Formación Universitaria
Vol. 16(2), 13-24 (2023)
http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062023000200013

Errores sobre subespacios vectoriales: un estudio exploratorio con estudiantes de primer año de ingeniería

Andrea D. Cárcamo[1], Berta Barquero[2], Edelmira R. Badillo[3] y Claudio E. Fuentealba[1]
(1) Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Campus Miraflores, Valdivia-Chile (corre-e: andrea.carcamo@uach.cl; cfuentealba@uach.cl)
(2) Facultat d'Educació, Departament d'Educació Lingüística i Literària i de Didàctica de les CCEE i de la Matemàtica, Universitat de Barcelona, Campus Mundet, Barcelona-España (corre-e: bbarquero@ub.edu)
(3) Facultat de Ciències de l'Educació, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, Campus UAB, Cerdanyola del Vallès-España (corre-e: edelmira.badillo@uab.cat)

Recibido Ago. 17, 2022; Aceptado Sep. 20, 2022; Versión final Oct. 19, 2022, Publicado Abr. 2023

Resumen

Esta investigación exploratoria identifica y clasifica errores vinculados al concepto de subespacio vectorial que cometen estudiantes de ingeniería de primer año de universidad. Para ello, 210 estudiantes identifican y justifican por escrito por qué un conjunto no es un subespacio vectorial. Los resultados muestran que los estudiantes cometen tres tipos errores (E_1, E_2, E_3): 1) procedimiento incorrecto para determinar si un conjunto es subespacio vectorial, 2) relaciones incoherentes entre conceptos y 3) representación errónea de los elementos de un subespacio vectorial. Esta tipología puede ser una guía para diseñar tareas que promuevan la comprensión de este concepto y gestionar la emergencia de estos errores en el aula. Se concluye que la clasificación de errores sobre subespacio vectorial puede ayudar a los profesores a la hora de planificar la enseñanza de este concepto.

Palabras clave: subespacio vectorial; álgebra lineal; estudiantes universitarios; errores en matemática universitaria

Errors on vector subspaces: an exploratory study with first-year engineering students

Abstract

This exploratory research study identifies and classifies errors on the concept of vector subspace that are committed by first-year engineering students. Two-hundred and ten students identify and justify in writing why a set is not a vector subspace. The results show that students committed three types of errors (E_1, E_2, and E_3): 1) conducting an incorrect procedure when determining whether a set is a vector subspace, 2) inferring incoherent correlations between concepts, and 3) misrepresenting vector subspace elements. This typology can be used as a guide to design tasks that enhance the understanding of the vector subspace concept. It can also serve to determine when these types of errors emerge in the classroom. It is concluded that classifying student errors on the concept of vector subspace can assist professors when planning on how to teach this concept.

Keywords: vector subspace; linear algebra; university students; errors in university mathematics

INTRODUCCIÓN

Los espacios vectoriales y en particular, los subespacios vectoriales, forman parte de los contenidos centrales del Álgebra Lineal que es obligatorio en variadas carreras universitarias, entre ellas, las de ingeniería. El Álgebra Lineal contribuye a que los futuros ingenieros desarrollen el pensamiento matemático y resuelvan situaciones del área de ingeniería. El aprendizaje como la enseñanza de los espacios vectoriales representa todo un desafío debido a su alto nivel de abstracción y, además, porque este contenido no fue creado para resolver problemas, sino que fue creado para unificar y generalizar tanto métodos como conceptos ya existentes (Dorier, 1995). En los últimos años, se han desarrollado investigaciones que han centrado su atención en realizar innovaciones para el aprendizaje de contenidos vinculados a espacios vectoriales (Wawro et al., 2013; Cárcamo et al., 2017) e identificar dificultades que los estudiantes tienen con los mismos (Britton y Henderson, 2009; Mutambara y Bansilal, 2019).

Con respecto a las dificultades ante la enseñanza y aprendizaje del concepto de subespacio vectorial, investigaciones previas detectan y describen algunas dificultades y errores más comunes. Dorier et al. (2000) observaron que algunos estudiantes de ciencias de primer año de universidad escribieron la ecuación de la intersección de dos subespacios vectoriales como la suma o la diferencia de las ecuaciones de cada subespacio vectorial. Este error, según los autores, se puede atribuir a las dificultades relacionadas con el uso de la lógica y la teoría de conjuntos. Bogomolny (2006) identificó algunas dificultades de estudiantes universitarios de matemáticas relacionadas con el aprendizaje de conceptos claves de Álgebra Lineal, entre estos, los espacios vectoriales. Su investigación concluyó que los estudiantes, una vez que aprenden a trabajar con vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, tienen dificultades para considerar elementos de otros conjuntos como vectores (por ejemplo, las matrices).

Por su parte, Britton y Henderson (2009) encontraron que los estudiantes de ingeniería tuvieron dificultades con una tarea que les pedía mostrar que un conjunto *V* era subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Las dificultades detectadas corresponden al grado de formalismo requerido para escribir una prueba convincente; el uso de la lógica y la teoría de conjuntos; y, el pasar de su representación abstracta (en el que la definición se expresa) a su representación algebraica (en el que se enmarca la pregunta). En un nivel más básico, algunos estudiantes comprendían la diferencia entre un subconjunto y un subespacio vectorial. Estos autores concluyen la necesidad de seguir indagando en comprender la naturaleza precisa de las dificultades conceptuales de los estudiantes que cursan Álgebra Lineal.

Asimismo, Mutambara y Bansilal (2019) realizaron una investigación con estudiantes de licenciatura de matemáticas focalizado en las dificultades que se observan con el contenido de subespacio vectorial. Las dificultades se evidenciaron, por un lado, cuando un estudiante probó correctamente que dos conjuntos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^5$ eran cerrados con respecto a la suma de vectores, pero no verificó la condición de multiplicación escalar en ambos casos. Por otra parte, estos autores detectaron dificultad con la definición de subespacio vectorial cuando solo un estudiante, de diez, mostró que un conjunto no es subespacio vectorial. Los demás, no pudieron proponer un contraejemplo que era lo que se esperaba que hicieran.

En las tareas propuestas de los trabajos citados, los conjuntos se presentan en forma analítica y estos, en general, resultan ser subespacios de los espacios vectoriales dados. Los autores de dichos estudios se inclinan por la utilización de la representación analítica por ser menos reduccionista y más representativa del concepto, ya que permite trabajar con cualquier conjunto de vectores y no solo con aquellos que poseen una representación geométrica ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$). Asimismo, resaltamos que solo en el estudio de Mutambara y Bansilal (2019) se muestra un conjunto que no corresponde a un subespacio vectorial. También, es importante indicar que estas investigaciones sobre subespacio vectorial se enfocan en las dificultades de los estudiantes con este contenido, pero no profundizan en los errores asociados a ellos. Esto a pesar de que la información sobre los errores que cometen los estudiantes al resolver tareas sobre subespacios vectoriales es importante porque tanto los estudiantes como los profesores la necesitan para generar herramientas que le permitan detectarlos y abordarlos, pues es uno de los primeros conceptos abstractos que se estudia en las instituciones universitarias.

