todos los demás sitios. La ilustración que se adjunta muestra la letra s en serif y sans serif (sin serifa del francés), en romano y en itálico. Las *serifas* o *remates* son pequeños adornos ubicados generalmente en los extremos de las líneas de los caracteres tipográficos.

Figura 4. Ilustración de la letra s en serif y sans serif, en romano y en itálico, respectivamente

4. Ecuaciones diferenciales

Un modelo matemático es una herramienta que sirve para describir un sistema o fenómeno de la vida real. La formulación del mismo implica la identificación de variables que intervienen en el sistema. Tras la identificación de variables, se formulan las hipótesis del sistema y se determinan las leyes empíricas que se pueden utilizar. Algunas de estas hipótesis reflejarán el cambio de las variables que hemos identificado. El enunciado matemático es una ecuación o un sistema de ecuaciones en las que aparecen derivadas, y no es sino esto *una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.*

Forma de una ecuación diferencial de valor inicial: $y' = f\left(x, y\right), y\left(x_0\right) = y_0$

Su resolución precisa nos posibilitará conocer el comportamiento del sistema. Pero, ¿a qué nos referimos cuando hablamos de modelo matemático?

Supongamos que tenemos una esfera de hielo que se va derritiendo de manera proporcional al área de su superficie y que queremos hallar la expresión del volumen para cualquier instante de tiempo. Las variables de este problema son el volumen y el tiempo, siendo el volumen una función del tiempo. La ley empírica aplicable viene en el enunciado del problema cuando nos dice que "la esfera se derrite a razón proporcional al área de la superficie".

En la cinética de las reacciones químicas interesa la evolución que tienen estas en el transcurso del tiempo. Como la velocidad es la derivada respecto al tiempo de cualquier variable, también se utilizan ecuaciones diferenciales a la hora de modelar la cinética de las reacciones. Un ejemplo es aquel en el que dos substancias crean otra nueva substancia. Las concentraciones de las substancias serían las variables y las leyes empíricas que aplicaríamos serían la ley de acción de masas y la ley de conservación de masas.

También se utilizan ecuaciones diferenciales en el enfriamiento de cuerpos. Supongamos que sacamos un pastel de 150 ºC del horno y que nos interesa conocer la temperatura que tendrá un minuto más tarde. Utilizaremos la ley de enfriamiento de Newton que dice que el cambio de la temperatura del cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y del medio en el que se encuentra el cuerpo. Así, si la temperatura del cuerpo en un instante *t* es *y(t)*, y si la temperatura del ambiente es *T*, según la ley de Newton se cumple la siguiente ecuación diferencial:

$\frac{dy}{dt} = -k\left(y - T\right)$, siendo $k > 0$ la constante de proporcionalidad.

Por tanto sí que hay cosas que modelar en nuestras vidas diarias.

4.1 Las ecuaciones diferenciales en el bachillerato

Las ecuaciones diferenciales que se resuelven en el bachillerato tienen la siguiente forma: $y' = f(x), y(x_n) = y_n$. Por ejemplo podemos hablar de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = x^2, y(0) = 1$$

Las ecuaciones diferenciales más simples se resuelven mediante integración. Así el resultado de la ecuación diferencial anterior es este:

$$y(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + k$$

Utilizamos la condición inicial que tenemos para concretar el valor de la constante y obtenemos lo siguiente:

$$y(0) = k = 1$$

Por tanto, la solución exacta de la ecuación diferencial que hemos planteado es la siguiente:

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + 1$$

Otro ejemplo de ecuación diferencial que se resuelve en el bachillerato puede ser el de un móvil cuya velocidad instantánea viene dada por la expresión: $v(t) = t^2 + 2t$ y se nos pide calcular en qué posición va estar en cada instante *t* sabiendo que se hallaba en 15 m cuando $t = 0$. Este problema se resuelve integrando la ecuación diferencial que nos dan:

$$e(t) = \int v(t) \cdot dt = \int \left(t^2 + 2t\right) dt = \frac{t^3}{3} + t^2 + k$$

Sustituyendo $t = 0$, obtenemos que $k = 15$. Por lo que la solución a la ecuación diferencial que se nos plantea es la siguiente:

$$e(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + 15$$

4.2 Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se sitúan a finales del siglo XVII con los trabajos de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Gracias al desarrollo que tuvieron la mecánica, la física y el electromagnetismo, las ecuaciones diferenciales se convirtieron en una herramienta útil a la hora de describir fenómenos naturales. Hasta el siglo XIX. los científicos se ocupaban de hallar la solución explícita de estos problemas. Son de esta época los científicos Leonhard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Pierre Simon de Laplace (1749-1827).

La solución se hallaba mediante integración en los casos más simples. Pero no siempre era fácil o no era posible hallar la solución explícita de las ecuaciones diferenciales. Por ello fue Euler en el año 1760 el primero en proponer un método numérico que hacía posible la resolución de la ecuación diferencial. Dada una ecuación diferencial con valor inicial $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$, el método de Euler se basa en una idea tan simple como dividir el intervalo de tiempo en el que se quería hallar la solución en subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ de longitud *h*. El método de Euler nos dice que el valor de la función al final de un subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ viene dado por la siguiente expresión:

$$y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-1} + hy'(t_{k-1}, y_{k-1})$$

Se trata de un método explícito, ya que utiliza valores del paso anterior para avanzar un paso, donde se calcula el punto final y_k del intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ moviéndonos sobre la recta tangente en el punto (t_{k-1}, y_{k-1}), que es el punto inicial del subintervalo.

Una de las variantes hechas al método de Euler es el conocido como método de Euler implícito o regresivo, donde se utiliza la derivada del punto final del subintervalo para avanzar un paso. La fórmula es la siguiente: $y_k = y_{k-1} + hf(t_k, y_k) = y_{k-1} + hy'(t_k, y_k)$. Este método consiste en calcular el punto final (t_k, y_k), de tal forma que la recta tangente en el punto (t_k, y_k) contenga al punto inicial del intervalo (t_{k-1}, y_{k-1}).

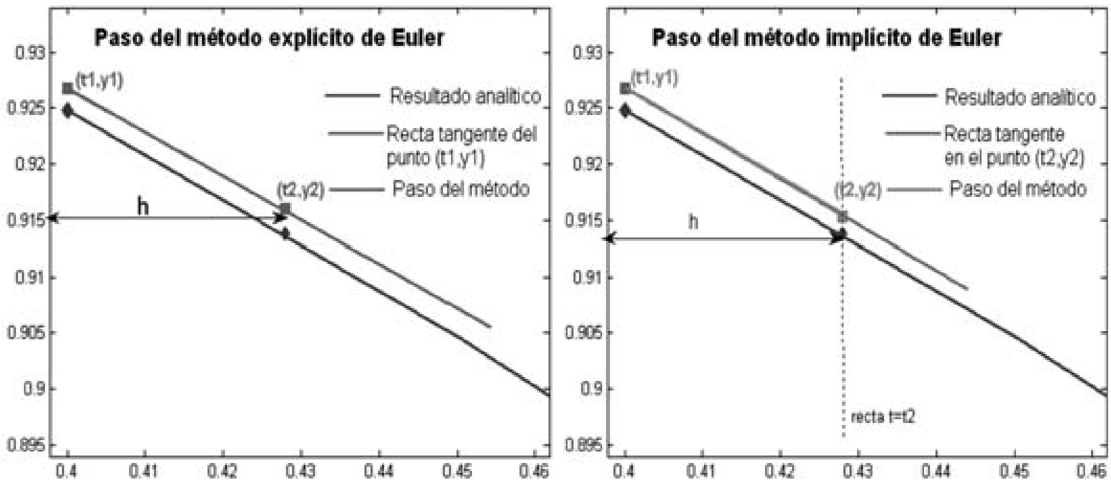


Figura 5. Imagen de un paso de los métodos explícito e implícito de Euler

5. Cálculo de la integral definida utilizando el método de Euler explícito

El método de Euler sirve para hallar la solución de una ecuación diferencial del tipo $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ en un intervalo $[a,b]$. Para ello, se hace una partición del intervalo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

A continuación se considera el primer subintervalo $[x_0, x_1]$ y se construye la solución de la ecuación diferencial de la siguiente manera:

- Calculamos el punto final del subintervalo $y_1 = y_0 + hf(x_0) = y_0 + hy'(x_0)$
- La solución en el intervalo $[x_0, x_1]$ será la recta que pasa por los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, que son los puntos extremos del primer intervalo. Es decir, la recta cuya ecuación es la siguiente:

$$g_1(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \text{ siendo } x \in [x_0, x_1]$$

Para hallar la solución en el segundo subintervalo $[x_1, x_2]$ repetimos lo que hemos hecho en el primero:

- Calculamos el punto final del subintervalo $y_2 = y_1 + hf(x_1) = y_1 + hy'(x_1)$
- La solución en el intervalo $[x_1, x_2]$ será la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, que son los puntos extremos del segundo intervalo. Es decir:

$$g_2(x) = y_1 + y'(x_1)(x - x_1) \text{ siendo } x \in [x_1, x_2]$$

Por tanto, se puede concluir fácilmente que para un intervalo genérico $[x_{k-1}, x_k]$ la solución de la ecuación diferencial en este subintervalo será el dado por la siguiente función: $g_k(x) = y_{k-1} + y'(x_{k-1})(x - x_{k-1})$ siendo $x \in [x_{k-1}, x_k]$. La solución en todo el intervalo $[a, b]$ será la unión de las soluciones en los subintervalos, es decir una función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ g_k(x) = y_{k-1} + y'(x_{k-1})(x - x_{k-1}), & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \vdots & \\ g_n(x) = y_{n-1} + y'(x_{n-1})(x - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

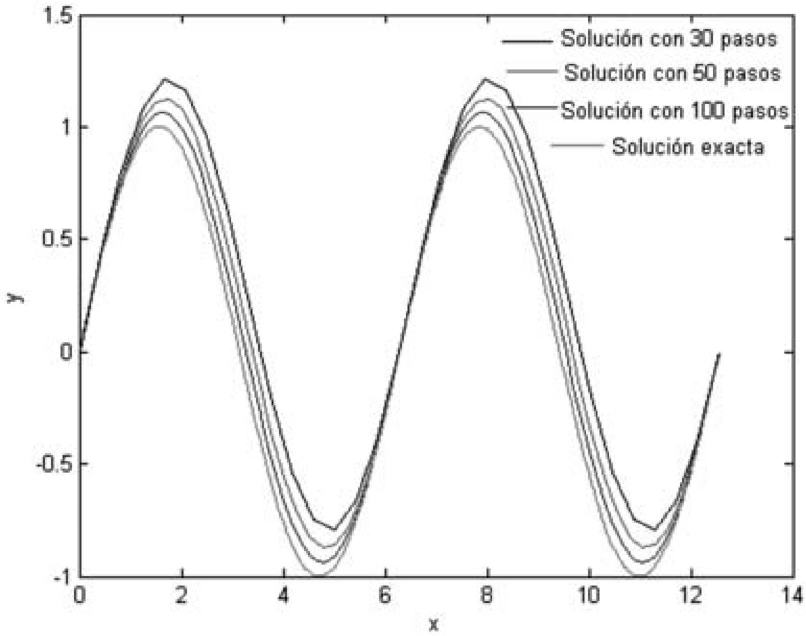


Figura 6. Solución de la ecuación diferencial $y' = \cos x$, $y(0) = 1$ calculada mediante el método de Euler explícito dando 30, 50 y 100 pasos. Su solución exacta es la siguiente: $y = \sin x$

Nosotros estamos interesados en utilizar el método de Euler durante el proceso de hallar el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)\cdot dx$. Consideraremos la partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo [*a*,*b*] y calcularemos la derivada de la función que queremos integrar, es decir: $d(x) = f'(x)$. A continuación, aplicaremos el método de Euler a la ecuación diferencial $y' = d(x)\left(= f'(x)\right)$ con valor inicial $y\left(x_0\right) = f\left(x_0\right) = d_0$. De esta manera, estamos aproximando la función *f(x)* por un conjunto de rectas construidas mediante el método de Euler. El área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$ se puede aproximar por la unión de *n* franjas de forma trapezoidal. El área del trapecio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ viene dado por la siguiente expresión:

$$A_k = h\frac{(a+b)}{2} = h\frac{\left(y_{k-1} + y_k\right)}{2}$$

El área total de la unión de todas las franjas será la suma de las áreas de las franjas trapezoidales, es decir:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{k-1} + y_k\right)$$

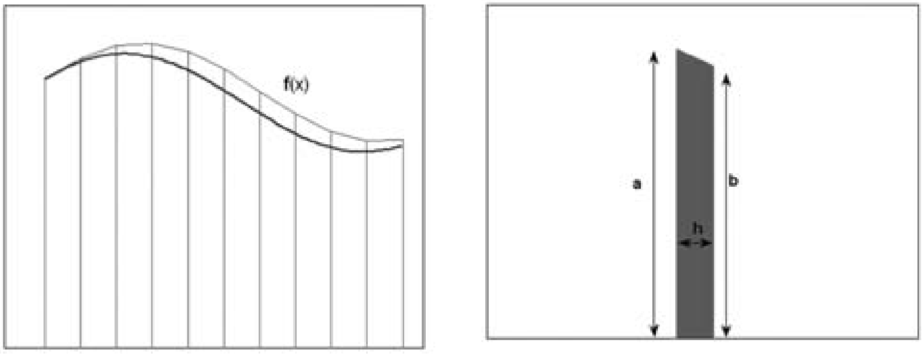


Figura 7. Aplicación del método de Euler a la ecuación diferencial $y' = d(x)$ $(= f'(x))$, $y(s_0) = f(x_0) = d_0$.
El área total se calcula como suma de las áreas de las franjas trapezoidales

6. Aplicación de lo expuesto a un ejemplo concreto

Consideramos la función $f(x) = x^3$. Estamos interesados en calcular el área comprendida entre la función $f(x) = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 4$. Es decir, queremos calcular la integral definida: $\int_0^4 x^3\cdot dx$. Integrando y aplicando la regla de Barrow podemos calcular el valor exacto del área definida por la integral definida: $A = \int_0^4 x^3\cdot dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^4 = 4^3 - 0 = 64\,u^2$

Haremos un cálculo aproximado de este valor de tres formas distintas:

- Cogiendo en cada subintervalo el valor mínimo.
- Cogiendo en cada subintervalo el valor máximo.

