

CADENAS DE MARKOV APLICADAS AL DIAGNOSTICO Y TRATAMIENTO DE CONDUCTAS Y PROCESOS DE APRENDIZAJE

OSCAR SAENZ BARRIO
ANDRES GONZALEZ CARMONA

EL TIEMPO COMO VARIABLE RELEVANTE DE LA INTERVENCION

Los paradigmas de investigación educativa se centran fundamentalmente en la determinación de la relación causal entre variables, bien sean éstas uni o multidimensionales, bien concurrentes en el tiempo o distales. En cualquier caso se acepta que las variables causales acontecen antes del evento que producen.

Desde un punto de vista teórico, la «covariación» entre las variables antecedentes y consecuentes sería la evidencia *explicativa* de la ciencia, y en todo caso permitiría la predictibilidad de un acontecimiento a partir de otro. Sólo si sabemos que hay una relación entre E1 y E2 podremos hacer previsiones acerca de E2 cuando surja la situación E1 (Eigenmann, 1981, 29). Desde el punto de vista educativo, la relación entre dos estados (antecedente-consecuente), involucrados en un cambio es muy importante, pero no dice nada en cuanto al proceso de intervención. Puede normar la acción («para conseguir ésto hay que hacer lo otro»), pero no prescribe cuándo hay que hacerlo. Dado que la educación es un proceso ordenado en el tiempo, el momento de ejercer las diferentes providencias educativas que configuran conductas, sentimientos, ideales, conocimientos, valores, etc. es uno de los componentes esenciales de su eficacia; lo que hoy podría llamarse *optimización de la intervención*. Y si ello es cierto para la creación de un aprendizaje cualquiera, lo es más cuando se trata de procesos específicos para reforzar pautas deseables o evitar/eliminar comportamientos indeseables o incorrectos.

En buena medida, el momento de intervención es desconocido para el profesor. Sabe qué hay que hacer en determinada circunstancia, pero su presencia suele pillarle por sorpresa, por lo que la potencia de la intervención queda limitada por la imprevisibilidad del suceso y la repentización de la medida (educativa o terapéutica). Por el contrario «siempre que se establezcan afirmaciones predictivas, más allá de la situación inmediata, es de suma importancia conocer el curso de probables concatenaciones de conductas ordenadas temporalmente» (Baltes et al., 1981, 131); si esta dependencia temporal puede ser descrita mediante algún tipo de regla o generalización, entonces la predicción y el control de la conducta es más eficaz. En otros términos, la predicción y la optimización de un proceso dependen primordialmente del conocimiento de los «antecedentes y procesos claves» que influyen en su evolución.

ALEATORIEDAD DE LA RELACION ANTECEDENTE-CONSECUENTE

Sin embargo la potencia educativa de los paradigmas es muy diferente sean estos proximales o distales. Es evidente que la potencia de los primeros es máxima al

conocer la dependencia de una variable sobre otra; de esta suerte, ante un estado vinculado inmediatamente a otro, el educador puede intervenir con una alta tasa de éxito; por ejemplo conocido el efecto relajante del silencio sobre los párvulos, y dada una situación de alteración, para lograr un estado normalizado habrá que aplicar la situación antecedente que lo propicia. El problema de los paradigmas proximales aplicados a la intervención es que su eficacia se ve reducida por el desconocimiento de las tramas de variables antecedentes de un lado y la inmediatez de la reacción antecedente-consecuente. En otros términos, sabemos cómo actuar cuando el acontecimiento está encima, pero no sabemos en qué momento puede surgir. De ahí la utilidad de los paradigmas distales, capaces de predecir la cadena de acontecimientos desencadenantes de una situación o productores de un estado.

La investigación evolutiva se propone predecir la emergencia de estados, capacidades o estructuras que permiten determinar los aprendizajes conductuales; es lo que Baltes llama «relaciones históricas complejas a largo plazo» (Baltes, op. cit., 132). Nosotros vamos a centrarnos en lo que podría llamarse *relaciones temporales complejas a corto plazo*, porque nuestra pretensión es desvelar cómo se produce una determinada conducta compleja, su ordenación en el tiempo y sus manifestaciones más probables. Conocidos estos parámetros, estimamos que la intervención educativa puede optimizarse porque se alerta cuándo se alcanzan ciertas manifestaciones críticas, y se actúa preventivamente en las fases anteriores al acontecimiento catastrófico. Por ejemplo, se sabe que hay niños que reaccionan a la frustración con autolesiones, convulsiones y otras manifestaciones histéricas. Para evitar la crisis, la reacción de los cuidadores suele ser acceder a las demandas del niño a su primera manifestación, convirtiéndolo en caprichoso y tiránico. Y sin embargo no todo los deseos derivan hacia la fase paroxística. Si se pudiera describir una secuencia conductual, con sus posibles alternativas o direcciones, y un índice probabilístico de hacia dónde se dirigirá la conducta cuando se alcanza cada estadio, el profesor o terapeuta podría intervenir en las mejores condiciones de éxito.

LA TOMA DE DECISIONES

El tiempo ya no es sólo el escenario en el que se ordenan ciertos fenómenos sino un componente esencial de la propia explicación científica y, por lo tanto, de la prescriptividad didáctica inferida de ella.

Por eso conviene diferenciar: a) la dependencia lógica o estructural de dificultad o complejidad de los componentes de una secuencia y b) la serie de eventos en la que el paso de uno a otro depende funcionalmente del tiempo.