Además, el análisis de los errores es una prueba de diagnóstico poderosa que permite tomar consciencia de cómo se está desarrollando el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto de forma global (colectiva) como individual, permitiendo así adoptar medidas remediales para superarlos (Borasi, 1987). Desde este contexto, presentamos una investigación exploratoria que tiene como objetivo identificar y proponer una clasificación de los errores que emergen cuando estudiantes resuelven una tarea que involucra una comprensión profunda del concepto de subespacio vectorial.

En esta investigación, asumimos el constructo de error en el sentido señalado por Brousseau (1983), es decir, el error no es solo efecto de la ignorancia o del azar, sino que es efecto de un conocimiento previo que tuvo éxito, pero que ahora, resulta ser falso o simplemente no se adapta a la situación estudiada. Además, entenderemos por obstáculo al conocimiento que está obstruyendo la construcción de uno nuevo. Para Brousseau (1983), un obstáculo se manifiesta a través de errores reproducibles y persistentes. Entre los obstáculos de aprendizaje se distinguen tres tipos: los obstáculos ontogénicos (relacionados con el desarrollo genético de la inteligencia), los obstáculos didácticos (vinculados a la elección de un sistema didáctico y su evolución) y los obstáculos epistemológicos (relacionados intrínsicamente con el concepto que se aprende y su conceptualización como saber a enseñar y a aprender). Estos obstáculos son resistentes y por supuesto, que son necesarios identificarlos para construir un nuevo conocimiento (Del Puerto et al., 2006). Por otra parte, una dificultad es algo que inhibe al estudiante para realizar correctamente (o comprender rápidamente) una tarea o parte de ella (Centeno, 1988).

OTROS ANTECEDENTES

Considerando que, en la literatura científica, no hemos encontrado ninguna clasificación de errores para el concepto de subespacio vectorial ni en general, para los contenidos de Álgebra Lineal. En los apartados subsiguientes hacemos una revisión de investigaciones precedentes sobre los obstáculos epistemológicos y las dificultades conceptuales en Álgebra Lineal, así como de los errores de los estudiantes vinculados a la matemática universitaria. Esta información, nos permitirá tener un sustento para definir una categorización a priori de los errores de los estudiantes con los contenidos de Álgebra Lineal que servirá como herramienta teórica para identificar los errores sobre subespacios vectoriales.

Obstáculos epistemológicos en Álgebra Lineal

Hillel (2000) señala que, en un curso de Álgebra Lineal, se observan dos tipos de obstáculos epistemológicos. El primero se deriva de la familiaridad de los estudiantes con la geometría analítica y las coordenadas estándares. Según el autor, este nivel geométrico de pensamiento puede convertirse en un obstáculo para pensar en el concepto de base y sobre la necesidad de cambiar esta. El otro obstáculo se produce porque los estudiantes aprenden nociones específicas relacionadas con $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, este nivel algebraico de descripción se convierte en un obstáculo para el aprendizaje de la teoría general y para la aceptación de otros tipos de objetos como vectores (por ejemplo, funciones). Al mismo tiempo, Dorier et al. (2000) señalan que las dificultades de los estudiantes en Álgebra Lineal son derivadas de un único obstáculo que aparece en casi todos los modos de enseñanza: el *obstáculo de formalismo*.

Sierpinska (2000) indica que Dorier et al. (2000) parecen reservar el término *obstáculo del formalismo* para el razonamiento erróneo de los estudiantes en Álgebra Lineal que se deriva de su insuficiente competencia, principalmente en lógica y teoría de conjuntos elementales, pero también en la manipulación de expresiones algebraicas. Para Sierpinska (2000), un estudiante sería etiquetado bajo el término de *obstáculo del formalismo* si el estudiante se comporta como si las representaciones simbólicas formales de los objetos del Álgebra Lineal fueran los objetos en sí mismos y no tuvieran la competencia suficiente para comprender la estructura de estas representaciones. En concreto, los estudiantes que presentan el *obstáculo del formalismo,* probablemente, producirán muchas más cosas sin sentido en niveles que ni siquiera requieren el uso de la teoría de conjuntos. En el caso del concepto de subespacio vectorial, podemos considerar como el obstáculo del formalismo al manejo mecánico de las condiciones precisas y especificas necesarias para que un conjunto sea subespacio vectorial de otro.

Dentro del *obstáculo del formalismo*, Harel (2017) distingue tres obstáculos epistemológicos: (1) *Terminología espacial.* Según Harel (2017), en algunos casos, la terminología espacial aumenta los obstáculos que los estudiantes encuentran con los conceptos matemáticos. Siempre existe un vínculo cognitivo entre el nombre de un concepto y el esquema asociado con el concepto. En particular, muchos conceptos en Álgebra Lineal tienen etiquetas que connotan imágenes espaciales, como, por ejemplo, los términos: lineal, vector, espacio vectorial, espacio, dimensión, ortogonalidad, distancia y proyección; (2) *Niveles de abstracción*. En general, las dificultades de los estudiantes en Álgebra Lineal se atribuyen a la naturaleza abstracta de su contenido (Dorier, 1995). La teoría APOE (Arnon *et al*., 2014) vierte un significado cognitivo en esta frase especificando los tipos de abstracciones que los estudiantes deben atravesar para enfrentar conceptos e ideas de una teoría matemática; y, (3) *Esquemas de demostración de los estudiantes.* Los estudiantes aceptan los ejemplos o pruebas deductivas con errores como verificación e incluso, aceptan argumentos sobre bases distintas de la coherencia lógica. Sin embargo, no aceptan pruebas deductivas como verificación o no aceptan contraejemplos como refutación (Reid y Knipping, 2010).