- Haciendo una aproximación de la función $f(x) = x^3$ utilizando rectas. Para este tercer caso, aplicaremos el método de Euler a la ecuación diferencial $y' = 3x^2$ ($= (x^3)$) que es la derivada de la función que queremos integrar con valor inicial $y\ (x_0) = f(0) = 0$.

Haremos los cálculos para dos particiones distintas: la primera partición consistirá en 10 subintervalos y la segunda en 100 subintervalos.

En las siguientes gráficas se muestra el área que estamos calculando en cada caso:

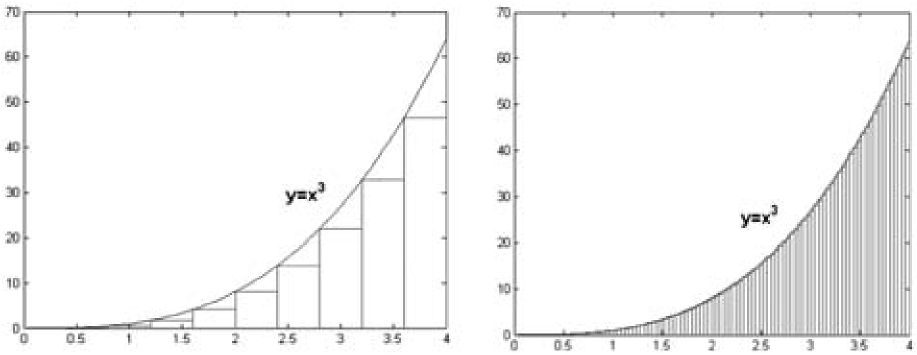


Figura 8. Cálculo del área cogiendo el mínimo en cada subintervalo. Imágenes correspondientes a 10 y 100 subintervalos. Los valores aproximados del área son estos: $A_{min,10} = 51{,}84u^2$, $A_{min,100} = 62{,}7264u^2$

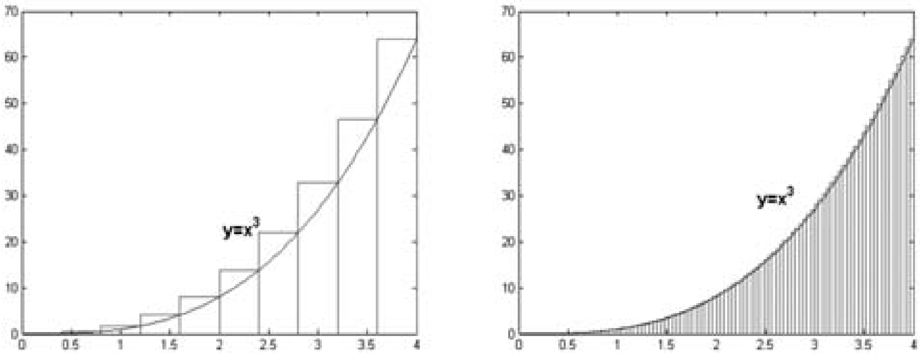


Figura 9. Cálculo del área cogiendo el máximo en cada subintervalo. Imágenes correspondientes a 10 y 100 subintervalos. Los valores aproximados del área son estos: $A_{max,10} = 77{,}44u^2$, $A_{max,100} = 65{,}2864u^2$

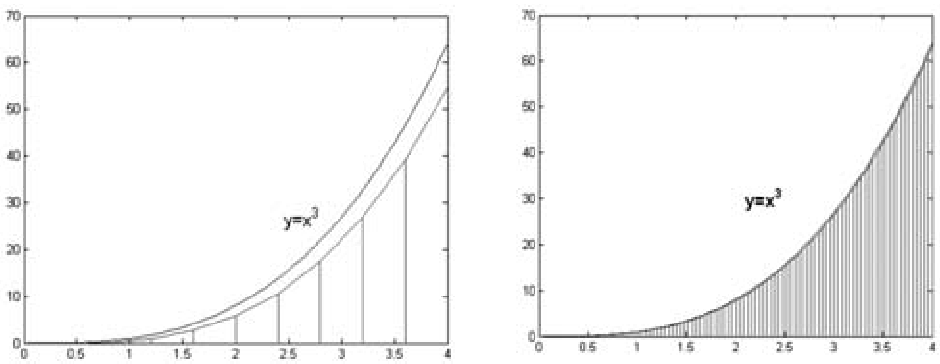


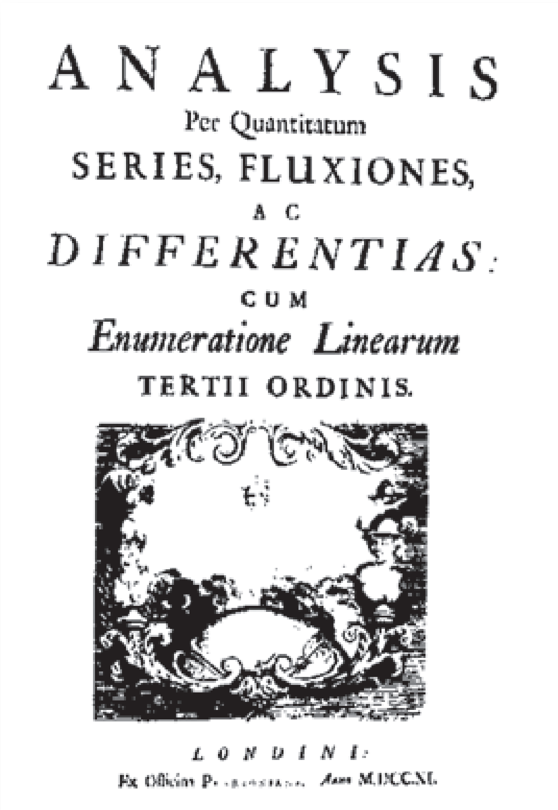
Figura 10. Cálculo del área de las franjas trapezoidales que surgen tras aplicar el método de Euler. Imágenes correspondientes a 10 y 100 subintervalos. Los valores aproximados del área son estos: $A_{euler,10} = 52{,}4160u^2$, $A_{euler,100} = 62{,}7327u^2$

Las cifras de ese maravilloso y misterioso número (homenaje al gran Newton)

Inmaculada Fernández (*)

Aprovecho el 282 aniversario de la muerte de uno de mis matemáticos preferidos, Isaac Newton, para rendirle un pequeñísimo homenaje contando algunas de sus hazañas científicas, las cuales hoy en día y a través de todos los tiempos nos han acompañado de una forma u otra, tanto en nuestra vida estudiantil como en la investigadora.

En este homenaje quiero contar el desarrollo del Cálculo del número π, que Newton explicó y que aparece en su *Methodus Fluxiorum et Serium Infinitorum*, de 1671.


ANALYSIS
Per Quantitatum
SERIES, FLUXIONES,
AC
DIFFERENTIAS:
CUM
Enumeratione Linearum
TERTII ORDINIS.

LONDINI:
Ex Officina P[illegible] Anno M.DCC.XI.

A lo largo de la historia hemos conocido muchos matemáticos de todas las épocas, así como sus aportes e investigaciones, y gracias a las cuales hemos podido seguir trabajando en este amplio e interesante campo como son las matemáticas y, en general, en el campo de la ciencia.

(*) IES Sancho III El Mayor, Tafalla (Comunidad Foral de Navarra).

"No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero en mi opinión, me he comportado como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte buscando de vez en cuando una piedra más pulida y una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad se exponía ante mí completamente desconocido."

Isaac Newton

Todos conocemos a nuestro gran Newton, ese señor que tanto aportó a las matemáticas y que tanta admiración le tenemos por sus grandes aportaciones a la ciencia.

Isaac Newton nació el día de Navidad del antiguo calendario en 1642 (correspondiente al 4 de Enero de 1643 del nuevo calendario), año en que moría Galileo, en el pueblecito de Woolsthorpe, unos 13 km al sur de Grantham, en el Lincolnshire. En junio de 1661, a los dieciocho años, era alumno del Trinity College, en Cambridge. Al comienzo de su estancia en Cambridge, se interesó en primer lugar por la química, el cual le duró a lo largo de toda su vida.

Durante su primer año de estudios, y probablemente por primera vez, leyó una obra de matemáticas sobre la geometría de Euclides (325 a.C.- 265 a.C.), lo que despertó en él el deseo de leer otras obras. En 1663, Newton leyó la *Clavis mathematicae* de Oughtred, la *Geometria a Renato Descartes* de Van Schooten, la *Óptica* de Kepler, la *Opera mathematica* de Vieta, editadas por (1615-1660) y, en 1644, *la Aritmética* de Wallis (1616-1703) que le serviría como introducción a sus investigaciones sobre las series infinitas, el teorema del binomio, ciertas cuadraturas.

A partir de 1663 Newton conoció a Barrow (1630-1677), quien le dio clase como primer profesor lucasiano de Matemáticas. En la misma época, Newton entró en contacto con los trabajos de Galileo (1564-1642), Fermat (1601-1665), Huygens (1629-1695) y otros, a partir probablemente de la edición de 1659 de la *Geometria* de Descartes por Van Schooten (1615-1660).

De Newton conocemos diversas investigaciones como el teorema del binomio, que aborda sobre 1645 a partir de los trabajos de Wallis, y comienza el cálculo de fluxiones que terminará en 1671 en su obra *Methodus fluxionum et serierum infiniturum*.

Uno de los trabajos de esta obra es el cálculo del número π, que a continuación voy a desarrollar y para el cual Newton considera la circunferencia de *centro* (1/2,0) y *radio* 1/2.

Cálculo del número π

Se considera la circunferencia de centro (1/2,0) y radio1/2

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$$

Despejando *y* en función de *x* de la ecuación de la circunferencia y usando el desarrollo del binomio se obtiene

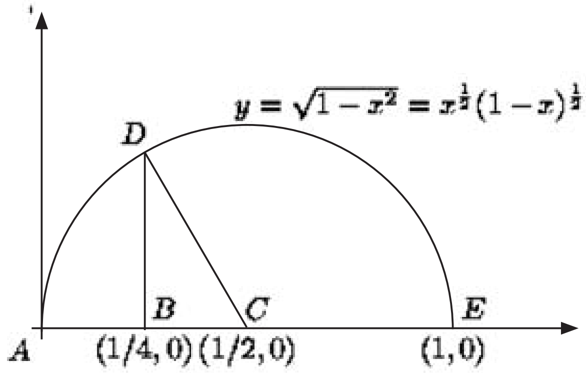
$$y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-\frac{1}{4}+x}=\sqrt{-x^2+x}=\sqrt{x(1-x)}=x^{1/2}\left(1-x\right)^{1/2}$$

Por tanto, haciendo uso del desarrollo en serie de un polinomio, se tiene:

$$y=x^{1/2}(1-x)^{1/2}=x^{1/2}\left[1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-....\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y=x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{3/2}-\frac{1}{8}x^{5/2}-\frac{1}{16}x^{7/2}-\frac{5}{128}x^{9/2}-\frac{7}{256}x^{11/2}-....$$

Observando el siguiente dibujo, podemos apreciar la curva "y", y dentro de ella, trazado el triángulo rectángulo BCD, el cual tiene como vértice C, que es el centro de dicha semicircunferencia.



Calcula entonces el área debajo de la curva integrando término a término

$$A(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{5}x^{5/2}-\frac{1}{28}x^{7/2}-\frac{1}{72}x^{9/2}-\frac{5}{704}x^{11/2}-.....$$

Luego para x = 1/4, el área de la región ADB es igual a

$$\text{Área (ADB)}=\frac{1}{12}-\frac{1}{160}-\frac{1}{3584}-\frac{1}{36864}-\frac{5}{1441792}-....=0.0767737208....$$

Calcula luego la misma área por geometría, ya que

Área (ADB) = área (sector ACD) - área (DBC)

Para evaluar esta última relación calcula primero la longitud de BD, usando el teorema de Pitágoras (580 a. C - 500 a. C), y sabiendo que CD = 1/2 y BC=1/4 así:

$$\text{BD}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Luego, se observa de los lados del triángulo BCD, que $\hat{C} = 60^{o}$, ya que

$$Sin\hat{C} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{C} = 60^{\circ}$$

o análogamente

$$Cos\hat{C} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{C} = 60^{\circ}$$

De donde

$$\text{Área (sector ACD)}= \frac{1}{3}\,\text{área (semicircunferencia)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right) = \frac{\pi}{24}$$

Mientras que

$$\text{Área (triángulo DBC)}=\frac{1}{2}\,BC\times BD=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Por tanto

$$\text{Área (ADB)}=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{32}$$

Igualando los dos valores encontrados anteriormente para esta área resulta

$$\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{32} = 0.0767737208\ldots\ldots$$

Y por consiguiente

$$\pi \equiv 24\left(0.0767737+\frac{\sqrt{3}}{32}\right) = 3.141607404$$

Valor que aquí hemos calculado sumando sólo cinco términos de la serie, siendo correcto hasta cuatro decimales (el error es 1.47×10^{-5}).

Newton de hecho usa veinte términos del binomio para llegar a calcular π con 16 decimales correctos.

