

# What does the research tell us about the understanding of the random variables and its probability distributions?

Valeria Bizet

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

*valeriabizet@gmail.com*

Elena Molina-Portillo

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

*elemo@ugr.es*

Felipe Ruz

Instituto de Estadística

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

*felipe.ruz.angel@gmail.com*

José Miguel Contreras

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

*jmcontreras@ugr.es*

## Abstract

The random variable represents one of the key concepts in the modeling of random phenomena through probability distributions. Therefore, the objective of this study is to analyze and describe the main investigations that the literature reports on the random variable and its probability distribution, through a bibliographic review. The results show the existence of some teaching proposals around this notion, which are characterized by the use of technology. In addition, various cognitive difficulties and biases are identified during the learning of the random variable. In this way, it is hoped that these results will contribute to strengthening the instructional design process carried out by teachers, in order to help students understand the random variable and its probability distribution.

**Keywords:** Random Variable, Probability Distribution, Understanding, Statistics Education.

**MSC Subject classifications:** 97K50, 97K60.

## 1. Introducción

El conocimiento estocástico se ha destacado como un aspecto fundamental para entender el mundo que nos rodea, pues entrega herramientas para razonar en situaciones de incertidumbre. En este contexto, la comprensión del objeto variable aleatoria representa uno de los conceptos fundamentales en la modelización de fenómenos aleatorios por medio de distribuciones de probabilidad, además es considerada desde hace más de 40 años como un concepto fundamental de la estocástica (Heitele, 1975).

El estudio de la variable aleatoria se aborda tanto en los últimos años de educación obligatoria dentro de la asignatura de matemáticas, como en los cursos universitarios de introducción a la estadística. En el ámbito escolar se ha establecido dentro de diversas directrices curriculares internacionales, entonces para ilustrar esta situación de manera uniforme, en el presente estudio se ha adoptado la denominación K-12 (Franklin et al., 2007) para organizar los doce grados de educación obligatoria. Por ejemplo, en los Principles and standards for school mathematics (NCTM, 2000), entre los grados 9 y 12 (14 a 18 años) se incluye la comprensión de su distribución de probabilidad y el cálculo e interpretación de su esperanza matemática. Mientras que el currículo español (MECD, 2015) se inicia su estudio en bachillerato, entre los grados 11 y 12 (16 a 17 años) y eje temático Estadística y Probabilidad, por medio de los siguientes contenidos: variables aleatorias discretas y continuas, distribuciones de probabilidad como la binomial y la normal, tipificación de la distribución normal, cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal, entre otros.

Por su parte, la Didáctica de la Matemática se ha interesado en estudiar la enseñanza y aprendizaje de la variable aleatoria, logrando reconocer diversas dificultades en torno a la comprensión de conceptos vinculados a esta y su aplicación en el estudio de tópicos estocásticos posteriores, en los distintos niveles educativos. De esta forma se ha identificado un problema vigente en la comprensión de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, por ello el objetivo de este estudio es analizar de manera descriptiva las investigaciones que reporta la literatura sobre estos conceptos a través de una revisión bibliográfica.

En lo que sigue, este trabajo se organiza presentando el método utilizado (Sección 2). Luego en la Sección 3, son dados a conocer los principales resultados del análisis de las investigaciones seleccionadas, distribuidos en dos subapartados: Sección 3.1, enfocada en la enseñanza de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, identificando los elementos epistemológicos y didácticos de los conceptos; Sección 3.2, centrada en el aprendizaje de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, reportando aspectos cognitivos como los niveles de razonamiento en torno al concepto, algunas dificultades y sesgos del razonamiento probabilístico presentados por los estudiantes. Finalmente, en la Sección 4, se exponen las conclusiones e implicaciones para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos en cuestión.

De esta forma, se proyectan los resultados de este trabajo como un insumo valioso para aportar y apoyar al profesorado en el diseño instruccional de experiencias de enseñanza de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad.

## 2. Método

En este trabajo se llevó a cabo una revisión de la literatura (R. Hernández, C. Fernández y Baptista, 2014) consultando en bases de datos bibliográficas (Web of Science, Scopus, Math Educ y Proquest),

---

un servidor en internet (Google Scholar), revistas y actas de congresos de educación matemática y estadística.

El proceso de búsqueda se realizó tanto en idioma español como inglés, con límite de año de publicación (1990 a 2020) y a través de los siguientes descriptores: variable aleatoria y educación matemática; variable aleatoria y educación estadística; variable aleatoria y comprensión; distribución binomial y educación estadística; distribución normal y educación estadística.

Las investigaciones fueron seleccionadas según su relación estrecha con el objeto de estudio, sin interés en el método de investigación y su análisis se llevó a cabo considerando los siguientes elementos: enfoque para abordar el problema de investigación, muestra, contexto, instrumento, resultados y conclusiones. Así han sido elegidos 52 trabajos para su análisis descriptivo y la presentación de la información analizada se organizó en dos apartados, el primero presenta estudios relativos a la enseñanza de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, mientras que el segundo expone investigaciones sobre su aprendizaje.

### **3. Resultados**

#### **3.1. Enseñanza de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad**

En esta sección se exponen estudios que abordan tanto aspectos epistemológicos (relativos al contenido) como didácticos (elementos que intervienen en el proceso de su enseñanza) de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad.

##### **3.1.1. Investigaciones sobre aspectos epistemológicos de la variable aleatoria y distribuciones de probabilidad**

Los estudios llevados a cabo desde el ámbito epistemológico, se caracterizan por indagar el conocimiento probabilístico en torno a la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, abarcando su origen, desarrollo histórico y el estudio del concepto desde la matemática (Dinges, 2005; Ortiz, 2002; Ruiz, 2014; Tauber, 2001; Valverde, 2017). El trabajo de Dinges, 2005 se centra en un estudio del origen y desarrollo histórico del concepto de variable aleatoria, éste contempla desde los inicios del análisis matemático, abarcando lo llevado a cabo por Leibniz (creador del concepto de función), Cantor (descubridor de la teoría de conjuntos), hasta la actualidad. Entre sus resultados destaca que la variable posee distintos significados, uno se vincula al concepto algebraico (ámbito determinista) y otro relacionado a procesos aleatorios (ámbito estocástico), aunque en ambos contextos el concepto de función es fundamental. Además, presenta una propuesta de enseñanza de la variable aleatoria para nivel universitario, desde el enfoque axiomático de la probabilidad, constituida por cuatro axiomas.

Mientras que Ortiz, 2002 caracteriza el significado institucional de la variable aleatoria a partir del análisis de libros de texto de bachillerato, basándose en los tipos de elementos primarios de un objeto matemático propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Así por medio de la técnica de análisis de contenido (Fox, 1981) indaga 10 libros de texto de 1º de bachillerato en España (grado 11, 16 a 17 años) e identifica la presencia o ausencia de algunos objetos primarios de la variable aleatoria (situaciones-problemas, conceptos-definiciones y proposiciones-propiedades). Los resultados destacan que solo en algunos libros se incluyen situaciones-problemas que involucran de manera explícita a la variable aleatoria, ya que en tres libros no aparecen actividades relacionadas con ella y solo en un

---

caso existe mayor diversidad de situaciones que promuevan su resolución de problemas. Sobre las definiciones y propiedades, se refleja la ausencia del concepto en la mayoría de los textos analizados, mientras que en aquellos en los que se aborda, se realiza de forma superficial, centrándose únicamente en elementos como su distribución de probabilidad y/o su esperanza matemática.

Luego Ruiz, 2014 desarrolla un estudio epistemológico de la variable aleatoria desde la disciplina matemática, fundamentado en la teoría EOS. De esta manera establece los distintos elementos primarios de la variable aleatoria (situaciones-problemas, lenguaje, conceptos- definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos) para cada uno de los significados históricos de la probabilidad (intuitiva, clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática), obteniendo como resultado cuatro configuraciones epistémicas (colección de objetos que emergen de ciertos tipos de prácticas matemáticas) en torno a la variable aleatoria. La autora a modo de conclusión propone recomendaciones para su enseñanza escolar, como la necesidad de mantener al estudiante en constante contacto con el concepto, inicialmente emplearlo en situaciones concretas y de forma intuitiva, para posteriormente usarlo explícitamente de manera informal. Además, identifica posibles dificultades en: comprender la noción de distribución; vincular el significado frecuencial y clásico de la probabilidad; relacionar los conceptos variables aleatoria y estadística; y comprender la aproximación de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias de tipo discretas a continuas.