Responden al primer caso propuestas metodológicas basadas en el análisis matricial difundidas entre nosotros por la excelente puesta al día de Rodríguez Diéguez (1983) y el buen trabajo de Solano Flores, del mismo año; sin embargo, su aplicación práctica, salvo los perseverantes trabajos de Rodríguez Guarnizo (1983 y 1985), y algún que otro doctorando, han tenido pocos seguidores. Su pretensión, como es sabido, es la descripción de secuencias conceptuales, es decir, un orden jerárquico de las informaciones, en cuanto que una de ellas puede ser prerequisite para el aprendizaje de otras. Con carácter general, sería introducir un cierto orden o régimen de decisión previsible entre dos sistemas en interacción: la conducta caótica y casual y la automatizada o estereotipada. Entre el conjunto ilimitado de elecciones que un profesor o un alumno pueden hacer en la presentación de la información o en la utilización de estrategias de aprendizaje, hay una serie finita de flujos orientados que optimizan el proceso.

Se trata evidentemente de un modelo de toma de decisiones basado en la codificación de los juicios, formulados por un experto mediante combinaciones binarias y representadas en forma matricial. Aunque recientemente se haya señalado la debilidad del método por la propia inconsistencia del juicio que da lugar a la matriz (Krovak, 1987) se sigue trabajando sobre el modelo (Saaty, 1987; Harker, 1987; Falmagne y Doignon, 1988), para mejorar la logística de la toma de decisiones mediante la definición de un algoritmo, bien numérico, bien gráfico o estructural (Peay, 1981), pero no necesitan asumir la transitividad entre los estados.

MEDIDA DEL CAMBIO TEMPORAL

Sin embargo, no es éste el caso que nos ocupa. Nuestra intención es la descripción e interpretación de datos comportamentales en términos de *interacción*. El tipo de análisis que proponemos permite describir si los distintos acontecimientos de una conducta seriada surgen al azar o por el contrario se producen con arreglo a un cierto patrón o tendencia, medida en términos de probabilidad, de que un suceso j ocurrido en el tiempo t , proceda de otro suceso i ocurrido en $t - 1$ y que en la unidad siguiente $t + 1$ progrese hacia k .

Tres grandes grupos de técnicas de análisis se han venido utilizando hasta ahora: A) las correlaciones; B) el análisis secuencial de retardos y C) el análisis de series temporales. Las limitaciones que presentan son, en esencia, las siguientes:

A) A la primera: si la conducta se caracteriza por algo, es por su dinamicidad y su carácter transicional; es decir, que un proceso que se desliza de un estado a otro según patrones o secuencias que pueden ser definidos, se pretende describirlo mediante análisis de tipo correlacional, en los que la predicción de una variable se hace en función de otra correlacionada con ella, pero *distinta*. Por otra parte, la correlación, al ser un algoritmo *simétrico*, permite predecir tanto la regresión de la variable X sobre la variable Y, como la de Y sobre X. Sin embargo, si tales variables son cronológicamente dependientes, la afirmación de que X es antecedente de Y no es reversible; sería imposible decir que Y es antecedente de X.

Es evidente que dicho algoritmo, aunque fácilmente identificable psicológicamente, y de sencilla expresión funcional, carece de la tercera característica exigida por Kowalski y Guire (1974), y es que debe ser *congruente con los datos*. En consecuencia, el rasgo más importante debería ser el de la *adaptación matemática a la significatividad del proceso*, dado que los datos pueden ser descritos por muy diversas funciones matemáticas.

En un artículo anterior (Francés, González y Sáenz, 1987) ya señalábamos la insuficiencia de algunas investigaciones evolutivas, por sustraerse a la misma naturaleza temporal del fenómeno estudiado. Es cierto, decíamos allí, que el tiempo, aunque indisolublemente vinculado a la conducta, no expresa por sí mismo ni su origen ni sus motivos, pero no lo es menos que la secuencia temporal es en algunos casos una buena base explicativa de ciertos comportamientos, y permite realizar algunas inferencias útiles en orden a prever cambios intraindividuales en la conducta. A partir de esta idea surgen propuestas metodológicas que se apoyan en la propia dinámica del modelo, es decir, en la probabilidad de que un evento surja en el conjunto de eventos a los que está ligado.

B) El análisis secuencial de retardos es una propuesta más cercana a nuestra línea de argumentación, en el sentido de que permite prescribir la intervención educativa tan pronto como la probabilidad de que se produzca un cambio alcance, un límite estocástico fijado (por ejemplo que la probabilidad de ocurrencia condicional

da según el retardo sea mayor que la probabilidad de ocurrencia incondicionada). Este análisis, muy divulgado por Anguera (1983), y muy extendido entre el profesorado por su sencillez, presenta también problemas técnicos importantes.

El primero de ello es la necesidad de fijar una conducta previa –conducta criterio–, a partir de la cual se estructura el patrón, en función de la aparición de las distintas categorías en un determinado orden. Como la conducta criterio puede ser fijada según el interés momentáneo del investigador, las posibilidades de apareo son en cada caso diferentes, por lo que los patrones resultantes también lo serán. Esto quiere decir que con un mismo conjunto de observaciones y un mismo modelo de análisis se pueden obtener resultados diferentes.

En segundo lugar, al elegir una conducta criterio, se prioriza aleatoriamente una determinada secuencia conductual y, en consecuencia, se pierde la relación entre el resto de las conductas entre sí. Bien es cierto que se puede aplicar el análisis secuencial de retardos a cada una de las categorías del sistema, pero ello no resuelve el problema señalado, porque sea cual sea la conducta criterio elegida, se privilegiará un patrón, con sus fases o componentes, con preterición u olvido de los demás. No ofrece, por lo tanto, un modelo que contemple *simultáneamente* todos los componentes del sistema y con las mismas probabilidades de revelarse.