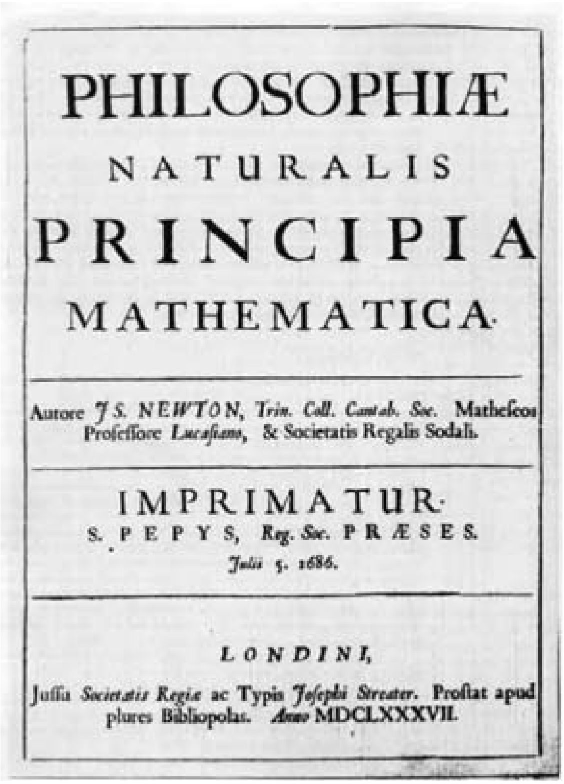
Luego dice "I am ashamed to tell you how many figures I carried these calculations, having no other business at the time" (me avergüenzo de decirle cuantas cifras he calculado, no teniendo nada más que hacer en aquel momento).

A pesar de sus afirmaciones, este es un nuevo paso de gigante en el cálculo del número π.

Entre 1665-1666 vive retirado en la granja familiar debido a una epidemia de la peste bubónica y en este periodo descubre la ley del inverso del cuadrado , de la gravitación, desarrolla su cálculo de fluxiones, generaliza el teorema del binomio y pone de manifiesto la naturaleza física de los colores. Sin embargo, Newton guarda silencio sobre sus descubrimientos y reanuda sus estudios en Cambridge en 1667.

De 1667 a 1669, emprende activamente investigaciones sobre Óptica. En 1669, envía a Collins, por medio de Barrow, su *Analysis per aequationes numero terminorum infinitos*. Para Newton, este manuscrito representa la introducción a un potente método general, que desarrollará más tarde: su cálculo diferencial e integral.

En 1672 publicó una obra sobre la luz con una exposición de su filosofía de las Ciencias, y en 1687 *Los Principia (Philosophiae naturalis principia matemática)*.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Los tres libros de esta obra contienen los fundamentos de la física y la astronomía escritos en el lenguaje de la geometría pura. La primera información publicada acerca de su cálculo diferencial e integral.

Aunque en esta obra predomina la forma sintética y, por otra parte, Newton utiliza métodos geométricos en sus demostraciones, se encuentran sin embargo algunos pasajes analíticos, en particular la sección primera del libro I, titulada: "El método de las primeras y últimas razones".

Este libro I, titulado: *El movimiento de los cuerpos*, trata abundantemente de Mecánica y comprende también un estudio y una descripción orgánica de las cónicas.

El libro II está consagrado al movimiento de los cuerpos en medios que ofrecen una resistencia como el aire y los líquidos. Es la verdadera introducción a la ciencia del movimiento de los fluidos. Se puede encontrar en él, entre otras cosas, un estudio de la forma de los cuerpos para ofrecer menos resistencia, una sección sobre la teoría de las ondas, una fórmula para la velocidad del sonido en el aire y un estudio de las ondas en el agua.

El libro III, titulado *Sobre el sistema del mundo*, contiene las aplicaciones al sistema solar de la teoría general desarrollada en el libro I. Newton demostró cómo calcular la masa del Sol en términos de la masa de la Tierra y de los otros planetas que tienen un satélite. Calculó la masa volúmica media de la Tierra y demostró que tenía la forma de un esferoide aplanado, y que, por consiguiente, la atracción no era constante en su superficie. Hizo también un estudio de la precesión de los equinoccios y de las mareas, explicó que la Luna constituía la causa principal de este fenómeno y que el Sol también ejercía en él una influencia. Dedicó también un estudio detallado al movimiento de la Luna, porque debía servir para mejorar la determinación de las longitudes.

Como anexo del libro III se encuentra la teoría de las fluxiones (*Methodus fluxionum et serierum infiniturum*), comenzada en 1664. Newton tenía intención de publicarla, en particular en su

Opticks (1704), pero a causa de las críticas formuladas anteriormente con respecto a sus principios sobre la naturaleza de la luz, decidió no hacerlo. De hecho, será publicada en 1736 en edición inglesa, y no será publicada en versión original hasta 1742. Newton expone en este libro su segunda concepción del Análisis, introduciendo en sus métodos infinitesimales el concepto de *fluxión*.

Hacia 1679, verificó su ley de la gravitación universal ($\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$) y estableció la compatibilidad entre su ley y las tres de Kepler sobre los movimientos planetarios.

Además de las obras mencionadas anteriormente, existen muchas más como *De analysi* que fue publicado en 1711, y *De quadratura curvarum*, escrita en 1676 y publicada en 1704, como apéndice a su *Opticks*.

Y cómo no, una aportación importantísima a todos los campos fue el Teorema del Binomio, el cual lleva su nombre. Este teorema fue descubierto hacia 1664-1665 y comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a Henry Oldenburg (hacia 1615-1677), secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de Leibniz (1646-1716) que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema. Leibniz responde, en una carta fechada el 17 de agosto del mismo año, que está en posesión de un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc., y menciona algunos de sus resultados. Interesado por las investigaciones de Leibniz, Newton le responde también con una carta fechada el 24 de octubre en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su *Algebra*, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Se dedicó también al estudio de la Hidrostática y de la Hidrodinámica además de construir telescopios. Realizó diversos estudios sobre Química.

Los últimos años de su vida se vieron ensombrecidos por la desgraciada controversia, de envergadura internacional, con Leibniz a propósito de la prioridad de la invención del nuevo Análisis. Acusaciones mutuas de plagio, secretos disimulados en criptogramas, cartas anónimas, tratados inéditos, afirmaciones a menudo subjetivas de amigos y partidarios de los dos gigantes enfrentados, celos manifiestos y esfuerzos desplegados por los conciliadores para aproximar a los clanes adversos, he aquí en pocas palabras los detalles de esta célebre controversia, que se terminó con la muerte de Leibniz en 1716, pero cuyas malhadadas secuelas se harán sentir hasta fines del siglo XVIII.

Después de una larga y atroz enfermedad, Newton murió durante la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado en la abadía de Westminster en medio de los grandes hombres de Inglaterra.

Para concluir con la vida de este genio de las matemáticas y la ciencia, cito una de sus frases célebres:

"Si he visto más lejos que los otros hombres es porque me he aupado a hombros de gigantes".

I. Newton (cuadro de W. Blake)

Bibliografía

Boyer, Darl B., 1986: *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universal. Madrid.

Collette, J. P., 1985: *Historia de las Matemáticas*. 1ª edición, Siglo XXI de España Editores. Madrid.

Rey Pastor, J., Babini, J., 1984: *Historia de la Matemática*. 1ª edición, Gedisa. Barcelona.

Webs de interés

www.gap-system.org/~history/BiogIndex.html

www.artehistoria.jcyl.es/histesp/personajes/6271.htm

www.unex.es/~fan/cuantica/mc%2010/Web/Tales/newt.html

www.geocities.com/Colosseum/Loge/3802/BiografiaIsaacNewton.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

http://www.geocities.com/grandesmatematicos/

Sofia Kovalevskaya (1850-1891)

La resolución de problemas y los protocolos

Javier Sansuán (*), Begoña Omatos (**) y Manuel Sada (***)

Escribe D. Miguel de Guzmán que si pretendemos mejorar nuestros procesos de pensamiento, relativos a la resolución de problemas, es absolutamente necesario disponer de técnicas que nos permitan examinarlos a fondo, compararlos con los modelos que nos fijamos como deseables, para así poder señalar nuestras líneas de acción y detectar nuestros progresos hacia el objetivo de crear en nosotros hábitos eficientes.

Añade Miguel, que no sólo hay que ejercitarse en resolver muchos problemas sino también en examinar los propios procesos mentales. Para lograr establecer el hábito de analizar nuestros procesos de pensamiento propone un esquema que denomina *Protocolo*.

¿Qué es un protocolo? Entendemos por protocolo un proceso que consiste en levantar acta, lo más fielmente posible, y que dé constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación con el problema.

¿Cómo se realiza un protocolo? Durante nuestra ocupación mental con un problema ocurren muchas cosas interesantes. Normalmente anotamos nuestros cálculos, esquemas, figuras o diagramas, pero dejamos de lado otros aspectos como lo que sentimos ante un problema, las dificultades observadas, etc. El mero borrador de nuestros cálculos e intentos sucesivos no es el protocolo del proceso.

El protocolo ideal debería reflejar al menos tres aspectos:

- Lo que he ido realizando.
- Lo que he ido pensando.
- Los sentimientos y situaciones por las que he ido pasando.

Una técnica que nos puede ayudar en la realización de un protocolo consiste en ir anotando con orden, sin corregir nada de él, ocupándonos con ahínco, por supuesto, de resolver nuestro problema, pero procurando también señalar brevemente los aspectos de la situación de nuestro espíritu que inciden de algún modo en el proceso.

Si el protocolo está bien hecho, se observarán en él dos anotaciones fáciles de distinguir. Por un lado las que corresponden al contenido del proceso, es decir las cuentas, los dibujos, los esquemas, y por otra parte las notas que resulten de las observaciones que, a intervalos determinados ha hecho el propio autor del proceso.

(*) Instituto IES Sanguesa (Comunidad Foral de Navarra).

(**) IES de Berriozar (Comunidad Foral Navarra).

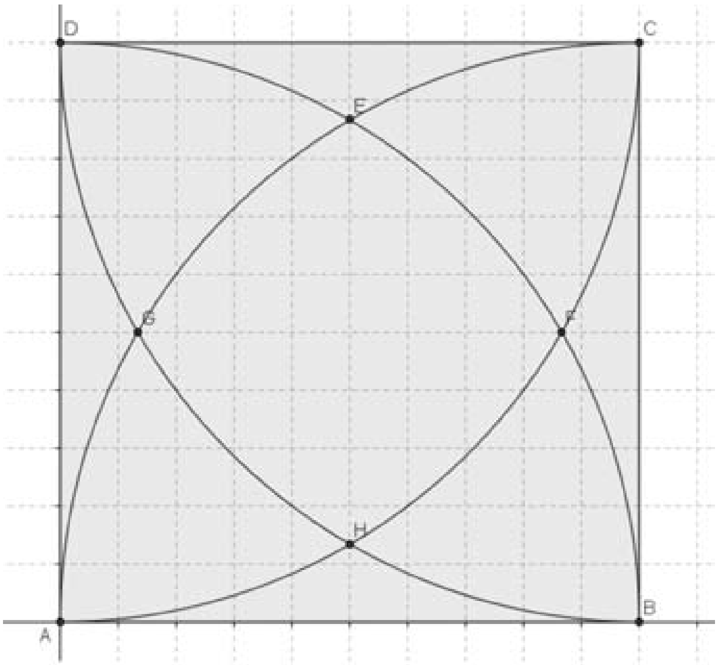
(***) Asesor de matemáticas del CAP de Pamplona.

1. Tres protocolos

Con motivo de un Seminario en torno a la resolución de problemas, organizado por el CAP de Pamplona, se propuso a los asistentes la opción de resolver una serie de problemas, pero con el compromiso de realizar su protocolo correspondiente. Fueron varios los atrevidos, aquí presentamos tres de los protocolos siguiendo las directrices expuestas anteriormente.

1.1 Protocolo 1: La región

Dado un cuadrado de lado a, se trazan arcos de circunferencia, de radio a, con centro en cada uno de los vértices, interiores al cuadrado, dividiendo a éste en nueve regiones, cuatro iguales entre sí, otras cuatro iguales entre sí, y una distinta. Calcular el área de cada uno de los tres tipos de regiones en que ha quedado dividido el cuadrado.



Protocolo

¿Por qué elijo este problema?

En primer lugar los problemas que habían aparecido en las sesiones del CAP no me resultaban atractivos.

En segundo lugar por un espíritu masoquista: las construcciones geométricas nunca han sido mi fuerte. En consecuencia es un tema que debo imponerme trabajar.

Primeras ideas y consecuencias

No se si influenciado porque este trimestre estoy trabajando las cónicas en 1º de Bachillerato y las integrales en 2º, y teniendo en cuenta que las áreas que se piden no son las que encierran dos o tres curvas, se me ocurre hallar los puntos de corte y utilizar la integral definida.

Para simplificar el problema considero que el cuadrado tiene uno de sus vértices en el origen de coordenadas, A(0,0) y, en consecuencia, sus otros vértices son B(a,0), C(a,a), D(0,a).

Consecuentemente las ecuaciones de cada una de las "circunferencias" serán :

$$x^2+y^2=a^2 \qquad (x-a)^2+y^2=a^2 \qquad (x-a)^2+(y-a)^2=a^2 \qquad x^2+(y-a)^2=a^2$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes hallaríamos que:

$$H\begin{cases}(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\\ x^2+(y-a)^2=a^2\end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{a}{2},(1-\frac{\sqrt{3}}{2})a\right)$$

Hay otro punto de corte pero fuera del cuadrado

$$G\begin{cases}(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\\ (x-a)^2+y^2=a^2\end{cases} \Rightarrow G\left((1-\frac{\sqrt{3}}{2})a,\frac{a}{2}\right)$$

$$E\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2\\ x^2+y^2=a^2\end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \qquad F\begin{cases}x^2+(y-a)^2=a^2\\ x^2+y^2=a^2\end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2}\right)$$

En este punto veo que la cosa comienza a alargarse, más teniendo en cuenta que el problema lo he sacado de una página web de Olimpiadas de Matemáticas Iberoamericanas, luego debería haber un método más simple. No obstante sigo para intentar llegar a algún resultado y, en todo caso, poder compararlo con algún otro método alternativo que se me ocurra con posterioridad.

NOTA. Las coordenadas de los puntos de corte repiten $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{2}$, que suena a razones de 60º o 30º.

El área AHB es simétrica y por tanto será: $2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$.

Esta integral se resuelve con un cambio de variable $x = a$ sen t.