Por su parte Tauber, 2001 se centra en indagar la distribución normal en libros de introducción a la estadística dirigido a carreras de ciencias sociales, basándose en herramientas del EOS. Por medio del análisis de contenido revisa 11 libros y obtiene como resultado el significado institucional de referencia de la distribución normal, en términos de sus elementos primarios (situaciones-problemas, lenguaje, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos). La autora concluye afirmando que la información obtenida es valiosa para los profesores, quienes deben elaborar instrumentos de evaluación y/o unidades didácticas sobre el tópico.

A diferencia de Valverde, 2017 quien se interesa en analizar en libros de texto de bachillerato la presencia de la distribución normal, considerando como fundamento teórico el EOS. Utiliza como muestras dos libros de texto españoles con su respectivo manual de ejercicios y los examina mediante el método de análisis de contenido. Como resultado obtiene el significado institucional de referencia de la distribución normal para nivel escolar, en términos de sus elementos primarios (situaciones-problemas, lenguaje, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos). Así constata que una gran cantidad de definiciones expuestas en los libros son confusas, utilizan un lenguaje formal distante al nivel escolar y existen escasos ejemplos. Además, evidenció un alto grado de idoneidad epistémica debido a que una gran cantidad de objetos primarios identificados por Tauber, 2001 se observaron en los libros de texto escolares.

### 3.1.2. Investigaciones sobre la didáctica de la variable aleatoria

Aquellas investigaciones interesadas en aspectos didácticos de la variable aleatoria han abordado desde distintos enfoques teóricos, la manera que se debe enseñar este concepto a nivel escolar y universitario. Bizet y Ramos-Rodríguez, 2019 indagan su comprensión en secundaria fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2007). Para ello aplican a 22 estudiantes chilenos de grado 10 (15 a 16 años) una propuesta de enseñanza contextualizada en un juego de azar, la cual requiere identificar y representar la variable aleatoria discreta y su función de probabilidad involucrada. Los resultados evidencian que 14 estudiantes reconocen y representan en diferentes registros la variable aleatoria: nueve en lenguaje natural y figural (diagrama sagital), y cinco solo en lenguaje tabular. También 13 participantes identifican y representan la función de probabilidad:

---

tres usan el lenguaje natural, cinco utilizan tanto el lenguaje natural como figural y los otros cinco emplean el lenguaje tabular. Las autoras entre sus conclusiones señalan que la propuesta diseñada favorece la comprensión del carácter funcional de la variable aleatoria dado que admite diversos registros de representación como figural, tabular y natural.

En el contexto universitario, Kachapova, 2012 y Kachapova y Kachapov, 2012 proponen un enfoque para la enseñanza de la variable aleatoria. Entre sus resultados presentan ideas para evitar o subsanar algunos errores típicos en torno al concepto, como por ejemplo: un suceso aleatorio es cualquier subconjunto del espacio muestral (verdadero solo para muestras finitas), una variable aleatoria es una función en el espacio muestral de valores reales y esta es solo de tipo discreta o continua (obviando las mixtas). Además, exponen un enfoque holístico para la enseñanza de la variable aleatoria, definiéndola a través de la integral Riemann-Stieltjes y centrándose en una teoría general, no en detalles para las de tipo discreta y continua. Los autores luego de aplicar varios años su propuesta, concluyen que el enfoque diseñado favorece la adquisición de conocimiento abstracto en torno al concepto y la diferenciación de las características específicas o generales de sus diferentes tipos.

También, Maurer, Hudiburgh y Werwinski, 2020 diseñan e implementan dos actividades para la enseñanza de combinaciones lineales de variables aleatorias, una basada en un juego de azar y la otra en la resolución de problemas. La implementación se llevó a cabo en un curso de estadística con universitarios de Estados Unidos, quienes respondieron cuestionarios de evaluación antes y después de cada actividad y una encuesta de opinión. Los resultados sobre el aprendizaje de la variable aleatoria evidencian mejores puntuaciones finalizada la implementación de las dos actividades, aunque un leve mejor avance al concluir la resolución de los problemas. Además, en la encuesta todos los estudiantes opinaron que disfrutaron de las dos actividades. Finalmente, las autoras concluyen que el menor logro de aprendizaje observado al terminar la actividad del juego, puede deberse a que se invirtió bastante tiempo en la comprensión de sus normas, por ello proponen un video en que se expliquen estas.

### 3.1.3. Investigaciones sobre la didáctica de las distribuciones de probabilidad

Existen algunos trabajos centrados en elementos didácticos de las distribuciones de probabilidad, como el desarrollado por Kazak y Pratt, 2017, quienes indagan en futuros profesores de matemáticas el uso de modelos probabilísticos para realizar inferencia estadística informal. Participaron 12 estudiantes turcos, los cuales debían crear una estrategia para ganar un juego empleando diferentes recursos (material concreto y software) y responder una entrevista. Los resultados muestran que el uso de material concreto dificulta identificar el espacio muestral y definir la variable aleatoria discreta involucrada, aunque luego de emplearse el software para simular el juego, se subsanan los errores y son reconocidos los valores de la variable aleatoria que poseen mayor posibilidad de ocurrencia. Así los estudiantes logran crear una estrategia adecuada para ganar el juego, dado que relacionan la distribución de los datos empíricos (distribución empírica) con la distribución teórica (modelo de probabilidad). Entre las conclusiones se afirma que tanto el uso de material concreto como la herramienta de simulación, aportan a la comprensión del juego y la realización de inferencia.

También hay investigaciones específicas sobre la didáctica del modelo binomial. Por ejemplo, Alvarado y M. Retamal, 2014, diseñan un taller para la introducción del tema a nivel escolar (grados 11 y 12) por medio del análisis a experimentos aleatorios. Consideran como referente teórico herramientas del EOS y las diferentes representaciones de la binomial (manipulativo, computacional y algebraico). Entre los resultados obtienen 15 actividades que componen el taller, en las cuales se tienen en cuenta como conocimientos previos los conceptos de experimento aleatorio, simulación, variable aleatoria y función de probabilidad. A modo de conclusión los autores señalan que, el reto para la enseñanza del

---

modelo binomial está en el diseño de actividades centradas en sus diferentes representaciones que permitan progresivamente introducir su significado dependiendo del grado de educación.

A diferencia de Bill, Watson y Gayton, 2009 que elaboran e implementan una actividad para la enseñanza escolar del modelo binomial, la cual requiere cálculo de probabilidades y admite tres diferentes métodos de resolución: uso de la expresión algebraica de su función de probabilidad; aplicación del triángulo de Pascal; y realizar simulación con un software de datos. Participaron 19 estudiantes de 10 grado (15 a 16 años) quienes respondieron a dos cuestionarios de evaluación, antes y después de la actividad, y sus respuestas fueron analizadas desde la taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcome) propuesta por Biggs y Collis, 1982. Entre los resultados obtenidos en el primer cuestionario se apreció dificultad para aplicar la regla del producto, mientras que, en el segundo, el 63% de los participantes logró aplicar los tres métodos estudiados. Así se concluye que el uso del software es más apreciado por los estudiantes menos habilidosos para las matemáticas, y las tareas intuitivas acerca de combinación de monedas son el origen para introducirse en la comprensión de la binomial.

Asimismo, García-García, Arredondo y Márquez, 2018 y García y E. Hernández, 2018 diseñan e implementan una actividad para la enseñanza escolar de la distribución binomial, por medio de un software de educación estadística. Participaron 46 estudiantes mexicanos de grado 11 y 12 (17 a 18 años), quienes respondieron un mismo cuestionario en dos instancias, previa y posterior aplicación de la actividad. Las respuestas fueron codificadas considerando los niveles de razonamiento de la taxonomía SOLO. Los resultados muestran un mejor desempeño de los estudiantes en la segunda instancia de aplicación del cuestionario, avance que se atribuye al desarrollo de la actividad basada en el uso de un simulador computacional. De esta manera se concluye que la utilización de tecnología favorece un aprendizaje relacionado al contexto de los estudiantes.

Respecto a la distribución normal, es posible encontrar limitados estudios enfocados en sus aspectos didácticos. Por ejemplo, Prado y Gravoso, 2011 crean, implementan y evalúan una unidad de aprendizaje para la enseñanza escolar de modelos de probabilidad (binomial, Poisson y normal), sustenta en la instrucción anclada (Crews et al., 1997). Participaron 64 estudiantes de Filipinas (13 a 15 años), quienes al comienzo y final de la unidad debieron responder un cuestionario y una encuesta para comparar sus aprendizajes y opinión, con otro grupo de estudiantes que aprendieron con una metodología tradicional. Los resultados evidencian que los estudiantes que aprendieron con base a la instrucción anclada, obtuvieron significativamente mejores puntuaciones en los tres tópicos evaluados, en comparación con el otro grupo. Además, la encuesta constata que la unidad es entretenida, está contextualizada en situaciones reales, y fomenta el trabajo colaborativo y autónomo. Así se concluye que la intervención favoreció la mejora de habilidades en torno al razonamiento estadístico.