Tipología de dificultades en la enseñanza y aprendizaje

En el trabajo de Carlson (2004) se describen las dificultades conceptuales que experimentan muchos estudiantes universitarios en cursos de Álgebra Lineal. Estas dificultades se proponen clasificar en cuatro categorías generales que se describen a continuación: (1) *Dificultades conceptuales relacionadas con la lógica simbólica*. Para los estudiantes, la falta de un conocimiento práctico de la lógica simbólica causa serias dificultades. Frecuentemente, los textos de los cursos de Álgebra Lineal, se escriben en el lenguaje formal de las matemáticas modernas, por lo que utilizan la precisión del cálculo de predicados y los cuantificadores; (2) *Dificultades conceptuales relacionadas con las definiciones*. En general, los estudiantes comprenden deficientemente las definiciones de Álgebra Lineal y el papel que estas desempeñan. Generalmente, los estudiantes no forman nociones precisas de definiciones y no pueden razonar entre las definiciones y sus implicaciones; (3) *Dificultades conceptuales relacionadas con las demostraciones*. Los estudiantes no siempre valoran el papel de la demostración para determinar la validez de un resultado. Sin embargo, los estudiantes sí confían en otros argumentos como una prueba empírica o la autoridad del docente que son de naturaleza bastante distinta (Harel, 1999); y, (4) *Dificultades conceptuales relacionadas con la abstracción*. Los estudiantes intentan reducir el nivel de abstracción de Álgebra Lineal, en general, trabajando con ejemplos prototípicos en lugar de las definiciones (Hazzan, 1999).

Estudios sobre el análisis de los errores en la formación matemática

En la literatura revisada, no hemos encontrado una clasificación de errores para la enseñanza universitaria de Álgebra Lineal ni asociada al contenido de espacio vectorial. Por esta razón, en este estudio exploratorio nos centraremos en aportar una clasificación de errores a priori para Álgebra Lineal y también, para el concepto de subespacio vectorial. Por otro lado, hacemos una revisión de la literatura sobre errores en el nivel universitario, ya que puede aportar categorías de errores que quizás, también, se podrían presentar en la enseñanza y aprendizaje de los subespacios vectoriales dentro del dominio matemático del Álgebra Lineal.

Consideramos que es importante examinar los errores de los estudiantes porque ilustran sus dificultades y muestran que no han comprendido ciertos conceptos, técnicas o problemas. El análisis de los errores de los estudiantes puede revelar el proceso defectuoso de resolución de problemas y a su vez, proporcionar información sobre la comprensión y las actitudes hacia los problemas matemáticos (Radatz, 1980).

En el nivel universitario, existen escasos estudios sobre los errores matemáticos que cometen los estudiantes en cursos de matemática superior. Además, dichos estudios suelen identificar o hacer sus propias tipologías de errores, es decir, no usan las clasificaciones de errores generales para matemática que ya existen como las de Radatz (1979) o Mosvshovitz-Hadar et al. (1987). Por ejemplo, González-Martín y Camacho (2005) identificaron dos errores vinculados al concepto de integral impropia: (1) carencia de significado al malinterpretar los enunciados de algún teorema o criterio y utilizarlo en otro caso, y (2) problemas de sintaxis puramente algebraicos.

Por su parte, García et al. (2011) estudiaron los errores algebraicos en estudiantes universitarios a través de sus resoluciones de tareas sobre desarrollo de operaciones de tipo algebraico. Ellos no hacen una categorización de los errores sino que entregan un listado de errores: eliminación incorrecta de denominadores, errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas, procedimiento inconcluso, procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas, aplicación parcial de regla de factorización por factor común, asociación incorrecta de productos notables, uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra, error en la determinación de la potencia de otra potencia, resolución aditiva de la potencia de un binomio, aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio y error al realizar productos de polinomios.

Recientemente, en Álgebra Lineal, Hidayanti (2020) analizó los errores de los estudiantes al resolver problemas de matrices e identificó cuatro tipos de errores que se relacionan con la multiplicación de matrices, la suma de matrices, la escritura de la forma de la matriz y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales matricialmente. Hidayanti (2020) no profundiza en las razones o posibles interpretaciones de estos errores.

Una primera propuesta de categorización de errores

A continuación, proponemos una categorización de errores de los estudiantes con contenidos del Álgebra Lineal (ver columna 4 de la Tabla 1), a partir de los obstáculos y dificultades descritos en la literatura en torno al Algebra Lineal, así como algunos de los errores reportados en su enseñanza y aprendizaje en la matemática universitaria.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter exploratoria con enfoque cualitativo e interpretativo. A continuación, describimos los detalles del proceso metodológico enfocándonos en: el contexto en que se realizó la investigación, los datos que fueron recopilados y cómo se efectuó el análisis de estos para responder al objetivo de investigación planteado.

Tabla 1: Propuesta de categorización de errores de los estudiantes con contenidos del Álgebra Lineal basado en la literatura sobre obstáculos, dificultades y errores vinculados a este curso.

Obstáculos epistemológicos (Harel, 2017)	Dificultades conceptuales (Carlson, 2004)	Errores reportados en estudios en el nivel universitario	Propuesta de categorización de errores para Álgebra Lineal
Terminología espacial.	Relacionadas con las definiciones.	Carencia de significado al malinterpretar los enunciados de algún teorema o criterio (González-Martín y Camacho, 2005).	1) Usan erróneamente definiciones, teoremas o propiedades. 2) Mencionan definiciones erróneas de conceptos. 3) Usan solo parcialmente la definición o las definiciones.
Niveles de abstracción.	Relacionadas con la lógica simbólica. Relacionadas con la abstracción.	Problemas de sintaxis puramente algebraicos (González-Martín y Camacho, 2005).	4) Forman enunciados incoherentes usando los símbolos de lógica. 5) Representan erróneamente elementos de conjuntos de espacios vectoriales.
Esquemas de demostración.	Relacionadas con las demostraciones.	Procedimiento inconcluso (García et al., 2011). Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas (García et al., 2011).	6) Inician un proceso de demostración que no concluyen. 7) Realizan procesos de demostraciones propios que son incorrectos. 8) Desarrollan un caso particular para demostrar que una afirmación es verdadera. 9) No usan un contraejemplo para mostrar la falsedad de una afirmación.

Contexto

Este estudio se realizó en una Facultad de Ciencias de la Ingeniería de Chile. Dentro de las carreras de ingenierías de la universidad donde se efectuó esta investigación, Álgebra Lineal es un curso obligatorio (semestral) de 5 horas semanales y está situado en el segundo semestre del primer año de la malla curricular. La formación matemática previa de los estudiantes del curso Álgebra Lineal, es un curso de Álgebra y otro de Geometría. El objetivo principal del curso de Álgebra Lineal es que los estudiantes utilicen herramientas para resolver problemas de ingeniería y, además, desarrollen algunas habilidades tales como el razonamiento lógico matemático y la resolución de problemas. Se espera que el curso de Álgebra Lineal les proporcione a los estudiantes elementos claves para el desarrollo de cursos posteriores. Este curso se divide en cuatro unidades: (1) matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; (2) espacios vectoriales reales y espacios con producto interno; (3) transformaciones lineales; y, (4) diagonalización.