En tercer lugar, identificar las categorías de la cadena a expensas de la diferencia significativa entre la probabilidad condicional y la incondicional en cada retardo, conduce a la configuración de transiciones atípicas (las que difieren por encima o por debajo de una determinada probabilidad), pero no ofrece un modelo de las transiciones en una cadena comportamental normal, de un conjunto de sujetos que puedan dar la pauta de tipicidad.

C) El otro procedimiento que queremos someter a discusión, es el análisis de series temporales. Referencias básicas a su metodología pueden encontrarse en Box y Jenkins (1970), Glass, Willson y Gottman (1972), Kowalski y Guire (1974); entre nosotros, J. L. Vega (1985) ha realizado una apretada síntesis de todos ellos. La idea básica de este conjunto de métodos va más allá de la mera descripción o representación matemática. Una serie temporal está configurada por el conjunto de observaciones sucesivas de una variable a lo largo del tiempo. El orden secuencial bastaría para describir su dependencia temporal; sin embargo, si es posible demostrar la dependencia funcional de cada uno de los elementos de la serie con todos los demás, mediante una correlación serial, entonces, el análisis adquiere carácter explicativo, en tanto que permite desvelar el proceso subyacente que da coherencia a la sucesividad.

Las «times series» presentan algunas objeciones que las hacen poco útiles a nuestro intento, dada la naturaleza de los datos observacionales y la propia situación educativa.

1) Las series temporales requieren procesos estabilizados y son intervenciones muy limitadas. Es evidente que la educación no sólo no es un proceso estabilizado, sino que no debe serlo. Con sus progresos y regresos, saltos antes y después de períodos más o menos largos de estabilidad, el niño va creciendo permanentemente, y malo sería la estacionaridad del proceso. Por otra parte, el número de variables intervinientes puede ser muy numeroso y de difícil control: por ejemplo, una conducta de indisciplina puede estar intervenida simultáneamente por una ironía del profesor, la burla de los compañeros, tiempo de inmovilidad, la proximidad de la hora de salida, etc.

2) Las series temporales requieren que las variables estudiadas se muevan en un rango, es decir, que sean variables continuas, con origen definido y que presen-

ten las condiciones de orden y suma. La circulación de automóviles en las carreteras de una provincia, los diferentes días de la semana, puede ser analizada mediante una serie temporal: el número de coches es una variable continua, puede circular desde ningún coche hasta n ; se pueden ordenar las diferentes densidades (2.000 coches/hora es menor que 4.000 coches/hora), y se pueden sumar (6.000 coches por la mañana más 8.000 por la tarde son 14.000 coches). En nuestro caso, una conducta seriada (por ejemplo: niño juega solo/acercamiento a un grupo/rechazo/discusión/busca refugio en la maestra/busca otras alternativas) no constituye una variable continua, sino nominal; no se puede ordenar cuantitativamente; *dos* intentos de acercamiento no constituyen un valor *doble* que *una* situación de juego solitario, ni *tres* rechazos son la suma de *una discusión y un refugio* más *una* búsqueda de apoyo. En definitiva lo que se trata de poner de relieve es la inadecuación del instrumento de representación a los datos disponibles.

3) Las series temporales se emplean fundamentalmente para hacer predicciones sobre aquellas variables que en su recorrido están afectadas por cambios estacionales o cíclicos. Quiere decir que una variable procesual está compuesta por una parte sistemática y otra u otras estacionales o periódicas.

La metodología de las series temporales posee técnicas muy depuradas para convertir una serie no estacionaria en estacionaria, es decir, para eliminar las variaciones aleatorias y reducir la variable a su componente sistemático. Una vez logrado ésto, el cálculo se reduce a una simple regresión de X sobre T .

Pero en nuestro caso sabemos que ésto no es así; establecida la correlación entre X y T , ésta sería cierta mientras estuviera controlada. Sin embargo, en la dinámica de la clase el número de intervenciones que impiden la estacionaridad del proceso educativo son ilimitadas; cada vez que una nueva situación incidiera en él, habría que cortar la serie observacional y empezar a computar nuevos registros para calcular una nueva regresión. Y así sucesivamente.

Como nuestros plazos de observación son pequeños, sería fácil ir eliminando las fuentes aleatorias, con lo que la predicción de la conducta quedaría reducida a una visión fragmentaria en una serie sucesiva de tiempos discretos. Ello conllevaría dos grandes errores:

- Olvidar el carácter esencialmente continuo y transicional de la conducta; y
- Eliminar de la previsión los factores aleatorios y concurrentes, que son precisamente los que, en nuestro caso, dan significado a la causalidad del proceso.

CADENAS DE MARKOV

En situaciones en que los parámetros de los procesos de decisión están afectados por decisiones previas, o por variables externas de carácter cronológicamente dinámico, son de gran utilidad los modelos markovianos, que obvian buena parte de las dificultades que hemos visto en los análisis convencionales de carácter secuencial.

Esta aplicación, que ha sido probada por Dagsvik (1983), es el punto de partida para la modelización de procesos que implican conductas o elecciones personales a lo largo de un espacio de tiempo.

Las cadenas de Markov ofrecen una serie de posibilidades que eliminan problemas antes mencionados y permiten realizar un análisis de predicción al tiempo que uno de estructura interna:

1) las posibles categorías o estados sólo deben responder a una clasificación nominal, siendo el análisis invariante frente a biyecciones.

2) Es posible incluir las intervenciones en el modelo sin más que asignarlas a una de estas categorías.

3) No es necesario que el proceso esté estabilizado y puede describir las relaciones entre todos los estados en cualquier período de tiempo.