Posteriormente Salinas, Valdez y Salinas-Hernández, 2018 diseñan e implementan secuencias didácticas para la enseñanza escolar de la normal, fundamentados en la metodología Lesson Study (Stigler y Hiebert, 1999) y la Aproximación Documental de lo Didáctico (Gueudet y Trouche, 2009). Para ello elaboraron dos secuencias de actividades: la primera usa un software y participaron 20 estudiantes (17 a 19 años); la segunda emplea hojas de cálculo y lápiz y se aplicó a 33 estudiantes (17 a 19 años). Finalizada cada implementación aplicaron un cuestionario de evaluación. Los resultados centrados en los profesores muestran que el conocimiento del contenido ha sido el más trabajado, y evidencia que la metodología usada fomenta el aprender a enseñar la normal y su mejoramiento. Además, la utilización de un software amplía el conocimiento de diferentes herramientas útiles para enseñar. A modo de conclusión proponen como mejora que el diseño de secuencias incluya guiones que contengan los objetivos de cada actividad, para así verificar su cumplimiento.

---

En el contexto universitario, C.-K. Tan y C.-P. Tan, 2015 analizan la comprensión de la variable aleatoria y modelos de distribución (binomial, normal y Poisson), por medio de dos propuestas de enseñanza (una con calculadora y otra con papel y lápiz). Participaron 65 estudiantes (19 años) de Malasia distribuidos en dos grupos: grupo de experimentación (32), el cual trabajó con calculadora gráfica; grupo de control (33), quien aprendió de manera tradicional. Luego aplicaron un pre y post test de evaluación y consultaron a los participantes su opinión respecto a la experiencia. Los resultados muestran que el grupo experimental logró significativamente mejores resultados en todos los tópicos, siendo mayor la disparidad en los contenidos de distribución binomial y normal. Respecto a su opinión, gran parte señaló que el uso de la calculadora facilitó la comprensión de los conceptos, pues se observa sus diferentes representaciones (gráfica y tabular) y disminuye la cantidad de cálculos, además promueve la participación activa y la confianza en sí mismo. Los autores concluyen que la tecnología es una buena herramienta para mejorar la comprensión de la probabilidad en estudiantes de bajo o alto rendimiento.

Por su parte, Tauber, V. Sánchez y Batanero, 2004 diseñan e implementan una secuencia para la enseñanza universitaria de la distribución normal desde una perspectiva intuitiva, basada en el EOS. Participaron 143 estudiantes universitarios españoles que cursaban una asignatura de estadística y probabilidad, los cuales disponían de un software, papel y lápiz. Las respuestas a las actividades evidencian dificultades en: interpretar la probabilidad como el área bajo la curva normal; establecer los porcentajes asociados a la propiedad  $\pm 3\sigma$ ; distinguir entre la distribución empírica y teórica; e interpretar medidas de posición; diferenciar los estadísticos de los parámetros; interpretar los valores de los coeficientes de curtosis y de asimetría. Entre las conclusiones se señala que para la enseñanza efectiva del modelo normal se requiere como conocimientos previos: probabilidad, distribución estadística, variable aleatoria y estadística, medidas de dispersión y centralización, entre otros.

También Hugues, 2005 elabora e implementa una propuesta para enseñar la distribución normal a nivel universitario. El diseño de la propuesta se fundamenta en la investigación de Tauber, 2001, así queda constituida por una serie de actividades en las que se utilizan recursos como hoja de papel y lápiz y una hoja de cálculo electrónica. Esta fue aplicada en 25 estudiantes mexicanos de ingeniería y sus resultados muestran que ellos logran reconocer: vínculo entre los parámetros de la distribución normal y la forma de su curva; las condiciones que deben cumplir los parámetros de la distribución binomial para aproximarla a una normal; propiedades de la normal como su simetría. A modo de conclusión se señala que los participantes manifiestan dificultad en trabajar la corrección por continuidad.

Años más tarde Alvarado y L. Retamal, 2010 diseñan e implementan una secuencia para enseñar en la universidad la aproximación de la binomial por la normal (Teorema de Laplace De-Moivre) fundamentados en el EOS. Participaron 104 estudiantes chilenos de una carrera de ingeniería, quienes finalizada la implementación respondieron un cuestionario de evaluación, donde sus respuestas muestran sobre: medir elementos que afectan a una buena aproximación del modelo binomial, un 16 % se equivoca al suponer una mayor precisión de esta en los valores extremos del modelo; evaluar sensibilidad de los valores de los parámetros, un 18 % responde de manera inadecuada, dado que confunden las condiciones de los parámetros  $n$  y  $p$ ; y medir la aproximación de la binomial a la normal, el 60 % contesta mal debido a la falta de distinción del valor de  $n$  para calcular la probabilidad, observándose el sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra. Entre las conclusiones se afirma que existen dificultades en realizar el proceso de estandarización y emplear la corrección por continuidad.

---

## 3.2. Aprendizaje de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad

En este apartado se presentan investigaciones que abordan el estudio de la variable aleatoria y sus distribuciones de probabilidad desde un ámbito cognitivo. Su característica principal es analizar estrategias desarrolladas por estudiantes al afrontar situaciones-problemas, con el propósito de identificar sus dificultades y/o errores, niveles de razonamiento, etc. Estos estudios se han llevado a cabo tanto en los niveles educativos escolares como en el contexto universitario.

### 3.2.1. Aprendizaje de la variable aleatoria en la educación escolar

Dentro del contexto escolar se han encontrado investigaciones centradas en observar el aprendizaje de la variable aleatoria en estudiantes, como García y E. Sánchez, 2013, quienes indagan el desarrollo del razonamiento probabilístico en torno a esta (tipo discreta) y su distribución de probabilidad, sustentados en la taxonomía SOLO. Participaron 24 estudiantes mexicanos de grado 10 (15 a 16 años), los cuales debieron responder un cuestionario sobre un problema binomial. Los resultados se centran en las representaciones gráficas del modelo (gráfico de frecuencias relativas y gráfico de porcentajes) y evidencian que: el 75 % de los participantes en ambos gráficos identifica el suceso aleatorio con mayor probabilidad; y el 33 % representa bien la distribución en los dos gráficos, manteniendo en ellos una proporción de sus resultados. Entre las conclusiones se afirma que los estudiantes logran reconocer que el valor central de la binomial posee mayor probabilidad que los extremos, aunque ellos manifiestan dificultad en representar consistencia entre los dos gráficos.

Luego, García, Medina y E. Sánchez, 2014 identifican componentes que caracterizan los niveles de razonamiento que manifiestan estudiantes escolares al resolver una tarea sobre la noción de variable aleatoria (discreta) y su distribución de probabilidad, basándose en la taxonomía SOLO. Las respuestas de 34 estudiantes de bachillerato (grado 9, 13 a 14 años) y 46 de secundaria (grado 10, 15 a 16 años) fueron analizadas y evidencian que globalmente tuvieron mejor desempeño los de mayor grado. Por ejemplo, en relación a la distribución de probabilidad, gran parte de los participantes reconoce que los valores de la variable aleatoria no poseen igual probabilidad, aunque el 59 % de secundaria y el 52 % de bachillerato lo fundamentan en factores no probabilísticos. Así se concluye que el 41 % de repuestas provenientes de secundaria y el 12 % de bachillerato están influenciadas por el sesgo de equiprobabilidad, es decir, suponer que los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio o fenómeno incierto, poseen igual probabilidad (Lecoutre, 1985).

Paralelamente, Flores, García y E. Sánchez, 2014 indagan en secundaria el desarrollo del razonamiento probabilístico en torno a la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, fundamentados en la taxonomía SOLO. Para ello aplican a 69 estudiantes mexicanos de grado 8 (13 a 14 años) una actividad con apoyo de tecnología, además de un pre y post test de evaluación. Entre los resultados se observa sobre la relación de la variable aleatoria con el espacio muestral, que gran parte de los participantes, 82 % en el pretest y 54 % en el post test, manifiestan el sesgo de resultados aislados cuando identificaban algunos valores de la variable o elementos del espacio muestral, obviando que para analizar la probabilidad se considera una familia de experimentos aleatorios no únicamente un experimento. A modo de conclusión se afirma que el uso del software ayuda a disminuir razonamientos erróneos, como el sesgo de resultados aislados, relativo a suponer que cada repetición de un experimento no está relacionada con la anterior o posterior repetición (Konold, 1989).