La metodología de enseñanza corresponde a clases tradicionales en donde el docente universitario introduce el conocimiento al estudiante en formato de clases magistrales. Luego, el docente propone a los estudiantes resolver guías de ejercicios de forma escrita y colaborativa con sus compañeros de clase. Posteriormente, comparten en gran grupo sus resoluciones con la finalidad de recibir retroalimentación. En la evaluación escrita, de cada unidad del curso, se les pide a los estudiantes que resuelvan individualmente ejercicios similares a los que desarrollaron en clases.

En el caso del contenido de subespacio vectorial, en las clases, los estudiantes resuelven tareas en donde se presentan de forma analítica los conjuntos que pudieran ser (o no) un subespacio vectorial del espacio vectorial dado, considerando para ello las operaciones de suma y producto por escalar usuales del espacio. Además, el docente en estas clases pone énfasis en que el estudiante debe justificar con un contraejemplo cuando un conjunto no es subespacio vectorial.

Recogida de datos

Los datos (los protocolos escritos de los estudiantes) se recopilaron a través de una evaluación escrita realizada durante el curso que constaba de ocho tareas y que respondieron 210 estudiantes de primer año de ingeniería durante 90 minutos. Dichos estudiantes estaban cursando por primera vez Álgebra Lineal y ya habían estudiado las unidades asociadas a matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y espacios vectoriales. La evaluación escrita comprendía los siguientes conceptos asociados a subespacio vectorial: subespacio vectorial, subespacio generado, base y dimensión de un subespacio vectorial, combinación lineal, suma directa de subespacios vectoriales, complemento ortogonal y producto interno.

Como nuestro estudio es de carácter exploratorio, nos interesamos en profundizar en los errores que cometen los estudiantes en una tarea, específicamente en la tarea 1 asociada directamente al concepto de subespacio vectorial (ver dicha tarea enunciada en la Figura 1). Los criterios considerados para la selección de dicha tarea son: (1) las dificultades reportadas sobre subespacio vectorial en la literatura (Britton y Henderson, 2009; Mutambara y Bansilal, 2019), (2) la importancia conceptual de subespacio vectorial dentro del curso de Álgebra Lineal y (3) las características de la resolución de la tarea 1 que exige el manejo de la parte teórica y práctica de la definición de subespacio vectorial.

En nuestro estudio, entendemos tarea como un problema que contiene una pregunta matemática que requiere para su resolución y respuesta del desarrollo o la utilización de una idea matemática (Herbst, 2006). Concretamente, en la tarea 1, se define el conjunto *H* de forma analítica porque es el lenguaje usual que permite representar a cualquier conjunto candidato a subespacio vectorial y no solo aquellos que poseen una representación de tipo geométrica. Además, esta forma de representación es comúnmente utilizada en los estudios realizados sobre subespacios vectoriales.

Explique por qué el conjunto $H=\left\{ax^2+bx+c \in \mathbb{P}_2[x] \,/\, 2a+b=0 \wedge a-c<0\right\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2\left[x\right]$.

Fig. 1: Tarea 1 de la evaluación escrita sobre subespacio vectorial

Análisis de los datos

El proceso de análisis de datos constó de cinco fases que se resumen en la Figura 2. En la primera fase de análisis, describimos una posible resolución esperable de los estudiantes para mostrar que un cierto subconjunto de un espacio vectorial determinado no es subespacio vectorial de dicho espacio vectorial. Concretamente, en la Figura 3 mostramos un posible proceso de resolución que los estudiantes podrían seguir para mostrar que un cierto subconjunto *H* no es subespacio vectorial de un determinado espacio vectorial *V*. En el tercer paso, se incorpora el contraejemplo porque esto es lo que estos estudiantes han realizado habitualmente en las clases y, además, porque en el estudio de Mutambara y Bansilal (2019), también, esperaban que los estudiantes efectuaran un contraejemplo para justificar adecuadamente que un conjunto no es subespacio vectorial.

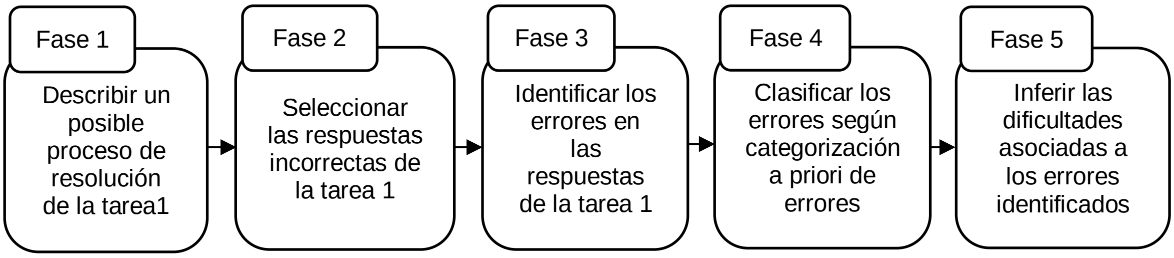

Fig. 2: Proceso de análisis de los datos de esta investigación

En la segunda fase, seleccionamos aquellos protocolos escritos de los estudiantes que tenían una respuesta incorrecta y mostraban, al menos, algún error en la resolución de la tarea 1 de la evaluación escrita. En la tercera fase, identificamos los errores en los protocolos escritos de los estudiantes al responder a la tarea 1. Para esto, transcribimos las respuestas escritas en una matriz en donde cada fila correspondía a la respuesta de un estudiante. Las filas de la matriz fueron etiquetadas correlativamente desde E1 hasta E210. A continuación, analizamos cada respuesta teniendo presente los pasos claves de un posible proceso de resolución de la tarea 1 (Fig. 3).

En la cuarta fase de análisis, clasificamos los errores identificados en la tarea 1 de los protocolos escritos de los estudiantes. Para ello, el equipo de investigación codificó por separado los errores detectados en la tarea 1 de los protocolos escritos de los estudiantes y después compararon sus codificaciones para observar lo común y consensuar las diferencias. Posteriormente, se observó si esta clasificación de errores de subespacio vectorial se correspondía con la categorización de errores de Álgebra Lineal propuesta a priori en este estudio (Tabla 1) o si emergieron categorías nuevas de errores. Finalmente, en la quinta fase, inferimos las posibles dificultades asociadas a los errores clasificados en la fase cuarta utilizando los tipos de dificultades en Álgebra Lineal indicadas por Carlson (2004) (ver Tabla 1).