4) Es perfectamente simétrico, de tal modo que su estudio se realiza a partir, estrictamente, de los datos observados, sin que existan opciones externas apriorísticas que desvirtúen el modelo favoreciendo a un estado determinado.

5) Por último, debe destacarse que el análisis se realiza exclusivamente con la variable considerada sin que deba intervenir ninguna otra ajena al proceso.

En la realización del trabajo debe prestarse especial atención a algunos puntos entre los que destacamos los siguientes:

Estimación de la matriz de transiciones a partir de una sola hoja de muestreo o a partir de varias hojas.

Fiabilidad entre codificadores.

Contraste de hipótesis de igualdad de matrices estimadas.

Análisis de una matriz estimada: Estacionariedad, Vectores límite, Situaciones de carencia de límite.

Las matrices de transición del estado i al estado j se enmarcan dentro del campo general de las CADENAS DE MARKOV, que son una clase especial de Procesos estocásticos en que las probabilidades de transición de unos estados a otros pueden representarse mediante una MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION $P = (p_{i,j})$ de modo tal que para cada fila i , la suma de sus elementos, $\sum p_{i,j}$, es la unidad.

A partir de las matrices de observación, podemos obtener, aplicando la teoría de estimadores centrados, una matriz estimada $P^* = (p_{i,j}^*)$, sin más que normalizar la matriz $M = (m_{i,j})$ de observación, dividiendo cada elemento $m_{i,j}$ por, $\sum m_{i,j}$, la suma de los elementos de su misma fila.

Cualquier situación real observada puede especificarse mediante un vector de probabilidad $\pi = (\pi_i)$, que especifica la probabilidad de que la situación se encuentre en el momento especificado en el estado i . Evidentemente $\sum \pi_i = 1$.

Si el estado está completamente determinado y corresponde al k , basta considerar que el π_k correspondiente es 1 y el resto 0, lo que permite tratar con el mismo lenguaje el caso determinístico.

La propia teoría permite establecer que si en un determinado tiempo, el vector de probabilidad que describe la clase es π^0 entonces, transcurridos n intervalos de tiempo, el vector que la describe, π^n , se encuentra relacionado con el anterior mediante la ecuación matricial

$$\pi^n = \pi^0 P^n$$

Dos tipos de vectores de probabilidad tienen una importancia fundamental, por su aplicación práctica:

1. Los ESTACIONARIOS
2. Los LÍMITES

Un vector se llama *estacionario* cuando, caso de que el sistema en un cierto momento se represente por él, permanece en el mismo indefinidamente.

Un vector se llama *límite*, cuando, partiendo de cualquier posible representación del sistema, con el transcurso del tiempo se obtiene como límite el vector dicho. Si este vector límite existe, entonces es estacionario y por supuesto no existen otros vectores estacionarios.

En términos concretos la existencia de vectores estacionarios implica que si en el transcurso de la clase se pasase por uno de ellos se repetiría la situación durante cualquier tiempo.

De otra parte, si existe vector LIMITE (o vectores límites parciales) el comienzo de la clase por cualquier procedimiento es irrelevante, ya que con mayor o menor rapidez se irá desplazando la situación hasta alcanzar dicho límite.

En principio puede pensarse en obtener el vector límite, posible existente, resolviendo la ecuación

$$\lim (\pi P^n) = \pi$$

pero existen métodos más potentes como a continuación veremos.

Es conveniente para ello pasar de la matriz P^* al grafo asociado, compuesto por tantos vértices como estados existen en el sistema y por tantos caminos como valores no nulos existen en P^* , mediante la regla

$$E_i \text{ pasa a } E_j = P_{ij} < 0$$

(Notemos que el grafo asociado a P^* y a M es por tanto el mismo).

Decimos que los estados comunican si existe un camino de ida y vuelta que enlaza los vértices respectivos. A dicho camino le llamaremos ciclo y al número de pasos, longitud del mismo.

Una cadena se llama de estados estacionarios si posee vector límite. Una caracterización de las mismas en base al estudio del grafo asociado se encuentra en González (1973). Destacamos el siguiente criterio, muy útil en nuestro caso:

Si todos los estados comunican y existe un ciclo de longitud uno, la cadena posee vector límite.

Puesto que los grafos son de pequeño tamaño puede realizarse, incluso manualmente la comprobación de la existencia de vector límite.

Recordando que éste debe ser estacionario basta imponer la condición de que

$$\pi P = \pi$$

o equivalentemente

$$\pi (P - I) = 0$$

recordando que a la solución debe imponerse la restricción de que

$$\sum \pi_i = 1$$

Para resolver este problema es conveniente el uso de ordenador.

APLICACIONES

La práctica educativa ha puesto de relieve que la eficacia de la intervención depende tanto de la validez de la agencia didáctica o del método, cuanto de su oportunidad. Si bien en el aprendizaje conceptual se han podido obtener, en algunos casos, resultados semejantes con materiales bien jerarquizados o secuenciados aleatoriamente (Rodríguez Diéguez, 1983), en los procesos de intervención no es irrelevante el momento en que se actúa terapéuticamente o se reorienta el proceso operatorio o mental inadecuado.

Las matrices de transición se han revelado como instrumentos muy valiosos en el estudio de la conducta, porque respetan su propia dinamicidad sin reducirla como suele hacer la observación convencional a visiones discretas de un suceso que es esencialmente temporal; pero, además, permiten predecir, mediante cadenas probabilísticas, la transición de una fase a otra dentro de una secuencia, y anticipar el estado más probable en que un sujeto va a ser observado cuando tal proceso alcanza su estacionaridad o equilibrio.