Por su parte Salazar, 2014 analiza en secundaria la construcción del concepto de variable aleatoria y su distribución de probabilidad con base a herramientas de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) de Dubinsky, 1991. Para ello lleva a cabo un estudio de tres casos, cuyo primer caso está

---

integrado por cinco estudiantes chilenos de grado 9 (14 a 18 años), quienes debieron responder a un cuestionario. Los resultados revelan: reconocimiento parcial de la propiedad de la unión; falta de comprensión de axiomas fundamentales (la probabilidad de un suceso toma un valor entre 0 y 1); falta de reconocimiento de la variable aleatoria como una función; confusión entre los conceptos de suceso y variable aleatoria; y falta de identificación de la relación entre los elementos del espacio muestral y números reales. De esta forma, el autor concluye que los participantes no poseen una comprensión profunda de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad.

Mientras que Guerrero, Batanero y Contreras, 2016 indagan en bachillerato el conocimiento sobre la esperanza de una variable aleatoria discreta a partir de la resolución de un problema. Participaron 63 estudiantes españoles: 30 de grado 11 (16 a 17 años) y 33 de grado 12 (17 a 18 años). En general los resultados muestran que los estudiantes del curso superior obtuvieron un mejor desempeño en las preguntas sobre identificar el valor esperado de una variable aleatoria. Por ejemplo, en una de las interrogantes, solo el 30% de los participantes del menor curso respondió adecuadamente, a diferencia del curso superior que logró un 57,6% de respuestas buenas. Entre las conclusiones los autores señalan que los argumentos incorrectos observados se vinculan principalmente al sesgo de equiprobabilidad y cálculo de probabilidad.

### 3.2.2. Aprendizaje de las distribuciones binomial y normal en la educación escolar

En el contexto escolar también existen estudios desde una perspectiva cognitiva acerca de los modelos binomial y normal. Respecto al primero de ellos, Landín y E. Sánchez, 2010 y E. Sánchez y Landín, 2011 proponen niveles de razonamiento probabilísticos para evaluar en bachillerato la resolución de problemas binomiales. Sus trabajos se fundamentan en los niveles de desempeño del estudiante cuando responde una tarea, propuestos en la taxonomía SOLO, y en las componentes asociadas al conocimiento de la distribución binomial. Participaron 66 estudiantes mexicanos de grado 12 (17 a 18 años), quienes recibieron una instrucción previa sobre tópicos de probabilidad y posteriormente debieron resolver un cuestionario. Como resultado se obtiene una jerarquía de razonamiento en torno al modelo binomial, compuesta por cinco niveles crecientes de complejidad (1. subjetivo, 2. transicional, 3. cuantitativo-informal, 4. numérico y 5. abstracto), posible de adecuarse según los requerimientos específicos de una clase o necesidades de un investigador.

Posteriormente Landín, 2013 y E. Sánchez y Landín, 2014 describen el proceso en que escolares conocen y aplican la distribución binomial en la resolución de problemas, empleando como sustento teórico la jerarquía para el razonamiento binomial (E. Sánchez y Landín, 2011). Participaron 26 estudiantes mexicanos de grado 12 (17 a 18 años), los cuales respondieron a dos cuestionarios. A modo de conclusión se establece que, en el aprendizaje del modelo binomial, inicialmente el diagrama de árbol facilita la comprensión del concepto de combinatoria y la regla del producto, aunque para avanzar en la mejora de su aprendizaje se requiere la aplicación de estos últimos dos elementos. También se identificó que los problemas que más dificultó resolver fueron, en menor medida los relativos a combinatoria y comparación de probabilidad, mientras que los más complejos fueron los vinculados a la regla del producto y cálculo de probabilidad.

Del mismo modo, E. Sánchez y Carrasco, 2018 y E. Sánchez, Carrasco y Herrera, 2018 describen en los escolares el razonamiento que manifiestan en la resolución de problemas que requieren la construcción de la distribución binomial, centrándose en sus argumentos en torno a la variable aleatoria, distribución, combinatoria y variabilidad. Participaron 34 estudiantes mexicanos de grado 12 (17 a 18 años) quienes respondieron dos cuestionarios. Los resultados evidencian dificultades relativas a: cálculo de probabilidades aplicando la función de distribución acumulada; representar el

---

espacio muestral de un experimento aleatorio por medio de un diagrama de árbol; y determinar la probabilidad asociada a cada valor de la variable aleatoria, pues se apreció el sesgo de equiprobabilidad. Además, se reconoció que la comprensión de la variable aleatoria, combinatoria y regla de producto son necesarias para lograr construir la distribución binomial.

A diferencia de Van Dooren et al., 2003 que indagan la presencia del sesgo de linealidad en el razonamiento de escolares al enfrentarse a situaciones que involucran la distribución binomial. Para tal efecto, elaboraron un cuestionario que aplicaron a 225 estudiantes belgas: 107 de grado 10 (15 a 16 años) y 118 de grado 12 (17 a 18 años). Los resultados evidencian que tanto los de mayor grado (87,5%) como los de menor edad (75,3%), suponen la existencia de una relación lineal entre la probabilidad de un suceso y los parámetros  $n$ ,  $k$  o  $p$ . Esto se debe a que los participantes seleccionaron como respuesta alternativas que muestran una disminución o aumento de la probabilidad cuando disminuían o aumentaban dos parámetros involucrados, y manifiestan la relación a través de palabras, esquema o expresión algebraica, por ejemplo:  $P = \frac{n \cdot p}{k}$  o variación de esta. Así se concluye la presencia del sesgo de linealidad (De Bock, Verschaffel y Janssens, 2002) que consiste en asignar propiedades de la función lineal a una situación u objeto matemático que no es posible.

Sobre el aprendizaje del modelo normal en la escuela, son limitados los estudios existentes. En este contexto González y Ojeda, 2017 analizan la resolución de un problema, para lo cual utilizan las ideas estocásticas fundamentales de Heitele, 1975 y la herramienta del triángulo epistemológico de Steinbring, 2005. Participaron 26 estudiantes mexicanos de grado 12 (17 a 19 años), de los cuales el 31% respondió adecuadamente, el 54% incorrectamente y el 15% no presentó respuesta. Posteriormente se realizó una entrevista a dos de esos participantes, uno que presentó respuesta correcta al problema y otro que evidenció errores. En ella se constata que los estudiantes logran realizar el proceso de estandarización, pero no vincularlo con la curva normal y explicar su significado. De esta manera se concluye que existe una falta de reconocimiento del área bajo la curva que ha sido estandarizada y comprensión del proceso.

A continuación, Torres y Ojeda, 2018, indagan la comprensión de los conceptos requeridos para el estudio de la función de distribución normal, basados en las ideas fundamentales de Heitele, 1975 y el triángulo epistemológico de Steinbring, 2005. Inicialmente cuatro estudiantes mexicanos de grado 12 participaron en la implementación de una secuencia de enseñanza en torno al modelo normal y posterior resolución de un cuestionario de evaluación. Luego dos de ellos, con mejor desempeño, fueron seleccionados para una entrevista, observándose como resultado falencias en: distinguir entre continuidad de la función y cambio de su concavidad, en un intervalo; y diferenciar entre media aritmética y frecuencia de un valor de la variable aleatoria. Con respecto a esta última idea, los autores concluyen que es posible que genere dificultad para comprender el rol de la desviación estándar y la media en dicha función de distribución.

Por su parte, Valdez y Salinas, 2019 exploran en bachillerato la resolución de problemas en torno a la normal fundamentados en la taxonomía SOLO. Así aplican un cuestionario a 53 estudiantes de grado 12 (17 a 18 años), organizados en dos grupos: 20 en el grupo A, los cuales aprendieron mediante un software; 33 en el grupo B, quienes recibieron instrucción con un enfoque tradicional. Entre los resultados obtienen una jerarquía de razonamiento en torno a la normal, específicamente para los tópicos de estandarización y cálculo de probabilidad, cada una constituida por cuatro niveles creciente de razonamiento (1. pre-estructural; 2. uni-estructural; 3. multi-estructural; 4. relacional). Además, las respuestas al cuestionario manifiestan que en general el grupo B tuvo mejor desempeño que el grupo A, dado que la mayoría de sus respuestas se clasifican en el nivel de razonamiento más alto (relacional). A modo de conclusión se afirma que existe dificultad en relacionar el área

---

bajo la curva normal con la probabilidad y se observa una correcta realización del procedimiento de estandarización, aunque existe falta de comprensión en algunas de sus etapas.

### 3.2.3. Aprendizaje de la variable aleatoria en otros contextos

Dentro del ámbito universitario se han encontrado importantes estudios sobre los procesos cognitivos en torno al aprendizaje de la variable aleatoria. Algunos de ellos han sido desarrollados por Ruiz y Albert, 2005 y Ruiz, Albert y Batanero, 2006, quienes se interesan en explorar el proceso de construcción, concepciones y dificultades en torno a la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, basándose en la TSD (Brousseau, 1997). Participaron dos estudiantes mexicanos de una carrera de ciencias sociales, los cuales respondieron en pareja un problema y luego fueron entrevistados. Los resultados evidencian dificultades en: identificar la aleatoriedad en el problema, pues se intenta crea una solución determinista; reconocer que las probabilidades calculadas corresponden a valores de la función de probabilidad; identificar a la variable aleatoria como una función; representar gráficamente su distribución de probabilidad; y trabajar con una función discontinua, pues se asocia a ella una gráfica cuyo dibujo es continuo.