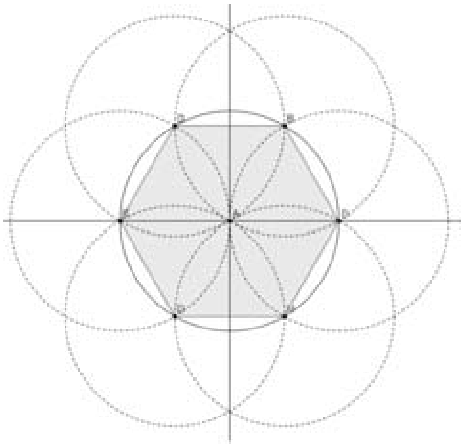
Lo que me lleva a abandonar este método pues, aunque doy por supuesto que se llegaría a un resultado, no es un cambio que, al menos en 2º de Bachillerato se explique habitualmente.

No obstante uso el programa DERIVE y obtengo que ese área es: $\dfrac{a^2\,(12-3\sqrt{3}-2\pi)}{12}$

Cambio de rumbo

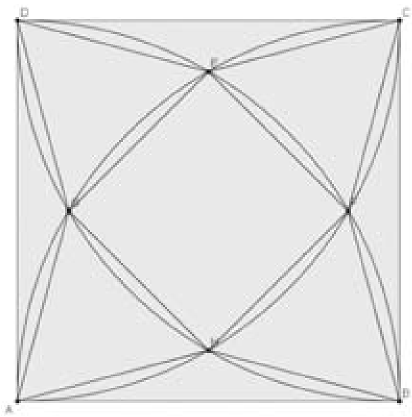
Hasta este momento estaba intentando resolver un problema geométrico sin usar geometría. Creo que de tanto mirar empiezo a intuir algunas relaciones. Además la nota sobre las razones trigonométricas que he puesto en el punto anterior me anima a buscar en el dibujo.

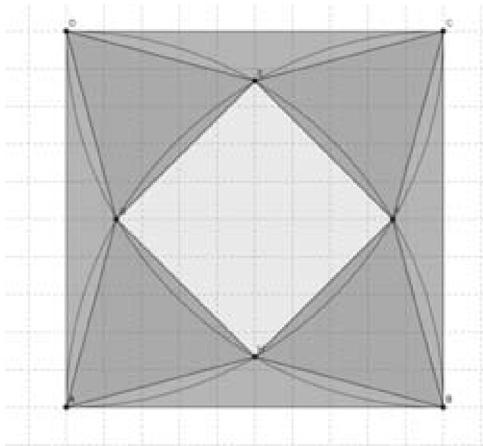
En primer lugar recuerdo de mis años de estudiante de bachillerato la construcción de un hexágono regular:



También recuerdo que una forma simple de calcular áreas es "triangularizando" la figura.

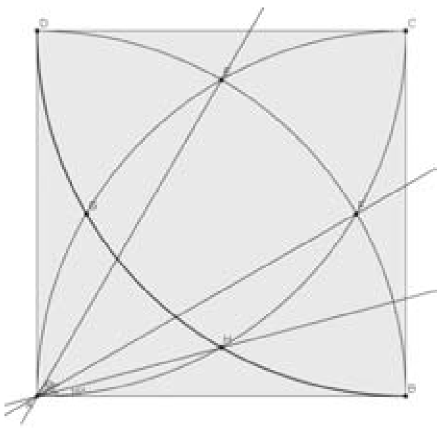
Al final veo lo siguiente:

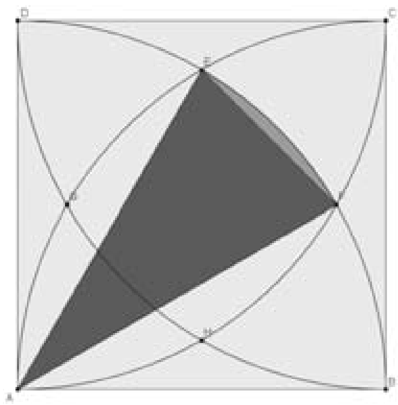




Hay triángulos, cuadrilátero, sectores circulares y, sobre todo, un arco cortado por una cuerda que se repite y repite y que parece clave para el cálculo de cualquiera de las áreas.

Pero para hallar áreas de sectores necesito ángulos. Trazo líneas por los puntos de corte y veo ángulos de 60º (en el punto E de mi recuerdo anterior), 30º y 15º.





Creo que con estos datos puedo resolver el problema.

Voy a calcular en primer lugar el área de ese arco cortado por una cuerda (zona rosa).

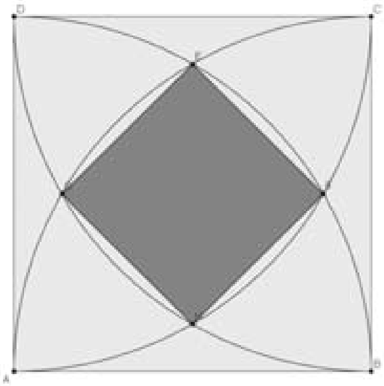
El ángulo A es de 30º, es decir $\frac{\pi}{6}$ radianes. Las distancias AE y AF son:

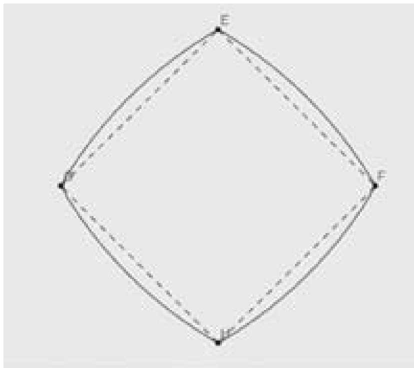
Área triángulo AEF = $\frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 30^{\circ} = \frac{a^2}{4}$; Área sector AEF= $\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}a^2 = \frac{\pi \cdot a^2}{12}$

Por tanto el área de la zona rosa = $\frac{\pi \cdot a^2}{12} - \frac{a^2}{4} = \frac{(\pi - 3) \cdot a^2}{12}$

Observo que hay 12 recintos de esta forma.

Paso al cálculo de cada una de las áreas que planteaba el problema:



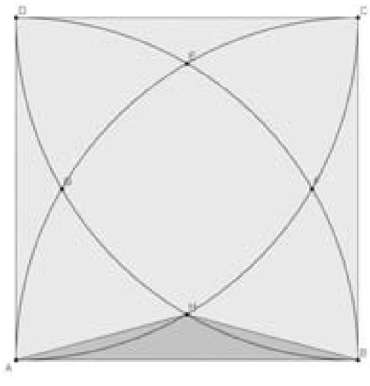


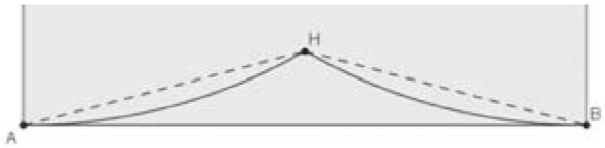
El lado del cuadrado EF es la base del triángulo AEF (que es isósceles). Usando el teorema de los senos:

$$\frac{EF}{\sin 30^{\circ}} = \frac{a}{\sin 75^{\circ}} \Rightarrow EF = \frac{a \cdot \sin 30}{\sin 75^{\circ}} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{a \cdot \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$\text{Área}\,EGHF = \left[\frac{a \cdot \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}\right]^2 = a^2 \cdot (2-\sqrt{3})$$

Por tanto, el área del cuadrado "curvo" = $a^2 \cdot (2-\sqrt{3}) + 4 \cdot \frac{(\pi-3) \cdot a^2}{12} = \frac{\left(3+\pi-3\sqrt{3}\right)a^2}{3}$





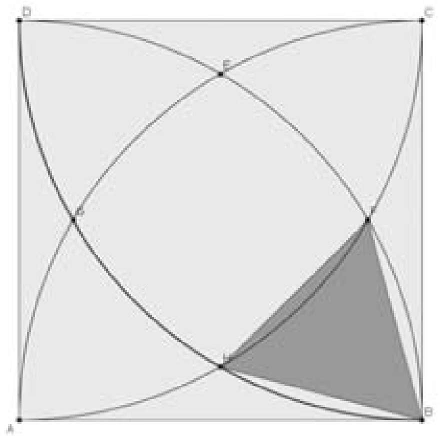
El ángulo A del triángulo es 15º. La distancia AH es la mitad de a y AB es a.

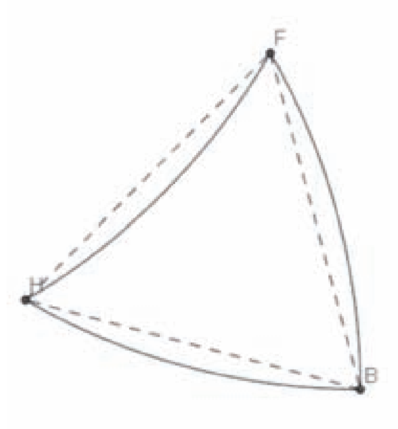
$$\text{Área triángulo AHB} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin 15^{\circ} = \frac{a^2\cdot(3-\sqrt{3})}{4\cdot(3+\sqrt{3})} = \frac{a^2\cdot(2-\sqrt{3})}{4}$$

$$\text{Por tanto, el área del triángulo “curvo”} = \frac{a^2\cdot(2-\sqrt{3})}{4} - 2\cdot\frac{a^2\cdot(\pi-3)}{12} = \frac{a^2\cdot(12-2\pi-3\sqrt{3})}{12}$$

¡Qué alegría coincide con el resultado que había obtenido con integrales¡

Tengo ahora la tentación de calcular el área que me falta restando lo hallado al área del cuadrado de lado a pero la falta de seguridad en los cálculos realizados me lleva a calcularla por métodos similares a los anteriores.





El triángulo HBF es equilátero y su lado es el mismo que el del cuadrado anterior:

$$\frac{a\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$\text{Área triángulo HBF} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}\right)^2 \sin 60^{\circ} = \frac{a^2\cdot\left(2\sqrt{3}-3\right)}{4}$$

$$\text{Por tanto, el área del triángulo “curvo”} = \frac{a^2\cdot(2\sqrt{3}-3)}{4} + \frac{a^2\cdot(\pi-3)}{12} = \frac{a^2\cdot(\pi+6\sqrt{3}-12)}{12}$$

Voy a comprobar que la suma de todas las áreas es a^2

$$\boxed{\frac{\left(3+\pi-3\sqrt{3}\right)a^2}{3}} + 4.\boxed{\frac{a^2\cdot(12-2\pi-3\sqrt{3})}{12}} + 4.\boxed{\frac{a^2\cdot(\pi+6\sqrt{3}-12)}{12}} =$$

$$\frac{\left(3+\pi-3\sqrt{3}+12-2\pi-3\sqrt{3}+\pi+6\sqrt{3}-12\right)a^2}{3} = \frac{3\cdot a^2}{3} = a^2$$

Final

Estoy contento con lo obtenido pero tengo mis dudas de que no hay algún método más simple y sencillo.

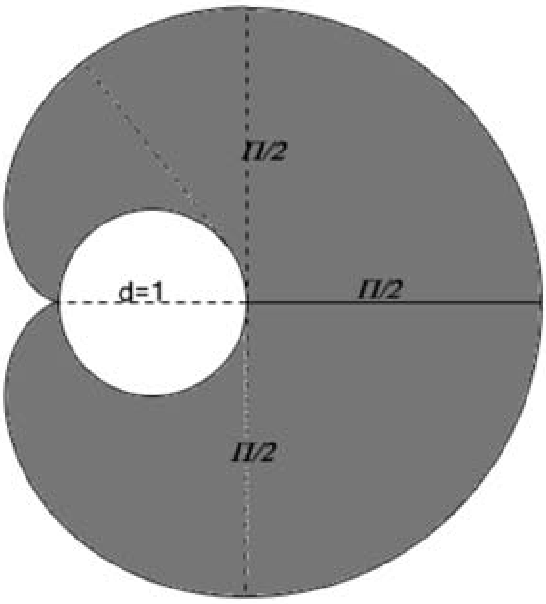
Protocolo realizado por D. Javier Sansuán

1.2 Protocolo 2: La cabra atada (versión del silo circular)

Una cabra está atada al borde de un silo circular en un campo de hierba, con una cuerda que alcanza justo la mitad del camino alrededor del silo. ¿Cuánta hierba puede alcanzar la cabra?

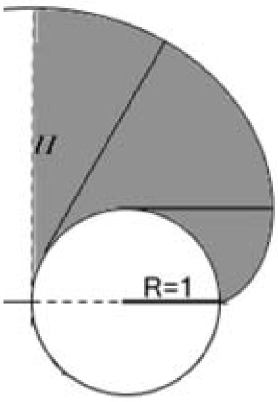
Protocolo

- El problema me ha parecido interesante, por eso lo he elegido para hacer el protocolo, tras haber leído otros tres enunciados del mismo libro (*Pensar matemáticamente* (de Mason y otros dos).
- Es un problema geométrico similar a otros que suelen aparecer en los libros de texto. Éstos suelen ser más fáciles pues el silo suele ser rectangular, lo que reduce el problema al cálculo de varios sectores circulares.
- Intuyo que la dificultas del problema elegido está en que también las paredes del silo son curvas.
- Como en todos los problemas de geometría, parece que la mejor manera de empezar es con un dibujo:



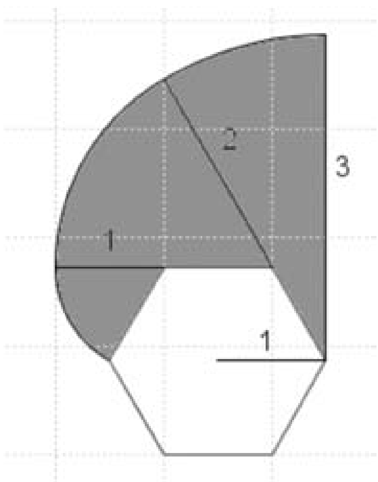
- Me he dado cuenta de que para hacer el dibujo he vuelto a leer el enunciado y sólo cuando he estado seguro de haberlo entendido me he puesto a dibujar.
- La figura recuerda a una cardioide pero no lo es: la parte que queda a la derecha es claramente medio círculo.

- Parece que el problema se reducirá a calcular la parte izquierda.
- La figura es simétrica (respecto al eje horizontal). Ello supone una nueva "reducción" del problema.
- Resolviendo el problema para d=diámetro=1, por semejanza, quedará resuelto el caso general.
- Intento idear un plan de ataque y me parece más difícil que al principio.
- El problema se reduce a hallar el área de la figura:
  (Primera rectificación: donde dije d=1, será R=1, para eludir el π/2).