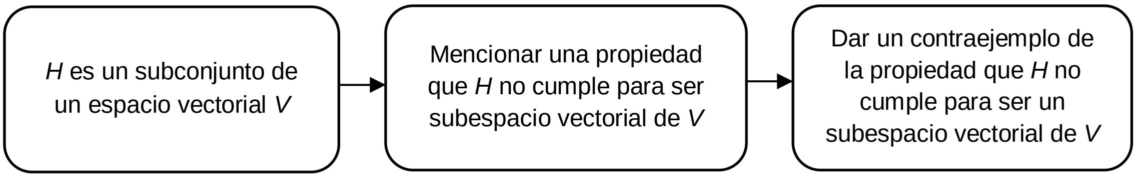

Fig. 3: Un posible proceso de resolución para mostrar que un cierto subconjunto *H* no es subespacio vectorial de un espacio vectorial *V*

RESULTADOS

Teniendo presente el proceso de análisis de los datos, los errores de los estudiantes, vinculados a subespacio vectorial, se clasificaron en tres tipos: procedimiento incorrecto para determinar si un conjunto es subespacio vectorial (E_1), relaciones incoherentes entre conceptos (E_2) y representación errónea de los elementos de un subespacio vectorial (E_3). En la Tabla 2, presentamos los indicadores que dieron origen a esta clasificación de errores.

Tabla 2: Clasificación de los errores asociados a subespacio vectorial y descripción de los indicadores de estos

Error manifestado por los estudiantes	Indicador del error
E_1. Procedimiento incorrecto para determinar si un conjunto es subespacio vectorial	E_1I_1. No proporciona un contraejemplo, aunque indica que el conjunto no es subespacio vectorial porque no cumple la propiedad de que es cerrado bajo la multiplicación por escalares.
	E_1I_2. Justifica de forma errónea que el vector nulo no pertenece al conjunto.
	E_1I_3. Escribe un contraejemplo con vectores que no pertenecen al conjunto que no es subespacio vectorial.
E_2. Relaciones incoherentes entre conceptos	E_2I_1. Relaciona de forma incoherente subespacio vectorial, signos, símbolos o vectores de un subespacio vectorial.
	E_2I_2. Relaciona de forma incoherente subespacio vectorial con otros conceptos vinculados a este (por ejemplo, independencia lineal).
	E_2I_3. Iguala un conjunto no vacío al conjunto vacío. E_2I_4. Escribe que un conjunto pertenece al conjunto vacío. E_2I_5. Confunde conjunto con un elemento de este.
	E_2I_6. Afirma que un conjunto no es subespacio vectorial porque 0 no es menor que 0. E_2I_7. Iguala un conjunto no vacío a un vector.
E_3. Representación errónea de los elementos de un subespacio vectorial	E_3I_1. Escribe el vector nulo de $\mathbb{R}^3$ en lugar del vector nulo de $\mathbb{R}_2[x]$.
	E_3I_2. Escribe vectores de $\mathbb{R}^3$ en lugar de vectores de $\mathbb{R}_2[x]$ y hace un proceso incorrecto con estos.

Procedimiento incorrecto para determinar si un conjunto es subespacio vectorial [E_1]

El tipo de error E_1 se manifestó cuando los estudiantes justificaban para concluir que el conjunto *H* no era subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[X]$. La mayoría de los estudiantes que cometían el error E_1 distinguían qué propiedad de subespacio vectorial no cumplía el conjunto *H*. Algunos estudiantes que indicaron que *H* no era subespacio vectorial porque no cumplía con la propiedad de que es cerrado bajo la multiplicación por escalares, no dieron un contraejemplo o este era incorrecto (ver ejemplos en la Tabla 3). Por ejemplo, los estudiantes E76 y E142 señalaron que *H* no es subespacio vectorial porque no cumple la condición de la *multiplicación por un escalar*. Sin embargo, ninguno de ellos dio un contraejemplo [E_1I_1], ya que el estudiante E76 solo argumentó señalando que, *si se multiplica por un negativo, ya no se cumple la condición* ($a<c$), *por lo tanto no sería subespacio vectorial.* En el caso del estudiante E142 escribió un polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$ y un escalar genérico con los que hace un proceso algebraico para fundamentar porque *H falla en la multiplicación por escalar*.

Por su parte, el estudiante E75 escribió un contraejemplo que no es correcto para mostrar que *H* no cumple con la condición de multiplicación por un escalar debido a que anota un polinomio que no pertenece a *H* [E_1I_3]. Asimismo, algunos de los estudiantes que indicaron que el conjunto *H* no era subespacio vectorial porque no cumplía la condición de que el vector nulo perteneciera a *H*, argumentaron erróneamente (E_1I_2) como el estudiante E90 que escribió *comprobación: como* $a\text{-}c<0$ *o* $c>a$ (ver fila 3 de la Tabla 3). El tipo de error E_1, inferimos que puede ser originado debido a que los estudiantes tienen dificultad con la demostración. En particular, los estudiantes presentaron dificultad para argumentar porqué un conjunto de un espacio vectorial no es subespacio vectorial de este. Estos estudiantes escribieron argumentos que no son válidos, pero que, desde sus concepciones, sí los son. Para Carlson (2004), este tipo de dificultad es conceptual y se encuentra relacionada con las demostraciones.

Tabla 3: Ejemplos del error referente al procedimiento incorrecto para determinar si un conjunto es subespacio vectorial

Estudiante E76 $H=\left\{ax^2+bx+c\in \mathbb{R}_2[x]\,/\,2a+b=0\wedge a-c<0\right\}$ R: Al observar las condiciones del conjunto H se tiene que $a-c<0$ que es igual a $a<c$. Por lo tanto, al comprobar con las condiciones para que sea subespacio vectorial la de una multiplicaciónpor un escalar no se cumple: porque si se multiplica por un negativo, ya no se cumple la condición ($a<c$), por lo tanto, no sería subespacio vectorial
Estudiante E142 Falla en la multiplicación por escalar (iii)). iii) Sea $ax^2+bx+c,\ (2a+b=0\wedge a-c<0),\ \alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha(ax^2+bx+c)=\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c=(\alpha a)x^2+(\alpha b)x+(\alpha c)$ Sea $2a+b=0\wedge a-c<0 \Rightarrow 2\alpha a+\alpha b=0\wedge \alpha a-\alpha c<0$ $\therefore$ De iii) falla: $\alpha(2a+b)=0\ \wedge\ \alpha(a-c)<0$, en $0<0,\ \alpha\cdot 0=0\wedge \alpha\cdot 0<0,\ \therefore H\in\mathbb{R}_2[x]$
Estudiante E75 Sea $p(x)\in H$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ se debe cumplir que $\alpha\, p(x)\in H$. No se cumple la 3° propiedad. Contraejemplo: Sea $(-2x^2+4x-3)\in H$ y $\alpha=-2\Rightarrow a=-2, b=4, c=-3,\ a-c=(-2)-(-3)=1\not<0$ $\boxed{a=+4,\ b=-8,\ c=6}$ $2a+b\Rightarrow 8-8=0,\ a-c<0\Rightarrow 4$
Estudiante E90 No es subespacio vectorial ya que no contiene al elemento nulo comprobación $a-c<0,\ \ c>a$