Después, Ruiz, Batanero y Arteaga, 2011 evalúan la comprensión de la variable aleatoria y su vinculación con la variable estadística, a través de la realización de un proyecto abierto, donde participaron 101 futuros profesores españoles de educación primaria. Los resultados evidencian que solo un 33 % de ellos logró analizar la distribución de la variable estadística y realizar inferencias y obtener conclusiones parciales en relación a la variable aleatoria, mientras que solo un 4 % de los estudiantes pudo finalizar completamente el proceso de inferencia estadística, constatándose que es una tarea que les dificulta. A modo de conclusión los autores señalan que existen inconvenientes en el desarrollo de tareas sobre modelación, lo cual en este estudio afectó en lograr vincular la variable estadística con la aleatoria. Además, se observó dificultad en el razonamiento en torno a la variabilidad de la variable aleatoria.

A diferencia de Pérez y Parraguez, 2013 que analizan la comprensión y diferenciación de los conceptos de aleatoriedad y determinismo para la construcción de la variable aleatoria, usando la teoría APOE. Por ello elaboran una descomposición genética hipotética del objeto (esquema que describe la comprensión y vínculo de diversos conceptos que requiere lograr un sujeto para construir un objeto matemático). Con el propósito de validar esta descomposición, diseñan un cuestionario aplicado a nueve futuros profesores de matemáticas chilenos. Entre sus principales resultados afirman que la diferenciación entre los conceptos suceso y variable es fundamental, es decir, identificar qué se está investigando (suceso) y a través de qué característica se hará (variable), pues si el estudiante no comprende estos temas no logrará modelar una situación-problema por medio de una variable aleatoria.

Al mismo tiempo, F. Fernández, Andrade y Sarmiento, 2013 diseñan e implementan una secuencia de enseñanza para la construcción del significado de variable aleatoria, fundamentados en la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico (Ben-Zvi y Garfield, 2004). Participó un grupo de futuros profesores colombianos de matemáticas, quienes respondieron a dos talleres, el primero sobre espacio muestral y el segundo referente a la variable aleatoria. El análisis a las respuestas muestra dificultad en identificar el experimento aleatorio y expresar el espacio muestral de manera formal (utilizando notación de conjunto). Además, se evidencian errores como: asumir la equiprobabilidad del espacio muestral; o visualizar los valores de la variable aleatoria como resultado de un experimento aleatorio. De esta manera los autores concluyen que utilizar la variable aleatoria en la resolución de problemas sobre modelos probabilísticos fomenta su concepción como magnitud aleatoria.

---

Luego, Calandra y Costa, 2015 analizan en universitarios dificultades en torno a la variable aleatoria (continua) y su distribución de probabilidad, fundamentadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). Participaron 50 estudiantes argentinos de ingeniería que cursaban una asignatura sobre tópicos estocásticos. Inicialmente se analiza la manera en que se introducen los conceptos en las guías de contenido y libros de texto del curso, cuyos resultados muestran discrepancias entre la presentación del contenido y los ejercicios propuestos. Por ejemplo, algunos libros destacan el vínculo de los histogramas con la función de densidad, pero no se presentan problemas en que se refleje este. Luego se aplica un cuestionario y sus resultados evidencian dificultades en: identificar la variable aleatoria en el problema; resolución mecánica y descontextualizada; y falta de interpretación del significado de la función de densidad en el contexto del problema.

#### 3.2.4. Aprendizaje de las distribuciones binomial y normal en otros contextos

También a nivel universitario existen estudios acerca de la comprensión de modelos probabilísticos. En particular sobre el modelo binomial, Vilca, 2015 identifica errores al abordar un problema vinculado a este, basándose en el EOS. Para ello aplicó un cuestionario a 18 estudiantes peruanos (16 a 19 años) de una carrera de administración. Los resultados muestran que: ninguno logró definir la variable aleatoria involucrada en el problema; solo el 17% determinó el recorrido de la variable aleatoria discreta y el 33% presenta errores en el lenguaje matemático al expresar este; el 22% identifica incorrectamente los valores de los parámetros de la distribución binomial ( $n$  y  $p$ ); y el 5% se equivocan en la simbología que utilizan para señalar estos. Así, se concluye dificultad en reconocer tanto la variable aleatoria como los parámetros del modelo binomial.

Por su parte, Galicia, Nájera y E. Sánchez, 2013 indagan el razonamiento al resolver problemas vinculados al modelo binomial, basándose en la taxonomía SOLO. Participaron 18 profesores en formación y 59 estudiantes mexicanos de grado 11 y 12 (16 a 18 años), los cuales respondieron a un cuestionario. En general los resultados evidencian que los futuros profesores presentan un mejor desempeño en comparación a los escolares. Los autores concluyen que tanto el diagrama de árbol como el enfoque de probabilidad clásica favorece la identificación del modelo binomial en problemas de distribución, pero cuando el parámetro  $n$  (número de ensayos) toma un valor grande, es decir  $n \geq 8$ , se requiere la utilización de la regla del producto en vez del diagrama de árbol.

Mientras que Alvarado, Estrella et al., 2018 analizan intuiciones y heurísticas relacionadas a la probabilidad, fundamentados en sus diferentes enfoques e ideas acerca del razonamiento probabilístico de Tversky y Kahneman, 1980. Participaron 257 estudiantes chilenos de una carrera de ingeniería que cursaban una asignatura de estadística, los cuales respondieron a dos cuestionarios, uno al comienzo y otro al final de esta. Los resultados muestran sobre la distribución binomial que inicialmente el 7% de ellos responde bien, pero luego del proceso de instrucción se constató una mejora de su desempeño (68,2%). Además, se observó dificultades en definir la variable aleatoria, identificar el modelo binomial y sus parámetros. Así mismo se presentó el sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra, que consiste en suponer que una muestra de tamaño pequeño es igual de representativa en las características estadísticas que la población donde surge (Tversky y Kahneman, 1971).

Luego, Toledo, Montenegro y Vicencio, 2019 analizan el razonamiento de profesores al abordar problemas de probabilidad de tipo binomial, con base a la taxonomía SOLO. Participaron 63 profesores chilenos de matemáticas quienes respondieron a un cuestionario que incluyó situaciones equiprobables y no equiprobables. Los resultados muestran sobre la situación equiprobable que, el 68,25% de ellos responde bien, empleando el diagrama de árbol y la probabilidad clásica, y solo el 7,98% lo hace aplicando la binomial. En la situación no equiprobable, el 32,75% responde

---

correctamente usando combinatoria y regla de Laplace o técnicas de conteo y solo el 14,29 % lo realiza utilizando la binomial. Entre las conclusiones se destaca la utilización de la fórmula binomial, aunque no se aprecia el uso de un lenguaje formal, identificación de sus parámetros y definición de la variable aleatoria involucrada.

En relación a la comprensión de la distribución normal en la universidad, autores como Batanero, Tauber y V. Sánchez, 2001 abordan esta temática, basándose en el EOS. Para ello aplican a 55 estudiantes universitarios españoles de diferentes carreras (educación primaria, psicopedagogía, psicología o economía) un cuestionario y una prueba. Los resultados en el cuestionario muestran que alrededor del 70 % respondió adecuadamente, aunque se observó que les dificulta: asociar a la normal una expresión algebraica; notar que el modelo normal toma valores negativos y positivos; interpretar el área de un histograma de frecuencia; reconocer que el área total bajo una curva normal es igual a una unidad; calcular valores tipificados e inversos; y distinguir entre la distribución empírica (variable estadística) y teórica (variable aleatoria). En las respuestas a la prueba se observaron dificultades en torno a la normal, posteriormente constatadas por Batanero, Tauber y V. Sánchez, 2004, estas son: interpretar los coeficientes de curtosis y de asimetría; identificar las condiciones que debe cumplir una distribución de variable aleatoria discreta para aproximarla a una normal; y comprender los conceptos de parámetros y estadísticos.

Posteriormente Alvarado y Batanero, 2007 indagan la comprensión de la aproximación binomial a la normal fundamentados en el EOS. Así diseñan e implementan una secuencia de enseñanza y aplican un cuestionario de evaluación. Participaron 123 universitarios chilenos estudiantes de ingeniería y sus respuestas evidencian errores como: confusión en la condición de los parámetros  $n$  y  $p$  para la aproximación (16 %); afirmar que en valores pequeños de  $n$  se obtiene una buena aproximación (5 %); falta de reconocimiento de la relevancia de los valores de los parámetros de la binomial para la rapidez de su convergencia a la normal (31 %); suponer una mayor precisión en la aproximación a la normal en los valores extremos de la binomial (24,7 %); equivocación en los límites de la corrección por continuidad (21 %); y confusión con la expresión para calcular la varianza o media. Entre las conclusiones se observa la presencia del sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra (55 %).