- Para hacer el dibujo me he apoyado en "trozos de cuerda" que serán tangentes a la circunferencia. Quizás lo de las tangentes y su perpendicularidad a los radios correspondientes puede ser de utilidad más adelante.
- Supongo que un camino posible es el de recurrir a la geometría analítica: poner unos ejes, intentar deducir la ecuación de la curva y luego tirar de integrales.
- Por eso había cambiado la orientación del dibujo: para "jugar" en el primer cuadrante. Ahora me doy cuenta de que igual convendría girarlo 90º.

- Pero, de momento, descarto este camino y voy a buscar otro que no necesite de integrales.
- He tenido que interrumpir el asunto y en ese rato se me ha ocurrido otra posible vía: hacer algo parecido a Arquímedes cuando estudió el círculo aproximándose con polígonos regulares de muchos lados.
- Probablemente tampoco sea ésta la vía más rápida, pero le tengo cierta querencia a ese método.



- Empezaré probando con un hexágono regular (de radio 1, luego perímetro 6 → cuerda = 3).

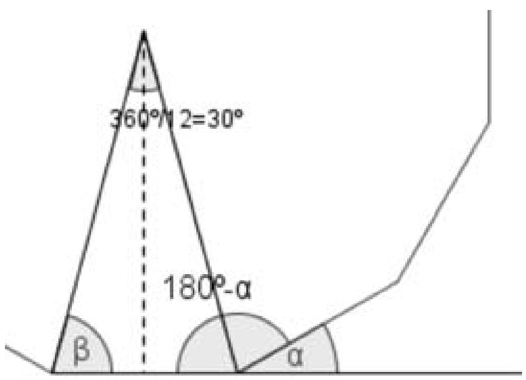
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{12}\pi.3^2 + \frac{1}{6}\pi.2^2 + \frac{1}{6}\pi.1^2 =$$

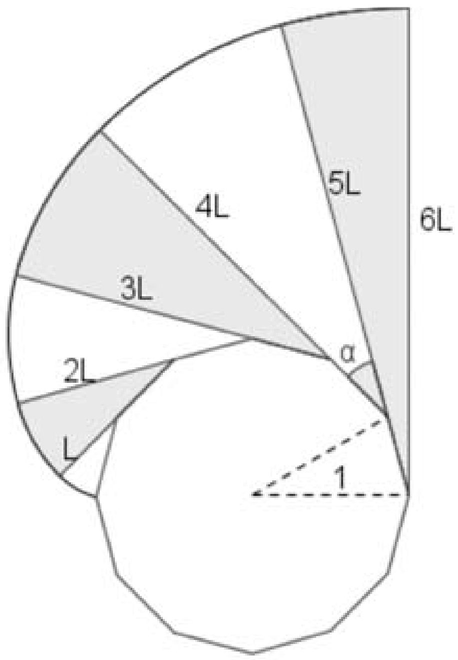
$$= \frac{1}{12}\pi.(3^2 + 2.2^2 + 2.1^2) = \frac{19}{12}\pi \approx 1'5.3'25 \approx 5\, u.s.$$

(Al final he estimado el resultado por comprobar si salía algo con buena pinta. Creo que sí).

- La idea es pensar ahora en un polígono regular de, por ejemplo, 12 lados y luego intentar la generalización a *n* lados.

- Voy con ello: de momento llamaré L a la medida del lado, que luego intentaré poner en función de *n*.
- Veamos: para *n* = 12 hay un sector de amplitud *α*/2 y 5 sectores de amplitud α donde *α* = ángulo exterior = ¿360º/ 12?
- Compruebo esto de *α*: Ángulo central = 360º/12 = 30º → 2β = 180º–30º → α = 30º





¿Y el lado?

$$sen\frac{360^{o}}{24}=sen15^{o}=\frac{L/2}{1}\Rightarrow \quad L=2sen\left(\frac{360^{o}}{2.12}\right)$$

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6=\frac{1}{24}\pi(6L)^2+\frac{1}{12}\pi(5L)^2+......+\frac{1}{12}\pi.L^2=$$

$$=\frac{\pi}{24}.L^2.\left(6^2+2.5^2+2.4^2+2.3^2+2.2^2+2\right)=\frac{\pi}{24}.L^2.\left(SC(6)+SC(5)\right)$$

donde $SC(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2 \quad y \quad L=2.sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$

- Empiezo a dudar de si sabré resolverlo por este camino.
- A donde parece que voy es a una expresión en la que, cuando n tienda a ∞ , L tenderá a 0 y el otro factor a infinito. Se podría resolver por L'Hôpital, pero hay una dificultad previa:

Casi es otro problema: ¿puede simplificarse la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales en una expresión más manejable? ¿Quizás en un polinomio de tercer grado?

- Me suena haber visto alguna demostración visual de ello.
- En general, para n cualquiera tendremos:
- Aquí me quedo (bloqueado) de momento.

- Antes de seguir recurriré a la hoja de cáculo para comprobar que voy por buen camino, pero cada vez es mayor mi impresión de que éste no es el mejor ni más sencillo de los caminos.

		n²				
		1	SC(m)			
m	**n**	4	5	**L**	**L^2**	**A**
3	6	9	14	1	1	4,97418837
4	8	16	30	0,765366865	0,58578644	5,06083151
5	10	25	55	0,618033989	0,38196601	5,09992186
6	12	36	91	0,51763809	0,26794919	5,12087222
7	14	49	140	0,445041868	0,19806226	5,13340537
8	16	64	204	0,390180644	0,15224093	5,14149928
9	18	81	285	0,347296355	0,12061476	5,1470298
10	20	100	385	0,31286893	0,09788697	5,15097638
11	22	121	506	0,284629677	0,08101405	5,15389135
12	24	144	650	0,261052384	0,06814835	5,15610554
13	26	169	819	0,241073361	0,05811637	5,15782697
14	28	196	1015	0,223928952	0,05014418	5,15919179
15	30	225	1240	0,209056927	0,0437048	5,16029216
16	32	256	1496	0,196034281	0,03842944	5,16119227
17	34	289	1785	0,184536719	0,0340538	5,16193795
18	36	324	2109	0,174311485	0,03038449	5,16256261
19	38	361	2470	0,165158691	0,02727739	5,1630911
20	40	400	2870	0,156918191	0,02462332	5,1635422
21	42	441	3311	0,149460187	0,02233835	5,16393032
22	44	484	3795	0,142678366	0,02035712	5,16426667
23	46	529	4324	0,136484827	0,01862811	5,16456006
24	48	576	4900	0,130806258	0,01711028	5,16481751
25	50	625	5525	0,125581039	0,0157706	5,16504465

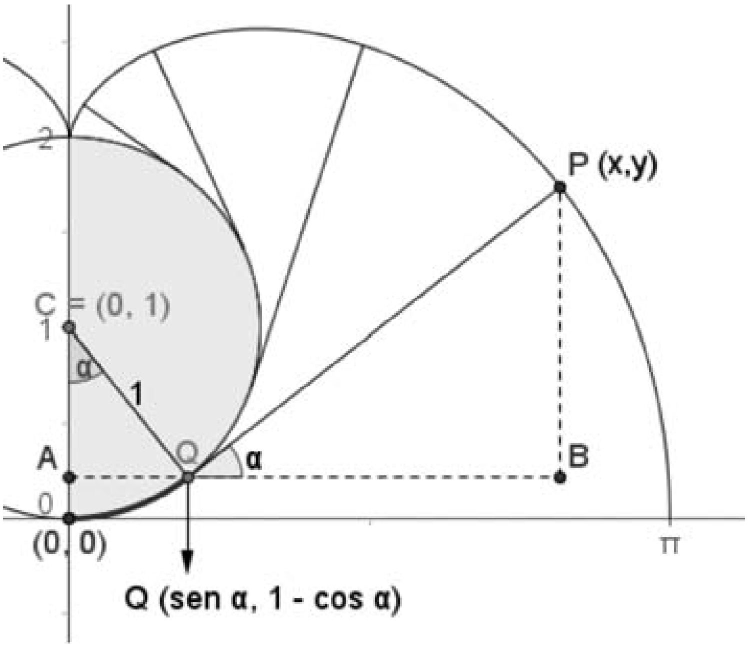
- Si damos por bueno el resultado/la aproximación $A = 5{,}166\ m^2$ tendríamos, para $R = 1$ m, que $S = 2A + ½\ \pi.\pi^2 = 2A + \pi^3/2 = 10{,}332 + 15{,}503 = 25{,}835\ m^2$.

  Por semejanza, $S = 25{,}835\ .\ R^2$

Supongo que el cabrero daría por resuelto el problema. Pero a mí no me satisface esta solución.

Voy a intentarlo por geometría analítica:

- A ver si acierto con la representación sobre los ejes de coordenadas:



- Tendremos: $O\hat{C}Q = P\hat{Q}B = \alpha$, por ser $\overline{PQ}$ tangente a la circunferencia: $PQ \perp CQ$

  Arco $A\overset{\frown}{C}Q = \alpha$ (trabajando en radianes)

  $PQ = \pi - \alpha$

$$\begin{cases} x = AQ + QB = sen\,\alpha + (\pi - \alpha).\cos\alpha \\ y = OA + BP = 1 - \cos\alpha + (\pi - \alpha).sen\,\alpha \end{cases}$$

- A ver si puedo con esto:

$$A = I - Semicírculo = \int_{x=0}^{x=\pi} y(x).dx - \pi$$

$$dx = [\cos\alpha - \cos\alpha - (\pi - \alpha)sen\,\alpha]d\alpha = (\alpha - \pi)sen\,\alpha.dx$$

$$I = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} (1 - \cos\alpha + (\pi - \alpha).sen\,\alpha)(\alpha - \pi)sen\,\alpha.d\alpha =$$

$$= \int_0^{\pi} (\alpha.sen\,\alpha)d\alpha + \pi\int_0^{\pi} (-sen\,\alpha)d\alpha - \int_0^{\pi} \alpha.sen\,\alpha.\cos\alpha.d\alpha + \pi\int_0^{\pi} sen\,\alpha.\cos\alpha.d\alpha$$

$$-\int_0^{\pi} (\alpha - \pi)^2.sen^2\alpha.d\alpha$$

- ¡Qué pereza!: además de que no apetece nada ponerse con varias integrales no inmediatas, lo peor es la falta de seguridad en no cometer errores.

De modo que, de nuevo, decido recurrir a los programas informáticos. Lo cual me está dando mucho que pensar.

Del mismo modo que actualmente todos recurrimos a la calculadora para evitar cálculos a lápiz con números de muchas cifras, pronto parecerá ilógico resolver a lápiz integrales o límites complicados que el ordenador resuelve rápidamente.

Antes de encender el ordenador, vuelvo hacia atrás, a la página 4, pues esta mañana he comprobado que efectivamente hay una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros números naturales:

$$1+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{1}{3}n.(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

(La vi en el libro de demostraciones visuales de Nielsen).

O sea que:

$$SC(n)+SC(n+1)=\frac{1}{3}[n.(n+1)(n+1/2)+(n-1)n.(n-1/2)]=\frac{1}{3}(2n^3+n)$$

Ya puestos, también para esto he recurrido a *Derive*.

O sea que tendríamos, para un polígono regular de un número par de lados: $n = 2m$

$$A=\frac{\pi}{4n}4.sen^2\frac{\pi}{2n}.[SC(n)+SC(n-1)]=$$

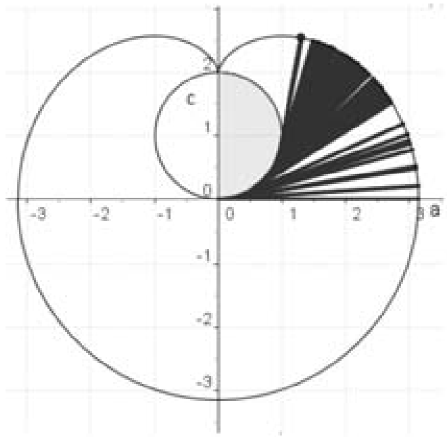
$$\frac{\pi}{n}.sen^2\frac{\pi}{2n}.\frac{1}{3}(2n^3+n)=\frac{\pi}{3}(2n^2+1)sen^2\frac{\pi}{2n}$$

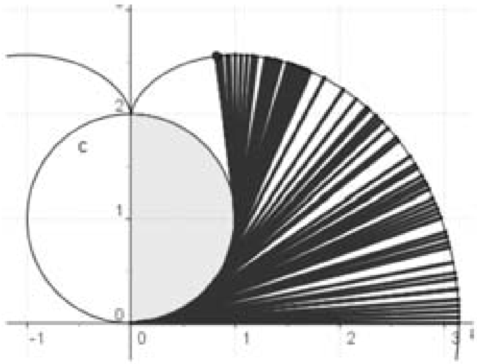
Para: m → ∞:

$$A=\frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)sen^2\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{3}.L$$

Siendo $L=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{sen^{-2}\dfrac{\pi}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n}{-2\dfrac{\pi}{2}\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)\cos\dfrac{\pi}{2n}.sen^{-3}\dfrac{\pi}{2n}}=?$

No sé si soy un perezoso o es que me falta entrenamiento pero terminaré el límite también con *Derive* (*GeoGebra* me permitirá hacer la gráfica y comprobar el desarrollo de antes pero no me calcula integrales de curvas paramétricas).





Con *GeoGebra* he podido comprobar que las ecuaciones paramétricas eran correctas, pero ni con él ni con *Derive* he conseguido el valor de la integral a partir de esas ecuaciones paramétricas.