El análisis matricial de datos observacionales, ha sido probado suficientemente por nosotros en secuencias comportamentales bien definidas: agresividad (Francés, González y Sáenz, 1987), dependencia (Francés y Sáenz, 1987), competencia (Francés y Sáenz, 1988), resolución de problemas (Alonso, González y Sáenz, 1988). Creemos, pues, llegado el momento de generalizar un modelo diagnóstico que, curiosamente, parece ser la respuesta a la idea del matemático Verstappen expuesta en la V Reunión del ICME (1984). Verstappen afirmaba allí que el objetivo supremo para los profesores era identificar alguna suerte de estructura que permitiera apoyar cambios en la acción pedagógica, de forma que se pudiera penetrar en los *insights* de los estudiantes, y estimular al profesor como investigador en el aula (Carss, 1986).

CATEGORIZACION DE LA CONDUCTA

La conducta del niño es multiforme, casi una «enumeración caótica de acciones». Como la intervención educativa no se ejerce sobre la conducta en general sino sobre una específica necesitada de tratamiento, es necesario identificarla, primero y categorizarla, después.

A nuestro intento, entendemos por conducta, la integración de una serie de actos encadenados en una secuencia fija. El conjunto de estos actos constituye un «campo heurístico», que posee estas características:

- a) es infinito
- b) abierto, y
- c) susceptible de recombinar sus elementos.

La primera tarea, es pues, definir el campo y determinar su contenido; como por otra parte el campo es abierto y, en consecuencia, puede admitir cualquier forma de ampliación, se requiere la definición de la serie básica de actos que le proporcionan su estructura y limitan a efectos pragmáticos el catálogo de observaciones. Este catálogo se obtiene, bien de la literatura científica, bien de los expertos, bien de la práctica docente.

Por ejemplo, en dos experiencias básicas realizadas por nosotros, la categorización del campo ha sido la siguiente:

CONDUCTA AGRESIVA	
1. Ataques verbales moderados	Idiota, imbécil, tonto, asqueroso, guarro
2. Insultos y gritos	Burlas, gritar, maricón, cabrón, h. p.
3. Amenazas verbales y gestuales	Fuera de mi sitio, te voy a matar
4. Contacto físico moderado	Empujarse con el cuerpo o la mano. Arrebatarse cosas
5. Agresión, lucha	Contacto físico amplio. Rodar por el suelo. Tirarse piedras
6. Violencia y destrozo del material	Golpearlo, darle patadas. Romperlo
7. Interrumpir el trabajo o reventar el juego de otros	Molestar, desbaratar, ensuciar o pintarrajar el trabajo o juego de los demás
8. Ausencia de conducta agresiva	

ESTRATEGIAS OPERATIVAS
E ₁ Lectura del problema
E ₂ Escritura de datos
E ₃ Representación simbólica de datos (Dibujos, gráficos, tablas)
E ₄ Utilización de datos irrelevantes
E ₅ Perplejidad: Sentirse desconcertado, repetir la pregunta del problema, repetirse los datos o pedir más
E ₆ Formulación de hipótesis (Si hago esto, entonces...) y planes de trabajo
E ₇ Anticipación de los resultado (estimación cuantitativa o cualitativa)
E ₈ Cálculo (Operaciones)
E ₉ Resolución (llegar a un término en el proceso operativo y dar una solución)
E ₁₀ Comprobación (Verificar que el resultado satisface las condiciones)
E ₁₁ Rectificación (cambiar de estrategia: orden operacional, simplificar el problema, utilizar otros datos)
E ₁₂ Estancamiento o ausencia de conducta

La observación se puede enriquecer completando el campo y sofisticando la variable; por ejemplo, la agresividad la hemos estudiado en tres situaciones escolares: controlada, semicontrolada y libre. O bien las estrategias operativas se han registrado en cinco tipos de problemas: conjuntos, numeración, cálculo, magnitudes y geometría. Ello permite comparar las secuencias, e incluso obtener a partir de ellas una secuencia genérica mediante la matriz suma, como luego se verá.

Definido así el campo de observación, ya puede someterse a experimentación; en principio todas estas actividades son igualmente posibles, y mutuamente excluyentes; es decir, un sujeto no puede ser observado simultáneamente en dos o más categorías. A partir de estas condiciones, podemos preguntarnos ¿cuál es la probabilidad de que un escolar proceda de un determinado modo? Pensemos, por ejemplo, que sólo los subconjuntos del campo «resolución de problemas» son $2^{12} - 1$, es decir, 4095.

SISTEMA DE REGISTRO

Usualmente suele recogerse la información mediante la cotación de conductas observadas por unidad de tiempo; sin embargo, para nuestro intento, ésto no era suficiente; el tratamiento que queríamos dar a los datos requería el orden de aparición de cada conducta. No es lo mismo el registro de dos veces E₁, una E₂ y tres E₃ en una determinada unidad de tiempo, que la observación de E₁/E₂/E₁/E₃/E₃/E₃.

El cómputo total es el mismo, pero de la mera cuantificación de las conductas observadas sólo se concluyen frecuencias y sus estadísticos derivados. Por ejemplo, conocida la puntuación de un sujeto en un estado E₁ (rectificación de datos u operaciones), así como la media y desviación típica del grupo, se puede hacer algún tipo de razonamiento parecido a éste:

Si estamos dispuestos a considerar que con la media obtenida, una puntuación X₁ puede separarse por azar $\pm 1,96 \sigma$, pero no más, concluiremos al nivel de significación del 5%, que las puntuaciones típicas que se separen de este valor por encima o por debajo de la media, constituyen casos atípicos en la conducta correspondiente y, por tanto, merecedores de atención individualizada.