A continuación, Carpio et al., 2009 reconocen elementos que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de la normal con base a herramientas del EOS. Para ello aplicaron a 45 estudiantes peruanos de una carrera de administración y economía un cuestionario de evaluación. Las respuestas de los participantes muestran que les dificulta aplicar la propiedad de reproductividad (si se suman variables aleatorias con distribución normal se obtendrá como resultado una variable distribuida normalmente), y determinar la varianza y desviación estándar en el proceso de estandarización. De esta manera se concluye que el 35 % de los estudiantes se equivoca al definir una nueva variable aleatoria usando notación de sumatoria.

A diferencia de Bansilal, 2012 y Bansilal, 2014 que explora en profesores la comprensión de la normal por medio de la resolución de problemas, fundamentada en la Teoría de Registro de Representaciones Semiótica de Duval, 2006 y en la teoría APOE. Participaron 290 profesores de matemáticas sudafricanos que imparten docencia en escuelas, quienes en el contexto de un curso de perfeccionamiento respondieron a un cuestionario. Los resultados de las investigaciones muestran respuestas correctas sobre: realizar un proceso de estandarización (27 %) ; llevar a cabo dos procesos de estandarización (14 %); y determinar un valor desconocido a partir de una probabilidad dada (16 %) logra obtenerlo correctamente. Así se concluye que los profesores poseen un conocimiento limitado de la normal y se propone trabajar con un software que podría favorecer la observación de sus propiedades en diferentes registros de representación.

---

Además, González, Ojeda y Palacios, 2018 analizan la comprensión de profesores sobre la normal, con base en las ideas estocásticas de Heitele, 1975 y el triángulo epistemológico de Steinbring, 2005. Participaron dos profesores de matemáticas mexicanos con experiencia en docencia universitaria, los cuales respondieron paralelamente un problema acerca de la normal y una entrevista. En los resultados se observa que uno de ellos presenta inconvenientes en identificar el espacio muestral y los valores de la función de densidad asociada al problema, mientras que, al otro le dificulta graficar la normal estándar. Además, ambos no logran reflexionar sobre el proceso de estandarización. A modo de conclusión se menciona que los participantes poseen problemas para diferenciar entre el significado frecuencia y clásico de la probabilidad, vincular la expresión  $\mu \pm \sigma$  con puntos de inflexión de la curva normal y reflexionar en torno a los cálculos llevados a cabo.

#### 4. Conclusiones e implicaciones didácticas

En este trabajo se analizaron las principales investigaciones que reporta la literatura en el campo de educación matemática sobre la enseñanza y aprendizaje de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, tanto a nivel escolar como universitario. Por ello se constata que, se ha encontrado una menor cantidad de estudios que abordan sus aspectos epistemológicos y didácticos (enseñanza) en comparación con los que tratan sus elementos cognitivos (aprendizaje).

En relación al ámbito epistemológico, se aprecian investigaciones que han identificado de manera superficial elementos de la variable aleatoria (problemas, procedimientos, diferentes representaciones, etc.) necesarios para su enseñanza en la escuela (Ortiz, 2002) y universidad (Ruiz, 2014). Respecto al modelo binomial, dentro de lo que se ha buscado, no se han hallado estudios que entreguen directrices sobre los elementos principales a considerar en su enseñanza. Contrario a lo ocurrido con la normal, los resultados obtenidos son más alentadores, dado que se encontró detalladamente los elementos fundamentales a incluir en su proceso de enseñanza, tanto en la educación superior (Tauber, 2001) como escolar obligatoria (Valverde, 2017).

Sobre los aspectos didácticos se descubrieron similar cantidad de trabajos dirigidos a la educación universitaria y escolar. Estos se centran principalmente en propuestas para la enseñanza superior de la variable aleatoria (C.-K. Tan y C.-P. Tan, 2015; Kachapova, 2012; Kachapova y Kachapov, 2012; Kazak y Pratt, 2017; Maurer, Hudiburgh y Werwinski, 2020) y el modelo normal (Alvarado y L. Retamal, 2010; C.-K. Tan y C.-P. Tan, 2015; Hugues, 2005; Tauber, V. Sánchez y Batanero, 2004). Además de la enseñanza a nivel escolar de la binomial (Alvarado y M. Retamal, 2014; Bill, Watson y Gayton, 2009; García-García, Arredondo y Márquez, 2018; García y E. Hernández, 2018). Mientras que existe una menor cantidad de propuestas de instrucción en el contexto escolar en torno a la variable aleatoria (Bizet y Ramos-Rodríguez, 2019) y la normal (Prado y Gravoso, 2011; Salinas, Valdez y Salinas-Hernández, 2018), lo mismo que ocurre en el ámbito universitario con la binomial (C.-K. Tan y C.-P. Tan, 2015).

Entre los trabajos de diseño de actividades se evidenció que el recurso de la tecnología, por medio de una calculadora gráfica o software de simulación de datos, es el que ha permitido obtener un mejor rendimiento de los estudiantes (Bill, Watson y Gayton, 2009; C.-K. Tan y C.-P. Tan, 2015; García-García, Arredondo y Márquez, 2018; García y E. Hernández, 2018; Kazak y Pratt, 2017; Salinas, Valdez y Salinas-Hernández, 2018; Tauber, V. Sánchez y Batanero, 2004). En este contexto se cree importante elaborar actividades para abordar la variable aleatoria y su distribución de probabilidad a través de la modelización, que en términos de Garfield et al., 2008 hace referencia al uso de la simulación para generar datos, y estimación de probabilidades mediante dispositivos aleatorios y

---

herramientas de simulación. Dado que podría favorecer la enseñanza de los temas analizados y permitiría vincular la variable estadística (distribución de datos) con la aleatoria (distribución de probabilidades), proceso importante para realizar inferencia estadística informal, es decir, “*forma en que el estudiante utiliza conocimiento estadístico con el propósito de elaborar argumentos para apoyar inferencias sobre poblaciones desconocidas, basados en nuestras observaciones*” (Zieffler et al., 2008, p. 44).

Dentro de los estudios desarrollados desde una perspectiva cognitiva, se hallaron alrededor de la misma cantidad de investigaciones que abordan la comprensión de la variable aleatoria y su distribución en la educación escolar y universitaria. En particular, se han encontrado importantes resultados sobre el razonamiento probabilístico en torno a estos conceptos. Por una parte, en el contexto escolar los niveles de comprensión del modelo binomial (Landín y E. Sánchez, 2010; E. Sánchez y Landín, 2011) y modelo normal (Valdez y Salinas, 2019). Sin embargo, en la literatura indagada existen vacíos que serían importante investigar, por ejemplo, los niveles de comprensión tanto de la variable aleatoria a nivel escolar y universitario, como de los modelos de distribución en la educación superior. Por otra parte, hemos reconocido la presencia de los siguientes sesgos cognitivos en el razonamiento de estudiantes: el sesgo de equiprobabilidad (E. Sánchez y Carrasco, 2018); el sesgo de resultados aislados (Flores, García y E. Sánchez, 2014); sesgo de linealidad (Van Dooren et al., 2003); sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra (Alvarado, Estrella et al., 2018).

Así mismo sobre los tópicos indagados constatamos a nivel escolar diversas dificultades como: identificar el dominio de la variable aleatoria (Bizet y Ramos-Rodríguez, 2019) y su recorrido (García, Medina y E. Sánchez, 2014), reconocer a la variable aleatoria como una función (Salazar, 2014); calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta (Guerrero, Batanero y Contreras, 2016); aplicar la función de probabilidad de la binomial (E. Sánchez y Landín, 2014) y su función de distribución (E. Sánchez y Carrasco, 2018); y comprender etapas del procedimiento de estandarización y relacionar el área bajo la curva normal con la probabilidad (Valdez y Salinas, 2019), etc.

Mientras que en los estudiantes universitarios ha sido posible verificar dificultades, tales como: identificar la variable aleatoria como función y representar gráficamente su distribución de probabilidad (Ruiz y Albert, 2005); vincular la variable estadística con la aleatoria (Ruiz, Batanero y Arteaga, 2011); reconocer los parámetros de la distribución binomial (Toledo, Montenegro y Vicencio, 2019) y determinar su recorrido (Vilca, 2015); interpretar la probabilidad como el área bajo la curva normal y establecer los porcentajes asociados a la propiedad  $\pm 3\sigma$  (Tauber, V. Sánchez y Batanero, 2004); diferenciar entre la distribución empírica y teórica y comprender los conceptos de parámetros y estadísticos (Batanero, Tauber y V. Sánchez, 2001); reconocer las condiciones de los parámetros  $n$  y  $p$  para emplear la aproximación de la binomial a la normal (Batanero, Tauber y V. Sánchez, 2004) y aplicar la corrección por continuidad (Alvarado y Batanero, 2007), etc.