Resuelvo pues el límite que he deducido posteriormente:

#1: $$x = [\mathrm{SIN}(\alpha) + (\pi - \alpha)\cdot\mathrm{COS}(\alpha),\ 1 - \mathrm{COS}(\alpha) + (\pi - \alpha)\cdot\mathrm{SIN}(\alpha)]$$

#2: $$y = 1 - \mathrm{COS}(\alpha) + (\pi - \alpha)\cdot\mathrm{SIN}(\alpha)$$

#3: $$[(\pi - \alpha)\cdot\mathrm{COS}(\alpha) + \mathrm{SIN}(\alpha),\ - \mathrm{COS}(\alpha) + (\pi - \alpha)\cdot\mathrm{SIN}(\alpha) + 1]$$

#4: $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\cdot 2\cdot n}\cdot 4\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2\cdot n}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(n\cdot(n+1)\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right) + (n-1)\cdot n\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)$$

#5: $$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\cdot 2\cdot n}\cdot 4\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{2\cdot n}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot(2\cdot n^3 + n)$$

#6: $$\frac{\pi^3}{6}$$

#7: $$5.16771278$$

#8: $$\frac{2\cdot\pi^3}{6} + \frac{\pi^3}{2}$$

#9: $$\frac{5\cdot\pi^3}{6}$$

#10: $$25.8385639$$

Así llego a un resultado final que coincide con el conseguido anteriormente con *Excel* (para $R = 1$).

Resumen:

Sigo un poco "mosca" por no haber encontrado un camino más sencillo.

Al final, el resultado dependía del cálculo de un límite que no he visto claro para resolver por L'Hôpital. La alternativa ha sido recurrir a los programas informáticos:

- *Excel* da una aproximación lo suficientemente buena.
- *Derive* da la solución exacta.
- *GeoGebra* me ha permitido comprobar gráficamente las ecuaciones y visualizar el problema con precisión.

Esto de haber recurrido a los ordenadores para eludir cálculos más o menos complicados da mucho que pensar.

Más tarde:

Voy a intentar el límite por l'Hôpital ("que no se diga").

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2(\pi/2n)}{\frac{1}{2n^2+1}} \left(=\frac{0}{0}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{+2}\sin(\pi/2n)\cdot\cos(\pi/2n)\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\frac{1}{n^2}}{\frac{+4n}{(2n^2+1)^2}} =$$

$$\frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(\pi/2n)\cdot\cos(\pi/2n)}_{\text{mitad del sen. del ángulo doble}}\cdot\left(4n+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}\right) = \frac{\pi}{8}\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(4n+\underbrace{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}_{\downarrow n\to\infty\ 0}\right)=$$

$$= \frac{\pi}{8}\lim 4n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\left(=\frac{0}{0}\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{+\frac{\pi}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}}{+\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\downarrow\ 1} = \frac{\pi^2}{2}$$

luego $A = \frac{\pi}{3}\cdot L = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^3}{6}$

¡Bueno! : (ya me quedo más tranquilo.)

Protocolo realizado por Manuel Sada Allo

1.3 Protocolo 3: El matemático ignorante

En las aulas de cierta facultad de Matemáticas, nos podemos encontrar a un extraño personaje. Cierto día, me confesó que tan sólo sabía multiplicar y dividir por 2.

– A pesar de todo, –me dijo–, puedo multiplicar rápidamente números de dos cifras.

Le propuse que multiplicara 75 por 38.

Tomó una hoja de papel y escribió a la izquierda 75 y a la derecha 38. Luego inició sus cálculos:

– La mitad de 75 es 37, ¿no es así?

– No –le dije– es 37'5.

– De acuerdo, pero no sé trabajar con decimales, así que no los pongo.

Escribió 37 y, repitiendo el proceso, dividió por dos y obtuvo, a pesar de mis protestas, 18, 9, 4, 2 y finalmente 1.

Después multiplicó 38 por dos. El resultado, 76, lo escribió en la fila inferior. Volvió a multiplicar por dos y obtuvo 152, 304, 608, 1.216 y 2.432.

Al final tenía escrito,

75	38
37	76
18	152
9	304
4	608
2	1.216
1	2.432

Me dijo que los números pares de la columna de la izquierda no servían de nada, así que los tachó (junto con el número que tenían a su derecha) con lo que quedó

75	38
37	76
9	304
1	2.432

Sumando los números de la columna de la derecha obtuvo: 38 + 76 + 304 + 2.432 = 2.850, que es el resultado correcto. Probé con otros números y también funcionaba el método.

¿Sabrías dar una explicación matemática?

Protocolo

Me parece un problema interesante y curioso, aunque no se muy bien cómo abordarlo.

Debo releerlo, ya que el enunciado es largo y no me resulta demasiado facil asimilarlo en una primera lectura.

Lo primero que creo que debo hacer para familiarizarme con el problema es repetir los mismos cálculos del enunciado por mi misma, para concentrarme e ir abriendo la mente:

$$75 \cdot 38$$

Mientras que me pongo a la labor de repetir los cálculos, me pongo a pensar porqué pone primero el 75, si es porque es el número mayor, porque es impar o por otro motivo que se me escapa, o… quizás sea indiferente el orden. Por si esta es la razón, voy a efectuar los cálculos al revés, es decir, diviviendo el 38 y multiplicando el 75:

38	75
19	150
8	300
4	600
2	1.200
1	2.400

Si ahora elimino los pares de la izquierda y su correspondiente a la derecha:

19	150
2.400	2.400

La suma de la derecha ahora es 2.550, que no se corresponde con el resultado esperado.

Tengo la sensación de que el problema viene de coger el número par primero, no el mayor. Para comprobar si estoy en lo cierto o no probaré con otros números, se me ocurre los dos pares primero, a ver que pasa.

Si tomo 16 y 10:

16	10
8	20
4	40
2	80
1	160

Si ahora elimino los pares, si que obtengo el resultado esperado.

Poniendo primero el 10:

10	16
5	32
2	64
1	128

Si elimino los pares:

5	32
1	128

La suma de 32 y 128 ess 160, resultado correcto.

Termino de convencerme además de que sirve el procedimiento, porque me había parecido muy curioso.

Conclusión: no importa cual de los dos números elijamos primero, siempre que sean los dos pares, si son impares debemos usar en la columna de la izquierda el impar.

No es que deba hacer esta generalización, no parece demasiado precisa, pero mi intuición me dice que debe de ser así. ¿Por qué?

Volviendo a pensar en el enunciado, algún misterio ha de tener que estemos trabajando solo con el dos, tanto en las multiplicaciones como en las divisiones.

Voy a elegir números más pequeños para facilitar los cálculos, y voy a indicar las potencias de dos que usamos en las multiplicaciones de la segunda columna.

Elijo el 25 y el 10, para facilitar los cálculos:

$$\begin{array}{rr} 25 & 10 = 10 \cdot 2^0 \\ 12 & 20 = 10 \cdot 2^1 \\ 6 & 40 = 10 \cdot 2^2 \\ 3 & 80 = 10 \cdot 2^3 \\ 1 & 160 = 10 \cdot 2^4 \end{array}$$

Repitiendo el proceso:

$$\begin{array}{rr} 25 & 10 = 10 \cdot 2^0 \\ 3 & 80 = 10 \cdot 2^3 \\ 1 & 160 = 10 \cdot 2^4 \end{array}$$

Si sumamos la columna de la derecha obtenemos el resultado esperado, 250.

Me fijo pues en las potencias de 2 que he usado, y no encuentro ninguna relación entre ellas que pueda serme de utilidad.

Pero en el dos está la clave… Dejo el problema.

Retomo la resolución al cabo de un día y ha aparecido varias veces por mi mente en este tiempo. Se me ocurre que si estamos trabajando con el dos, algo puede tener que ver el sistema binario. He pensado en éste día en porqué se trunca en vez de redondear hacia arriba cuando hacemos las divisiones, y quizás tenga algo que ver con los restos binarios.

Voy a escribir 75 en binario. Elijo el 75 por ser el que usamos para eliminar las posibilidades.

$$75 \ (\text{base } 10) = 1001011 \ (\text{base } 2)$$

Parece que no voy desencaminada, puesto que las posiciones de los ceros coinciden con las filas que eliminamos en el desarrollo.

Creo que he llegado a la solución. Si hago la multiplicación, pero pasando 75 a binario:

$75 \cdot 38 = 1001011_2 \cdot 28_{10} = 2^6 \cdot 38 \cdot 1 + 2^5 \cdot 38 \cdot 1 + 2^4 \cdot 38 \cdot 0 + 2^3 \cdot 38 \cdot 1 + {}^2 \cdot 38 \cdot 0 + 2^1 \cdot 38 \cdot 0 + 2^0 \cdot 38 \cdot 1$
$75 \cdot 38 = 2432 + 0 + 0 + 304 + 0 + 76 + 38 = 2.850$

Efectivamente, esta es la solución. Daría lo mismo si tenemos dos números pares.

Luego la explicación matemática al problema sería que realmente lo que se está haciendo con el método es pasar uno de los números a sistema binario y realizar la multiplicación.

Protocolo realizado por Dª Begoña Omatos

Julio Rey Pastor (1888-1962)

El Rincón Olímpico

Pedro Alegría (*)

Presentamos, como es habitual en esta sección, las soluciones de los problemas propuestos en el número anterior de esta revista y proponemos una nueva colección de problemas variados, los cuales animamos a pensar, así como a plantear en nuestros respectivos ámbitos de actuación educativa.

Enseñar a resolver problemas está íntimamente ligado a lo que llamamos "enseñar a pensar", que es, ciertamente, la tarea más difícil de la labor docente, aunque muchas veces estos fracasos se relacionan con la falta de un método adecuado y la ausencia de unas instrucciones precisas sobre el método a emplear.

Como premisas fundamentales para resolver un problema, podemos plantear las siguientes:

a) Existencia de un interés, lo que significa enfrentarnos a problemas con un cierto atractivo.

b) La posibilidad de diversos métodos de resolución, lo que permite una discusión abierta de las ventajas e inconvenientes de cada uno.

c) Tener deseos de resolver el problema, lo que significa estar dispuestos a aceptar el reto.

George Pólya, en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, establece un programa de actuación ante los problemas matemáticos. Para él, un problema se resuelve correctamente si se siguen los siguientes pasos:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan para descubrir la solución.
3. Ejecutar el plan y verificar el procedimiento.
4. Comprobar el resultado.

George Polya

El mejor premio que podemos esperar es la satisfacción del problema resuelto, de haber conseguido encadenar razonamientos que nos han llevado a la respuesta correcta y de adquirir, con éxito, las técnicas apropiadas en la resolución de otros problemas de características similares.

(*) Dpto. Matemáticas, Universidad del País Vasco.

Soluciones a los problemas anteriores

Más fáciles

37. ***¿Puede ser cierta la siguiente frase?***
Anteayer yo tenía 33 años, y el año que viene cumpliré 36.
En caso de que sea cierta, ¿qué día es hoy y cuál es el día de mi cumpleaños?

La frase es cierta si hoy es uno de enero y mi cumpleaños es el 31 de diciembre. De este modo, ayer cumplí 34 años, este año cumpliré 35 y el año que viene cumpliré 36.

38. ***Dos hermanos echaron una carrera de 100 metros. El mayor ganó por 3 metros, es decir, cuando el mayor llegó a la meta, el menor había recorrido 97 metros.***
Volvieron a echar la carrera, pero ahora el hermano mayor empezó tres metros por detrás de la línea de salida. Suponiendo que los dos corrieron como la primera vez, ¿quién ganó esta carrera?

Ganará el hermano mayor, pues cuando el menor haya recorrido 97 metros, el mayor se habrá puesto a su altura. Como el mayor es más rápido, recorrerá antes los tres metros que faltan para llegar a la meta.

39. ***Seis jóvenes se apuntaron a un curso de teoría de números. Con el propósito de recordar más fácilmente sus nombres, el profesor los sentó en el orden siguiente:***

- Lulú Nogués
- Aldo Sastre
- Edit Resnik
- Rucucu Atrogno
- Eric Incorto
- Emilse Ischia

¿Cuál es el sistema que usó?

Aparecen ocultos en los nombres los números uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis, de modo que la ordenación no es alfabética sino numérica.

40. ***Mi padre tiene 44 años. Mi perro, 8. Si mi perro fuese humano, tendría 66 años de edad. ¿Qué edad tendría mi padre si fuera perro? ¿Cuántos años sumarían mi padre y mi perro si ambos fueran humanos?***

Por una simple regla de tres, si 8 años de perro corresponden a 66 años humanos, 44 años humanos serían 8 x 44/66 = 16/3, es decir 5 años y 4 meses.

Si mi padre y mi perro fueran humanos, tendrían 44 y 66 años, respectivamente, de modo que sumarían 110 años.

Intermedios

41. ***Tenemos dos cajas cúbicas de dimensiones iguales. Una de ellas contiene una gran esfera de hierro cuyo diámetro es igual a la altura de la caja. La otra caja está llena de bolas de hierro pequeñas colocadas en sucesivas capas, todas iguales, ocupando toda la caja. ¿Qué caja pesa más?***

Si llamamos "2a" a la arista de cada cubo, el radio de la esfera grande es igual a "a", de modo que el volumen de la primera caja es

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Para la segunda caja, si en cada lado caben n bolas iguales, el radio de cada una de ellas es igual a a/n, de modo que el volumen de cada una es igual a

$$V = \frac{4}{3}\pi (a/n)^3.$$

Como hay un total de n3 bolas, el volumen total coincide con el de la primera caja.

42. ***Siete sultanes tienen en total 2.879 mujeres. No hay dos con la misma cantidad. Si dividimos la cantidad de mujeres de uno cualquiera de esos harenes por la cantidad de mujeres de cualquier otro harén menor, el resultado es siempre un número entero. ¿Cuántas mujeres hay en cada uno de los harenes?***

Si "x" es el número de mujeres del primer sultán, entonces el número de mujeres del segundo sultán es $a \cdot x$, el número de mujeres del tercer sultán es $a \cdot b \cdot x$, el del cuarto sultán es $a \cdot b \cdot c \cdot x$, el del quinto sultán es $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot x$, el del sexto sultán es $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot x$ y el del séptimo sultán es $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot x$.