EXPLOTACION SIMPLE DE LOS DATOS

Si en vez de codificar las observaciones en tablas de frecuencia se codifican en forma matricial, su información es mucho más rica. Las matrices de frecuencias de transición ($n_{i,j}$) vienen definidas de acuerdo con la condición de que cada elemento $n_{i,j}$ sea el número de transiciones observadas desde el estado E_i al E_j ; $n_{i,j} = (E_i, E_j)$. De esta matriz se puede obtener además una tabla convencional de frecuencias sumando los términos $n_{1,j}, n_{2,j}, \dots, n_{i,j}$ de la columna j :

$$f(E_1) = \sum n_{i,1}, \dots, f(E_n) = \sum n_{i,n}$$

POSIBILIDADES DE CALCULO

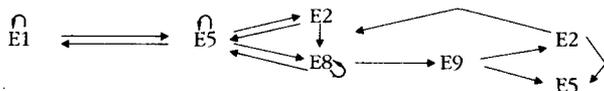
Tanto desde el punto de vista descriptivo como del diagnóstico, el tratamiento matricial ofrece aplicaciones muy versátiles. De cada serie de observaciones se puede calcular una matriz; sin embargo, la propiedad aditiva permite obtener una nueva que sea el resultado de la combinación de varias matrices singulares. De esta forma se puede obtener:

1. *Perfil individual*

Consistiría en la matriz suma de todas aquellas que codifican un determinado tipo de conducta. Por ejemplo la siguiente matriz de probabilidad es la suma de la correspondiente a variados tipos de problemas resueltos por Bruno, un niño de 5.º curso de E.G.B., por lo que podrían descubrir su «perfil heurístico» en el ataque de los problemas.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
E1	.90	.03	.00	.00	.08	.02	.00	.00	.00	.00	.02	.05
E2	.00	.28	.00	.03	.16	.03	.00	.44	.03	.00	.00	.03
E3	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
E4	.20	.20	.00	.20	.00	.00	.00	.40	.00	.00	.00	.00
E5	.09	.23	.00	.03	.31	.00	.03	.11	.00	.00	.00	.20
E6	.00	.50	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.50	.00	.00	.00
E7	.00	.50	.00	.00	.50	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
E8	.00	.01	.00	.01	.01	.00	.00	.70	.21	.00	.04	.01
E9	.04	.23	.00	.04	.19	.00	.00	.00	.42	.00	.04	.04
E10	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
E11	.17	.17	.00	.00	.33	.00	.00	.17	.00	.00	.16	.00
E12	.06	.11	.00	.00	.33	.00	.06	.05	.00	.00	.00	.39

Si estudiamos en ellas las transiciones de una estrategia a otra se puede obtener el siguiente grafo:



En este grafo se detecta que el estado E5 es la clave en la conducta de resolución de problemas para este niño. Después de la lectura, que reitera una y otra vez, queda perplejo, indeciso, se repite a sí mismo los datos (E5); cuando arranca, lo hace con mayor probabilidad hacia E2 (escritura de números) y hacia E8 (cálculo); una vez en este estado, el cálculo es una actividad casi absorbente para él, de suerte que, observado en ella en un tiempo t , en el tiempo siguiente $t + 1$, tendremos el 70% de

probabilidad de encontrarlo allí todavía. Desde E₈ la transición más probable es a E₉ (resolución, llegar a la solución del problema), y de aquí a reiniciar todo el proceso (E₂) cuando intuitivamente el resultado no le parece convincente, o a E₅ de nuevo, desconcertado.

Es evidente que Bruno, desde el punto de vista terapéutico, requiere una intervención decisiva en dos momentos: primero, en E₅; es natural una cierta indecisión o desconcierto después de la lectura del problema, pero en el proceso racional de resolución no parece lógico empezar a escribir datos o a calcular sin la producción de una cierta hipótesis o plan de desarrollo que dé coherencia a la manipulación de números. De ahí que será necesario instruir al niño para pasar de E₅ a E₆. La segunda intervención tendría que ser en E₉; una vez resuelto el problema, no parece lógica la transición a una nueva escritura de datos (E₂) o a E₅, para reproducir de nuevo todo el proceso en una conducta circular sin fin.

Después de E₉ sería necesario introducir en la conducta matemática de Bruno la secuencia E₁₀ (comprobación). En nuestra experiencia hemos advertido que en la matriz global (todos los niños con todos los tipos de problemas), cuando se alcanza E₁₀ y se verifica el resultado con las condiciones del problema, la mayor probabilidad de pasar a un nuevo estado es a E₆; es decir, el niño se da cuenta de que es necesario prever una estrategia direccional, ya que la mera repentización de un proceso o el empleo caótico de números y operaciones no conducen a ningún resultado positivo.

2. *Matriz de conducta-tipo*

En vez de una determinada conducta o secuencia en un niño, puede interesar ese mismo proceso en un conjunto de sujetos, lo cual permitiría definir la progresión más probable de una conducta en un colectivo bien identificado: por ejemplo, cómo actúan los niños del ciclo medio ante problemas en los que se introducen datos irrelevantes, o en los que faltan datos básicos, o en los que la información se ofrece de forma gráfica, etc. Este tipo de análisis facilita:

1. El diseño de una acción colectiva para reforzar, reconducir, eliminar una fase/estado/evento en una secuencia comportamental.
2. Comparar la misma conducta o secuencia en diferentes situaciones o estados.

Por ejemplo, nosotros hemos estudiado la agresividad del preescolar en tres situaciones didácticas diferentes: controlada, semicontrolada y libre. Como ilustración, incluimos las matrices-suma de 70 niños en las tres situaciones, junto con sus vectores límite. El lector puede sacar con facilidad diagramas de transición de las tres, y compararlas entre sí

ACTIVIDAD CONTROLADA

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	
A ₁	.11	.18	.11	.11	.11	.22	.03	.43	
A ₂	.37	.19	.12	.16	.14	.70	.04	.38	
A ₃	.03	.01	.06	.33	.01	.03	.16	.37	
A ₄	.06	.02	.02	.17	.02	.04	.09	.58	
A ₅	.14	.02	.04	.07	.07	.07	.27	.32	
A ₆	.06	.06	.04	.02	.02	.19	.11	.49	
A ₇	.07	.04	.07	.05	.02	.02	.22	.51	
A ₈	.02	.01	.00	.03	.00	.01	.02	.91	
	.02	.02	.01	.04	.00	.02	.03	.85	Vector límite

ACTIVIDAD SEMICONTROLADA

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	
A1	.17	.19	.04	.11	.01	.04	.04	.39	
A2	.08	.16	.11	.12	.02	.09	.09	.33	
A3	.03	.06	.03	.35	.07	.06	.11	.30	
A4	.07	.02	.01	.18	.05	.03	.16	.47	
A5	.03	.05	.04	.11	.13	.05	.13	.44	
A6	.07	.04	.03	.04	.01	.20	.14	.46	
A7	.07	.04	.05	.09	.02	.04	.21	.48	
A8	.02	.02	.00	.03	.00	.01	.03	.89	
	.04	.03	.01	.05	.01	.02	.05	.79	Vector límite

ACTIVIDAD LIBRE

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	
A1	.17	.12	.08	.15	.04	.00	.02	.43	
A2	.07	.17	.15	.16	.04	.00	.08	.34	
A3	.07	.05	.10	.31	.08	.00	.08	.31	
A4	.07	.02	.01	.23	.11	.01	.06	.49	
A5	.05	.03	.00	.11	.32	.01	.10	.37	
A6	.02	.07	.00	.07	.11	.13	.14	.46	
A7	.03	.01	.01	.06	.01	.00	.02	.87	
	.04	.02	.01	.09	.04	.00	.03	.77	Vector límite

3. Conducta generaliza

El cálculo matricial permite desvelar la cadena comportamental derivada de *sujetos x conductas x situaciones*. Es obvio que cuanto más se gana en generalidad más se pierde en especificidad. A todo profesor le resulta útil conocer los desplazamientos interfases en una secuencia conductual de un sujeto para poder intervenir adecuadamente. Pero no le será perjudicial desvelar el comportamiento genérico o típico de un grupo, sea cual sea la situación en que sea observada una conducta concreta.

He aquí la matriz-suma de 70 niños observados durante 10 días, durante 15 minutos en cada una de las tres situaciones, es decir, la suma de 2.100 (70 x 10 x 3) matrices.

FRECUENCIAS

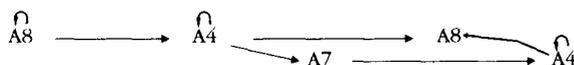
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A1	167	171	76	137	24	24	34	448
A2	48	125	94	107	16	24	55	259
A3	20	17	29	148	26	12	52	147
A4	130	35	24	388	141	46	184	969
A5	28	18	6	55	136	10	64	190
A6	23	21	12	14	11	72	50	183
A7	90	54	55	95	26	33	275	604
A8	543	300	130	995	119	158	512	22320

PROBABILIDAD

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	
A1	.15	.16	.07	.13	.02	.02	.03	.41	
A2	.07	.17	.13	.15	.02	.03	.08	.36	
A3	.04	.04	.06	.33	.06	.03	.12	.33	
A4	.07	.02	.01	.20	.07	.02	.10	.51	
A5	.06	.04	.01	.11	.27	.02	.13	.37	
A6	.06	.05	.03	.04	.03	.19	.13	.47	
A7	.07	.04	.04	.08	.02	.03	.22	.49	
A8	.02	.01	.01	.04	.00	.01	.02	.89	
									.03 .02 .01 .06 .02 .01 .04 .80 Vector límite

Si un observador hiciera un registro de la conducta de un párvulo al comenzar la clase o en un momento de la misma, y lo viera insultando a otro, podría sacar conclusiones completamente erróneas de este sujeto, pues su conducta representativa no es la ocasional o la que surge tras un insulto o después de una pregunta de la maestra, sino en una situación estable o de equilibrio, es decir, cuando se contempla en su conjunto no sólo la ocurrencia de cada conducta sino su transición de un estado a otro. El vector límite nos indica que alcanzada la estabilidad de la clase, la observación de un sujeto en cualquier situación didáctica tiene una probabilidad del 80% de no manifestar agresividad, pero que si la presenta será del 6% en el tipo A (contacto físico moderado), del 4% en A7 (interrumpir el trabajo o molestar el juego de lo otros), del 3% en A1 (ataque verbal moderado), etc.

Si en una situación escolar la mayor probabilidad de encontrar a un sujeto, según el vector límite es en el estado A8, podemos establecer, a partir de la matriz de transición, cual es la conducta seriada que con mayor probabilidad tiene la oportunidad de aparecer:



A8 o persiste en sí misma o pasa con mayor probabilidad a A4, que, o bien se extingue de nuevo en A8 o persiste en sí misma; pero también puede deslizarse a A7, que a su vez, tiene tres posibilidades prioritarias: extinguirse, persistir o pasar de nuevo a A4.

En definitiva, y en términos de terapia de la agresividad, la intervención educativa debería estar prevista para evitar el acceso a A4, pues es aquí fundamentalmente donde se gesta la dinámica agresiva más grave, que además tiene un carácter circular predominante entre esta misma conducta y A7.

CONCLUSIONES

1. Cuando en el estudio de la conducta interesa más el proceso que el producto, el simple recuento de frecuencias puede ser sustituido con ventaja por el procedimiento matricial.
2. Las matrices de transición constituyen el tratamiento de elección cuando se quiere estudiar la conducta, no como una yuxtaposición de estados, sino como una sucesividad en la que un estado sustituye a otro o a sí mismo.
3. Su expresión en términos de probabilidad confiere a las matrices de transición un valor pronóstico de la conducta de un individuo o un grupo, por cuanto en

función de su conducta anterior se puede predecir con qué probabilidad pasará a un estado j desde un estado i , por lo que se constituyen en un valioso instrumento para la Orientación, el Diagnóstico Psicológico y la Intervención Terapéutica.

4. Se ha comprobado que la teoría de cadenas de Markov permite calcular en determinados casos el vector límite de un proceso secuencializado; ello implica que cualquiera que sea la conducta inicial de un sujeto o un grupo, llegará a la situación del vector límite con una probabilidad dada, una vez alcanzada la situación de equilibrio.

5. El carácter deseable o rechazable del vector límite en el que desemboca una serie de conductas, y su nivel de probabilidad, permite la intervención educativa facilitando el diagnóstico de los estados previos que lo favorecen o inhibiendo los que se instituyen en antecedentes del mismo.

OSCAR SAENZ BARRIO
*Departamento de Didáctica y
Organización Escolar.*

Universidad de Granada.

ANDRES GONZALEZ CARMONA
*Departamento de Estadística e
Investigación Operativa.*

Universidad de Granada.

BIBLIOGRAFIA

- ALONSO, V., GONZALEZ, A. y SAENZ, O.: «Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el ciclo medio de E.G.B.», *Enseñanza de las Ciencias*, 1988, 6,3, 251-264.
- ANGUERA, M. T. (1983): *Manual de prácticas de observación*, Trillas, México.
- BALTES, P. B., REESE, H. W. y NESSELROADE, J. R. (1891): *Métodos de investigación en psicología evolutiva*, Morata, Madrid.
- BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M. (1970): *Times series analysis forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco.
- CARSS, M. (Ed.) (1986): *Proceedings of the fifth International Congress on Mathematical Education*, Birkhäuser, Boston Inc., Brisbane.
- DAGSVIK, J. K.: «Discrete dynamic choice: an extension of the choice model of Thrustone and Luce», *Journal of Mathematical Psychology*, 1983, 27,1, 1-43.
- EIGENMANN, J. (1981): *El desarrollo secuencial del curriculum*, Anaya, Madrid.
- FALMAGNE, J. C. y DOIGNON, J. P.: «A class of stochastic procedures for the assessment of knowledge», *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1988, 41, 1, 1-23.
- FRANCES, M. P. y SAENZ, O.: «Descripción de la conducta dependiente del párvulo mediante matrices de transición», *R.E.U.G. Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 1987, 1, 157-173.

- FRANCES, M. P., GONZALEZ, A. y SAENZ, O.: «Naturaleza funcional de las relaciones entre variables conductuales asociadas a una experiencia temporal», *THALES*, 1987, 6, 77-88.
- GLASS, G. V., WILLSON, V. L. y GOTTMAN, J. M. (1972): *Design and analysis of time series experiments*, University of Colorado, Boulder, Colorado.
- GONZALEZ, A.: «Algoritmo de clasificación de matrices de transición de una cadena markoviana», *Cuadernos del Departamento de Estadística*, 1973, 1, 13-25.
- HARKER, P. T.: «Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process», *Mathematical Modelling*, 1987, 9,II, 837-848.
- KOWALSKY, C. J. y GUIRE, K. E.: «Longitudinal data analysis», *Growth*, 1974, 38, 131-169.
- KROVAK, J.: «Ranking alternatives-comparison of different methods based on binary comparison matrices», *European Journal of Operational Research*, 1987, 32,1, 86-95.
- PEAY, E. R.: «Structural models with qualitative values», *Journal of Mathematical Sociology*, 1981, 8,2, 161-192.
- RODRIGUEZ DIEGUEZ, J. L.: «La estructura del mensaje en el acto didáctico. *ENSEÑANZA*, *Anuario Interuniversitario de Didáctica*, 1983, PY1PY.
- RODRIGUEZ GUARNIZO, J.: «El problema de la medida en los programas renovados de E.G.B.», *BORDON*, 1983, 248, 337-351.
- RODRIGUEZ GUARNIZO, J.: «La expresión correcta de un resultado experimental. Diseño de aprendizaje». *ENSEÑANZA*, *Anuario Interuniversitario de Didáctica*, 1985, PY3PY, 241-258.
- SAATY, T.: «The analytic hierarchy, process», *Proceedings of the Second International Seminar on Operational Research in the Basque Provinces* (San Sebastián, 1987), Universidad País Vasco, Bilbao (189-234).
- SAENZ, O. y FRANCES, M. P.: «La conducta competente en el párvulo», en *Cuestiones de Didáctica*, S.E.P. y CEAC, Barcelona, 1988, 241-253.
- SOLANO FLOREZ, G. (1983): *10 principios de análisis estructural educativo*, Trillas, México.
- VEGA, J. L.: *Psicología Evolutiva*, UNED, Facultad de Psicología, Madrid.