A partir de este estudio, se ha constatado la relevancia de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad dentro de la educación estocástica. Por consiguiente, es fundamental su inclusión en todo curso básico de estadística y probabilidad. En su aprendizaje intervienen diversos conceptos básicos tales como: espacio muestral, función, suceso aleatorio, experimento aleatorio, etc., además de involucrar los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad. Todos ellos son necesarios de comprender previamente en la educación escolar, pero para los estudiantes tienen sus dificultades propias, que luego al integrarlos y relacionarlos requieren de un mayor esfuerzo cognitivo. El limitado conocimiento de dichos elementos genera posteriormente dificultades en la comprensión de la variable aleatoria, distribución binomial y/o distribución normal, así como también la presencia de sesgos cognitivos en torno a estos tópicos, los cuales se manifiestan desde finales de la educación escolar, durante la formación universitaria y persisten en profesores de matemáticas en ejercicio. Por tanto,

---

es fundamental fortalecer la formación docente en torno a los temas en cuestión, incluyendo sus aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos, de esta manera proporcionarles las herramientas suficientes para enfrentar con éxito la labor de su enseñanza.

También es necesario que la enseñanza considere los resultados de este estudio con el propósito de insistir en la comprensión de la variable aleatoria y las distribuciones de probabilidad. Según se expuso en la introducción las directrices curriculares españolas (MECD, 2015) en el Eje Estadística y Probabilidad incluyen estos tópicos, enfatizando en las distribuciones binomial y normal, y la aproximación de la binomial por la normal. Aunque en este contexto, en bachillerato podría incluirse abordar la distribución empírica por medio de softwares de simulación de datos para introducir las distribuciones teóricas y relacionar ambas, de esta manera mostrar de forma empírica como la frecuencia relativa convergen a la probabilidad teórica. Además, ello permitiría vincular la variable estadística con la aleatoria, por medio de los enfoques frecuencial y clásico de la probabilidad, pues como ha quedado de manifiesto la tecnología provee recursos didácticos que favorece la comprensión de los tópicos de interés.

Finalmente, la recopilación de estudios enfocados en la comprensión de la variable aleatoria y su distribución de probabilidad, se cree que podría aportar a mejorar el proceso de su enseñanza y aprendizaje, a la identificación de dificultades en los estudiantes y al diagnóstico de los posibles sesgos que ellos pueden manifestar. De esta forma, se espera que estos resultados contribuyan a fortalecer el proceso de diseño instruccional llevado a cabo por el profesorado, con el fin de ayudar a los estudiantes a subsanar dificultades potenciales en el aprendizaje de dichos temas.

## Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación B-SEJ-063-UGR18, dentro del Grupo de investigación PAIDI SEJ622 (Junta de Andalucía, España) y la financiación de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID, Chile) a través de la beca de doctorado en el extranjero (folio 72200367).

## Acerca de los autores



**Valeria Bizet Leyton** es doctoranda del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada y becaria del Programa Becas Chile de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID). Licenciada en Educación, Profesora de Matemáticas y Magister en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Su línea de investigación se desarrolla en torno a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y, en concreto, en los conceptos de variable aleatoria y modelos de probabilidad.



**Elena Molina Portillo** es profesora contratada doctora del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Licenciada en Ciencias Matemáticas, licenciada en Ciencias y Técnicas Estadísticas, doctora en Matemáticas y Estadística y doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Trabaja en educación estadística, análisis de datos educativos y en formación de profesores.



**Felipe Ruz Ángel** es Licenciado en Educación, Profesor de Matemáticas y Magíster en Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile) y doctor internacional en ciencias de la educación por la Universidad de Granada (España). Su línea de investigación es la Educación Estadística e Inferencial en el nivel universitario, orientada principalmente a la formación del profesorado.



**José Miguel Contreras García** es profesor titular del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Licenciado en Ciencias Matemáticas, licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas, doctor en Didáctica de la Matemática y doctor en Matemáticas y Estadística por la Universidad de Granada. Trabaja en educación estadística, análisis de datos educativos y en formación de profesores.

## Referencias

- Alvarado, Hugo y Carmen Batanero (2007). «Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial». En: *Números, revista de didáctica de las matemáticas* 67, págs. 1-7.
- Alvarado, Hugo, Soledad Estrella, Lidia Retamal y Maritza Galindo (2018). «Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad». En: *RELIME* 21.2, págs. 131-156.
-

- Alvarado, Hugo y Lidia Retamal (2010). «La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica». En: *Paradigma* 31.2, págs. 89-108.
- Alvarado, Hugo y María Retamal (2014). «Representaciones de la distribución de probabilidad binomial». En: *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica*. Ed. por L. Andrade. Asociación Colombiana de Educación Estocástica, págs. 98-109.
- Bansilal, Sarah (2012). «Using conversions and treatments to understand students' engagement with problems based on the normal distribution curve». En: *Pythagoras* 33.1, págs. 1-13.
- (2014). «Using an apos framework to understand teachers' responses to questions on the normal distribution». En: *Statistics Education Research Journal* 13.2, págs. 42-57.
- Batanero, Carmen, Liliana Tauber y Victoria Sánchez (2001). «Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos». En: *Cuadrante* 10.1, págs. 59-91.
- (2004). «Students' reasoning about the normal distribution». En: *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Ed. por D. Ben-Zvi y J. Garfield. Springer, págs. 257-276.
- Ben-Zvi, Dani y Joan Garfield (2004). «Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions and challenges». En: *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Ed. por D. Ben-Zvi y J. Garfield. Springer, págs. 3-16.
- Biggs, John y Kevin Collis (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press.
- Bill, Anthony, Jane Watson y Peter Gayton (2009). «Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem three different ways». En: *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Ed. por R. Hunter, B. Bicknell y T. Burgess. MERGA, págs. 57-64.
- Bizet, Valeria y Elisabeth Ramos-Rodríguez (2019). «Una experiencia de enseñanza para abordar la variable aleatoria con estudiantes de secundaria». En: *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Ed. por J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, págs. 1-10.
- Brousseau, Guy (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Kluwer Academic Publishers.
- (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Calandra, María y Viviana Costa (2015). «La problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable aleatoria continua y de función de densidad de probabilidad». En: *Actas IV jornadas de enseñanza e investigación educativa en el campo de las ciencias exactas y naturales*. Ed. por FaHCE. Universidad Nacional de La Plata, págs. 1-10.
- Carpio, Miriam, Cecilia Gaita, Miguel Wilhelmi y Álvaro Sáenz de Cabezón (2009). «Significados de la distribución normal en la universidad». En: *Investigación en Educación Matemática XIII*. Ed. por M. González, M. González y J. Murillo. SEIEM, págs. 1-15.
- Chevallard, Yves (1999). «El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico». En: *Recherches en didactique des mathématiques* 19.2, págs. 221-266.
- Crews, Thaddeus, Gautam Biswas, Susan Goldman y John Bransford (1997). «Anchored interactive learning environments». En: *International Journal of Artificial Intelligence in Education* 8, págs. 142-178.
- De Bock, Dirk, Lieven Verschaffel y Dirk Janssens (2002). «The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students». En: *Mathematical thinking and learning* 4.1, págs. 65-89.
- Dinges, Hermann (2005). «Variables, in particular random variables». En: *Activity and sign grounding mathematics education*. Ed. por M. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger. Springer, págs. 305-311.
-