Así pues,

$$2.879 = x \cdot (1 + a + a \cdot b + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e + a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f).$$

Como 2.879 es primo, resulta que $x = 1$ y

$$2.878 = 2 \, x \, 1439 = a \cdot (1 + b + b \cdot c + b \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot d \cdot e + b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f).$$

Nuevamente, como 1439 es primo, entonces $a = 2$ y

$$1.438 = 2 \, x \, 719 = b \cdot (1 + c + c \cdot d + c \cdot d \cdot e + c \cdot d \cdot e \cdot f).$$

Ahora, $b = 2$ y

$$718 = 2 \, x \, 359 = c \cdot (1 + d + d \cdot e + d \cdot e \cdot f),$$

con lo que $c = 2$ y

$$358 = 2 \times 179 = d \cdot (1 + e + e \cdot f),$$

de donde $d = 2$ y

$$178 = 2 \times 89 = e \cdot (1 + f).$$

Por tanto, $e = 2$ y $f = 88$.

En definitiva, el número de mujeres de cada harén es 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 2.816.

43. ***¿Cuántas páginas tiene un libro en cuya numeración se emplearon 3.901 caracteres?***

Para las nueve primeras páginas se emplearon 9 caracteres. Para las páginas 10 a 99 se emplearon $2 \cdot 90 = 180$ caracteres. Para las páginas 100 a 999 se emplearon $3 \cdot 900 = 2.700$ caracteres.

Hasta este momento se han utilizado $9 + 180 + 2.700 = 2.889$ caracteres, por lo que faltan

$$3.901 - 2.889 = 1.012 \text{ caracteres.}$$

Como cada nuevo número necesita 4 caracteres y $1.012/4 = 253$, se utilizarán 253 páginas más a partir de la página 1.000. Esto hace un total de 1.252 páginas.

44. ***La fecha del último lunes del mes pasado sumada a la del primer jueves del mes que viene es 38. Sabiendo que todas las fechas son de un mismo año, ¿en qué mes estamos?***

Como el primer jueves debe corresponder a un día comprendido entre 1 y 7, para que la suma indicada sea 38, el primer jueves debe ser el día 7 y el último lunes debe ser el día 31. Esto significa que el primer jueves del mes actual es el día 3. Para que el primer jueves del mes próximo sea día 7, han de pasar una cantidad exacta de semanas más tres días, es decir el mes actual tiene 31 días. Como el mes pasado también tenía 31 días, estamos en el mes de agosto.

Menos fáciles

45. ***Una familia de matemáticos, el padre Samuel, la madre Samanta y el hijo Saúl, mantienen la siguiente conversación en algún momento del siglo XX.***

Padre: Mi edad ha sido múltiplo de la tuya, Samanta, en tres ocasiones; y de la tuya, Saúl, en dos, y una vez más que lo será todavía, si Dios quiere.
Madre: La mía ha sido cinco veces múltiplo de la tuya Saúl, y ya no volverá a ocurrir.
Hijo: Efectivamente. Y el año actual es múltiplo de nuestras edades.

¿En qué año nació cada uno?

Si llamamos "x" a la edad del padre, "y" a la edad de la madre y "z" a la edad del hijo, como la edad de la madre ha sido cinco veces múltiplo de la edad del hijo, y el único número con cinco divisores es p^4, con "p" primo, entonces

$$y = z + p^4$$

En este caso, cuando $z = 1$, p p^2, $p3$, p^4, entonces "y" es múltiplo de "z". Además, el único valor posible es $p = 2$ (porque $34 = 81$), con lo que $y = z + 16$. Esto implica, por otra parte, que la edad actual del hijo es mayor que 16.

Análogamente, como la edad del padre será tres veces múltiplo de la edad del hijo, entonces

$$x = z + q^2, \text{ con "}q\text{" primo.}$$

En este caso, los únicos valores posibles son q = 5, 6 ó 7.

En el primer caso, $x = z + 25$, con lo que $x = y + 9$.

Probando con valores $z > 16$, llegamos a que, si las edades actuales son 45, 36 y 20 años, respectivamente, el mínimo común múltiplo es 180, el cual, multiplicado por 11 da 1980, que es el año actual. En definitiva, los respectivos años de nacimiento del padre, la madre y el hijo son 1935, 1944 y 1960.

46. ***Dos rectángulos del mismo perímetro tienen áreas que se diferencian en 13 metros cuadrados. Si las dimensiones de los rectángulos son cuatro números enteros distintos y la menor mide 4 metros, calcular el resto de las dimensiones.***

Sean "a" y "b" las dimensiones de uno de los rectángulos, e "y" la dimensión mayor del otro rectángulo. Sabemos, por los datos del problema, que

$$a + b = 4 + y$$

y que

$$a \cdot b = 4 \cdot y + 13 \quad \text{ó} \quad a \cdot b = 4 \cdot y - 13.$$

Calculemos las soluciones del primer sistema $a + b = 4 + y$, $a \cdot b = 4 \cdot y + 13$.

Por las fórmulas de Cardano-Vieta, los valores "a" y "b" deben ser soluciones de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - (4 + y)\, x + (4y + 13) = 0.$$

Como las soluciones deben ser enteras, el discriminante será cuadrado perfecto, es decir

$$(4 + y)^2 - 4(4y + 13) = p^2, \text{ es decir } y^2 - 8y - (p^2 + 36) = 0.$$

De nuevo, el discriminante debe ser cuadrado perfecto, es decir $16 + p^2 + 36 = q^2$, o bien $q^2 - p^2 = 52$. Factorizando los dos miembros de la ecuación, resulta

$$(q - p)(q + p) = 2 \cdot 26,$$

que conduce al sistema de ecuaciones $q - p = 2$, $q + p = 26$, cuya solución es $q = 14$, $p = 12$. Con estos valores, obtenemos que $y = 18$, y los valores de "x" son $a = 17$, $b = 5$.

Si procedemos de forma análoga con el segundo sistema $a + b = 4 + y$, $a \cdot b = 4 \cdot y - 13$, llegamos a la ecuación de segundo grado

$$x^2 - (4 + y)\,x + (4y - 13) = 0.$$

En este caso, el discriminante es

$$(4 + y)^2 - 4(4y - 13) = p^2, \text{ es decir } y^2 - 8y - (p^2 - 68) = 0.$$

De nuevo, el discriminante de esta última ecuación debe ser cuadrado perfecto, es decir $16 + p^2 - 68 = q^2$, o bien $p^2 - q^2 = 52$. Factorizando los dos miembros de la ecuación, resulta

$$(p - q)(p + q) = 2 \cdot 26,$$

que conduce al sistema de ecuaciones $p - q = 2$, $p + q = 26$, cuya solución es $p = 14$, $q = 12$. Con estos valores, obtenemos que $y = 16$, $a = 3$, $b = 17$, lo que no concuerda con el enunciado del problema porque el menor valor era 4.

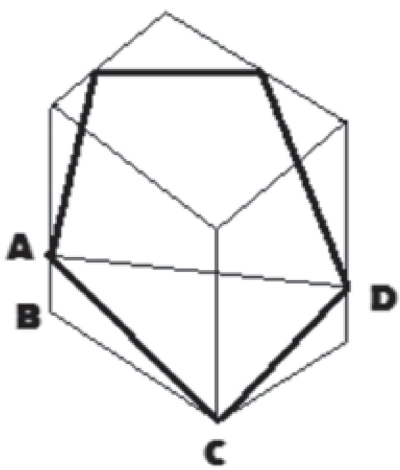
47. ***Probar que no puede cortarse un cubo por un plano de modo que la sección resultante sea un pentágono regular.***

Supongamos que podemos construir una sección en forma de pentágono regular. Entonces el triángulo ABC de la figura es rectángulo, de modo que BC < AC.

Además

$$\frac{AD}{AC} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (la razón áurea) y } AD = BC\sqrt{2} \text{ (la diagonal del cuadrado).}$$

Por tanto, $AC = \dfrac{AD}{\phi} = \dfrac{BC\sqrt{2}}{\phi} < BC$, lo que es absurdo.



48. ***Dos amigos se encuentran en la calle y mantienen la siguiente conversación:***

– Estuve la semana pasada participando en un congreso donde había 19 asistentes, los cuales estábamos numerados del 1 al 19. Me encontré con tres extranjeros y me enteré que les habían asignado tres números consecutivos.
– ¿Supiste qué números eran?
– Para averiguarlo, me dirigí a ellos y les pregunté si alguno de ellos tenía asignado un cuadrado perfecto. Me contestaron con un monosílabo.
– ¿Fue un sí o un no?
– Espera, después de hacer mis cálculos les pregunté si alguno de ellos había recibido un número primo. Otra vez me contestaron con un monosílabo.
– ¿Averiguaste así qué números eran?
– Sí, y tú también podrás deducirlo si te cuento que el número de tu amigo Juan era el doble del mío.

¿Cuáles eran los números?

Estudiando todos los casos posibles dentro del diálogo, observamos que las únicas respuestas que producen sólo dos posibilidades son que no hay ningún cuadrado perfecto y sí hay un número primo entre los tres números consecutivos. Dichos números son 8, 9 y 10 ó 14, 15 y 16. Como el participante pudo averiguar la respuesta, uno de dichos valores debe coincidir con el propio número de inscripción del participante. Dicho número debe ser menor de 10 para que el número de Juan pueda ser el doble. Se elimina así la respuesta 8, 9, 10 para dar como valores los números 14, 15 y16.

Enunciados de los nuevos problemas

Más fáciles

49. ***Aitor entró en una tienda para comprar un juguete pero le faltaban 3 euros. Ahora bien, si el juguete costara la mitad, le sobrarían 2 euros. ¿Cuál es el precio del juguete y cuánto dinero tiene Aitor?***

50. ***En un campamento escolar acude un grupo de niños. Sabemos que los que vienen de Teruel son la mitad de los que vienen de Oviedo, que, entre Oviedo y Santander, vienen un total de ocho niños y que los que vienen de Santander son el doble de los que vienen de Logroño. ¿Cuántos niños hay en el campamento?***

51. ***Un estudiante de matemáticas recibe la siguiente oferta: por cada problema bien resuelto recibirá 8 euros y por cada problema mal resuelto pagará 5 euros. Después de resolver 26 problemas, tiene tanto dinero como al principio. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente?***

52. ***Con 1.000 cubitos cuya arista mide 1cm formamos un cubo más grande de arista 10cm. Lo pintamos y luego lo descomponemos en los cubos originales. ¿Cuántos de estos cubos tienen alguna cara pintada? ¿Cuántos de ellos tienen sólo una cara pintada? ¿Cuántos cubos tienen por lo menos dos caras pintadas?***

Intermedios

53. ***¿Cuántos números de cinco cifras, es decir comprendidos entre 10.000 y 99.999, son capicúas?***

¿Cuáles de ellos están más próximos entre sí y cuáles están más alejados?

¿Cuál es el menor conjunto de números consecutivos que contiene tres capicúas?

54. ***El número 7×5^{41} tiene 30 cifras en notación decimal. ¿Es cierto o no que en esas treinta cifras hay alguna que aparece por lo menos cuatro veces? Razonar la respuesta.***

55. ***A las tres en punto, el ángulo formado por la aguja horaria y el minutero es de 90 grados. ¿Qué ángulo formarán diez minutos después?***

56. ***Para dividir un pastel entre 16 invitados se corta en el centro una porción circular de 3 cm. de radio y el resto se divide en 15 porciones iguales, que resultan del mismo tamaño que la porción central. Si quisiéramos dividir el mismo pastel y con el mismo procedimiento entre 25 invitados, ¿cuál debería ser el radio de la porción central?***

Menos fáciles

57. ***¿Cuáles son las dos últimas cifras de 2^{222}?***

58. ***Dos amigos lógicos se encuentran. Uno de ellos propone al segundo el siguiente problema.***

- Un granjero dejó en herencia a sus tres hijos un campo rectangular de dimensiones 6 y 7 kilómetros. Los tres hermanos dividieron el terreno en tres rectángulos, cada uno de ellos con una cantidad entera de kilómetros por lado, de modo que el área de cada parte sea igual a la edad de cada uno. Sabiendo que cada uno tiene edades distintas aunque nacieron el mismo día del año, ¿cuáles son las edades de los hijos?
- No puedo saberlo. Me faltan datos.
- Es cierto, todos nacieron el mismo día que tú.
- Bien, ahora ya sé la respuesta.

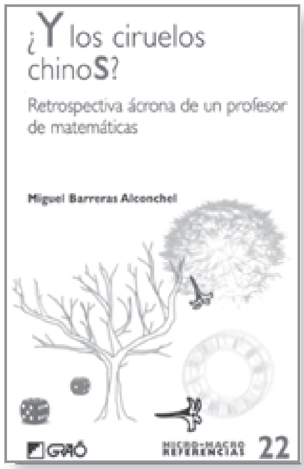
59. ***Dado un número primo mayor que 5, se eleva al cuadrado, al resultado se le suma 17 y se divide el nuevo resultado por 12. Probar que el resto de la división es seis.***

60. ***En un tablero cuadriculado de 100 filas y 100 columnas, se numeran las filas del 1 al 100, de arriba abajo, y las columnas del 1 al 100, de izquierda a derecha. A continuación, en cada columna se pintan las casillas correspondientes a las filas cuyo número es divisor del número de la columna (por ejemplo, en la columna 4 se pintan las casillas de las filas 1, 2 y 4. ¿Cuántas casillas se han pintado en la decimotercera fila? ¿Cuántas casillas se han pintado en todo el tablero?***

Miguel de Guzmán (1936-2004)

libros
liburuak

¿Y los ciruelos chinos? Retrospectiva ácrona de un profesor de matemáticas



Miguel Barreras Alconchel
Editorial Graó 2009, Barcelona. 1ª edición
ISBN: 9788478277179

Miguel Barreras Alconchel

Nacido en Zaragoza, es profesor de matemáticas en el instituto Matarraña de Valderrobres (Teruel) y también da clases en la UNED. Es autor de libros sobre Excel y sus aplicaciones, y ha publicado artículos en distintas revistas matemáticas.

Trabaja también en el taller de talento matemático, organizado en colaboración con la universidad de Zaragoza, con estudiantes que quieran pasar la tarde de los viernes, (¡esto sí que es sacrificado!), discurriendo y sacando lo mejor de sus cabezas.