Relaciones incoherentes entre conceptos [E_2]

El tipo de error E_2 se caracteriza porque los estudiantes hacen asociaciones incomprensibles entre conceptos matemáticos y que carecen de sentido. En el caso aquí analizado, estas asociaciones las hacen entre el concepto de subespacio vectorial y otros conceptos vinculados a este. Por ejemplo, en la respuesta escrita del estudiante E36 (ver fila 1 de la Tabla 4) se observa que vinculó subespacio vectorial con linealmente independiente (l.i) y base [E_2I_2] señalando que el conjunto *H* no es subespacio vectorial *debido a que c puede tomar cualquier valor diferente que a, puede generar error y hacer que el polinomio no sea l.i. o que no sea base.*

También, algunos estudiantes intentaron justificar que *H* no era subespacio vectorial haciendo conexiones entre el concepto de subespacio vectorial, la condición de desigualdad para pertenecer a *H* y el signo de igualdad [E_2I_1]. Por ejemplo, el estudiante E41 (ver fila 2 en la Tabla 4) escribió *porque la condición a-c<0 no es válida para un polinomio que aspira a ser subespacio vectorial. Para que sea válido deber ser una igualdad.* Además, en la respuesta de E41 es posible inferir que él cree que el conjunto H es un polinomio. Otra relación incoherente que mostraron algunos estudiantes, se vinculó con afirmar que el conjunto *H* no es subespacio vectorial porque 0 no es menor que 0 (E_2I_6) o de manera equivalente, como escribió el estudiante E174, *0 no puede ser menor que 0* (ver fila 3 de la Tabla 4).

Además, algunos estudiantes hacen relaciones incoherentes que involucran el conjunto *H*, elementos de un conjunto y el conjunto vacío. Por ejemplo, el estudiante E185 (ver fila 4 de la Tabla 4) pareciera que confundió el conjunto *H* con elementos de este, pues argumentó que H no era subespacio vectorial porque *H no es de la forma p(x), q(x), etc*. [E_2I_5]. Por su parte, como se observa en la Tabla 4, el estudiante E68 escribió *H* por comprensión y enseguida, anotó la siguiente afirmación que carece de sentido [E_2I_4]: *H pertenece al conjunto vacío porque 2·0+0=0 y 0-0<0* (debajo de esto escribe que *0 es menor o igual que 0*). En tanto, el estudiante E118 (ver fila 6 de la Tabla 4) al igual que el estudiante 68, escribió *H* por comprensión, pero en una parte de su desarrollo, igualó *H* al polinomio x^2-2x+3 [E_2I_7]. Por otra parte, el estudiante 152 (ver fila 7 de la Tabla 4) concluyó que *H* igual al conjunto vacío, *por lo tanto, no es subespacio vectorial* de $\mathbb{R}_2[X]$ [E_2I_3].

El tipo de error E_2, inferimos que puede ser originado debido a que los estudiantes tienen dificultad con las definiciones de subespacio vectorial y las relacionadas con este porque las utilizaron erróneamente al momento de justificar porque H no era subespacio vectorial. Además, los estudiantes presentaron dificultad con la noción de conjunto y conjunto vacío, puesto que observamos afirmaciones con claras incoherencias a la hora de mencionar alguno de ellos al argumentar porque H no era subespacio vectorial. Para Carlson (2004), este tipo de dificultad es conceptual y se encuentra relacionada con las definiciones.

Tabla 4: Ejemplos del error que se refiere a relaciones incoherentes entre conceptos

Estudiante E36 $H=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] / \underset{b=-2a}{2a+b=0}\wedge \underbrace{\underset{\underset{c>a}{-c<-a}}{a-c<0}}_{\text{No se puede}}\right\}$ debido a que a puede tomar cualquier valor diferente que 0 puede generar error y hacer que el polinomio no sea L.I. o que no sea base.
Estudiante E41 $H=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] / 2a+b=0\wedge a-c<0\right\}$ Porque la condición $a-c<0$ no es válida para un polinomio que aspira a ser subespacio vectorial. Para que sea válido debe ser una igualdad.
Estudiante E174 $H=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] / 2a+b=0\wedge a-c<0\right\}$ i)$0x^2+0x+0\in\mathbb{R}_2[x]\Rightarrow \underset{0=0}{2\cdot 0+0=0}\underset{\wedge}{\wedge}\underset{0<0}{0-0<0}$ $\therefore$ No es un subespacio vectorial ya que 0 no puede ser menor que 0
Estudiante E185 $H=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] / 2a+b=0\wedge a-c<0\right\}$ R:porque H no es de la forma $p(x)$, $q(x)$,etc.
Estudiante E68 $H=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] / 2a+b=0\wedge a-c<0\right\}$ $H\in\varnothing$ porque $2\cdot 0+0=0\ \wedge\ \underset{0\leq 0}{0-0<0}$, $\therefore\ H$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$
Estudiante E118 $H=\left\{ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x] / 2a+b=0\wedge a-c<0\right\}$ pdq. (1)P.D: $H\leq\mathbb{R}_2[x],\ H\neq\varnothing$ Dem $*H\subseteq\mathbb{R}_2[x]$, por definición $\underset{\therefore\ H\neq\varnothing}{**H=(x^2-2x+3)}$, ya que, $\underset{1-3<0}{2\cdot(-1)+2=0}$ (2)P.D: $(a_1x^2+b_1x+c_1)+(a_2x^2+b_2x+c_2)\leq H$ Dem $(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)\leq H$ P.D: $k(ax^2+bx+c)\leq H \quad \underset{\text{pues } 1-3<0\ \boxed{\begin{smallmatrix}a=1\\c=3\end{smallmatrix}}}{x^2-2x+3\in H}$ Dem: $\underset{2(-1)+2\neq 0,\ -1+3>0}{(-1)(x^2-2x+3)=-x^2+2x-3}$,pero $\underset{\text{pues } -1-(-3)=2\not<0\ \boxed{\begin{smallmatrix}a=-1\\c=-3\end{smallmatrix}}}{(-1)(x^2-2x+3)=-x^2+2x-3\notin H}$ $\therefore H$ no es subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$, ya que, las condiciones fallan al multiplicar el polinomio por un número negativo, demostrado en la propiedad B.
Estudiante E152 Sea $0x^2+0x+0=0$, entonces $2\cdot 0+0=0\wedge \underset{0\not<0}{0-0<0}$, $H=\varnothing$, $\therefore$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$

Representación errónea de los elementos de un subespacio vectorial [E_3]

El tipo de error E_3 se manifestó cuando los estudiantes quisieron representar un elemento de un subespacio vectorial diferente de $\mathbb{R}^n$. En concreto, varios estudiantes escribieron elementos de $\mathbb{R}^3$ en lugar de polinomios de $\mathbb{R}_2[x]$, como se puede observar en la Tabla 5. El estudiante E180 usó (0,0,0) para afirmar que el conjunto *H* no es subespacio vectorial, *ya que el vector nulo (0,0,0) no pertenece o no cumple con las condiciones para que lo sea* [E_3I_1].

Tabla 5: Ejemplos del error que se refiere a la representación errónea de los elementos del subespacio vectorial

Estudiante 180

$$H=\{ax^2+bx+c\in \mathbb{R}_2[x] / 2a+b=0 \wedge a-c<0\}$$

*$(0,0,0)$ no pertenece a H ya que:

$$2\cdot 0+0=0 \ \wedge \ 0-0<0$$

$$0=0 \ \wedge \ \underbrace{0<0}_{0\not<0} \ \notin \mathbb{R}_2[x]$$

* No es subespacio vectorial ya que el vector nulo $(0,0,0)$ no pertenece, o no, cumple con las condiciones para que lo sea:

$$2a+b=0\wedge a-c<0$$

Estudiante 178

I) $(\underset{a}{0}x^2+\underset{b}{0}x+\underset{c}{0})\in H,\ (0,0,0)\in H$

$$2\cdot 0+0=0 \ \wedge \ 0-0=0$$

$$0=0 \ \wedge \ 0=0$$

$$H\neq\emptyset$$

II) $(a,b,c),(x,y,z)\in H,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$$\alpha(a,b,c)+(x,y,z)=0$$

$$\boxed{\alpha a+x,\ \alpha b+y,\ \alpha c+z=0}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\alpha a+x=a\\ \alpha b+y=b\\ \alpha c+z=c\end{array}} \Leftrightarrow$ No aplica para todas las situaciones, $\therefore H\not\leq \mathbb{R}_2[x]$

Contraejemplo: $4(1,2,3)+(4,5,6)=0 \Leftrightarrow (\underset{a}{8},\underset{b}{13},\underset{c}{18})=0$

$$2\cdot 8+13=0\Rightarrow 16+13=0\Rightarrow 29\neq 0\wedge 8-18=0\Rightarrow 10\neq 0$$

$\therefore$ No se cumplen la condiciones, $H\not\leq\mathbb{R}_2[x]$

Por otra parte, el estudiante E178 utilizó vectores de $\mathbb{R}^3$ para intentar justificar porqué *H* no es subespacio vectorial. Sin embargo, el proceso que realizó no era coherente. E178 transcribió incorrectamente una condición de *H*, pues escribe que (0,0,0) pertenece a *H*. Luego, sustituyó las coordenadas de este vector en las condiciones que se dio de *H* y concluyó que *H* era distinto del vacío. A continuación, el estudiante E178 anotó que (*a*, *b*, *c*) y (*x*, *y*, *z*) pertenecen a *H* y hace una combinación lineal con estos vectores, la que igualó a 0. A partir de esta combinación lineal, podemos inferir que el estudiante E178 obtiene condiciones y afirma que estas no aplican para todas las situaciones. De esto E178 concluyó que *H* no es subespacio vectorial de los polinomios de $\mathbb{R}_2[x]$. Finalmente, E178 escribió un contraejemplo incorrecto que consistió en remplazar las letras de su combinación lineal por números [E_3I_1].

El tipo de error E_3, inferimos que puede ser originado debido a que los estudiantes tienen dificultad con la abstracción que se refiere a que un vector no solo es un elemento de $\mathbb{R}^n$ sino que también puede ser un polinomio, una matriz, entre otros elementos que formen parte de un determinado espacio vectorial. Por esta razón, en la tarea 1 propuesta, los estudiantes simplificaron la abstracción y usaron incorrectamente algo conocidos por ellos, los elementos de $\mathbb{R}^n$. Para Carlson (2004), este tipo de dificultad es conceptual y se encuentra relacionada con la abstracción. En la Tabla 6, presentamos un resumen de los resultados, en concreto, mostramos la clasificación de los errores que cometen los estudiantes vinculados a subespacio vectorial, su relación con la categorización de errores que hicimos a priori para Álgebra Lineal (Tabla 1) y las dificultades conceptuales (Carlson, 2004) que inferimos dan origen a cada uno de estos tipos de errores.

Tabla 6: Resumen de la clasificación de los errores observados vinculados a las categorías de errores propuestas y a las dificultades conceptuales

Error manifestado por los estudiantes	Categorización del error en Álgebra Lineal	Dificultad conceptual vinculada al error
Procedimiento incorrecto para determinar si un conjunto es subespacio vectorial.	No hacen un contraejemplo para mostrar que una afirmación es falsa.	Relacionada con las demostraciones: argumentar cuando un conjunto no es subespacio vectorial.
Relaciones incoherentes entre conceptos.	Usan erróneamente definiciones, teoremas o propiedades.	Relacionada con las definiciones: definición de subespacio vectorial y noción de conjunto.
Representación errónea de los elementos de un subespacio vectorial.	Representan erróneamente elementos de conjuntos de espacios vectoriales.	Relacionada con la abstracción: representación de un elemento diferente de $\mathbb{R}^n$.

DISCUSIÓN

El objetivo de nuestro estudio exploratorio ha sido el identificar y proponer una clasificación de los errores que emergen cuando los estudiantes resuelven una tarea de subespacio vectorial. Los tipos de errores que componen esta clasificación y su desglose a través de indicadores (Tabla 2) son una contribución a la investigación sobre errores que cometen los estudiantes con subespacio vectorial. Además, este estudio aporta una primera propuesta de categorización de errores para Álgebra Lineal (Tabla 1) basada en la literatura que revisamos.

Se han considerado tres tipos de errores vinculados a subespacio vectorial [E_1, E_2, E_3] que nos sugieren que hay diversas causas para el origen de cada error. Como se observa en la Tabla 6, hemos inferido que esas causas se pueden vincular con las dificultades conceptuales descritas por Carlson (2004). Sin embargo, esto último son conjeturas que necesitan ser exploradas en estudios futuros en donde se puedan efectuar un análisis más profundo recopilando datos a través de entrevistas a los estudiantes. En particular, sería interesante indagar acerca de qué obstáculos están detrás de estos errores detectados.

Los resultados de nuestro estudio dan indicios de que los estudiantes cometen el error E_1 porque usan alguno de los esquemas de demostración que ya conocen, principalmente, un proceso algebraico o explicar en palabras. Consideramos que estos funcionan como un obstáculo para que los estudiantes acepten el contraejemplo como el esquema de demostración para argumentar porqué el conjunto H no es subespacio vectorial.

En tanto, conjeturamos que el error E_2 se manifiesta porque la estructura de las definiciones matemáticas previas a las de subespacio vectorial funcionan un obstáculo para que los estudiantes comprendan la definición de subespacio vectorial que es más compleja y abstracta que las definiciones que ya saben. Asimismo, en algunos casos, el error E_2 se vincula a la noción de conjunto que es probable que los estudiantes hayan estudiado conjunto con su representación por extensión (por ejemplo, a través de conjuntos numéricos finitos) y muy poco por comprensión. Por eso, quizás tienen dificultad con la comprensión de subespacios vectoriales representados como conjunto por comprensión.

El error E_3, inferimos que los estudiantes lo cometen porque la representación algebraica de los elementos (o vectores) pertenecientes a $\mathbb{R}^n$ se han convertido en un obstáculo para que los estudiantes acepten a los polinomios de $R_2[x]$ también como vectores. Lo anterior, porque pareciera que los estudiantes usan la representación algebraica de los elementos (o vectores) pertenecientes a $\mathbb{R}^n$ como un prototipo para representar cualquier elemento de un espacio vectorial sea o no $\mathbb{R}^n$.

CONCLUSIONES

De acuerdo con el trabajo presentado, se pueden plantear las siguientes conclusiones principales: 1) La clasificación de errores sobre subespacio vectorial, propuesta en este estudio, proporciona información valiosa para investigaciones posteriores entorno a los errores que cometen estudiantes universitarios cuando resuelven tareas sobre subespacio vectorial, ya que hay escasas investigaciones previas sobre esta temática; 2) La clasificación de errores sobre subespacio vectorial puede ayudar a los profesores a la hora de planificar la enseñanza de este concepto. Esta tipología puede ser una guía para que profesores puedan diseñar tareas que promuevan la comprensión de este concepto y gestionar la emergencia de estos errores en el aula, proporcionando andamiajes a los estudiantes que le ayuden a mejorar su comprensión; 3) Es necesario un estudio que considere tareas sobre subespacio vectorial en sus diferentes representaciones con la finalidad de validar o refinar la clasificación de errores propuesta en este estudio.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue desarrollado gracias al apoyo de ANID, proyecto Fondecyt N°11190284 y la colaboración de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Austral de Chile.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., y otros 5 autores, APOS theory: a framework for research and curriculum development in mathematics education, Springer, ISBN: 978-1-4614-7965-9, New York, USA (2014)

Borasi, R., Exploring mathematics through the analysis of errors, Learn. Math., ISSN 0228 0671, 7(3), 2-8 (1987)

Bogomolny, M., The role of example-generation tasks in students' understanding of linear algebra, Doctoral Dissertation, Faculty of Education, Simon Fraser University, Burnaby, Canada (2006)

Britton, S., y Henderson, J., Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties, https://doi.org/10.1080/00207390903206114, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 40(7), 963-974 (2009)

Brousseau, G., Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, Rech. Didact. Math., ISSN 0246 9367, 4(2), 164-198 (1983)

Cárcamo, A., Fortuny, J., y Gómez, J., Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra, https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 48(3), 338-352 (2017)

Carlson, D., The teaching and learning of tertiary algebra. En The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study, 293-309, Springer, ISBN: 978-1-4020-8130-9, Dordrecht, Netherlands (2004)

Centeno, J., Números decimales: ¿por qué? ¿para qué?, 1era ed., Editorial Síntesis, ISBN: 84-7738-028-7, Madrid, España (1988)

Dorier, J. L., A general outline of the genesis of vector space theory, https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1024, Hist. Math., 22(3), 227-261 (1995)

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., y Rogalski, M., The obstacle of formalism in linear algebra. En On the teaching of linear algebra, 85-124, Kluwer Academic, ISBN: 978-0-7923-6539-6, Dordrecht, Netherlands (2000)

García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J.L., Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas, En Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática, 139-148, SEIEM, ISBN: 978-84-695-6765-4, Valencia, España (2012)

González-Martín, A., y Machín, M. C., Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores, https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3859, Ensen. Cienc., 23(1), 81-95 (2005)

Harel, G., Students' understanding of proofs: A historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra, https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00139-1, Linear Algebra Appl., 302, 601-613 (1999)

Harel, G., The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007, J. Math. Behav., 46, 69-95 (2017)

Hazzan, O., Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts, https://doi.org/10.1023/A:1003780613628, Educ. Stud. Math., 40(1), 71-90 (1999)

Herbst, P., Teaching geometry with problems: negotiating instructional situations and mathematical tasks, https://doi.org/10.2307/30034853, J. Res. Math. Educ., 37(4), 313-347 (2006).

Hidayanti, N., Analysis of Student Mistakes in Completing Matrix Problems in The Linear Algebra Course, https://doi.org/10.1088/1742-6596/1477/4/042046, J. Phys.: Conf. Ser, 1477(4), 1-6 (2020)

Hillel, J., Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En On the teaching of linear algebra, 191-207, Kluwer Academic, ISBN: 978-0-7923-6539-6, Dordrecht, Netherlands (2000)

Lay, D., Álgebra Lineal Elemental y sus Aplicaciones, 4ta ed., Pearson Educación, ISBN: 978-607-32-1398-1, México DF, México (2012)

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S., An empirical classification model for errors in high school mathematics, https://doi.org/10.2307/749532, J. Res. Math. Educ., 18(1), 3-14 (1987)

Mutambara, L., y Bansilal, S., An exploratory study on the understanding of the vector subspace concept, https://doi.org/10.1080/18117295.2018.1564496, Afr. J. Res. Math. Sci. Technol. Educ., 23(1), 14-26 (2019)

Radatz, H., Error analysis in mathematics education, https://doi.org/10.2307/748804, J. Res. Math. Educ., 10(3), 163-172 (1979)

Radatz, H., Students' errors in the mathematical learning process: a survey, Learn. Math., ISSN 0228 0671, 1(1), 16-20 (1980)

Sierpinska, A., On some aspects of students' thinking in linear algebra. En On the teaching of linear algebra, 209-246, Kluwer Academic, ISBN: 978-0-7923-6539-6, Dordrecht, Netherlands (2000)

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., y Larson, C., Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra, En Educational Design Research—Part B: Illustrative Cases, 905-925, SLO, ISBN: 978-90-329 2335-8, Enschede, Netherlands (2013)