- Dubinsky, Ed (1991). «Reflective abstraction in advanced mathematical thinking». En: *Advanced Mathematical Thinking*. Ed. por D. Tall. Kluwer Academic Publishers, págs. 95-126.
- Duval, Raymond (2006). «A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics». En: *Educational studies in mathematics* 61, págs. 103-131.
- Fernández, Felipe, Luisa Andrade y Benjamín Sarmiento (2013). «Rehaciendo el camino hacia la comprensión de la variable aleatoria». En: *Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística*. Ed. por P. Perry, C. Samper, Ó. Molina, L. Uribe de Camargo y A. Echeverry. Universidad Pedagógica Nacional, págs. 93-169.
- Flores, Blanca, Jaime García y Ernesto Sánchez (2014). «Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología». En: *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Ed. por M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega. SEIEM, págs. 307-316.
- Fox, David (1981). *El proceso de investigación en educación*. EUNSA.
- Franklin, Christine, Gary Kader, Denise Mewborn, Jerry Moreno, Roxy Peck, Mike Perry y Richard Scheaffer (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*.
- Galicía, Silvia, Ariana Nájera y Ernesto Sánchez (2013). «Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales». En: *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Ed. por J. M. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, págs. 409-416.
- García, Jaime y Elizabeth Hernández (2018). «Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre la noción de la distribución binomial». En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Ed. por L. Serna y D. Páges. CLAME, págs. 962-969.
- García, Jaime, Miguel Medina y Ernesto Sánchez (2014). «Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad». En: *Avances de Investigación en Educación Matemática* 6, págs. 5-23.
- García, Jaime y Ernesto Sánchez (2013). «Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución». En: *Actas de las jornadas virtuales de didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria*. Ed. por J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, págs. 417-424.
- García-García, Jaime, Elizabeth Arredondo y Maximina Márquez (2018). «Desarrollo de la noción de distribución binomial en estudiantes de bachillerato con apoyo de tecnología». En: *Paradigma* 39.2, págs. 92-106.
- Garfield, Joan, Dani Ben-Zvi, Beth Chance, Elsa Medina, Cary Roseth y Andrew Zieffler (2008). «Learning to reason about statistical models and modeling». En: *Developing students' statistical reasoning, connecting research and teaching practice*. Ed. por J. Garfield y D. Ben-Zvi. Springer, págs. 143-163.
- Godino, Juan, Carmen Batanero y Vicenç Font (2007). «The onto-semiotic approach to research in mathematics education». En: *Zdm* 39.1, págs. 127-135.
- González, Yanet y Ana Ojeda (2017). «Comprensión de la distribución normal en bachillerato». En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30. Ed. por L. Serna. CLAME, págs. 207-2017.
- González, Yanet, Ana Ojeda y Juan Palacios (2018). «Comprensión de profesores de la distribución normal». En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2). Ed. por D. García e I. Pérez. CLAME, págs. 1764-1772.
- Guerrero, Herminia, Carmen Batanero y José Miguel Contreras (2016). «Conocimientos sobre esperanza matemática en alumnos de bachillerato». En: *Actas del XVI congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Ed. por F. España. SAEM THALES, págs. 26-35.
-

- Gueudet, Ghislaine y Luc Trouche (2009). «Towards new documentation systems for mathematics teachers?» En: *Educational studies in mathematics* 71.3, págs. 199-218.
- Heitele, Dietger (1975). «An epistemological view of fundamental stochastic ideas». En: *Educational Studies in Mathematic* 6, págs. 187-205.
- Hernández, Roberto, Carlos Fernández y Pilar Baptista (2014). *Metodología de la investigación*. McGrawHill.
- Hugues, Enrique (2005). «Uso de hojas electrónicas en la enseñanza de la distribución normal». En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18. Ed. por J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina. CLAME, págs. 757-763.
- Kachapova, Farida (2012). «A general approach to teaching random variables». En: *Mathematics teaching-research journal online* 5.2, págs. 1-16.
- Kachapova, Farida e Ilias Kachapov (2012). «Students' misconceptions about random variables». En: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 43.7, págs. 963-971.
- Kazak, Sibel y Dave Pratt (2017). «Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game». En: *Statistics Education Research Journal* 16.2, págs. 287-304.
- Konold, Clifford (1989). «Informal conceptions of probability». En: *Cognition and instruction* 6, págs. 59-98.
- Landín, Pedro (2013). «Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales». En: *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Ed. por J. M. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, págs. 425-431.
- Landín, Pedro y Ernesto Sánchez (2010). «Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial». En: *Educación Matemática Pesquisa* 12.3, págs. 598-618.
- Lecoutre, Marie-Paule (1985). «Effect d' informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le juggements probabilistes». En: *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, págs. 193-213.
- Maurer, Karsten, Lynette Hudiburgh y Lisa Werwinski (2020). «What do students gain from games?» En: *Teaching Statistics* 42.2, págs. 41-46.
- MECD Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). «Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato». En: *Boletín Oficial del Estado* 3.
- NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA.
- Ortiz, Juan (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada.
- Pérez, Bernardita y Marcela Parraguez (2013). «Construcciones mentales de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal». En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26. Ed. por R. Flores. CLAME, págs. 589-598.
- Prado, Marlon y Rotacio Gravoso (2011). «Improving high school students' statistical reasoning skills: A case of applying anchored instruction». En: *The Asia-Pacific Education Researcher* 20.1, págs. 61-72.
- Ruiz, Blanca (2014). «Análisis epistemológico de la varibale aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios». Tesis doct. Universidad de Granada.
- Ruiz, Blanca y José Albert (2005). «Didáctica de la probabilidad y estadística el caso de la variable aleatoria». En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18. Ed. por J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina. CLAME, págs. 185-191.
-

- Ruiz, Blanca, José Albert y Carmen Batanero (2006). «An exploratory study of students' difficulties with random variables». En: *Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Ed. por A. Rossman y B. Chance. IASE, págs. 1-6.
- Ruiz, Blanca, Carmen Batanero y Pedro Arteaga (2011). «Vinculación de la Variable Aleatoria y Estadística en la Realización de Inferencias Informales por parte de Futuros Profesores». En: *Bolema* 24.39, págs. 431-449.
- Salazar, Rodrigo (2014). «La variable aleatoria con probabilidad desde la perspectiva de la teoría APOE». Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Salinas, Jesús, Julio Valdez y Ulises Salinas-Hernández (2018). «Un acercamiento a la metodología lesson study para la enseñanza de la distribución normal». En: *Investigación en Educación Matemática XXII*. Ed. por L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno. SEIEM, págs. 525-534.
- Sánchez, Ernesto y Guillermo Carrasco (2018). «El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial». En: *Investigación en Educación Matemática XXII*. Ed. por L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno. SEIEM, págs. 535-543.
- Sánchez, Ernesto, Guillermo Carrasco y Marianana Herrera (2018). «Fundamental ideas in the probabilistic reasoning of high-school students in binomial distribution activities». En: *Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics*. Ed. por M. Sorto, A. White y L. Guyot. IASE, págs. 1-6.
- Sánchez, Ernesto y Pedro Landín (2011). «Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial». En: *Investigación en Educación Matemática XV*. Ed. por M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea. SEIEM, págs. 533-542.
- (2014). «Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems». En: *Probabilistic thinking presenting plural perspectives*. Ed. por E. Chernoff y B. Sriraman. Springer, págs. 581-597.
- Steinbring, Heinz (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. Springer.
- Stigler, James y James Hiebert (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Free Press.
- Tan, Choo-Kim y Choo-Peng Tan (2015). «Effects of the handheld technology instructional approach on performances of students of different achievement levels». En: *Computers and Education* 82, págs. 306-314.
- Tauber, Liliana (2001). «La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos». Tesis doct. Universidad de Sevilla.
- Tauber, Liliana, Victoria Sánchez y Carmen Batanero (2004). «Diseño, implementación y análisis de una secuencia de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario». En: *Revista EMA* 9.2, págs. 82-105.
- Toledo, Álvaro, Daniel Montenegro e Inés Vicencio (2019). «Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales». En: *Brazilian Journal of Development* 5.6, págs. 5399-5410.
- Torres, Omar y Ana Ojeda (2018). «Requisitos conceptuales de la función de densidad normal como modelo de la realidad». En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2). Ed. por D. García e I. Pérez. CLAME, págs. 1085-1093.
- Tversky, Amos y Daniel Kahneman (1971). «Belief in the law of small numbers». En: *Psychological Bulletin* 76.2, págs. 105-110.
- (1980). «Causal schemas in judgments under uncertainty». En: *Progress in social psychology*. Ed. por E. Fishbein. Psychology Press, págs. 49-72.
-

- 
- Valdez, Julio y Jesús Salinas (2019). «Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre la distribución normal». En: *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Ed. por J. M. Contreras, M. Gea, M. López-Martín y E. Molina-Portillo. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada, págs. 1-10.
- Valverde, Mercedes (2017). «Un estudio de la presentación de la distribución normal en los textos de bachillerato». Tesis de maestría. Universidad de Granada.
- Van Dooren, Wim, Dirk De Bock, Fien Depaepe, Dirk Janssens y Lieven Verschaffel (2003). «The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning». En: *Educational studies in mathematics* 53.2, págs. 113-138.
- Vilca, Marhori (2015). «Tipificación de los errores que se presentan al identificar una variable aleatoria de distribución binomial en problemas contextualizados». Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Zieffler, Andrew, Joan Garfield, Robert DelMas y Chris Reading (2008). «A framework to support research on informal inferential reasoning». En: *Statistics Education Research Journal* 7.2, págs. 40-58.
-