De Miguel conocemos, quizá equivocadamente, su especial predilección por el azar y la probabilidad, y en concreto por la probabilidad llevada de una manera muy atractiva al aula, siempre presentándola como un divertido juego en el que antes de ganar hemos tenido que plantearnos estrategias adecuadas; aun así Miguel seguirá apareciendo como alguien más habilidoso que los propios tahúres profesionales. En este sentido tenemos el artículo publicado en la revista SUMA en febrero de 1998 titulado "Números insumisos. El ejército en el aula" y también el publicado en SIGMA num. 33 en diciembre de 2008 "¡Ah!, El azar,..."

Junto con las alumnas y alumnos de 1º de bachillerato ganó en el 2008 el primer premio de Laboratorio de Matemáticas de Ciencia en Acción con el trabajo "Mates en la Vila". Y el año anterior había ganado el primer premio de materiales didácticos en ciencias.

En los últimos años además, se ha convertido en un gran especialista en cuentos y relatos cortos, avalado por los numerosos premios y galardones que ha recibido. Como muestra, estos "Ciruelos Chinos", que él mismo denomina "retrospectiva ácrona de un profesor de matemáticas", algunos de cuyos capítulos ya han sido publicados de manera independiente e incluso premiados.

¿Y los ciruelos chinos? Retrospectiva ácrona de un profesor de matemáticas

Es un libro terriblemente entretenido, de capítulos muy cortos, que se pueden leer sin ningún orden. Los temas, variadísimos: azar, geometría, experiencias personales, anécdotas,...

Tendremos siempre la sensación de haberlos vivido en primera persona, siendo todavía estudiantes o ya convertidos en profes, novatos o con muchos trienios. Lo leeremos de un tirón, sin poder parar: otro capítulo ¡que es corto!, ¡y este otro también! Píldoras los llama el propio Miguel. Y así hasta el final, hasta "¿los ciruelos chinos?", que llegan los últimos, pero que ya hace un par de años, cuando empezábamos a oír y a leer sobre competencias, se disfrazaron y aparecieron entre los artículos que la revista UNO de didáctica de la matemática dedicaba a la competencia matemática. Ya entonces llamaron la atención, nos amenizaron la reunión de seminario y nos hicieron pasar un buen rato.

Presenta muy buenas ideas para llevarlas a la práctica en nuestras clases o, lo que es mejor aún, a nuestras guardias de patio, como el hecho de pensar en contratar a alguien del pueblo para que custodie el patio en nuestro nombre.

Empecéis por donde empecéis, que de ninguna manera se os escape la definición de la felicidad que nos sugiere el autor. ¿Cómo podemos definir la felicidad? Eso es algo que se viene buscando desde hace siglos. Pero, en el segundo capítulo, si es que leéis los capítulos en orden, Miguel nos da la solución a este problema como sólo alguien que ha dedicado toda su vida a la matemática puede hacerlo, definiendo de manera sencilla, breve y precisa lo que es la felicidad de quienes damos clase en secundaria.

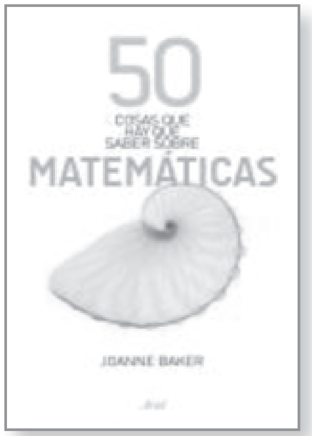
Tranquiliza mucho pensar que en algún instituto por ahí, hay alguien que entre clase y clase encuentra momentos e inspiración para escribir así de bien.

Que Miguel siga escribiendo, que el resto del profesorado seguiremos leyéndole.

Mª Luisa Cobo Musatadi

50 cosas que hay que saber sobre matemáticas

Tony Crilly
Ariel



La propia estructura del libro, *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas* que se recogen en 50 breves capítulos de cuatro páginas cada uno, pone de manifiesto el inequívoco carácter divulgativo con el que se plantea el texto. Un libro que renuncia, desde su planteamiento inicial, a presentar un compendio del conocimiento matemático –el problema ha sido elegir 50 cosas en vez de 500 nos viene a decir el autor– y opta por seleccionar aquellos temas con los que podemos construir un mosaico, a modo de primera aproximación al mundo de las matemáticas.

La limitación de espacio autoimpuesta en cada capítulo obliga al autor por un lado, a elegir con cuidado el punto de vista y en qué aspecto concreto va a colocar el foco de su mirada y por otro, a sugerir y abrir vías por las que podría profundizar el lector interesado.

Los tópicos que componen este mosaico no son novedosos. Podríamos agruparlos en bloques que nos sonarán habituales:

- Sobre la historia y orígenes de las matemáticas, pero también sobre problemas más recientes o de actualidad, como por ejemplo, El último teorema de Fermat o la Hipótesis de Riemann.
- Sobre los números, la aritmética o el álgebra: El Cero, al que se le dedica el primer capítulo, los sistemas de numeración, el número e, el número p, el Y, los primos, el triángulo de Pascal, los complejos, los grupos o las matrices.
- Sobre la lógica o la demostración como método fundamental para establecer resultados.
- Sobre geometría y topología: triángulos, curvas fractales, o el 5º postulado.
- Sobre Estadística y Probabilidad: el teorema de Bayes, la curva normal,...
- No faltan tampoco las referencias al cálculo infinitesimal, a la matemática discreta y a otras aplicaciones a diversos problemas.

En cada capítulo se nos ofrece también una sencilla línea cronológica, en la que se muestra los cinco o seis hitos más importantes en el desarrollo del tema correspondiente.

La lectura del libro es fácil, como corresponde a su carácter divulgativo. Los capítulos son completamente independientes, lo que permite saltar de uno a otro sin más servidumbres que los intereses personales. Es, sin duda, un libro adecuado para que los jóvenes, y no tan jóvenes, accedan a unos conocimientos que, planteados con sencillez, abren nuevos interrogantes, estimulan la curiosidad e invitan al lector a conocer más y a profundizar en su estudio.

Desde el punto de vista del profesorado es también un material al que se le podría sacar un uso didáctico. Sería una buena referencia para la elaboración de trabajos breves por parte de los alumnos sobre temas que ya se han tratado en la clase o sobre propuestas diferentes que, aunque no se recojan en los libros de texto, permiten tener una visión más amplia y completa de lo que suponen las matemáticas.

En definitiva, tenemos ante nosotros un texto que plantea una selección interesante de temas, utiliza un formato adecuado y un modo de contar sin complicaciones y que cumple de forma satisfactoria su objetivo divulgativo. Recomendable tanto para estudiantes como para todos aquellos que en sus tiempos de estudiantes se quedaron con una visión de las matemáticas centrada en los cálculos, demasiado superficial y falta de interés.

Alberto Bagazgoitia

La cuadratura del cuadrado

Ian Stewart
Crítica. 2009. 345 páginas

Es un libro de problemas de Matemáticas ya desde la primera página, es decir, no hay ningún otro tipo de contenido aunque, muchos problemas, tratan de famosos teoremas, hipótesis, conjeturas o referencias históricas de los contenidos o personajes.

El trabajo es un compendio de problemas que Ian Stewart va recogiendo en su cuaderno desde los catorce años que, con su edad actual, corresponde a un periodo de casi cincuenta años. La primera mitad del libro, aparece la formulación de los ejercicios y, en la segunda, las soluciones comentadas de una manera muy interesante.

¿Qué tipo de problemas nos presenta el autor? Lo primero es señalar que algunos son clásicos que podemos encontrar en otras publicaciones. Como ejemplo señalar: sudokus, juegos de Lógica, cuadrados mágicos, pautas, etc, pero, en todos estos casos, presenta muchos ejercicios (o el tratamiento del tema) novedosos que los puede distinguir de otros libros. Un segundo tipo de problemas es el referido al estudio de conjeturas, teoremas, problemas históricos, etc, algunos de ellos no resueltos.

Es en este último apartado donde, en mi opinión, el libro presenta su aspecto más atractivo ya que hace una presentación del porqué del problema de una manera clara y brillante y, luego, una explicación de su solución (o no solución cuando no está demostrado el problema) realmente clara y asimilable. En particular, la explicación de como Wilkes llegó a la demostración del *Último teorema de Fermat,* me parece la más clara que puede entender una persona no versada en la matemática que está detrás de esa demostración. La conjetura de Golbach, el teorema de Gödel, hipótesis de Riemann o de Poincaré, etc , están explicadas con gran claridad y entendibles en su esencia.

Los problemas clásicos (trisección de un ángulo, duplicación del cubo o cuadratura del círculo) también son presentados y analizados. Así mismo los temas modernos (Caos, Fractales, etc), aparecen acompañados de datos históricos. Ya que todo el mundo habla de "el efecto mariposa", podemos señalar que en uno de los capítulos habla del origen de la frase que, curiosamente, cuando Lorentz planteó el problema no se hablaba de una mariposa sino de una gaviota.

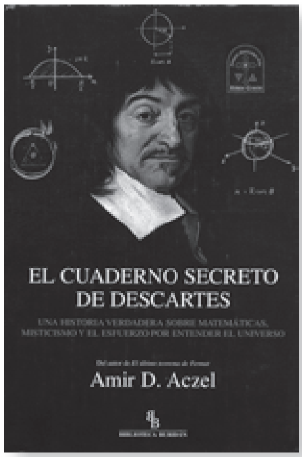
El número áureo y sus implicaciones en otras áreas es otro de los temas clásicos tratados. Cabe destacar en este último ejemplo, que hace una desmitificación de situaciones (construcciones fundamentalmente) donde no cree que esa proporción aparezca tan claramente como muchos piensan que está. También casos de probabilidades que, al no versado en ellas, le pueden resultar chocantes.

En resumen podemos decir que es un libro que, cuando se empieza a leer, se puede pensar: *Bueno…, un libro más de problemas…* Sin embargo, a medida que se avanza en la lectura, va atrayendo cada vez más pues el autor tiene ideas claras de como dar esa información matemática, de como orientar esa reflexión de la lectura y, en la mayoría de los casos, como resolver el problema pues, eso es el libro, se trata de resolver problemas. Estoy seguro que su lectura resultará atractiva a cualquiera que viva el mundo de la Matemática. De nuevo aquí, Ian Stewart es una garantía de la calidad en la exposición de un tema matemático.

Fernando Fouz Rodríguez

El cuaderno secreto de Descartes

Aczel, A. D.
Biblioteca Buridán



El filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) es, sin duda, una de las figuras más destacadas del pensamiento occidental. Su apotegma *cogito, ergo sum* marcó el inicio del problema mente/cuerpo. Descartes dedica su vida a diseñar un método para que la reflexión especulativa progrese sobre una base firme y segura. El objetivo de la filosofía de Descartes es utilizar su método para alcanzar la verdad; expuesto en el *Discurso del método* para guiar bien la razón y buscar la verdad en las Ciencias. Podemos señalar, que el filósofo francés es el pilar sobre el que se asienta la corriente racionalista. Considera la filosofía como el estudio de la sabiduría, para ese diseño utilizará a la matemática como modelo. Como matemático su gran aportación es el magnífico e imprescindible libro *La Geometríe*, a partir de este escrito las matemáticas alcanzaron un nivel superior e integrador con respecto a la cultura matemática clásica.

Es muy conocido, escrito por el mismo Descartes, que la noche del 10 de noviembre de 1619 tuvo tres sueños sucesivos que él interpreta como un mensaje del cielo para consagrarse a su misión filosófica. La importancia que concede Descartes a estos sueños choca con las características que se le atribuyen ordinariamente a su sistema, pero según el mismo Descartes nos relata, estarían en la base de su determinación para dedicarse a la filosofía, y contendrían ya la idea de la posibilidad de fundamentar con certeza el conocimiento y, con ello, reconstruir el edificio del saber sobre cimientos firmes y seguros.

Pero, Descartes también parece que tenía un lado místico y misterioso, que es magistralmente descrito en este libro: pertenecía, probablemente, a una hermandad oculta y perseguida llamada *Rosae Crucis*. El libro relata, a parte de su vida, la influencia de los Rosacrucianos, como esta fraternidad intelectual influyó en varios escritos de Descartes, especialmente en la explicación profunda y mística del universo, aspectos que ocultó en un cuaderno secreto por temor a las persecuciones religiosas de la época. El cuaderno en el que iba anotando sus descubrimientos más comprometidos pasó a la muerte de Descartes a manos de un amigo suyo que celosamente lo ocultó a ojos de curiosos. Un cuarto de siglo después de su muerte, el filósofo y matemático alemán G. Leibniz pudo copiar, de manera muy esquemática, algunos de las páginas del cuaderno, pero desgraciadamente, unos veinte años más tarde el cuaderno desapareció definitivamente, de manera que lo único que nos queda es la copia críptica y parcial realizada por Leibniz con unas enigmáticas anotaciones realizadas en los márgenes.

A la muerte de Leibniz en 1716, sus escritos fueron depositados en los archivos de la Biblioteca Real de Hannover, pero dado que Leibniz había dejado una inmensa cantidad de material, las páginas que había escrito copiando el cuaderno de notas de Descartes escaparon a la atención de los estudiosos durante casi dos siglos.

¿Qué contenía el famoso cuaderno de Descartes?, según relata el mismo Leibniz hay unos descubrimientos importantes relacionados con propiedades geométricas y otras cosas… pero es mejor que el amable lector se acerque al libro.

Los últimos capítulos del libro coinciden con los años finales de Descartes. El alejamiento, el rigor del invierno, la envidia de los doctos…y su muerte temprana, a la edad de 53 años.

Este libro, que se lee como una novela de misterio, nos presenta un Descartes seguramente desconocido para muchos, su primera juventud, su vida más íntima, los encuentros con los intelectuales de la época, los esfuerzos por entender el orden y el misterio del cosmos. En definitiva, un libro apasionante. Su autor, Amir D. Aczel es un aclamado y prolífico escritor de obras de divulgación sobre historia de la ciencia, ha escrito sobre Fermat (el último teorema de Fermat), sobre Eisntein, Foucault, Bourbaki, etc.

Santiago Fernández

EUSKO JAURLARITZA
GOBIERNO VASCO

HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE
ETA IKERKETA SAILA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN,
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia
Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco