

REVISTA
DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES
DE
ZARAGOZA

SERIE 2.ª

TOMO XVII

FASCICULO 1.º



1962

INDICE

	<i>Páginas</i>
BALTASAR R.-SALINAS. — <i>Clases de funciones analíticas, clases semi-analíticas y cuasi-analíticas</i>	5
JOSÉ JAVIER ETAYO. — <i>Estudio local particular de una correspondencia birracional</i>	77
VICENTE PIAZUELO MORER. — <i>Productos metabólicos de la dehidroepiandrosterona con hígado de rata</i>	89
HORACIO MARCO MOLL. — <i>Estudio cariológico del Steropleurus Dilutus Bol.</i>	177

CLASES DE FUNCIONES ANALITICAS CLASES SEMI-ANALITICAS Y CUASI-ANALITICAS

por

BALTASAR R.-SALINAS

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, escrito en 1958, se estudian y resuelven diversos problemas que se presentan en las teorías de clases de desarrollos asintóticos y de funciones indefinidamente derivables^{(1)*}, tales como la determinación de las que por generalización llamamos clases cuasi-analíticas en un ángulo $A_\alpha: |\arg z| < \alpha \pi/2$ o sector curvo $S_\alpha(z_0): |z^{1/\alpha} - z_0^{1/\alpha}| < |z_0|^{1/\alpha}$, la caracterización de las clases que contienen funciones no constantes, construcción de funciones características de una clase, inclusión y equivalencia de clases, construcción de funciones semi-analíticas y cuasi-analíticas con el mismo desarrollo asintótico, estableciendo además desigualdades entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo A_α de amplitud $\alpha \pi \leq \pi$.

Aunque estas cuestiones están desde luego completamente resueltas en el caso de clases de funciones indefinidamente derivables en la recta, no lo están para las clases de funciones analíticas. Nosotros logramos aquí esto completamente para las clases de funciones indefinidamente derivables en ángulos de amplitud no superior a π , y parcialmente en otros casos, pero de forma que bastaría, por ejemplo, establecer una desigualdad entre las cotas de los restos parciales de los desarrollos asintóticos para que quedaran también completamente resueltos estos problemas para las clases de desarrollos asintóticos en ángulos de amplitud $\alpha \pi \leq 2\pi$ **.

⁽¹⁾ En las primeras entran en juego las cotas de POINCARÉ de los restos parciales de los desarrollos asintóticos y en las segundas las de las derivadas.

* Aunque algunos de estos resultados los hemos publicado ya en varias partes, hemos creído conveniente publicar la Memoria primitiva sin ninguna modificación, entre otras razones porque el lector siempre encontrará en ella alguna novedad sobre los mismos. Sólo hemos agregado ahora la bibliografía y notas al pie señaladas con uno o varios asteriscos.

** Esta desigualdad ha sido demostrada posteriormente por SAN JUAN, para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$, por el autor para $\alpha \leq 2$.

En el caso de clases de funciones indefinidamente derivables en la recta, resolvemos también en este trabajo un problema planteado por BANG a SAN JUAN, que consiste en la construcción de una función analítica en un segmento que admita como prolongación en la recta dos funciones cuasi-analíticas distintas, esto es, pertenecientes a sendas clases cuasi-analíticas***.

*** Concretamente, este resultado ha sido publicado en la Revista "Las Ciencias", de Madrid, en 1960.

CAPÍTULO I

CLASES DE FUNCIONES CON DESARROLLO ASINTÓTICO. CLASES SEMI-ANALÍTICAS

§ 1. Definiciones. Condiciones de semi-analiticidad

Dado un recinto Ω contenido en un ángulo $|\arg z| < \alpha \pi/2$ de la superficie de RIEMANN de $\log z^{(2)}$, con el punto frontera $z = 0$ y una sucesión positiva $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, designaremos por $k_0 \{m_n; \Omega\}$ y por $K_0 \{m_n; \Omega\}$, respectivamente, las clases de funciones f analíticas en Ω que admiten un desarrollo asintótico $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en Ω , definido en uno y otro caso por

$$\left| f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} a_v z^v \right| \leq A m_n |z|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

y

$$\left| f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} a_v z^v \right| \leq A q^n m_n |z|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

para cada $z \in \Omega$ y ciertas constantes A y q dependientes de f .

Diremos, siguiendo a SAN JUAN, que $K_0 \{m_n; \Omega\}$ es una clase semi-analítica en 0 si cada función f de $K_0 \{m_n; \Omega\}$ está determinada unívocamente por su desarrollo asintótico $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; esto es, si toda función analítica en Ω , que verifique

$$|f(z)| \leq A q^n m_n |z|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

en el recinto Ω es idénticamente nula. Este concepto se extiende de igual forma a $k_0 \{m_n; \Omega\}$ y en general a una clase de funciones analíticas con desarrollo asintótico en un punto frontera de Ω .

La caracterización de las clases semi-analíticas depende, por consiguien-

⁽²⁾ Nos referiremos siempre a una rama uniforme de función analítica en el recinto de una o más hojas Ω sobre la superficie de RIEMANN de $\log z$, donde distinguiremos unos puntos de otros por su representación $z = re^{i\theta}$; esto es, por su argumento θ .

te, de la solución del llamado problema de WATSON en $\Omega^{(3)}$. En particular, cuando Ω sea un sector curvo $S_\alpha(z_0)$:

$$|z^{1/\alpha} - z_0^{1/\alpha}| < |z_0|^{1/\alpha}$$

o un ángulo A_α :

$$|\arg z| < \alpha \pi / 2$$

de amplitud $\alpha \pi$, la condición C_α necesaria y suficiente que debe cumplir la sucesión $\{m_n\}_0^\infty$ para que $k_0\{m_n; \Omega\}$ o $K_0\{m_n; \Omega\}$ sea semi-analítica se puede expresar por una cualquiera de las formas equivalentes:

$$C_{\alpha.1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^{1/\alpha}} = \infty, \quad \beta_n = \inf_{k \geq n} \sqrt[k]{m_k} \quad (\text{CARLEMAN}),^{(4)}$$

$$C_{\alpha.2} \quad \int_0^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+1/\alpha}} dr = \infty, \quad T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n} \quad (\text{OSTROWSKI}).$$

$$C_{\alpha.3} \quad \int_0^\infty \log \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{r^n}{m_n} \right)^p \frac{dr}{r^{1+1/\alpha}} = \infty, \quad p > 0. \quad (\text{CARLEMAN-OSTROWSKI}).$$

$$C_{\alpha.4} \quad \lim_n \sqrt[n]{m_n} < \infty \quad \text{ó} \quad \lim_n \sqrt[n]{m_n} = \infty \quad \text{con}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n^c}} = \infty \quad (\text{MANDELBROJT}),$$

siendo $\{m_n^c\}_0^\infty$ la regularizada convexa logarítmica de $\{m_n\}_0^\infty$ o lo que es igual $\{\log m_n^c\}_0^\infty$ la regularizada convexa de $\{\log m_n\}_0^\infty$.

$$C_{\alpha.5} \quad \lim_n \sqrt[n]{m_n} < \infty \quad \text{ó} \quad \lim_n \sqrt[n]{m_n} = \infty \quad \text{con}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m_n^c}{m_{n+1}^c} \right)^{1/\alpha} = \infty \quad (\text{MANDELBROJT}).$$

Primero SAN JUAN [18; 13] y después BANG [1; § 10] han demostrado que de

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^\alpha} < \infty \quad (\alpha > 0)$$

se sigue que $\{m_n\}_0^\infty$ satisface la condición C_α .

⁽³⁾ Véanse, MANDELBROJT [10; 46 y 23], CARLEMAN [2] y OSTROWSKI [11]. Los números encerrados entre corchetes se refieren a la bibliografía reunida al final, de manera que el primero indica el libro o revista y el siguiente o siguientes las páginas. Los contenidos entre paréntesis indican la fórmula de este trabajo.

⁽⁴⁾ Cuando sólo interesa destacar la convergencia o divergencia de estas series o integrales se suele suprimir el índice inferior.

De manera general designaremos por Ω_α a todo recinto Ω tal que la condición de semi-analiticidad de $K_0 \{m_n; \Omega_\alpha\}$ sea la C_α .

De forma análoga se pueden considerar las clases $k_0 \{m_n; I_a\}$ y $K_0 \{m_n; I_a\}$ formadas por todas las funciones continuas en el intervalo, finito o infinito, $I_a = (0, a)$ que admiten un desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n x^n$ en 0 y verifican, respectivamente, las desigualdades

$$\left| f(x) - \sum_0^{n-1} a_v x^v \right| \leq A m_n x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

y

$$\left| f(x) - \sum_0^{n-1} a_v x^v \right| \leq A m_n q^n x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

en I_a para unas constantes positivas convenientes A y q dependientes de f .

Se puede demostrar fácilmente que para que la clase $K_0 \{m_n; I_a\}$ sea semi-analítica es necesario y suficiente que $\{m_n\}_0^\infty$ verifique la condición

$$C_0: \quad \lim_n \sqrt[n]{m_n} = 0.$$

La condición C_0 es suficiente. En efecto, si f es una función continua en I_a tal que

$$|f(x)| \leq A q^n m_n x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $x \in I_a$, donde $\{m_n\}_0^\infty$ satisface C_0 , resulta

$$|f(x)| \leq A \lim_n [m_n (q x)^n] = 0$$

para todo $x \in I_a$ y por tanto $f = 0$.

La condición es necesaria. Si

$$\lim_n \sqrt[n]{m_n} > 0,$$

la función indefinidamente derivable f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq a' \quad \text{y} \quad a' < a \\ \exp \left\{ -\frac{1}{x - a'} \right\} & \text{para } a' < x < a, \end{cases}$$

admite el desarrollo asintótico $\sum_0^\infty 0 x^n$ y pertenece a $K_0 \{m_n; I_a\}$, puesto que

$$|f(x)| \leq |x/a'|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para todo $x \in I_a$, sin embargo $f \neq 0 \in K_0 \{m_n; I_a\}$.

Con el mismo argumento se puede ver que la clase $k_0 \{m_n; I_a\}$ es semi-analítica si y sólo si

$$C_{0,a}: \quad \lim_n \sqrt[n]{m_n} \leq 1/a,$$

que solamente coincide con la condición C_0 para $a = \infty$.

De manera análoga que anteriormente designaremos por A_0 la semi-recta $(0, \infty)$ y por Ω_0 cualquier intervalo $(0, a)$.

§ 2. Convergencia de desarrollos asintóticos

Es evidente que las funciones de la clase $K_0 \{1; \Omega\}$ correspondiente a la sucesión $m_n \equiv 1$, son analíticas en el punto $z = 0$ y que el desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ de cada función $f \in K_0 \{1; \Omega\}$ converge hacia $f(z)$ en un cierto entorno de $z = 0$. Ahora vamos a ver que esto también ocurre para otras clases $K_0 \{m_n; \Omega\}$ o $k_0 \{m_n; \Omega\}$.

TEOREMA 1. — Si Ω es el sector $\{|\arg z| < \pi, |z| < r_0\}$ y

$$\lim_n \sqrt[n]{m_n} \leq 1/r_0, \quad (2.1)$$

toda función f de $k_0 \{m_n; \Omega\}$ con el desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ es analítica en el punto $z = 0$ y $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge hacia $f(z)$ en $|z| < r_0$.

DEMOSTRACIÓN. — Veamos en primer lugar que existen los límites

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\pi} t} f(z) \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow e^{-i\pi} t} f(z) \quad (z \in \Omega)$$

para $0 < t < r_0$ y son iguales. En efecto, si

$$\lambda = \lim_{z_n \rightarrow e^{i\pi} t} f(z_n) \quad (\arg z_n \rightarrow \pi) \quad \text{y} \quad \lambda' = \lim_{z'_n \rightarrow e^{-i\pi} t} f(z'_n) \quad (\arg z'_n \rightarrow -\pi),$$

tendremos

$$\left| \lambda - \sum_0^{n-1} a_v (-t)^v \right| \leq A m_n t^n$$

y

$$\left| \lambda' - \sum_0^{n-1} a_v (-t)^v \right| \leq A m_n t^n$$

para $0 < t < r_0$, por consiguiente,

$$|\lambda' - \lambda| \leq 2 A \lim_n m_n t^n = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda'$$

para $0 < t < r_0$. De esto se deduce, teniendo presente

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = a_0 \quad (|\arg z| < \pi),$$

que f es una función analítica uniforme en el círculo $|z| < r_0$ y que $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge hacia $f(z)$ en $|z| < r_0$.

TEOREMA 2. — Si Ω es el sector $\{|\arg z| < \alpha \pi/2; |z| < r_0\}$ de amplitud $\alpha \pi > 2 \pi$ y la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ satisface la condición $C_{\alpha-2}$, toda función f de $K_0\{m_n; \Omega\}$ es una función analítica en $|z| < r_0$ y

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \quad (|z| < r_0)^{(5)} \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, siendo

$$g(z) = f(e^{i\pi} z) - f(e^{-i\pi} z)$$

analítica en el sector $S: \{|\arg z| < (\alpha - 2) \pi/2; |z| < r_0\}$ y

$$|g(z)| \leq 2 A q^n m_n |z|^n \quad (z \in S),$$

resulta $g = 0$ por verificar $\{m_n\}_0^\infty$ la condición $C_{\alpha-2}$, de donde se deduce que f es una función analítica uniforme en $0 < |z| < r_0$ con $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = a_0$

y, por consiguiente, que $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge hacia $f(z)$ en el círculo $|z| < r_0$.

§ 3. Clases que contienen funciones no constantes.

Generalizaciones del teorema de Liouville

TEOREMA 3. — Dada la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$, para que la clase $K_0\{m_n; A_2\}$ contengan funciones no constantes es necesario y suficiente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m_n} > 0^*. \quad (3.1)$$

DEMOSTRACIÓN. — La necesidad se sigue del teorema 1 y del teorema de LIOUVILLE.

Para demostrar la suficiencia consideremos la función

$$f(z) = \frac{(1+z) \log(1+z) - z}{z^2},$$

que se puede expresar para $|\arg z| < \pi$ por la integral

$$f(z) = \int_0^1 \frac{1-t}{1+zt} dt,$$

⁽⁵⁾ Este teorema, que ya hemos demostrado en [15; 194], es análogo a otro dado por MANDELBROJT en [10; 90] para las series de DIRICHLET con la diferencia que aquí no exigimos la convergencia de la serie.

* Este teorema fue publicado en [4*, 526-528] con una demostración menos detallada que la desarrollada aquí.

de donde se obtiene

$$\left| f(z) - \sum_0^{n-1} \frac{(-z)^v}{(v+1)(v+2)} \right| \leq |z|^n \left| \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1+zt} dt \right|$$

$$\leq |z|^n \left\{ \frac{1}{2} + |z| \left| \int_0^1 \frac{(1-t)t^{n+1}}{1+zt} dt \right| \right\} \leq 4|z|^n \quad (3.2),$$

que nos demuestra que f pertenece a $K_0 \{m_n; A_2\}$ si se verifica (3.1). En efecto, como

$$z \int_0^1 \frac{(1-t)t^{n+1}}{1+zt} dt = \int_{\Gamma} \frac{(1-t)t^{n+1}}{t-s} dt$$

para $s = -1/z$, si Γ es el semicírculo contenido en el semiplano $\text{Im } t \leq 0$ ó $\text{Im } t \geq 0$, según sea $\text{Im } s \geq 0$ ó $\text{Im } s \leq 0$, y que tiene por diámetro el segmento de extremos 0 y 1, y se verifica

$$\begin{aligned} |t-s| &\geq |t| & \text{para } \text{Re } s \leq 1/2 \text{ y } t \in \Gamma \\ |t-s| &\geq |t-1| & \text{para } \text{Re } s \geq 1/2 \text{ y } t \in \Gamma, \end{aligned}$$

tendremos

$$\left| z \int_0^1 \frac{(1-t)t^{n+1}}{1+zt} dt \right| \leq \int_{\Gamma} |(1-t)t^n| dt \leq \pi$$

o

$$\left| z \int_0^1 \frac{(1-t)t^{n+1}}{1+zt} dt \right| \leq \int_{\Gamma} |t^{n+1}| dt \leq \pi,$$

de donde resulta inmediatamente la desigualdad (3.2).

LEMA 1.—Si la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ no cumple la condición C_γ existe una función $F \neq 0$ analítica y acotada en el semiplano $\text{Re } z \geq 0$, positiva sobre el semi-eje real positivo y que verifica

$$|F(z) z^n| \leq m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

y

$$\int_0^{\infty(\theta)} |F(z) z^n| dz \leq m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)^{(6)} \quad (3.4)$$

sobre cada semirrecta $\arg z = \theta$ de $|\theta| < \pi/2$.

DEMOSTRACIÓN.—Como por hipótesis $\{m_n\}_0^\infty$ no cumple la condición C_γ existe según se sabe una función $g \neq 0$ analítica en el semiplano $\text{Re } z \geq 0$, positiva sobre el semi-eje real positivo y tal que

$$|g(z) z^n| \leq m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para todo z de $\text{Re } z \geq 0$.

⁽⁶⁾ Designamos como ya es frecuente por $\int_0^{\infty(\theta)}$ la integral extendida desde 0 a ∞ a lo largo de la semirrecta $\arg z = \theta$.

De esto resulta que la función

$$F(z) = \frac{2}{\pi} \frac{g(z)}{(1+z)^2}$$

es analítica en $\operatorname{Re} z \geq 0$, positiva para $z > 0$ y satisface las condiciones

$$|F(z) z^n| \leq \frac{2}{\pi} \frac{m_n}{1+|z|^2} \leq m_n$$

y

$$\int_0^{\infty(\theta)} |F(z) z^n dz| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m_n}{1+r^2} dr = m_n$$

para cada θ de $|\theta| \leq \pi/2$ y $n = 0, 1, 2, \dots$

TEOREMA 4.—*Dada la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ y $\alpha > 2$, para que la clase $K_0 \{m_n; A_\alpha\}$ contenga funciones no constantes es necesario y suficiente que $\{m_n\}_0^\infty$ no verifique la condición $C_{\alpha-2}^{(7)}$.*

DEMOSTRACIÓN.—La necesidad se sigue del teorema 2 y del teorema de LIOUVILLE.

La condición es suficiente. Si $\{m_n\}_1^\infty$ no verifica la condición $C_{\alpha-2}$ se puede construir por el lema 1 una función $F \neq 0$, analítica en el semiplano $\operatorname{Re} z \geq 0$ con los momentos

$$\int_0^{\infty(\phi)} |F(t) t^n dt| \leq m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\phi| < \pi/2$ y $\gamma = \alpha - 2$, y positiva sobre el semi-eje real positivo.

Sea f la función analítica en $|\arg z| < \alpha \pi/2$ expresada por la integral

$$f(z) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty(-\phi)} g(zt) F(t^{1/\gamma}) t^{1/\gamma-1} dt$$

para $|\arg z - \phi| < \pi$ y cada ϕ de $|\phi| < \gamma \pi/2$, siendo

$$g(z) = \frac{(1+z) \log(1+z) - z}{z^2}$$

la función estudiada en el teorema 3.

(7) MANDELBROJT ha demostrado teoremas análogos a éste en [10; 251-257] para series de DIRICHLET $\sum_1^\infty d_n e^{-\lambda_n s}$ en una banda $|\operatorname{Im} s| < \pi R$, pero siempre en el caso que la anchura $2\pi R$ de la banda sea mayor que $2\pi D^*$, donde D^* es la densidad superior de la sucesión $\{\lambda_n\}_1^\infty$ que en nuestro caso es igual a 1. Para $R \leq D^*$ los resultados que conocemos de este tipo son los teoremas 3 y 5, por ello creemos que tendría interés estudiar la misma cuestión para series de DIRICHLET cuando $R \leq D^*$.

Entonces, poniendo

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \int_0^\infty F(t) t^n dt \neq 0,$$

resulta

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu \right| &= \frac{1}{\gamma} \left| \int_0^{\infty(-\phi)} \left[g(zt) - \sum_0^{n-1} \frac{(-zt)^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} \right] F(t^{1/\gamma}) t^{1/\gamma-1} dt \right| \\ &\leq \frac{4}{\gamma} |z|^n \int_0^{\infty(-\phi)} |F(t^{1/\gamma})| t^{n+1/\gamma-1} dt = 4 |z|^n \int_0^{\infty(-\phi/\gamma)} |F(t) t^\gamma| dt \leq 4 m_n |z|^n \end{aligned}$$

para $|\arg z| < \alpha \pi/2$, puesto que se puede elegir ϕ de modo que $|\phi| < (\alpha-2)\pi/2$ y $|\phi - \arg z| < \pi$. Luego la clase $K_0 \{m_n; A_\alpha\}$ contiene la función no constante f .

LEMA 2.—Si $\{m_n^*\}_0^\infty$ es una sucesión positiva tal que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{m_n^*}{m_n}} < \infty \quad (3.5)$$

para toda sucesión $\{m_n\}_0^\infty$ que no cumpla la condición C_α ($\alpha \geq 0$), resulta

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^*}}{n^\alpha} < \infty. \quad (3.6)$$

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, si fuese

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^*}}{n^\alpha} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_n \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{m_n^*}} = 0$$

se podría determinar una sucesión $\{n_i\}_1^\infty$ de enteros positivos tales que

$$\frac{n_j^\alpha}{\sqrt[n_j]{m_{n_j}^*}} \leq \frac{n_i^\alpha}{\sqrt[n_i]{m_{n_i}^*}} \leq \frac{1}{4^{\alpha i}}$$

para $i = 1, 2, \dots$ y $j = i + 1$. Por tanto, si ponemos

$$m_n = \left(n_i^\alpha \sqrt[n_i]{m_{n_i}^*} \right)^{n/2}$$

para $n_{i-1} < n \leq n_i$ ($n_0 = 0$), tendremos

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} = \sum_{i=1}^\infty \frac{n_i - n_{i-1}}{n_i} \left(\frac{n_i}{\sqrt[n_i]{m_{n_i}^*}} \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = 1$$

y

$$\sqrt[n]{m_n} \leq \sqrt[n+1]{m_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

para $\alpha > 0$, y

$$\lim_n \sqrt[n]{m_n} > 0$$

para $\alpha = 0$, que nos expresa que $\{m_n\}_0^\infty$ no cumple la condición C_α , lo que nos lleva a una contradicción con (3.5) puesto que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{m_n^*}{m_n}} \geq \lim_i \sqrt[n_i]{\frac{m_{n_i}^*}{m_{n_i}}} = \lim_i \sqrt[2n_i]{\frac{m_{n_i}^*}{n_i^{\alpha n_i}}} = \infty.$$

TEOREMA 5.—Dada la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ y $0 \leq \alpha < 2$, para que la clase $K_0 \{m_n; A_\alpha\}$ contenga funciones no constantes es necesario y suficiente que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} > 0^* \quad (3.7)$$

DEMOSTRACIÓN.—La condición es necesaria. En efecto, como veremos, si $f \in K_0 \{m_n; A_\alpha\}$ y

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} = 0, \quad (3.8)$$

la función f es una constante. En el caso $\alpha > 1$ se puede efectuar la demostración de esto como sigue:

Por ser f analítica y acotada en el ángulo A_α , la transformada de LAPLACE.

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$$

es analítica en $A_{\alpha+1}$, y se comporta de forma que

$$\left| g(z) - \sum_0^{n-1} \frac{\nu! a_\nu}{z^{\nu+1}} \right| \leq A q^n \frac{n! m_n}{|z|^{n+1}} \quad (3.9)$$

para $|\arg z| < \alpha \pi/2$, y

$$\left| g(z) - \sum_0^{n-1} \frac{\nu! a_\nu}{z^{\nu+1}} \right| \leq A q^n \frac{n! m_n}{|z \cos(|\theta| - \alpha \pi/2)|^{n+1}} \quad (3.10)$$

para $\theta = \arg z$ y $\alpha \pi/2 \leq |\theta| < (\alpha + 1) \pi/2$, donde los a_n son los coeficientes del desarrollo asintótico de f en 0.

* Este teorema fue demostrado ya en [4*, 526-528] siguiendo un camino distinto al de este trabajo y basado en la desigualdad (4.3).

Estas acotaciones resultan fácilmente de

$$\begin{aligned} \left| g(z) - \sum_0^{n-1} \frac{v! a_v}{z^{v+1}} \right| &= \left| g(z) - \sum_0^{n-1} a_v \int_0^{\infty(-\phi)} e^{-zt} t^v dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\infty(-\phi)} e^{-zt} [f(t) - \sum_0^{n-1} a_v t^v] dt \right| \\ &\leq A q^n m_n \int_0^{\infty} \exp \{ -|z \cos(\theta - \varphi)| t \} t^n dt \\ &= \frac{n! m_n}{|z \cos(\theta - \varphi)|^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

pues basta tomar $\varphi = \theta \equiv \arg z$ para $|\arg z| < \alpha \pi/2$ y $\varphi = \pm (\alpha - \epsilon) \pi/2 \rightarrow \pm \alpha \pi/2$ para $\alpha \pi/2 \leq \pm \arg z < (\alpha + 1) \pi/2$.

De esto se deduce que

$$h(z) = g(z e^{i\pi}) - g(z e^{-i\pi})$$

es una función analítica en el ángulo $|\arg z| < (\alpha - 1) \pi/2$, acotada en $|\arg(z - 1)| < (\alpha - 1) \pi/2$:

$$|h(z)| \leq 2 A k^{n+1} n! m_n \quad \left(k = q \operatorname{sen}^{-1} \frac{(\alpha - 1) \pi}{2} \right)$$

y con

$$|h(x)| \leq \frac{2 A k^{n+1} n! m_n}{x^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $x \geq 1$. Como además

$$\lim_n \frac{\sqrt[n+1]{k^{n+1} n! m_n}}{n^{\alpha-1}} = \frac{k}{e} \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} = 0,$$

por el teorema 5 de [12; 373] o el teorema 2 de [13; 124] se tiene $h(z) \equiv 0$ para $|\arg z| < (\alpha - 1) \pi/2$, de donde resulta que $zg(z)$ es una función analítica uniforme para $z \neq 0$ y acotada con

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z g(z) = a_0,$$

y, por consiguiente, que $g(z) = a_0/z$ y $f(z) = a_0$, $a_n = 0$ para $n \geq 1$.

Esta demostración cae en defecto para $0 \leq \alpha \leq 1$ pero entonces se puede proceder del siguiente modo, introduciendo ligeras modificaciones en la forma para el caso $\alpha = 0$.

En primer lugar vamos a ver que (3.8) implica la existencia de una sucesión positiva $\{\mu_n\}_0^\infty$ que no verifica $C_{2-\alpha}$ y tal que

$$\lim_n \sqrt[n]{m_n \mu_n} = 0. \quad (3.11)$$

En efecto, si fuese

$$\lim_n \sqrt[n]{m_n \mu_n} > 0 \quad \text{o} \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{1/m_n}{\mu_n}} < \infty$$

para toda sucesión positiva $\{\mu_n\}_0^\infty$ que no cumpla $C_{2-\alpha}$, por el lema 2 resultaría

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{1/m_n}}{n^{2-\alpha}} < \infty$$

que va contra (3.8).

Sea ahora F la función construida en el lema 1 para $m_n = \mu_n$ y $\gamma = 2 - \alpha$, entonces variando θ se ve que la función g expresada por

$$g(z) = \frac{1}{\gamma z^{1/\gamma}} \int_0^{\infty(\theta)} t^{1/\gamma-1} F[(t/z)^{1/\gamma}] f(t) dt$$

para $|\arg z - \theta| \leq \gamma \pi/2$ y cada θ de $|\theta| < \alpha \pi/2$ ($\theta = 0$ para $\alpha = 0$) es una función analítica en el ángulo $|\arg z| < \pi$ que admite el desarrollo asintótico

$$\sum_0^\infty \alpha_n a_n z^n, \quad \alpha_n = \int_0^\infty F(t) t^n dt > 0$$

con cotas $A q^n m_n \mu_n$, pues,

$$\begin{aligned} \left| g(z) - \sum_0^{n-1} \alpha_v a_v z^v \right| &= \left| g(z) - \sum_0^{n-1} a_v z^v \int_0^\infty F(t) t^v dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\gamma z^{1/\gamma}} \int_0^{\infty(\theta)} t^{1/\gamma-1} F[(t/z)^{1/\gamma}] \left[f(t) - \sum_0^{n-1} a_v t^v \right] dt \right| \\ &\leq A q^n m_n |z|^n \int_0^{\infty(\theta)} |F(t) t^n| dt \leq A q^n m_n \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

para $|\arg z| < \pi$, si se elige θ de manera conveniente y $\varphi = (\theta - \arg z)/\gamma$. De esto resulta, teniendo presente (3.11) y por el teorema 3, que $g(z) = a_0 a_0$ y $a_n = 0$ para $n \geq 1$, de donde se deduce finalmente, siendo

$$|f(z) - a_0| \leq A q^n m_n |z|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

con $\lim_n \sqrt[n]{m_n} = 0$, que $f(z) = a_0$.

La condición (3.7) es suficiente. Para demostrar esto basta ver que la función entera

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^n}{[(n+1)\gamma+1]!} \quad (x! = \Gamma(x+1))$$

que evidentemente es no constante y se puede expresar por la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^\gamma + z} \frac{dt}{t^2} \quad \text{para } z \in A_\alpha,$$

pertenece a $K_0 \{m_n; A_\alpha\}$ si $\{m_n\}_0^\infty$ verifica (3.7).

En primer lugar observemos que para $|\arg z| \leq \alpha \pi/2$ y $\operatorname{Re} t = a$ se tiene:

1.º

$$\begin{aligned} |t^\gamma + z| &\geq |(a + \rho i)^\gamma - r e^{\gamma \pi i/2}| \geq \operatorname{Im}(\rho + a i)^\gamma \\ &= |\rho + a i|^\gamma \sin\left(\gamma \operatorname{arctg} \frac{a}{\rho}\right) \geq |\rho + a i|^\gamma \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{a}{\rho}\right) \\ &= |\rho + a i|^{\gamma-1} a \geq a^\gamma \end{aligned}$$

si $\gamma \geq 1$ y $\operatorname{arctg}(a/\rho) \leq \pi/2$.

2.º

$$|t^\gamma + z| \geq |t|^\gamma \geq a^\gamma$$

si $\gamma \geq 1$ y $\operatorname{arctg}(a/\rho) \geq \pi/2$.

3.º

$$\begin{aligned} |t^\gamma + z| &\geq |\rho + a i|^\gamma \sin\left(\gamma \operatorname{arctg} \frac{a}{\rho}\right) \\ &\geq \gamma |\rho + a i|^\gamma \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{a}{\rho}\right) = \gamma |\rho + a i|^{\gamma-1} a = \gamma |t|^{\gamma-1} a \end{aligned}$$

si $\gamma < 1$.

Por tanto, para $z \in A_\alpha$ se puede escribir

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_0^{n-1} \frac{(-z)^\gamma}{[(\gamma+1)\gamma+1]!} \right| &= \frac{|z|^n}{2\pi} \left| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^\gamma + z} \frac{dt}{t^{n\gamma+2}} \right| \\ &\leq \frac{|z|^n}{2\pi} \frac{e^a}{a^{\gamma(n+1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{a^2 + \rho^2} = \frac{|z|^n}{2} \frac{e^a}{a^{\gamma(n+1)+1}} \quad \text{para } \gamma \geq 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|z|^n}{2\pi\gamma} \frac{e^a}{a^{\gamma n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{(a^2 + \rho^2)^{(\gamma+1)/2}} \leq \frac{2|z|^n}{\pi\gamma} \frac{e^a}{a^{\gamma n+1}} \int_0^\infty \frac{d\rho}{(a+\rho)^{\gamma+1}} \\ &= \frac{2|z|^n}{\pi\gamma^2} \frac{e^a}{a^{\gamma(n+1)+1}} \quad \text{para } \gamma < 1, \end{aligned}$$

de donde finalmente resulta para ambos casos, poniendo $a = 1$ cuando $n = 0$ y $a = n$ cuando $n \neq 0$,

$$\left| f(z) - \sum_0^{n-1} \frac{(-z)^\gamma}{[(\gamma+1)\gamma+1]!} \right| \leq A \frac{e^n}{n^{\gamma n}} |z|^n = A e^n n^{(\alpha-2)n} |z|^n$$

para $z \in A_\alpha$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y una constante conveniente $A > 0$, que justamente nos expresa, por verificarse (3.7), que $f \in K_0\{m_n; A_\alpha\}$.

§ 4. Funciones características. Clases equivalentes

Se dice que f es una función característica de una clase $K_0\{m_n; \Omega\}$ si pertenece a ella pero no a ninguna otra clase $K_0\{m_n'; \Omega\}$ contenida en $K_0\{m_n; \Omega\}$.

Sencillo pero importante es el siguiente:

TEOREMA 6.—Toda función f que admita un desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ en Ω con cotas finitas

$$M_n = \sup. \left| \frac{f(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right| \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

es función característica de la clase $K_0\{M_n; \Omega\}$ pero no de ninguna otra⁽⁸⁾.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, si f pertenece a $K_0\{m_n; \Omega\}$ debe ser $M_n \leq A q^n m_n$ para todo n y ciertas constantes positivas A y q , y por tanto la clase $K_0\{M_n; \Omega\}$ está contenida en $K_0\{m_n; \Omega\}$ y f no puede ser función característica de $K_0\{m_n; \Omega\}$ a menos que $K_0\{m_n; \Omega\} = K_0\{M_n; \Omega\}$.

Recíprocamente, bajo ciertas condiciones vamos a ver que la clase $K_0\{m_n; A_\alpha\}$ posee al menos una función característica.

TEOREMA 7. — Si la sucesión $\{n^{(2-\alpha)n} m_n\}_0^\infty$ es logarítmicamente convexa y $0 \leq \alpha \leq 2$, la clase $K_0\{m_n; A_\alpha\}$ posee funciones características*.

DEMOSTRACIÓN. — Sea

$$g(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^n}{[(n+1)\gamma+1]!}$$

para $0 \leq \alpha < 2$ y $\gamma = 2 - \alpha$, y

$$g(z) = \frac{(z+1) \log(z+1) - z}{z^2}$$

para $\alpha = 2$, entonces la función definida por

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{1}{2^\nu} \beta_\nu \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} \right)^{-\nu} g \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} z \right) \quad (4.2)$$

con

$$\beta_n = n^{(2-\alpha)n} m_n, \quad (\beta_0 = m_0)$$

⁽⁸⁾ Este teorema fue demostrado por SAN JUAN en [19; 12].

* Este teorema ha sido demostrado en [4*, 529-531] con la única restricción de que $0 \leq \alpha \leq 2$.

admite en A_α el desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ con coeficientes

$$a_n = \frac{(-1)^n s_n}{[(n+1)\gamma+1]!}$$

para $0 \leq \alpha < 2$, y

$$a_n = \frac{(-1)^n s_n}{(n+1)(n+2)}$$

para $\alpha = 2$, siendo

$$s_n = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \beta_v \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \right)^{n-v}$$

Esta función además pertenece a la clase $K_0\{m_n; A_\alpha\}$, puesto que por los teoremas 3 y 5 resulta

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| &\leq \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \beta_v \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \right)^{n-v} \left| g\left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} z\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{s_k} \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} z\right)^k \right| \\ &\leq A q^n n^{(\alpha-2)n} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \beta_v \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \right)^{n-v} |z|^n = A q^n n^{(\alpha-2)n} s_n |z|^n \end{aligned}$$

para $z \in A_\alpha$ y $n = 0, 1, 2, \dots$, en otras palabras $f \in K_0\{n^{(\alpha-2)n} s_n; A_\alpha\}$, y por ser $\{s_n\}_0^\infty$ logarítmicamente convexa es

$$\left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \right)^{n-v} \leq \frac{\beta_n}{\beta_v}$$

cualesquiera que sean los enteros n y v , y

$$s_n \leq \beta_n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 2 \beta_n = 2 n^{(2-\alpha)n} m_n$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Como por otra parte para ciertas constantes positivas A y q se tiene:

$$M_n \geq |a_n| = \frac{s_n}{[(n+1)\gamma+1]!} \geq \frac{1}{2^n} \frac{\beta_n}{[(n+1)\gamma+1]!} \geq \frac{m_n}{A q^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

para $\alpha < 2$, y

$$M_n \geq |a_n| = \frac{s_n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{1}{2^n} \frac{\beta_n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{m_n}{A q^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

para $\alpha = 2$, cualquier clase $K_0\{m_n'; A_\alpha\}$ que contenga a f contiene también a $K_0\{m_n; A_\alpha\}$, y por consiguiente f es función característica de $K_0\{m_n; A_\alpha\}$ ⁽⁹⁾.

OBSERVACIÓN 1. — En el caso que existiese una relación del tipo

$$B_n \leq A q^n B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_1-n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}} \quad (n_1 \leq n \leq n_2) \quad (4.3)$$

con A y q constantes positivas, entre los números $B_n = n^{(2-\alpha)n} M_n$ determinados por (4.1), cualquiera que sea la función f analítica en el ángulo $A_\alpha = \Omega$ de amplitud $\alpha \pi \leq 2 \pi$, y $\{n^{(2-\alpha)n} m_n^{(\alpha)}\}_0^\infty$ fuese la regularizada logarítmica convexa de $\{n^{(2-\alpha)n} m_n\}_0^\infty$ sería

$$K_0\{m_n^{(\alpha)}; A_\alpha\} = K_0\{m_n; A_\alpha\}$$

y no habría inconveniente en suponer tanto en el teorema 7 como en los teoremas 10, 11, 13 y 16 que $\{n^{(2-\alpha)n} m_n\}_0^\infty$ es logarítmicamente convexa, es decir, $m_n^{(\alpha)} = m_n$ ^{*}.

De menor profundidad que el teorema 7 es este otro:

TEOREMA 8. — Si la sucesión $\{n^{(2-\alpha')n} m_n\}_0^\infty$ es logarítmicamente convexa y $\alpha' > \alpha > 2$, la clase $K_0\{m_n; A_\alpha\}$ posee funciones características.

DEMOSTRACIÓN. — Se puede proceder de igual forma que en el teorema 7 tomando

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-t} h(zt^{\alpha'-2}) dt,$$

$$h(z) = \frac{(1+z) \log(1+z) - z}{z^2}$$

y

$$\beta_n = n^{(2-\alpha')n} m_n.$$

OBSERVACIÓN 2. — Hacemos notar que en los teoremas 7 y 8 se puede sustituir el ángulo A_α (o la semirrecta A_0) por un recinto Ω (o intervalo) contenido en él y con el punto frontera 0.

Una explicación de la dificultad que encierra la construcción de funciones características para ángulos de amplitud $\alpha \pi > 2 \pi$ con la generalidad lograda en el teorema 7, la da el teorema 9. Antes de exponerla conviene advertir que diremos que $K_0\{m_n; \Omega\}$ es una clase no trivial si contiene funciones no constantes.

⁽⁹⁾ Esta demostración está inspirada en la dada por BANG en [1; 17] para construir una función característica de una clase de funciones indefinidamente derivables en la recta.

^{*} La desigualdad (4.3) ha sido demostrada en 1959, casi al mismo tiempo, por SAN JUAN en [7]* para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$ y por el autor en [3]* para $0 \leq \alpha \leq 2$. Después SAN JUAN, siguiendo el método del autor, ha vuelto a tratar la misma cuestión en [8]*.

TEOREMA 9. — Si $0 \leq \alpha \leq 2$ existe una clase $K_0\{m_n^*; A_\alpha\}$ mínima no trivial; esto es, contenida en cualquier otra clase no trivial $K_0\{m_n; A_\alpha\}$. La clase que posee dicha propiedad es $K_0\{n^{(\alpha-2)n}; A_\alpha\}$. Por el contrario para $\alpha > 2$ no existe ninguna clase $K_0\{m_n^*; A_\alpha\}$ mínima no trivial.

DEMOSTRACIÓN. — La afirmación hecha para los ángulos A_α de amplitud $\alpha \pi \leq 2 \pi$ y para la semirrecta A_0 es consecuencia de los teoremas 3 y 5, puesto que según ellos para cada clase $K_0\{m_n; A_\alpha\}$ no trivial se tiene

$$\overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{n^{(\alpha-2)n}}{m_n}} < \infty,$$

y $K_0\{n^{(\alpha-2)n}; A_\alpha\}$ es no trivial.

La última parte, relativa a los ángulos de amplitud $\alpha \pi > 2 \pi$ se deduce del teorema 4. En efecto, dada una clase no trivial $K_0\{m_n; A_\alpha\}$ y una función no constante f perteneciente a ella, por dicho teorema la sucesión correspondiente $\{M_n\}_{0^\infty}$ definida por (4.1), no satisface la condición $C_{\alpha-2}$. Por tanto, existe una sucesión positiva $\{m_n'\}_{0^\infty}$ que no cumple tampoco la condición $C_{\alpha-2}$ y para la que se tiene

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{m_n'}{M_n}} = 0 \quad \text{o} \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{M_n}{m_n'}} = \infty,$$

y, por consiguiente,

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{m_n'}{m_n}} = 0.$$

De esto resulta que $K_0\{m_n'; A_\alpha\}$ es no trivial y está contenida en la clase $K_0\{m_n; A_\alpha\}$ pero no coincide con ella por no contener a la función f .

TEOREMA 10. — Sea $\alpha' = \alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 2$ y $\alpha' > \alpha$ para $\alpha > 2$. Si Ω es un recinto para $\alpha > 0$ y un intervalo para $\alpha = 0$, contenido en A_α , con 0 por punto frontera y $\{n^{(2-\alpha')n} m_n^{(1)}\}_{0^\infty}$ es una sucesión logarítmicamente convexa, para que la clase $K_0\{m_n^{(1)}; \Omega\}$ esté contenida en $K_0\{m_n^{(2)}; \Omega\}$ es necesario y suficiente que

$$\overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(1)}}{m_n^{(2)}}} < \infty. \quad (4.4)$$

DEMOSTRACIÓN. — La suficiencia resulta inmediatamente de la definición de clase K_0 y ha sido aplicada ya frecuentemente.

La necesidad de (4.4) se sigue de que $K_0\{m_n^{(2)}; \Omega\}$ debe contener a la función característica f de $K_0\{m_n^{(1)}; \Omega\}$ construida en los teoremas 8 y 9 y que goza de la propiedad de que

$$\overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(1)}}{M_n}} < \infty$$

COROLARIO 1. — Con las mismas notaciones que en el teorema 10, si $\{n^{(2-\alpha)n}m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{(2-\alpha)n}m_n^{(2)}\}_0^\infty$ son logarítmicamente convexas, para que las clases $K_0\{m_n^{(1)}; \Omega\}$ y $K_0\{m_n^{(2)}; \Omega\}$ sean idénticas (o equivalentes) es necesario y suficiente que

$$0 < \overline{\lim} \sqrt{\frac{m_n^{(2)}}{m_n^{(1)}}} < \infty, \quad (4.5)$$

esto es, que $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ sean exponencialmente equivalentes.

COROLARIO 2. — Con las mismas notaciones que en el teorema 10, si $\{n^{(2-\alpha)n}m_n\}_0^\infty$ es logarítmicamente convexa, las funciones características f de $K_0\{m_n; \Omega\}$ están caracterizadas por la propiedad de que $\{m_n\}_0^\infty$ sea exponencialmente equivalente a la sucesión $\{M_n\}_0^\infty$ de cotas del desarrollo asintótico de f , determinada por (4.1).

§ 5. Funciones semi-analíticas con el mismo desarrollo asintótico

Una cuestión importante es la siguiente: ¿Existen pares de funciones distintas pertenecientes a dos clases semi-analíticas y que tengan además el mismo desarrollo asintótico? En otras palabras: ¿La reunión de dos clases semi-analíticas $K_0\{m_n^{(1)}; \Omega\}$ y $K_0\{m_n^{(2)}; \Omega\}$ es siempre semi-analítica? Desde luego hay motivo para formular estas preguntas, puesto que $K_0\{m_n^{(1)} + m_n^{(2)}; \Omega\} = K_0\{\max_{k=1,2} m_n^{(k)}; \Omega\}$ puede ocurrir que no lo sea.

El problema análogo para las clases cuasi-analíticas en la recta fue propuesto por CARLEMAN [2; 77] y resuelto por SAN JUAN [16], [17] y [19; 43], quien también resolvió el problema planteado antes, primero para un semiplano y después para otros recintos contenidos en un ángulo $|\arg z| < (1 - \delta)\pi < \pi$, dando en todos los casos una contestación negativa al mismo.

Después de los resultados de BANG [1; § 7] sobre la descomposición de una función en suma de funciones pertenecientes a dos clases de funciones indefinidamente derivables sobre la recta, era de esperar que se abordase el mismo problema para dos clases semi-analíticas prefijadas. Esto lo logró también SAN JUAN [19; 39-42] para los sectores curvos $S_\alpha(z_0)$ de amplitud $\alpha\pi \leq 2\pi$ en el supuesto que $\{m_n\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(1)} + m_n^{(2)}\}_0^\infty$ no cumpla la condición C_α y las sucesiones $\{\mu_n^{(1)}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{\mu_n^{(2)}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ verifiquen las hipótesis:

H_1 . Las sucesiones $\{\mu_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{\mu_n^{(2)}\}_0^\infty$ son logarítmicamente convexas.

H_2 . La máxima minorante π de las dos poligonales π_1 y π_2 que tienen por vértices los puntos $(n, \log \mu_n^{(1)})$ y $(n, \log \mu_n^{(2)})$ es convexa.

Aquí vamos a estudiar esta cuestión para los ángulos A_α de amplitud $\alpha\pi$ cualquiera, mejorando los resultados ya obtenidos para $\alpha \leq 2$ y poniendo de manifiesto el papel que desempeña la amplitud $\alpha\pi$ del mismo al

estudiar el caso $\alpha > 2$ no estudiado hasta ahora. Una idea del alcance de los resultados que exponemos a continuación, nos lo dan los teoremas 3, 4 y 5.

LEMA 3. — Si $\{\mu_n\}_0^\infty$ es una sucesión logarítmicamente convexa, cualquiera que sea la sucesión positiva $\{\lambda_n\}_0^\infty$ con $\lim \lambda_n = \infty$ se pueden encontrar un par de sucesiones $\{\mu_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{\mu_n^{(2)}\}_0^\infty$ que verifiquen H_1 y H_2 y tales que $\mu_n = \max(\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)})$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\mu_n^{(k)}}}{\lambda_n} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (5.1)$$

DEMOSTRACIÓN. — Para demostrar este lema en el caso no evidente que $\lim \sqrt[n]{\mu_n} = \infty$, vamos a construir por inducción un par de sucesiones de puntos (x_k, y_k) y (ξ_k, η_k) de abscisas enteras poniendo

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \log \mu_0$$

y

$$\eta_k = \log \mu_x + (\log \mu_{x+1} - \log \mu_x)(\xi_k - x_k), \quad x = x_k$$

después de haber determinado previamente los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k), (\xi_0, \eta_0), \dots, (\xi_{k-1}, \eta_{k-1})$ y haber elegido $\xi_k > x_k$ suficientemente grande de forma que

$$\eta_k \leq \frac{1}{2} \xi_k \log \lambda_{\xi_k},$$

cosa posible por ser $\lambda_n \rightarrow \infty$. A continuación elegimos como (x_{k+1}, y_{k+1}) el vértice de la poligonal π^* que tiene por vértices los puntos $(n, \log \mu_n)$ de modo que la recta que pase por (ξ_k, η_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) deje por encima a π^* , o sea

$$\log \mu_n \geq \eta_k + \frac{y_{k+1} - \eta_k}{x_{k+1} - \xi_k}(n - \xi_k)$$

para todo n .

De esto resulta fácilmente que las sucesiones $\{\mu_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{\mu_n^{(2)}\}_0^\infty$ definidas por

$$\mu_n^{(1)} = \mu_n \quad \text{para } x_k \leq n \leq x_{k+1} \text{ y } k \text{ par}$$

$$\mu_n^{(1)} = \mu_x^{x-n+1} \mu_{x+1}^{n-x} \quad \text{para } x = x_k \leq n \leq \xi_k \text{ y } k \text{ impar}$$

$$\mu_n^{(1)} = \mu_{\xi}^{(1)x-\xi} \mu_x^{n-\xi} \quad \text{para } \xi = \xi_k \leq n \leq x_{k+1} = x \text{ y } k \text{ impar}$$

$$\mu_n^{(2)} = \mu_n \quad \text{para } x_k \leq n \leq x_{k+1} \text{ y } k \text{ impar}$$

$$\mu_n^{(2)} = \mu_x^{x-n+1} \mu_{x+1}^{n-x} \text{ para } x = x_k \leq n \leq \xi_k \text{ y } k \text{ par}$$

$$\mu_n^{(2)} = \mu_{\xi}^{x-n} \mu_x^{n-\xi} \text{ para } \xi = \xi_k \leq n \leq x_{k+1} = x \text{ y } k \text{ par}$$

satisfacen las condiciones exigidas.

TEOREMA 11. — Sea $m_n = m_n^{(1)} + m_n^{(2)}$. Si $\{m_n\}_0^\infty$ no satisface la condición C_2 y las sucesiones $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 existe un par de funciones analíticas distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes, respectivamente, a las clases $K_0\{m_n^{(1)}; A_2\}$ y $K_0\{m_n^{(2)}; A_2\}$ y con el mismo desarrollo asintótico en 0.

DEMOSTRACIÓN. — Como $\{m_n\}_0^\infty$ no satisface la condición C_2 , existe por el teorema 4 de [14; 339] una función $G \neq 0$, continua en $(0, \infty)$ con los momentos

$$\int_0^\infty G(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y

$$|G(t) t^n| \leq \frac{m_n}{(1+t)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \geq 0$. Por tanto, por el teorema 17 de [19; 36] se puede descomponer $(1+t)^2 G(t)$ en diferencia de dos funciones $(1+t)^2 G_2(t)$ y $(1+t)^2 G_1(t)$ de forma que

$$|G_k(t) t^n| \leq \frac{A_k q_k^n m_n^{(k)}}{(1+t)^2} \quad (k = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \geq 0$ y ciertas constantes positivas A_k y q_k .

Sea

$$h(z) = \frac{(1+z) \log(1+z) - z}{z^2},$$

entonces

$$f_k(z) = \int_0^\infty G_k(t) h(z t) dt$$

es una función analítica en el ángulo $|\arg z| < \pi$ perteneciente a la clase $K_0\{m_n^{(k)}; A_2\}$, puesto que

$$\begin{aligned} \left| f_k(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu \right| &\leq \int_0^\infty \left| G_k(t) \left[h(z t) - \sum_0^{n-1} \frac{(-z t)^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} \right] dt \right| \\ &\leq 4 |z| \int_0^\infty |G_k(t) t^n| dt \end{aligned}$$

$$\leq 4 A_k q_k^n m_n^{(k)} |z|^n \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} = 4 A_k q_k^n m_n^{(k)} |z|^n$$

para $|\arg z| < \pi$, y

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \int_0^\infty G_1(t) t^n dt = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \int_0^\infty G_2(t) t^n dt$$

por ser

$$\int_0^\infty G(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Además $f_1 \neq f_2$, pues, en el caso contrario que fuese $f_1 = f_2$, tendríamos

$$\int_0^\infty G(t) h(xt) dt = \int_0^\infty [G_2(t) - G_1(t)] h(xt) dt = f_2(x) - f_1(x) = 0$$

para $x > 0$, de donde siendo

$$\begin{aligned} h(t) &= O(1) & y & & G(t) &= O(t^{-1/2}) & \text{para } t \rightarrow 0 \\ h(t) &= O(t^{-1/2}) & y & & G(t) &= O(t^{-1}) & \text{para } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

por el lema 4. que exponemos a continuación, resultaría $G = 0$ que va contra la construcción realizada.

LEMA 4. — Sean φ y ψ dos funciones continuas sobre la semirrecta $t > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= O(t^{\delta-p}) & y & & \psi(t) &= O(t^{\delta-q}) & \text{para } t \rightarrow 0 \\ \varphi(t) &= O(1/t^{\delta+p}) & y & & \psi(t) &= O(1/t^{\delta+q}) & \text{para } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.2)$$

y para ciertas constantes $\delta > 0$, p y q : $p + q = 1$.

Si

$$\int_0^\infty \varphi(t) \psi(xt) dt \equiv 0 \quad (5.3)$$

para $x > 0$, es $\varphi = 0$ o $\psi = 0$.

DEMOSTRACIÓN. — Poniendo

$$\varphi_1(t) = \varphi(e^t)e^{pt} \quad y \quad \psi_1(-t) = \psi(e^t)e^{qt}$$

se obtiene de (5.3) la identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \psi_1(x-t) dt \equiv 0,$$

de donde resulta que el producto $\mathcal{F}_z(\varphi_1) \mathcal{F}_z(\psi_1)$ de las transformadas de FOURIER de φ_1 y ψ_1 es idénticamente nulo. Ahora bien,

$$\mathcal{F}_z(\varphi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt} \varphi_1(t) dt \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_z(\psi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt} \psi_1(t) dt$$

son funciones analíticas en la banda $|\operatorname{Im} z| < \delta$, puesto que

$$\varphi_1(t) = O(e^{-\delta|t|}) \quad \text{y} \quad \psi_1(t) = O(e^{-\delta|t|})$$

para t real; luego $\mathcal{F}_z(\varphi_1) = 0$ o $\mathcal{F}_z(\psi_1) = 0$ y por tanto $\varphi_1 = 0$ o $\psi_1 = 0$.

OBSERVACIÓN 3. — El lema 4 es también cierto si $\varphi(t)t^p$ y $\psi(t)t^q$ ($p+q=1$) son absolutamente integrables en la semirrecta $(0, \infty)$ y una de las integrales

$$\int_0^\infty t^{ix+p-1} \varphi(t) dt \quad \text{o} \quad \int_0^\infty t^{ix+q-1} \psi(t) dt$$

define una función analítica para x real.

TEOREMA 12. — Dada una sucesión positiva $\{\mu_n\}_0^\infty$ que no verifique la condición $C_{\alpha-2}$ con $\alpha > 2$, si $\{m_n/\mu_n\}_0^\infty \equiv \{(m_n^{(1)} + m_n^{(2)})/\mu_n\}_0^\infty$ no cumple la condición C_2 y el par de sucesiones $\{m_n^{(1)}/\mu_n\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}/\mu_n\}_0^\infty$ satisfacen H_1 y H_2 , se pueden encontrar dos funciones analíticas distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes, respectivamente, a las clases $K_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $K_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ y con el mismo desarrollo asintótico en 0.

DEMOSTRACIÓN. — Como $\{\overline{m_n^{(1)}}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(1)}/\mu_n\}_0^\infty$ y $\{\overline{m_n^{(2)}}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(2)}/\mu_n\}_0^\infty$ satisfacen H_1 y H_2 , y $\{\overline{m_n}\}_0^\infty \equiv \{\overline{m_n^{(1)}} + \overline{m_n^{(2)}}\}_0^\infty$ no verifica C_2 , existen por el teorema 11 dos funciones $g_1 \neq g_2$ pertenecientes, respectivamente, a las clases $K_0\{\overline{m_n^{(1)}}; A_2\}$ y $K_0\{\overline{m_n^{(2)}}; A_2\}$ y con el mismo desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ en 0.

Sea F la función construida en el lema 1 para $m_n = \mu_n$ y $\gamma = \alpha - 2$, entonces poniendo

$$f_k(z) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty(-\phi)} t^{1/\gamma-1} F(t^{1/\gamma}) g_k(z t) dt \quad (k = 1, 2)$$

para $|\arg z - \phi| < \pi$ y cada ϕ de $|\phi| < \gamma \pi/2$ se deduce de igual forma que en el teorema 4 que f_1 y f_2 son un par de funciones analíticas pertenecientes, respectivamente, a las clases $K_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $K_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ y con el mismo desarrollo asintótico

$$\sum_0^\infty \alpha_n a_n z^n, \quad \alpha_n = \int_0^\infty F(t) t^n dt.$$

Queda por ver que $f_1 \neq f_2$. En efecto, si fuese $f_1 = f_2$, se tendría

$$\int_0^{\infty} F(t) g(xt) dt \equiv 0 \quad \text{con} \quad g(t) = g_2(t') - g_1(t')$$

para $x > 0$, de donde siendo

$$\begin{aligned} F(t) &= O(t^{-1}) & y & & g(t) &= O(t) & \text{para} & & t \rightarrow 0 \\ F(t) &= O(t^{-2}) & y & & g(t) &= O(1) & \text{para} & & t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

resultaría por el lema 4, $F = 0$ o $g = 0$ que es absurdo.

COROLARIO 3. — Si $\alpha > 2$, cualquiera que sea la sucesión positiva y no decreciente $\{\lambda_n\}_0^{\infty}$ que haga convergente a la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

se puede encontrar un par de funciones analíticas distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes, respectivamente, a dos clases $K_0 \{m_n^{(1)}; A_{\alpha}\}$ y $K_0 \{m_n^{(2)}; A_{\alpha}\}$ tales que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n^{\alpha-2}} = 0 \quad y \quad \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n^{\alpha}} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (10) \quad (5.4)$$

DEMOSTRACIÓN.—No hay inconveniente en suponer que $\{\lambda_n^{2n}\}_0^{\infty}$ es logarítmicamente convexa, ya que si $\{n \log \lambda_n\}_0^{\infty}$ es la regularizada convexa de $\{n \log \lambda_n\}_0^{\infty}$, la sucesión $\{\bar{\lambda}_n\}_0^{\infty}$ satisface las condiciones supuestas para $\{\lambda_n\}_0^{\infty}$ y $\bar{\lambda}_n \leq \lambda_n$.

Siendo la serie $\sum_0^{\infty} \lambda_n^{-1}$ convergente se puede encontrar una sucesión positiva $\{\lambda'_n\}_0^{\infty}$ con $\lim \lambda'_n = \infty$ y con la propiedad de que

$$\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} \geq \frac{\lambda'_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \quad y \quad \sum_0^{\infty} \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} < \infty.$$

Entonces, como $\{\lambda_n^{2n}\}_0^{\infty}$ es una sucesión logarítmicamente convexa y $\lim_n \lambda_n^{2-\alpha} = \infty$, por el lema 3 existen dos sucesiones $\{(\lambda'_n/\lambda_n)^{(\alpha-2)n} m_n^{(1)}\}_0^{\infty}$ y $\{(\lambda'_n/\lambda_n)^{(\alpha-2)n} m_n^{(2)}\}_0^{\infty}$ que satisfacen las hipótesis H_1 y H_2 , y son tales que

$$\max \left\{ \left(\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} \right)^{(\alpha-2)n} m_n^{(1)}; \left(\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} \right)^{(\alpha-2)n} m_n^{(2)} \right\} = \lambda_n^{2n}$$

y

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n^{\alpha-2}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{(\lambda'_n/\lambda_n)^{(\alpha-2)n} m_n^{(k)}}}{\lambda_n'^{\alpha-2}} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

(10) El resultado análogo correspondiente al teorema 11 le expondremos en el corolario 4.

y, por tanto,

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n^\alpha} \leq \lim_n \frac{1}{\lambda_n^{\alpha-2}} = 0.$$

De todo esto se sigue que estamos en condiciones de poder aplicar el teorema 12 a las sucesiones $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ tomando $\mu_n = (\lambda_n/\lambda_n)^{(\alpha-2)n}$, con lo que resulta que se puede encontrar un par de funciones distintas f_1 y f_2 con el mismo desarrollo asintótico en 0 y pertenecientes, respectivamente, a las clases $K_0 \{m_n^{(1)}\}; A_\alpha \{m_n^{(1)}\}$ y $K_0 \{m_n^{(2)}\}; A_\alpha \{m_n^{(2)}\}$ que cumplen las condiciones exigidas.

OBSERVACIÓN.—Si en el corolario 3 se elige la sucesión $\{\lambda_n\}_0^\infty$ de forma que

$$\overline{\lim}_n \frac{\lambda_n^{\alpha-2}}{n^\alpha} < \infty$$

se sigue

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^\alpha} < \infty \quad (k = 1, 2)$$

y, por tanto, que ambas clases $K_0 \{m_n^{(1)}\}; A_\alpha \{m_n^{(1)}\}$ y $K_0 \{m_n^{(2)}\}; A_\alpha \{m_n^{(2)}\}$ son semi-analíticas.

LEMA 5.—Sea

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty c_n (-z)^n \quad (5.5)$$

una función entera no constante con coeficientes $c_n \geq 0$ y acotada sobre las semirrectas $\arg z = \pm \beta \pi/2$ ($0 < \beta < 2$) y ψ una función analítica en el ángulo $|\arg(-z)| < (2 - \beta) \pi/2$, continua y absolutamente integrable sobre las semirrectas $\arg z = \pm \beta \pi/2$. Si la integral

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\lambda t) \psi(t)}{t - z} dt, \quad (5.6)$$

extendida a lo largo de línea Γ formada por las semirrectas $\arg z = \pm \beta \pi/2$ desde $\infty e^{-i\beta\pi/2}$ a $\infty e^{+i\beta\pi/2}$, es idénticamente nula para $|\arg z| < \beta \pi/2$ y $\lambda > 0$, resulta $\psi = 0$.

Si

$$\overline{\lim}_n n^{2-\beta} \sqrt[n]{c_n} = \infty, \quad (5.7)$$

y ψ es acotada en el ángulo $|\arg(-z)| \leq (2 - \beta) \pi/2$, es suficiente que (5.6) se anule idénticamente en $|\arg z| < \beta \pi/2$ para un valor fijo $\lambda = \lambda_0 > 0$ para que resulte igualmente $\psi = 0$.

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, en el primer caso resulta

$$\varphi(\lambda z) \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\lambda t) \psi(t)}{t - z} dt$$

para $|\arg(-z)| < (2 - \beta) \pi/2$ y $\lambda > 0$, y por tanto

$$c_n \lambda^n |x^n \psi(x)| \leq |\varphi(\lambda x) \psi(x)| \leq A/|x|$$

para $x < 0$ y una cierta constante $A > 0$, luego haciendo $\lambda \rightarrow \infty$ se obtiene $\psi(x) \equiv 0$ para $x < 0$ y $\psi = 0$, pues, por ser φ no constante es $c_n > 0$ para algún $n \geq 1$.

Para la segunda parte basta tener presente que ψ es una función analítica y acotada en el ángulo $|\arg(-z)| < (2 - \beta) \pi/2$ y tal que

$$|\psi(x) x^{n+1}| \leq A \lambda_0^{-n} c_n^{-1}$$

para $x < 0$, ya que entonces como

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{A \lambda_0^{-n} c_n^{-1}}}{n^{2-\beta}} = 0$$

por el teorema 5 de [12; 373] resulta $\psi = 0$.

TEOREMA 13.—Sean $m_n = m_n^{(1)} + m_n^{(2)}$, $0 \leq \alpha < 2$ y $0 \leq \delta \leq 2 - \alpha$. Si $\{n^{\delta n} m_n\}_0^\infty$ no satisface la condición $C_{\alpha+\delta}$ y las sucesiones $\{n^{\delta n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{\delta n} m_n^{(2)}\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 , se puede encontrar un par de funciones analíticas distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes, respectivamente, a las clases $K_0 \{m_n^{(1)}\}$; $A_\alpha \{m_n^{(2)}\}$ y $K_0 \{m_n^{(2)}\}$; $A_\alpha \{m_n^{(1)}\}$ y con el mismo desarrollo asintótico en 0.

DEMOSTRACIÓN.—Demostraremos primero el caso $0 < \delta < 2 - \alpha$. Como $\{m_n\}_0^\infty \equiv \{n^{\delta n} m_n\}_0^\infty$ no cumple la condición $C_{\alpha+\delta}$ existe una función $g_0 \neq 0$, analítica en el ángulo $|\arg(-z)| < (\alpha + \delta) \pi/2$, continúa en su contorno, formado por las semirrectas $\arg z = \pm (2 - \alpha - \delta) \pi/2$, y tal que

$$|g_0(z) z^n| \leq \overline{m}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

De esto se sigue que

$$g(z) = \frac{g_0(z)}{(z-1)^2}$$

es una función analítica en el mismo ángulo con

$$|g(z) z^n| \leq \frac{\overline{m}_n}{|z-1|^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por otra parte, según el teorema 5,

$$h(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^n}{[(n+1) \gamma + 1]!} \quad (\gamma = \delta = 2 - (2 - \delta))$$

es una función entera perteneciente a la clase $K_0 \{n^{-\gamma n}\}$; $A_{2-\delta} \{n^{-\gamma n}\}$. Por consi-

guiente, por el lema 5 se puede determinar $a > 0$ de forma que la integral

$$\int_{\Gamma} \frac{h(x t) g(t)}{t - a} dt,$$

extendida a lo largo de la línea Γ formada por las semirrectas $\arg z = \pm (2 - \alpha - \delta) \pi/2$, no sea idénticamente nula para $x > 0$.

La función

$$G(z) = \frac{g(z)}{z - a}$$

construida con este valor de a es una función analítica en el ángulo $|\arg(-z)| < (\alpha + \delta) \pi/2$, continua en Γ , con

$$|(z - 1)^2 G(z) z^n| \leq A \overline{m}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg(-z)| \leq (\alpha + \delta) \pi/2$ y una constante conveniente $A > 0$, y

$$\int_{\Gamma} G(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por tanto, por el teorema 17 [19; 36] de SAN JUAN se puede descomponer $(t - 1)^2 G(t)$ sobre Γ en diferencia de dos funciones $(t - 1)^2 G_2(t)$ y $(t - 1)^2 G_1(t)$ tales que

$$|G_k(t) t^n| \leq \frac{A_k q_k^n m_n^{(k)}}{|t - 1|^2} \quad (k = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \in \Gamma$, $\overline{m}_n^{(k)} = n^{\delta n} m_n^{(k)}$ y ciertas constantes positivas A_k y q_k .

Así se obtiene que

$$f_k(z) = \int_{\Gamma} h(z t) G_k(t) dt \quad (k = 1, 2)$$

es una función analítica en el ángulo A_α si $\alpha > 0$ y continua en la semirrecta A_0 si $\alpha = 0$ ($\alpha = (2 - \delta) - (2 - \alpha - \delta)$), perteneciente a la clase $K_0\{m_n^{(k)}; A_\alpha\}$, pues,

$$\begin{aligned} \left| f_k(z) - \sum_0^{n-1} a_v z^v \right| &\leq \int_{\Gamma} \left| \left[h(z t) - \sum_0^{n-1} \frac{(-z t)^v}{[(v+1)_{\Gamma} + 1]!} \right] G_k(t) dt \right| \\ &\leq A'_k (q'_k)^n n^{-\delta n} \int_{\Gamma} |G_k(t) t^n dt| \\ &\leq A_k'' (q_k'')^n n^{-\delta n} \overline{m}_n^{(k)} = A_k'' (q_k'')^n m_n^{(k)} \end{aligned}$$

para $z \in A_\alpha$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y ciertas constantes positivas A_k', A_k'' , q_k' y q_k'' , siendo

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[(n+1)\gamma+1]!} \int_{\Gamma} G_1(t) t^n dt$$

$$= \frac{(-1)^n}{[(n+1)\gamma+1]!} \int_{\Gamma} G_2(t) t^n dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

por ser

$$\int_{\Gamma} G(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Además $f_1 \neq f_2$, puesto que

$$f_2(x) - f_1(x) = \int_{\Gamma} h(xt) G(t) dt = \int_{\Gamma} \frac{h(xt) g(t)}{t-a} dt \neq 0$$

para $x > 0$.

En el caso $\delta = 0$ se puede proceder de igual forma que anteriormente pero tomando como en el teorema 11

$$h(z) = \frac{(z+1) \log(z+1) - z}{z^2} \quad (|\arg z| \leq \pi).$$

Conviene que agreguemos que entonces la integral

$$\int_{\Gamma} h(xt) G(t) dt$$

no se puede anular tampoco idénticamente para $x > 0$. En efecto, en el caso contrario, para $\alpha > 0$ resultaría por derivación

$$\int_{\Gamma} \frac{\log(1+xt)}{x} G(t) dt \equiv 0$$

y

$$2\pi i x^{-1} G(-x^{-1}) = \int_{\Gamma} \frac{G(t)}{1+xt} dt \equiv 0$$

para $x > 0$ contra el hecho de que $G \neq 0$. Igualmente, para $\alpha = 0$ la anulación idéntica de

$$2\pi i \int_{-1/x}^{-\infty} \frac{1+xt}{x^2 t^2} G(t) dt$$

$$= \int_0^{-\infty} h(xt + i0) G(t) dt - \int_0^{-\infty} h(xt - i0) G(t) dt = \int_{\Gamma} h(xt) G(t) dt$$

para $x > 0$ implicaría, cambiando x por x^{-1} y derivando, las identidades

$$\int_{-x}^{-\infty} \frac{t+x}{t^2} G(t) dt \equiv 0,$$

$$\int_{-x}^{-\infty} \frac{G(t)}{t^2} dt \equiv 0$$

y

$$x^{-2}G(-x) \equiv 0$$

para $x > 0$ que es absurdo. En este último caso: $\alpha + \delta = 0$, se debe tener presente que g_0 , g y G son solamente continuas para $z < 0$ y que

$$\int_{\Gamma} G(t) t^n dt = \int_0^{\infty} - \int_0^{\infty} G(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

e incluso

$$\int_{\Gamma} h(x t) G(t) dt = 0$$

para $0 < x < x_0$ si es $g_0(t) = 0$ para $t < -1/x_0$.

En el caso $\delta = 2 - \alpha$ se puede proceder de manera más sencilla. Como por hipótesis $\{\bar{m}_n\}_0^{\infty} \equiv \{n^{\delta n} m_n\}_0^{\infty}$ no satisface la condición C_2 existe por el teorema 4 de [14; 339] una función $G = 0$, continua en $(0, \infty)$ con los momentos

$$\int_0^{\infty} G(t) t^n dt = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y

$$|G(t)t^n| \leq \frac{\bar{m}_n}{(1+t)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \geq 0$. Por tanto, se puede descomponer de igual forma que antes G en diferencia de dos funciones G_2 y G_1 tales que

$$|G_k(t)t^n| \leq \frac{A_k q_k^n \bar{m}_n^{(k)}}{(1+t)^2} \quad (k = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \geq 0$, $\bar{m}_n^{(k)} = n^{\delta n} m_n^{(k)}$ y ciertas constantes positivas A_k y q_k .

Sea

$$h(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-z)^n}{[(n+1)_{\gamma}+1]!} \quad (\gamma = \delta = 2 - \alpha)$$

entonces

$$f_k(z) = \int_0^{\infty} G_k(t) h(z t) dt$$

es una función analítica en el ángulo A_α para $\alpha > 0$ y continua en la semirrecta A_0 para $\alpha = 0$, y perteneciente a la clase $K_0\{m_n^{(k)}\}$; $A_\alpha\}$, pues,

$$\begin{aligned} \left| f_k(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu \right| &\leq \int_0^\infty \left| G_k(t) \left[h(z, t) - \sum_0^{n-1} \frac{(-z, t)^\nu}{[(\nu+1)\gamma+1]!} \right] dt \right| \\ &\leq A_k'(q_k)^n n^{-\delta n} \overline{m}_n^{(k)} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= A_k'(q_k)^n n^{-\delta n} \overline{m}_n^{(k)} = A_k'(q_k)^n m_n^{(k)} \end{aligned}$$

con

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[(n+1)\gamma+1]!} \int_0^\infty G_1(t) t^n dt = \frac{(-1)^n}{[(n+1)\gamma+1]!} \int_0^\infty G_2(t) t^n dt.$$

Finalmente, $f_1 \neq f_2$. En efecto, si fuese $f_1 = f_2$ resultaría

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{G(t)}{z^2(z^\gamma+t)} dt &= \int_0^\infty G(t) dt \int_0^\infty e^{-zt} h(u^\gamma, t) u^{\gamma+1} du \\ &= \int_0^\infty e^{-zu} u^{\gamma+1} du \int_0^\infty G(t) h(u^\gamma, t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zu} u^{\gamma+1} f(u^\gamma) du = 0 \quad (f = f_2 - f_1) \end{aligned}$$

para $\operatorname{Re} z > 0$ y

$$\int_0^\infty \frac{G(t)}{t+z} dt = 0$$

para $|\arg z| < \pi$, y por tanto $G = 0$, lo que va en contra de la construcción hecha.

COROLARIO 4. — Si $0 \leq \alpha \leq 2$, cualquiera que sea la sucesión positiva y no decreciente $\{\lambda_n\}_0^\infty$ con

$$\lim_n \frac{\lambda_n}{n^{\alpha-2}} = \infty$$

y $\alpha' > \alpha$, existe un par de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, con el mismo desarrollo asintótico en 0 y pertenecientes, respectivamente, a dos clases $K_0\{m_n^{(1)}\}$; $A_\alpha\}$ y $K_0\{m_n^{(2)}\}$; $A_\alpha\}$ tales que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^{\alpha'}} = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (5.8),$$

y de manera que las sucesiones $\{n^{(2-\alpha)n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{(2-\alpha)n} m_n^{(2)}\}_0^\infty$ sean logarítmicamente convexas.

DEMOSTRACIÓN. — Es una sencilla consecuencia del lema 3 y de los teoremas 11 y 13.

OBSERVACIÓN 5. — En el caso que en el corolario 4 se verifique

$$\lim_n \frac{\lambda_n}{n^\alpha} < \infty$$

las clases $K_0\{m_n^{(k)}; A_\alpha\}$ ($k = 1, 2$) son semi-analíticas, puesto que entonces

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^\alpha} = 0.$$

Dada una sucesión $\{p_n\}_0^\infty$ de números positivos tales que $\sum_1^\infty p_n^{-1/n} = \infty$ y un entero $q \geq 1$, diremos con SAN JUAN que $K_0\{m_n; \Omega_\alpha\}$ ($\alpha > 0$) es una clase fuertemente semi-analítica de tipo p_n y de orden $q \geq 1$ (en abreviatura: f.s.a. $p_n.q$.) cuando sea

$$\sum_1^\infty (p_n m_{qn}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty. \quad (5.9)$$

OBSERVACIÓN 6. — Si $\{m_n\}_0^\infty$ es una sucesión no decreciente para $n \geq n_0$ tal que

$$\sum_1^\infty (p_n m_{qn}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty, \quad (5.10)$$

resulta

$$\sum_1^\infty (p_{n+r} m_{qn+r}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty \quad (5.11)$$

para $r > 0$.

Como se conoce por CARLEMAN [2; 106], de (5.10) se sigue

$$\sum_1^\infty (p_{n+r} m_{qn+qr}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty.$$

Por tanto

$$\sum_1^\infty (p_{n+r} m_{qn+r}^{1/\alpha})^{-1/n} \geq \sum_{n_0}^\infty (p_{n+r} m_{qn+qr}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty,$$

de donde se deduce (5.11).

OBSERVACIÓN 7. — Si dada la sucesión no decreciente $\{\lambda_n\}_0^\infty$ con $\lim_n \lambda_n = \infty$ se verifica

$$\sum_1^\infty (p_n m_{qn}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty \quad (5.12)$$

para

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{qn}^{q/\alpha} - \lambda_{qn-q}^{q/\alpha}}{\lambda_{qn-q}^{q/\alpha}} \right)^{-n} \left(\sum_1^\infty p_n^{-1/n} = \sum_1^\infty \frac{\lambda_{qn}^{q/\alpha} - \lambda_{qn-q}^{q/\alpha}}{\lambda_{qn-q}^{q/\alpha}} = \infty \right) \quad (5.13),$$

resulta

$$\lim_{\frac{n}{n}} \frac{\sqrt[n]{m_n}}{\lambda_n} = 0. \quad (5.14)$$

En efecto, teniendo presente que

$$\sum_1^\infty (p_n m_{qn}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty$$

y

$$\sum_1^\infty (p_n \lambda_{qn}^{q/\alpha})^{-1/n} = \sum_1^\infty \frac{\lambda_{qn}^{q/\alpha} - \lambda_{qn-q}^{q/\alpha}}{\lambda_{qn-q}^{q/\alpha} \lambda_{qn-q}^{q/\alpha}} = \frac{1}{\lambda_0^{q/\alpha}} < \infty,$$

se deduce inmediatamente

$$\lim_{\frac{n}{n}} \frac{\sqrt[n]{m_n}}{\lambda_n} \leq \lim_{\frac{n}{n}} \frac{\sqrt[n]{m_{qn}}}{\lambda_{qn}} = 0,$$

y por tanto (5.14).

OBSERVACIÓN 8. — Dada la sucesión positiva $\{p_n\}_0^\infty$ con $\sum p_n^{-1/n} = \infty$, si $\{m_n\}_0^\infty$ es una sucesión logarítmicamente convexa tal que

$$\lim_{\frac{n}{n}} \frac{\sqrt[n]{m_n}}{\lambda_n} = 0, \quad (5.15)$$

para

$$\lambda_{qn+r} = \left(\sum_1^n p_v^{-1/v} \right)^{\alpha/q}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, q-1 \quad (\lambda_n \rightarrow \infty) \quad (5.16)$$

resulta

$$\sum_1^\infty (p_n m_{qn}^{1/\alpha})^{-1/n} = \infty. \quad (5.17)$$

Siendo

$$\lim_{\frac{n}{n}} \frac{\sqrt[n]{m_n}}{\lambda_n} = 0,$$

para un cierto r : $0 \leq r < q$, será

$$\lim_{\frac{n}{n}} \frac{\sqrt[n]{m_{qn+r}}}{\lambda_{qn+r}} = 0,$$

de donde se deduce

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_{qn}}}{\lambda_{qn}} = 0$$

puesto que

$$m_{qn} \leq m_0^{\frac{r}{qn+r}} m_{qn+r}^{\frac{qn}{qn+r}}.$$

Por consiguiente

$$\sum_1^\infty (p_n m_{qn}^{1/\alpha})^{-1/n} \geq \overline{\lim}_n \frac{\sum_1^n p_v^{-1/v}}{m_{qn}^{1/\alpha n}} = \overline{\lim}_n \left(\frac{\lambda_{qn}}{m_{qn}^{1/\alpha n}} \right)^{q/\alpha} = \infty.$$

Las observaciones 7 y 8 permiten dar al corolario 4, en el caso $\alpha = 2$, la siguiente forma equivalente que difiere poco del teorema 29 [19; 49] de SAN JUAN.

COROLARIO 5.—Cualquiera que sean $\alpha \leq 2$, la sucesión positiva $\{p_n\}_0^\infty$ que haga divergente a $\sum_1^\infty p_n^{-1/n}$ y el entero $q \geq 1$, se puede encontrar un par de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, analíticas en el ángulo $|\arg z| < \pi$, con el mismo desarrollo asintótico en 0 y f.s.a.p.n.q. en todo recinto Ω_α contenido en $|\arg z| < \pi$. Las cotas $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ de estos desarrollos se pueden elegir además logarítmicamente convexas y de modo que verifiquen

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^{\alpha'}} = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (5.18)$$

para un $\alpha' > 2$ arbitrario.

Por los teoremas 11, 12 y 13 se sabe bien poco sobre el crecimiento de los coeficientes a_n del desarrollo asintótico común $\sum_0^\infty a_n z^n$ de f_1 y f_2 en 0, desde luego de ellos resulta

$$|a_n| \leq A q^n m_n^{(3)}, \quad m_n^{(3)} = \min(m_n^{(1)}, m_n^{(2)})$$

para unas convenientes constantes positivas A y q , pero de esta desigualdad no se puede asegurar que

$$\overline{\lim}_n \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{n^\alpha} < \infty,$$

porque para ello sería preciso elegir $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ de forma que

$$\overline{\lim}_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(3)}}}{n^\alpha} < \infty$$

y esto no se puede conseguir si $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ cumplen la condición C_α . En efecto, por las hipótesis de los teoremas 11, 12 y 13 sólo puede presentarse uno de los casos siguientes:

1. $m_n^{(1)} = m_n^{(2)}$ para infinitos n . Entonces resultaría

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^\alpha} \leq \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(3)}}}{n^\alpha} < \infty$$

y por consiguiente $\{m_n\}_0^\infty$ verificaría la condición C_α y sería $f_1 = f_2$.

2. $m_n^{(2)} < m_n^{(1)}$ para $n > n_0$ suficientemente grande. En este caso, siendo $m_n \leq 2 m_n^{(1)}$ para $n > n_0$ se seguiría igualmente que $\{m_n\}_0^\infty$ verificaría la condición C_α . Lo mismo se puede decir si fuese $m_n^{(1)} < m_n^{(2)}$ para $n > n_0$.

Esta cuestión la vamos a estudiar ahora, limitándonos al caso $\alpha = 1$, en el:

TEOREMA 14. — Sean $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ dos sucesiones positivas y no decrecientes y $\{\mu_n\}_0^\infty$ una sucesión positiva que no cumpla la condición $C_{\alpha'-1}$, $1 < \alpha' \leq 2$. Si $\{m_n/\mu_n\}_0^\infty \equiv \{(m_n^{(1)} + m_n^{(2)})/\mu_n\}_0^\infty$ no cumple la condición C_1 y las sucesiones $\{m_n^{(1)}/\mu_n\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}/\mu_n\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 , dados los números $a > 0$ y $\sigma > 0$ existe un par de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, analíticas en $\text{Re } z^{1/\alpha'} > a^{1/\alpha'}$ con las siguientes propiedades:

- a) f_1 y f_2 admiten el mismo desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n/z^n$ en $\text{Re } z \geq a$ de manera que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = \frac{1}{r_0} < \infty \quad (5.19)$$

y

$$r_0 \left| \cos \frac{\alpha' \pi}{2} \right| \leq \sigma \leq r_0 \quad (5.20)$$

- b) $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ son, respectivamente, las sucesiones de cotas de estos desarrollos asintóticos de f_1 y f_2 . Por tanto, f_1 y f_2 pertenecen, respectivamente, a las clases $K_\infty\{m_n^{(1)}\}; \text{Re } z > a$ y $K_\infty\{m_n^{(2)}\}; \text{Re } z > a$.

- c) f_1 y f_2 son de tipo exponencial:

$$\sigma_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |f_k(z)|}{|z|} \leq \sigma \quad (5.21)$$

en $\text{Re } z^{1/\alpha'} \geq a^{1/\alpha'}$.

DEMOSTRACIÓN. — Por las hipótesis hechas, existe por el teorema 38 un par de funciones $g_1 \neq g_2$ analíticas en el ángulo completo $|\arg(\pm z)| <$

$< (\alpha' - 1) \pi/2$, iguales en $|\arg(-z)| < (\alpha' - 1) \pi/2$, con las derivadas angulares $g_1^{(n)}(0) = g_2^{(n)}(0)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, y

$$|g_k^{(n)}(z)| \leq A q^n m_n^{(k)} \quad (k = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg(\pm z)| < (\alpha' - 1)\pi/2$ y ciertas constantes positivas A y q que se pueden suponer $A = a/(a + 1)$ y $q = 1$ porque se puede sustituir $g_k(z)$ por $a(a + 1)^{-1} A^{-1} g_k(z/q)$ para $k = 1, 2$. Entonces, las funciones

$$f_k(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g_k(t - \lambda) dt, \quad k = 1, 2$$

para $\lambda = \sigma \left| \cos \frac{\alpha' \pi}{2} \right|^{-1}$ satisfacen las condiciones exigidas:

a) y b). En efecto, poniendo

$$a_0 = 0 \quad \text{y} \quad a_n = g_1^{(n-1)}(-\lambda) = g_2^{(n-1)}(-\lambda) \quad \text{para} \quad n \geq 1,$$

tendremos

$$\begin{aligned} \left| f_k(z) - \sum_0^{n-1} \frac{a_v}{z^v} \right| &= \left| \frac{1}{z^{n-1}} \int_0^\infty e^{-zt} g_k^{(n-1)}(t - \lambda) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|z|^n} \left\{ |a_n| + \int_0^\infty e^{-at} |g_k^{(n)}(t - \lambda)| dt \right\} \\ &\leq \frac{1}{|z|^n} \left\{ \frac{a m_{n-1}^{(k)}}{a + 1} + \frac{a}{a + 1} \frac{m_n^{(k)}}{a} \right\} \leq \frac{m_n^{(k)}}{|z|^n} \quad (k = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

para $\operatorname{Re} z \geq a$. Por tanto f_1 y f_2 admiten el mismo desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n/z^n$ en $\operatorname{Re} z \geq a$ y

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = \frac{1}{r_0}$$

con

$$\lambda \left| \cos \frac{\alpha' \pi}{2} \right| \leq r_0 \leq \lambda \quad \left(\lambda = \sigma \left| \cos \frac{\alpha' \pi}{2} \right|^{-1} \right),$$

puesto que $a_n = g_k^{(n-1)}(-\lambda)$ y g_k es analítica en el círculo $|t + \lambda| < \lambda \left| \cos \frac{\alpha' \pi}{2} \right|$ y $t = 0$ es un punto singular de ella.

Para prolongar analíticamente f_1 y f_2 no hay más que hacer variar φ : $|\varphi| < (\alpha' - 1) \pi/2$, en la segunda integral que aparece en

$$f_k(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g_k(t - \lambda) dt + e^{-z\lambda} \int_0^{\infty(-\phi)} e^{-zt} g_k(t) dt.$$

Así se ve inmediatamente que f_k es una función analítica en el ángulo $|\arg z| < \alpha' \pi/2$, y tal que

$$c) \quad \sigma_0 = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |f_k(z)|}{|z|} \leq \lambda \left| \cos \frac{\alpha' \pi}{2} \right| = \sigma (\leq r_0)$$

en $\operatorname{Re} z^{1/\alpha'} \geq a^{1/\alpha'}$.

La desigualdad

$$r_0 \left| \cos \frac{\alpha' \pi}{2} \right| \leq \sigma_0$$

resulta inmediatamente del teorema 15, que exponemos a continuación, el cual se puede obtener como consecuencia del teorema 4 de [15; 206] y se puede considerar como recíproco del teorema 14.

TEOREMA 15. — Si f_1 y f_2 son dos funciones pertenecientes, respectivamente, a las clases semi-analíticas $K_\infty \{m_n^{(1)}; \operatorname{Re} z^{1/\alpha} > a^{1/\alpha}\}$ y $K_\infty \{m_n^{(2)}; \operatorname{Re} z^{1/\alpha} > a^{1/\alpha}\}$ ($a > 0$) con el mismo desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ y del tipo

$$\sigma_k = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |f_k(z)|}{|z|^{1/\alpha}} < r_0 \left| \cos \frac{\pi \alpha'}{2 \alpha} \right|$$

$$\left(r_0 = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{|a_n|}} \right)$$

del orden $1/\alpha$ en $\operatorname{Re} z^{1/\alpha} > a^{1/\alpha}$ con $\alpha < \alpha' \leq 2\alpha$, es $f_1 = f_2^{(11)}$.

§ 6. La clase $K_0 \{n^{\alpha_n}; \Omega_\alpha\}$

Por un resultado obtenido por SAN JUAN [17; 12] y [19; 52] se puede afirmar que si f y f^* son dos funciones que pertenecen, respectivamente, a las clases semi-analíticas $K_0 \{n^{\alpha_n}; \Omega_\alpha\}$ y $K_0 \{m_n^*; \Omega_\alpha\}$ y tienen el mismo

desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ en Ω_α es $f = f^*$. Posteriormente, también

SAN JUAN ha demostrado en [19; 60] un recíproco de esta proposición en el supuesto que la sucesión $\{m_n^*\}_0^\infty$ sea logarítmicamente convexa, que ahora vamos a completar.

LEMA 6. — Sea $\{n^{(2-\alpha)n} m_n^*\}_0^\infty$ una sucesión logarítmicamente convexa y $0 \leq \alpha \leq 2$. Si la clase $K_0 \{m_n^*; \Omega_\alpha\}$ no está contenida en $K_0 \{n^{\alpha_n}; \Omega_\alpha\}$

(11) Los teoremas 1 y 4 de [15] han sido la causa de que nos planteáramos el problema de averiguar si existen funciones analíticas en un segmento de la recta que admitan prolongaciones cuasi-analíticas distintas en la recta, sin embargo designaremos este problema con el nombre de "problema de Bang" por haberlo planteado BANG con anterioridad a SAN JUAN.

y $\Omega_\alpha \subset A_\alpha$ existen dos clases semi-analíticas $K_0\{m_n^{(1)}; \Omega_\alpha\}$ y $K_0\{m_n^{(2)}; \Omega_\alpha\}$ que verifican las hipótesis de los teoremas 11 y 13 para $\delta = 2 - \alpha$, siendo además la primera una clase parcial de $K_0\{m_n^*; \Omega_\alpha\}^{(12)}$.

DEMOSTRACIÓN. — Es una consecuencia del siguiente:

LEMA 7. — Sean $\gamma \geq 0$, $\delta \geq 0$ y $\gamma + \delta > 0$. Si $\{n^{\delta n} m_n^*\}_0^\infty$ es una sucesión logarítmicamente convexa y

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^*}}{n^\gamma} = \infty, \quad (6.1)$$

existen dos sucesiones positivas $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ tales que

1. $m_n^{(1)} \leq m_n^*$ para todo n .
2. $\lim_n n^{-\gamma} \sqrt[n]{m_n^{(k)}} < \infty$ para $k = 1, 2$.
3. $\{n^{\delta n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{\delta n} m_n^{(2)}\}_0^\infty$ satisfacen las hipótesis H_1 y H_2 .
4. La sucesión $\{n^{\delta n} m_n\}_0^\infty \equiv \{n^{\delta n} (m_n^{(1)} + m_n^{(2)})\}_0^\infty$ no satisface la condición $G_{\gamma+\delta}$.

DEMOSTRACIÓN. — Para $\gamma = 1$ y $\delta = 0$ se puede proceder de igual forma que BANG en el lema expuesto a continuación del teorema XXVII de [1; 80-82] que aunque es de carácter funcional y análogo al lema 6 sólo se emplean en su demostración recursos puramente numéricos. Una vez demostrado este caso es suficiente aplicarle a la sucesión $\{(n^{\delta n} m_n^*)^{\frac{1}{\gamma+\delta}}\}_0^\infty$ para que quede demostrado el lema.

TEOREMA 16. — En el supuesto que $\{n^{(2-\alpha)n} m_n^*\}_0^\infty$ sea una sucesión logarítmicamente convexa y que el conjunto Ω_α con el punto frontera 0 esté contenido en el ángulo A_α de amplitud $\alpha \pi \leq 2 \pi$ para $\alpha > 0$ y en la semirrecta A_0 para $\alpha = 0$. Si toda función semi-analítica f en Ω_α que admita un desarrollo asintótico $\sum_0^\infty a_n z^n$ igual al de una función f^* de $K_0\{m_n^*; \Omega_\alpha\}$ es idéntica a f^* , la clase $K_0\{m_n^*; \Omega_\alpha\}$ está contenida en $K_0\{n^{\alpha n}; \Omega_\alpha\}^{(13)}$.

DEMOSTRACIÓN. — Si $K_0\{m_n^*; \Omega_\alpha\}$ no estuviese contenida en $K_0\{n^{\alpha n}; \Omega_\alpha\}$ aplicando el lema 6 y los teoremas 11 y 13 se llegaría a una contradicción.

Otra propiedad importante que tiene la clase $K_0\{n^{\alpha n}; \Omega_\alpha\}$ viene expuesta en el:

⁽¹²⁾ Este resultado ha sido demostrado por SAN JUAN bajo la condición de que $\{m_n^*\}_0^\infty$ sea logarítmicamente convexa en el teorema 20 de [19].

⁽¹³⁾ Este teorema ha sido demostrado también por SAN JUAN en el supuesto que $\{m_n^*\}_0^\infty$ sea logarítmicamente convexa. Véase el teorema 35 de [19].

TEOREMA 17. — *La intersección de todas las clases $K_0\{m_n; \Omega_\alpha\}$ no semi-analíticas en Ω_α es la clase $K_0\{n^{\alpha_n}; \Omega_\alpha\}$.*

DEMOSTRACIÓN. — En primer lugar, la clase $K_0\{n^{\alpha_n}; \Omega_\alpha\}$ está contenida en cada clase no semi-analítica $K_0\{m_n; \Omega_\alpha\}$, pues, si $\{m_n\}_0^\infty$ no verifica la condición C_α se tiene

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^\alpha} > 0 \quad \text{y} \quad \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha_n}}{m_n}} < \infty.$$

Por otra parte, si f es una función perteneciente a todas las clases no semi-analíticas $K_0\{m_n; \Omega_\alpha\}$ es

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{M_n}{m_n}} < \infty, \quad M_n = \sup_{z \in \Omega_\alpha} \left| \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right|$$

para cada sucesión $\{m_n\}_0^\infty$ que no verifique la condición C_α ; de donde por el lema 2 resulta

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{M_n}{n^{\alpha_n}}} < \infty$$

y, por consiguiente, que $f \in K_0\{n^{\alpha_n}; \Omega_\alpha\}$.

OBSERVACIÓN 9. — *En la demostración del teorema 17 hemos utilizado el mínimo de recursos funcionales, sin basarnos en el lema 6 como hubiésemos hecho de haber procedido como BANG [1; 79] y SAN JUAN [19; 60-61]. Esta forma de proceder no nos hubiera permitido dar al teorema 17 la generalidad alcanzada.*

CAPÍTULO II

CLASES DE FUNCIONES CON DERIVADAS ACOTADAS CLASES CUASI-ANALÍTICAS

§ 7. Definiciones. Condiciones de cuasi-analiticidad

Dado un recinto Ω contenido en un ángulo $|\arg z| < \alpha \pi/2$ de la superficie de RIEMANN de $\log z$ y con el punto frontera $z = 0$, diremos que la función compleja f , definida en $\Omega \cup \{0\}$, es derivable en 0 si existe la derivada angular

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} \quad (z \in \Omega). \quad (7.1)$$

En este capítulo supondremos que Ω goza de la propiedad de que la intersección de Ω con cada semirrecta que parte de 0 y con cualquier circunferencia de centro 0 es un conjunto conexo. Desde luego esta propiedad la poseen los ángulos

$$A_\alpha: \quad |\arg z| < \alpha \pi/2$$

y los sectores curvos

$$S_\alpha(z_0): \quad |z^{1/\alpha} - z_0^{1/\alpha}| < |z_0|^{1/\alpha}.$$

LEMA 8. — Si f es una función analítica en Ω con la primera derivada acotada: $|f'(z)| \leq M_1$, y tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r e^{i\theta_0}) - f(0)}{r e^{i\theta_0}} = \lambda \quad (r e^{i\theta_0} \in \Omega)$$

con λ constante para cada θ_0 de $|\theta| < \alpha \pi/2$, existe la derivada angular

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} \quad (z \in \Omega) \quad (14).$$

DEMOSTRACIÓN. — Mediante las semirrectas

$$\arg z = \theta_k \equiv \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2} \right) \alpha \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

(14) Se puede demostrar fácilmente también que si f es una función analítica en Ω con la segunda derivada acotada, existe la derivada angular $f'(0)$.

queda descompuesto el recinto Ω en n sectores tales que para todo $z = re^{i\theta} \in \Omega$ se puede determinar un θ_k de modo que sea $|\theta_k - \theta| < \alpha \pi/n < \varepsilon/2 M_1$ para $n > 2 \alpha \pi M_1/\varepsilon$. Por tanto, supuesto $\lambda = 0$, como

$$\left| \frac{f(re^{i\theta_k}) - f(0)}{r e^{i\theta_k}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $r < r_k = r_k(\varepsilon)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), tendremos

$$\left| \frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{r e^{i\theta}} \right| \leq \left| \frac{f(re^{i\theta_k}) - f(0)}{r e^{i\theta_k}} \right| + \left| \frac{1}{r} \int_{r e^{i\theta_k}}^{r e^{i\theta}} f'(z) dz \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + M_1 |\theta - \theta_k| < \varepsilon$$

para $re^{i\theta} \in \Omega$ y $r < r_0(\varepsilon) = \min \{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\}$, cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, de donde resulta que la derivada angular $f'(0) = 0$.

En el caso que $\lambda \neq 0$ basta aplicar el resultado precedente a $f(z) - \lambda z$.

Designaremos por $c_0 \{m_n; \Omega\}$ y por $C_0 \{m_n; \Omega\}$, respectivamente, las clases de funciones f analíticas en Ω e indefinidamente derivables en el punto $z = 0$ tales que

$$|f^{(n)}(z)| \leq A m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.2)$$

y

$$|f^{(n)}(z)| \leq A q^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.3)$$

para cada $z \in \Omega$ y ciertas constantes A y q dependientes de f .

Con objeto de incluir en este capítulo, de manera análoga que en el anterior, algunos resultados para funciones de variable real, en el caso que Ω sea la recta real R , la semirrecta A_0 o un intervalo I ($0 \in I$) designaremos por $c_0 \{m_n; \Omega\}$ y $C_0 \{m_n; \Omega\}$, respectivamente, las clases de funciones (reales o complejas) indefinidamente derivables en Ω que verifiquen (7.2) o (7.3). Sin embargo como en este caso el punto $z = 0$ desempeña el mismo papel que los demás puntos de Ω sería más propio designar estas clases por $c \{m_n; \Omega\}$ y $C \{m_n; \Omega\}$.

Por ampliación de la noción de cuasi-analiticidad en el campo real, diremos que $C_0 \{m_n; \Omega\}$ es una clase *cuasi-analítica* en 0, o por un abuso del lenguaje cuasi-analítica⁽¹⁵⁾, si toda función f de $C_0 \{m_n; \Omega\}$ queda unívocamente determinada por sus derivadas en 0, es decir, si cada función $f \in C_0 \{m_n; \Omega\}$ con las derivadas angulares $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, es idénticamente nula. Este concepto se extiende de igual forma a las clases $c_0 \{m_n; \Omega\}$.

Antes de pasar adelante conviene hacer notar que

$$c_0 \{m_n; \Omega\} \subset k_0 \{n^{-n} m_n; \Omega\} \quad (7.4)$$

y

$$C_0 \{m_n; \Omega\} \subset K_0 \{n^{-n} m_n; \Omega\}. \quad (7.5)$$

(15) Esto no da lugar a confusiones en el caso de funciones de variable real porque, como se ve fácilmente, las que usualmente se entienden por clases cuasi-analíticas coinciden con las clases cuasi-analíticas en 0.

Estas relaciones resultan inmediatamente aplicando la fórmula de TAYLOR

$$f(z) = f(0) + f'(0) \frac{z}{1!} + \dots + f^{(n-1)}(0) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt,$$

válida para las funciones analíticas en Ω son las derivadas angulares $f^{(v)}(0)$, $v = 0, 1, 2, \dots, n$.

Es fácil ver que no se puede sustituir en (7.4) y (7.5) la inclusión por la igualdad, ya que por ejemplo la clase

$$K_0 \{ n^{\alpha n} (\log n)^{(\alpha+1)n}; A_\alpha \}$$

contiene funciones $f \neq 0$ con desarrollo asintótico nulo y

$$C_0 \{ n^{(\alpha+1)n} (\log n)^{(\alpha+1)n}; A_\alpha \},$$

por el teorema que exponemos a continuación, no.

TEOREMA 18.—Para que las clases $C_0 \{ m_n; A_\alpha \}$ y $c_0 \{ m_n; A_\alpha \}$ con $\alpha \geq 0$ sean cuasi-analíticas es necesario y suficiente que la sucesión $\{ m_n \}_0^\infty$ verifique la condición $C_{\alpha+1}$ ⁽¹⁶⁾.

DEMOSTRACIÓN. — La conclusión relativa a $\alpha = 0$ es bien conocida, por ello podemos suponer $\alpha > 0$.

La condición es suficiente. Bastará ver que toda función f analítica en un ángulo A_α con las derivadas angulares

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y tal que

$$|f^{(n)}(z)| \leq A q^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg z| < \alpha \pi/2$ es idénticamente nula si $\{ m_n \}_0^\infty$ satisface $C_{\alpha+1}$. Con este objeto consideremos la función

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad (|\arg z| < \alpha \pi/2)$$

que se puede prolongar analíticamente dentro del ángulo $A_{\alpha+1}$ haciendo variar φ : $|\varphi| < \alpha \pi/2$, en la integral

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-z\phi} f(t) dt \quad (|\arg z - \varphi| < \pi/2).$$

(16) Este teorema ha sido demostrado ya en [14;353] pero hemos creído conveniente sin embargo volver a exponer aquí su demostración.

Por una integración de partes se obtiene

$$g(z) = \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty(-\phi)} e^{-zt} f^{(n)}(t) dt \quad (|\arg z - \varphi| < \pi/2)$$

y, por consiguiente,

$$|g(z)| \leq \frac{A q^n m_n}{|z|^n} \int_0^{\infty(-\phi)} |e^{-zt}| dt \quad (|\arg z - \varphi| < \pi/2).$$

Sea

$$\delta_\alpha(r e^{i\theta}) = \begin{cases} r & \text{para } |\theta| \leq (\alpha - 1) \pi/2 \\ r \sin\left(\frac{\alpha \pi}{2} - |\theta|\right) & \text{para } \frac{(\alpha - 1)\pi}{2} \leq \theta < \frac{\alpha \pi}{2} \end{cases}$$

entonces, poniendo $\varphi = \theta \equiv \arg z$ para $|\arg z| < \alpha \pi/2$, resulta

$$\int_0^{\infty(-\phi)} |e^{-zt}| dt = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\delta_{\alpha+1}(z)}.$$

Si $\alpha \pi/2 \leq \pm \theta < (\alpha + 1) \pi/2$ pondremos $\varphi = \pm \alpha \pi/2 \mp \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < (\alpha + 1) \pi/2 - |\theta|$, obteniéndose así

$$\int_0^{\infty(-\phi)} |e^{-zt}| dt = |z \cos(|\theta| - \alpha \pi/2 + \varepsilon)|^{-1}$$

de donde se deduce haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$|g(z)| \leq \frac{A q^n m_n}{|z|^n} \left| z \cos\left(|\theta| - \frac{\alpha \pi}{2}\right) \right|^{-1} \quad \left(\frac{\alpha \pi}{2} \leq |\theta| < \frac{(\alpha + 1) \pi}{2} \right).$$

Luego

$$|g(z)| \leq \frac{A q^n m_n}{|z|^n \delta_{\alpha+1}(z)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg z| < (\alpha + 1) \pi/2$, y

$$|g(z^{\alpha+1})| \leq \frac{A q^n m_n}{|z|^{(\alpha+1)n} \delta_{\alpha+1}(z^{\alpha+1})} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg z| < \pi/2$.

Por tanto, siendo $\delta_{\alpha+1}(z^{\alpha+1}) \geq 1$ para $\operatorname{Re} z \geq 1$, tendremos

$$|g(z^{\alpha+1})| \leq \frac{A q^n m_n}{|z|^{(\alpha+1)n}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $\operatorname{Re} z \geq 1$, de donde resulta $g = 0$ y $f = 0$, por verificar $\{m_n\}_0^\infty$ la condición $C_{\alpha+1}$.

La condición es necesaria. Como $\{m_n\}_0^\infty$ no satisface la condición $C_{\alpha+\varepsilon}$ se puede construir una función $g \neq 0$, analítica en el ángulo $A_{\alpha+1}$ y tal que

$$|g(z)| \leq \frac{m_n}{|z|^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg z| < (\alpha+1)\pi/2$.

Sea

$$h(z) = \frac{2 z^{1/(\alpha+1)-1}}{(\alpha+1)(1+z^{1/(\alpha+1)})^2} g(z),$$

entonces, por ser $h(z) = O(1/|z|^{1+1/(\alpha+1)})$, la integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i(-\theta)}^{+\infty i(-\theta)} e^{zt} h(t) dt \neq 0 \quad (\theta = \arg z, \quad |\theta| < \alpha\pi/2)$$

es convergente y define una función analítica en A_α pues, efectuando un cambio de camino resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i(\phi_1)}^{+\infty i(\phi_2)} e^{zt} h(t) dt$$

para $-\phi_2 \leq \arg z \leq -\phi_1$ siendo $0 \leq \phi_2 - \phi_1 \leq \pi$ y $|\phi_k| < \alpha\pi/2$ ($k=1, 2$).

Finalmente, como

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i(-\theta)}^{+\infty i(-\theta)} e^{zt} h(t) t^n dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\theta| \equiv |\arg z| < \alpha\pi/2$, tendremos

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2 m_n d r^{1/(\alpha+1)}}{1 + r^{2/(\alpha+1)}} = m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg z| < \alpha\pi/2$, y

$$\lim_{r \rightarrow 0} f^{(n)}(r e^{i\theta}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para cada θ de $|\theta| < \alpha\pi/2$, de donde se deduce, teniendo presente el lema 8, que existen las derivadas angulares

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

con lo que queda así demostrado el teorema.

Como generalización de los ángulos A_α tiene interés considerar aquí los p -ángulos $A_\alpha^{(p)}$ formados por las $p \geq 2$ componentes $|\arg z - 2k\pi/p| < \alpha\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots, p-1$). Pero estos conjuntos abiertos $A_\alpha^{(p)}$ no son conexos, por ello debemos introducir algunas modificaciones en los conceptos anterior-

mente definidos para los recintos Ω con el punto frontera 0. Así, designaremos por $c_0 \{m_n; A_\alpha^{(p)}\}$ o $C_0 \{m_n; A_\alpha^{(p)}\}$, respectivamente, las clases de funciones definidas en $A_\alpha^{(p)} \cup \{0\}$, localmente analíticas en $A_\alpha^{(p)}$, indefinidamente derivables en 0 y que además verifiquen (7.2) o (7.3) en $A_\alpha^{(p)}$. Para estas clases resulta inmediatamente como consecuencia del teorema 18 el siguiente:

COROLARIO 6. — *Para que las clases $C_0 \{m_n; A_\alpha^{(p)}\}$ y $c_0 \{m_n; A_\alpha^{(p)}\}$ ($\alpha > 0$) sean cuasi-analíticas, es necesario y suficiente que $\{m_n\}_0^\infty$ verifique la condición $C_{\alpha+1}$.*

El teorema 18 se puede extender también a los sectores curvos así:

TEOREMA 19. — *Para que las clases $C_0 \{m_n; S_\alpha(z_0)\}$ y $c_0 \{m_n; S_\alpha(z_0)\}$ con $\alpha \leq 1$ sean cuasi-analíticas es necesario y suficiente que $\{m_n\}_0^\infty$ verifique la condición $C_{\alpha+1}$ ⁽¹⁷⁾.*

DEMOSTRACIÓN. — Para simplificar la exposición supondremos $\arg z_0 = 0$, con esto no hacemos ninguna restricción ya que se puede pasar de aquí al caso general mediante un giro.

La necesidad resulta inmediatamente del teorema 18 puesto que el sector $S_\alpha(z_0)$ está contenido en el ángulo A_α .

Antes de pasar a demostrar la suficiencia de la condición $C_{\alpha+1}$ conviene ver que el recinto transformado de $S_\alpha(z_0)$ ($\alpha \leq 1$) por

$$\zeta = \frac{z}{2^\alpha z_0 - z} \quad \left(z = \frac{2^\alpha z_0 \zeta}{1 + \zeta} \right)$$

cubre el ángulo $|\arg \zeta| < \alpha \pi/2$, para lo que es suficiente que el contorno superior

$$z = 2^\alpha z_0 \cos^\alpha \frac{\theta}{\alpha} e^{i\theta} \quad (0 < \theta < \alpha \pi/2)$$

de $S_\alpha(z_0)$ se transforme en una curva de $\alpha \pi/2 \leq \arg \zeta \leq \pi/2$. En efecto, siendo para estos puntos z ,

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{2^\alpha z_0}{z} - 1 = \frac{e^{-i\theta}}{\cos^\alpha \frac{\theta}{\alpha}} - 1,$$

tendremos

$$\tan(\arg \zeta) = -\tan\left(\arg \frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos^\alpha \frac{\theta}{\alpha}} \geq \tan \frac{\alpha \pi}{2},$$

⁽¹⁷⁾ Este teorema con la restricción $\alpha \leq 1$ se puede utilizar también para demostrar el teorema 9 de [15; 214], pero entonces se debe aplicar de manera reiterada porque la condición $\alpha \leq 1$ exige que se tome en [15] $(\alpha - \alpha')/\alpha' \leq 1$ o $\alpha' \geq \alpha/2$.

puesto que de

$$\frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)} = \alpha (\cot \varphi - \cot \alpha \varphi) \leq 0 \quad \text{y} \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sin \frac{\alpha \pi}{2}}$$

para $0 < \varphi \leq \pi/2$ se deduce

$$g(\varphi) = \frac{\sin^\alpha \varphi}{\sin \alpha \varphi} \geq \frac{1}{\sin \frac{\alpha \pi}{2}} = g\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin \frac{\alpha \pi}{2} \sin^\alpha \varphi \geq \sin \alpha \varphi$$

y

$$\sin \frac{\alpha \pi}{2} \cos^\alpha \frac{\theta}{\alpha} \geq \sin \left(\frac{\alpha \pi}{2} - \theta \right).$$

Veamos ahora que las clases $C_0\{m_n; S_\alpha(z_0)\}$ y $c_0\{m_n; S_\alpha(z_0)\}$ son cuasi-analíticas si $\{m_n\}_0^\infty$ satisface la condición $C_{\alpha+1}$. Sea f una función analítica en $S_\alpha(z_0)$ con las derivadas angulares

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y tal que

$$M_n = \sup_{z \in S_\alpha(z_0)} |f^{(n)}(z)| \leq A q^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Entonces, poniendo

$$h(\xi) = f(g(\xi)) \quad \text{con} \quad g(\xi) = \frac{a\xi}{1+\xi} \quad \text{y} \quad a = 2^\alpha z_0,$$

tendremos que h es una función analítica en el ángulo $|\arg \xi| < \alpha \pi/2$ con las derivadas angulares

$$h^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y tal que sus derivadas $h^{(n)}$ se pueden acotar mediante los coeficientes de $\xi^n/n!$ del desarrollo en serie de potencias

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M_\nu}{\nu!} \left(\frac{a\xi}{1+\xi} \right)^\nu &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M_\nu a^\nu}{\nu!} \xi^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k} \xi^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \sum_{\nu=0}^n \binom{n-1}{n-\nu} \frac{M_\nu a^\nu}{\nu!} \end{aligned}$$

puesto que $|f^{(n)}(z)| \leq M_n$ y $|g^{(n)}(\xi)| \leq a n!$ Por consiguiente, como

$$f^{(\nu)}(z) = \frac{1}{(n-\nu-1)!} \int_0^s (z-t)^{n-\nu-1} f^{(n)}(t) dt \quad (0 \leq \nu < n)$$

para $z \in S_\alpha(z_0)$, se tiene

$$M_\nu \leq M_n \frac{a^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \quad (0 \leq \nu < n)$$

y

$$\begin{aligned} |h^{(n)}(\xi)| &\leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n-1}{n-\nu} \frac{n!}{\nu!} M_\nu a^\nu \leq M_n a^n \sum_{\nu=0}^n \binom{n-1}{n-\nu} \binom{n}{\nu} \\ &= \binom{2n-1}{n} M_n a^n \leq A(4qa)^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

de donde resulta, teniendo presente el teorema 18, $h = 0$ y $f = 0$.

Análogamente que en el § 1 designaremos por Ω'_α a todo recinto con $\emptyset$ por punto frontera tal que la condición de cuasi-analiticidad de $C_0\{m_n; \Omega'_\alpha\}$ sea la $C_{\alpha+1}$. Sería interesante ver si estos conjuntos coinciden con los Ω_α considerados en § 1.

§ 8. Clases que contienen funciones no constantes

TEOREMA 20. — Dada la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, para que la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ contenga funciones no constantes es necesario y suficiente que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} > 0. \quad (8.1)$$

DEMOSTRACIÓN. — La necesidad de (8.1) se sigue inmediatamente como consecuencia de los teoremas 3 y 5 y de que

$$C_0\{m_n; A_\alpha\} \subset K_0\{n^{-n} m_n; A_\alpha\}.$$

Para demostrar la suficiencia consideremos como en § 3 la función entera

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^n}{[(n+1)\gamma+1]!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^\gamma+z} \frac{dt}{t^2} \quad (\gamma=2-\alpha \geq 1 \text{ y } a>0),$$

que evidentemente es no constante, es analítica en A_α y sus derivadas

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{(t^\gamma+z)^{n+1}} \frac{dt}{t^2} \quad (z \in A_\alpha)$$

se pueden acotar en A_α así

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{e^a}{a^{\gamma(n+1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{a^2+\rho^2} = \frac{n!}{2} \frac{e^a}{a^{\gamma(n+1)+1}}$$

puesto que según vimos en el teorema 5 se tiene $|t^\gamma + z| \geq a^\gamma$ para $0 \leq \alpha \leq 1$, $z \in A_\alpha$ y $\operatorname{Re} t = a$.

Por tanto, siendo $m_n > 0$ y

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{\gamma n} m_n}{n! e^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} > 0,$$

resulta

$$|f^{(n)}(z)| \leq 2 \frac{n! e^n}{n^{\gamma n}} \leq A q^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $z \in A_\alpha$ y ciertas constantes positivas A y q , o sea $f \in C_0 \{m_n; A_\alpha\}$.

Para $\alpha = 1$ se puede tomar también, evidentemente, $f(z) = e^{-z}$.

TEOREMA 21. — *Dada la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ y $\alpha > 1$, para que la clase $\{m_n; A_\alpha\}$ contenga funciones no constantes es necesario y suficiente que $\{m_n\}_0^\infty$ no verifique la condición $C_{\alpha-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. — La condición es necesaria. En efecto, si $\{m_n\}_0^\infty$ verifica $C_{\alpha-1}$ y $\alpha > 2$ por un razonamiento semejante al del teorema 4 se concluye por el teorema 18 que toda función f de $C_0 \{m_n; A_\alpha\}$ es una constante. Sea $1 < \alpha \leq 2$, entonces variando φ ($|\varphi| < \alpha \pi/2$) en la integral

$$z \int_0^{\infty(\phi)} e^{-zt} f(t) dt$$

se obtiene una función g , analítica en el ángulo $A_{\alpha+1}$ y tal que

$$\left| g(z) - \sum_0^{n-1} \frac{a_v}{z^v} \right| \leq \frac{A q^n m_n}{|z|^{n-1} \delta_{\alpha+1}(z)}, \quad (a_v = f^{(v)}(0))$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, de donde resulta, procediendo de igual forma que en el teorema 4, $g(z) = a_0$ y $f(z) = a_0$.

La condición es suficiente. Si $\{m_n\}_0^\infty$ no verifica la condición $C_{\alpha-1}$ se puede construir por el lema 1 una función F , analítica y acotada en el semiplano $\operatorname{Re} z \geq 0$, positiva sobre el semi-eje real positivo, con los momentos

$$\int_0^{\infty(\phi)} |F(t) t^\gamma| dt \leq m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\varphi| < \pi/2$ y $\gamma = \alpha - 1$.

Sea f la función analítica en A_α , expresada por la integral

$$f(z) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty(-\phi)} e^{-zt} F(t^{1/\gamma}) t^{1/\gamma-1} dt$$

para $|\arg z - \varphi| \leq \pi/2$ y cada φ de $|\varphi| < \gamma \pi/2$, entonces

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty(-\phi)} |F(t^{1/\gamma}) t^{1/\gamma-1} dt|$$

$$= \int_0^{\infty(-\phi/\gamma)} |F(t) t^\gamma dt| \leq m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $z \in A_\alpha$, puesto que se puede elegir φ de modo que $|\varphi| < (\alpha - 1)\pi/2$ y $|\varphi - \arg z| < \pi/2$. Por esto y teniendo presente que por el lema 8 se tiene

$$(-1)^n f^{(n)}(0) = \int_0^\infty F(t) t^\gamma dt > 0,$$

resulta que la clase $C_0 \{m_n; A_\alpha\}$ contiene la función no constante f .

Estos resultados se pueden extender a los p -ángulos $A_\alpha^{(p)}$ en la forma siguiente:

TEOREMA 22. — *Dada la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ para que la clase $C_0 \{m_n; A_\alpha^{(p)}\}$ contenga funciones no constantes es necesario y suficiente que $\{m_n\}_0^\infty$ no verifique la condición $C_{\alpha+1-q}$, siendo $q = 2/p$.*

DEMOSTRACIÓN. — La condición es necesaria. Esto resulta fácilmente cuando $\alpha > q$. En efecto, en el supuesto que $\{m_n\}_0^\infty$ verifique la condición $C_{\alpha+1-q}$ si $f \in C_0 \{m_n; A_\alpha^{(p)}\}$ y f_k es la restricción de f en el ángulo $|\arg z - 2k\pi/p| < \alpha\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots, p-1$) y $f_p = f$,

$$g_k(z) = f_{k+1}(\omega^{k+\frac{1}{2}} z) - f_k(\omega^{k+\frac{1}{2}} z), \quad \omega = e^{2\pi i/p}$$

es una función analítica en $A_{\alpha-q}$, perteneciente a la clase $C_0 \{m_n; A_{\alpha-q}\}$ con las derivadas angulares $g_k^{(n)}(0) = 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Por tanto, por el teorema 18 y por verificar $\{m_n\}_0^\infty$ la condición $C_{\alpha+1-q} = C_{(\alpha-q)+1}$, se tiene $g_k = 0$ para $0 \leq k < p$, de donde resulta que f es una función analítica uniforme para $z \neq 0$, que por ser además acotada se reduce a una constante.

Para $\alpha \leq q$ la demostración es un poco más complicada. Entonces, bajo las mismas hipótesis que antes, la función

$$g_r(z) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \omega^{-kr} f_k(\omega^k z) \quad \omega = e^{2\pi i/p}$$

con $0 \leq r < p$, pertenece a $C_0 \{m_n; A_\alpha\}$ y

$$h_r(z) = z^{r+1} \int_0^\infty e^{-zt} g_r(t) dt$$

es una función analítica en $A_{\alpha+1}$ que admite el desarrollo asintótico

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(pn+r)}(0)}{z^{pn}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(r)}}{z^{pn}}$$

en cada ángulo $|\arg(z - z_0)| < (\alpha + 1) \pi/2$ con $z_0 > 0$, de forma que

$$\left| h_r(z) - \sum_{v=0}^{n-1} \frac{a_v^{(r)}}{z^{pv}} \right| \leq \frac{A q^{pn-s} m_{pn-s}}{|z|^{pn-s-1} \delta_{\alpha+1}(z)}$$

para $|\arg z| < (\alpha + 1) \pi/2$ y $0 \leq s + r < p$, y

$$\left| h_r(z^{1/p}) - \sum_{v=0}^{n-1} \frac{a_v^{(r)}}{z^v} \right| \leq \frac{A p q^n m_n^*}{|z|^{n-1-s_n/p} \delta_{p\alpha+p}(z)}$$

para $|\arg z| < p(\alpha + 1) \pi/2$, siendo

$$m_n^* = q^{-n} \min_{0 \leq s+r < p} q^{pn-s} m_{pn-s}$$

De esto resulta, de manera análoga que en el teorema 21, por verificar $\{m_n^*\}_0^\infty$ la condición $C_{p\alpha+p-2}$ que $h_r(z^{1/p}) = a_0^{(r)}$ y $g_r(z) = a_0^{(r)} z^r/r!$ para $0 \leq r < p$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} a_0^{(k)} z^k/k!$ de donde finalmente se sigue que f se reduce a una constante puesto que es acotada.

La condición es suficiente. En efecto, si $\{m_n\}_0^\infty$ no verifica $C_{\alpha+1-q}$ por el teorema 21, existe una función no constante $g \in C_0\{m_n; A_{\alpha+2-q}\}$, y por consiguiente, la función definida en $A_\alpha^{(p)}$ poniendo

$$f(z) = g\left(e^{-\frac{(2-q)\pi i}{2}} z\right)$$

para $|\arg z - 2k\pi/p| < \alpha\pi/2$ y $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ es no constante y pertenece a $C_0\{m_n; A_\alpha^{(p)}\}$.

COROLARIO 7. — Si la sucesión $\{m_n\}_0^\infty$ satisface la condición $C_{\alpha+1-q}$ con $q = 2/p$, toda función f perteneciente a la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ con las derivadas angulares

$$f^{(n)}(0) = 0$$

cuando n no sea un múltiplo de p , se reduce a una constante.

§ 9. Una desigualdad entre las cotas de las derivadas

TEOREMA 23. — Si f es una función analítica en A_α para $0 < \alpha \leq 1$ e indefinidamente derivable en A_0 para $\alpha = 0$, entre los números

$$B_n = n^{(1-\alpha)n} M_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.1)$$

determinados por

$$M_n = \sup_{z \in A_\alpha} |f^{(n)}(z)|, \quad (9.2)$$

existe la relación

$$B_n \leq A q^{\gamma n} B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}} \quad (n_1 \leq n \leq n_2) \quad (9.3)$$

con

$$A = 4 \quad y \quad q = 1 \quad \text{para} \quad \gamma = 1 - \alpha = 0$$

y

$$A = 8\pi \quad y \quad q = 2e \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \leq 2^{1+1/\gamma} e \quad \text{para} \quad \gamma = 1 - \alpha > 0^*.$$

DEMOSTRACIÓN. — En primer lugar, vamos a probar que para $\alpha = 1$ se verifica

$$M_n \leq 4 M_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} M_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}} \quad (n_1 \leq n \leq n_2). \quad (9.4)$$

En efecto, aplicando la desigualdad de GORNY-KOLMOGOROFF⁽¹⁸⁾ a las funciones

$$g_1(y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad y \quad g_2(y) = \operatorname{Im} f(x+iy),$$

indefinidamente derivables en la recta para cada $x > 0$, tendremos

$$|\operatorname{Re} \{i^n f^{(n)}(x+iy)\}| = |g_1^{(n)}(y)| \leq 2 M_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} M_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}}$$

y

$$|\operatorname{Im} \{i^n f^{(n)}(x+iy)\}| = |g_2^{(n)}(y)| \leq 2 M_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} M_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}}$$

de donde resulta (9.4).

Como la desigualdad (9.3) se reduce a una trivialidad para $M_{n_1} = \infty$ o $M_{n_2} = \infty$, podemos suponer sin ningún inconveniente M_{n_1} y M_{n_2} finitos. En este supuesto para establecer (9.3) en el caso $0 < \alpha < 1$ consideraremos la función analítica g_a definida en A_1 haciendo variar φ ($|\varphi| < \pi/2$) en la integral

$$g_a(z) = \int_0^{\infty(-\varphi)} \frac{1}{(1+t)^2} \left(1 + \frac{t}{n_1}\right)^{-\gamma n_1} \left(1 + \frac{t}{n_2}\right)^{-\gamma n_2} f(a+zt) dt \quad (a \in A_\alpha),$$

que es uniformemente convergente en cada sector

$$\{|\arg z - \gamma\varphi| < \alpha\pi/2, |z| < R\}$$

* Este teorema se encuentra reproducido en [2*; 534].

(18) Véanse GORNY [5], KOLMOGOROFF [7] y MANDELBROJT [10; 210-222].

por ser

$$f(t) = 0 \quad [(1 + |t|)^{n_1}].$$

De esto resulta

$$\begin{aligned} |g_a^{(n_1)}(z)| &= \left| \int_0^{\infty (-\phi)} \frac{t^{\gamma n_1}}{(1+t)^2} \left(1 + \frac{t}{n_1}\right)^{-\gamma n_1} \left(1 + \frac{t}{n_2}\right)^{-\gamma n_2} f^{(n_1)}(a + z t) dt \right| \\ &\leq M_{n_1} \int_0^{\infty (-\phi)} \left| \frac{t^{\gamma n_1}}{(1+t)^2} \left(1 + \frac{t}{n_1}\right)^{-\gamma n_1} \left(1 + \frac{t}{n_2}\right)^{-\gamma n_2} dt \right| \\ &\leq M_{n_1} \int_0^{\infty} \frac{n_1^{\gamma n_1}}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} n_1^{\gamma n_1} M_{n_1} = \frac{\pi}{2} B_{n_1} \end{aligned}$$

puesto que para cada z de A_1 se puede elegir ϕ de modo que $|\phi| < \pi/2$ y $|\gamma \phi - \arg z| < \alpha \pi/2$, y para $|\arg t| = |-\phi| < \pi/2$ se tiene

$$\left|1 + \frac{t}{n_1}\right| \geq \left|\frac{t}{n_1}\right| \quad \text{y} \quad \left|1 + \frac{t}{n_2}\right| \geq 1.$$

Análogamente.

$$|g_a^{(n_2)}(z)| \leq \frac{\pi}{2} B_{n_2}.$$

Por tanto, por el resultado previamente establecido para $\alpha=1$ se sigue

$$|g_a^{(n)}(0)| \leq 2 \pi B_{n_2}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} B_{n_1}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}}$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} |g_a^{(n)}(0)| &= |f^{(n)}(a)| \int_0^{\infty} \frac{t^{\gamma n}}{(1+t)^2} \left(1 + \frac{t}{n_1}\right)^{-\gamma n_1} \left(1 + \frac{t}{n_2}\right)^{-\gamma n_2} dt \\ &\geq |f^{(n)}(a)| \int_0^{\infty} e^{-2(1+\gamma)t} t^{\gamma n} dt = \frac{(\gamma n)!}{[2(1+\gamma)]^{\gamma n+1}} |f^{(n)}(a)| \\ &\geq \frac{(\gamma n)^{\gamma n}}{4[2e(1+\gamma)]^{\gamma n}} |f^{(n)}(a)|, \end{aligned}$$

tendremos

$$n^{\gamma n} |f^{(n)}(a)| \leq 8 \pi \left[2 e \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right]^{\gamma n} B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}}$$

para cada $a \in A_\alpha$, de donde resulta inmediatamente (9.3).

Esta demostración vale también para $\alpha = 0$ por ser

$$\begin{aligned} g_a(z) &= \int_0^{\infty(-\phi)} \frac{1}{(1+t)^2} \left(1 + \frac{t}{n_1}\right)^{-n_1} \left(1 + \frac{t}{n_2}\right)^{-n_2} f(a + zt) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t/z)^2} \left(1 + \frac{t}{n_1 z}\right)^{-n_1} \left(1 + \frac{t}{n_2 z}\right)^{-n_2} f(a+t) \frac{dt}{z} \end{aligned}$$

una función analítica en A_1 para cada $a \in A_0$.

OBSERVACIÓN 10. — Utilizando las desigualdades de MARKOFF y de S. BERNSTEIN, GORNY y H. CARTAN demostraron en 1939 y 1940, respectivamente, la relación,

$$M_k \leq \left(\frac{e^2 \nu}{k}\right)^k M_0^{1-k/\nu} M_\nu^{k/\nu} \quad (0 \leq k \leq \nu) \quad (9.5)$$

entre las cotas M_0 , M_k y M_ν de una función f , ν veces derivable, y de sus derivadas $f^{(k)}$ y $f^{(\nu)}$ en la semirrecta A_0 .

OBSERVACIÓN 11. — De toda relación del tipo

$$B_k \leq A q^k B_0^{1-k/\nu} B_\nu^{k/\nu} \quad \text{con} \quad B_n = n^\gamma M_n \quad (\gamma = 1 - \alpha) \quad (9.6)$$

existente entre las cotas

$$M_n = \sup_{z \in A_\alpha} |f^{(n)}(z)|$$

correspondientes a una función analítica en A_α para $\alpha > 0$ e indefinidamente derivables en A_0 para $\alpha = 0$, se deduce la desigualdad

$$B_n \leq A [e(1+q)]^\gamma B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2}} \quad (9.7)$$

para $n_1 \leq n \leq n_2$.

En particular para $\alpha = 0$ de (9.5) resulta

$$B_n \leq [e(1+e^2)]^\gamma B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2}} \quad (9.8)$$

para $n_1 \leq n \leq n_2$.

En efecto, aplicando la desigualdad (9.6) a $f^{(n_1)}$ con $k=n-n_1$ y $\nu=n_2-n_1$, tendremos

$$M_n \leq A \left(\frac{q \nu}{k}\right)^{\gamma k} M_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_1}} M_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2}}$$

de donde poniendo $u = n_2/n_1$ resulta

$$\begin{aligned} B_n &\leq A \left[\frac{n^\gamma q^{n-n_1}}{n_1^{n_1} (n-n_1)^{n-n_1}} \right]^\gamma [(u-1)u^{\frac{u}{1-u}}]^{\gamma(n-n_1)} B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2}} \\ &\leq A e^{\gamma n} \left[\left(\frac{n}{n_1}\right) q^{n-n_1} \right]^\gamma B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2}} \end{aligned}$$

$$\leq A [e(1+q)]^n \frac{B_{n_1}^{n_2-n}}{B_{n_2}^{n-n_1}}$$

puesto que para $u \geq 1$ es $(u-1)u^{u/(1-u)} \leq 1$, y $n^n \leq e^n n!$

COROLARIO 8. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$ y para la sucesión $\{m_n\}_0^\infty$ que define la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ se tiene

$$0 < \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} = \lambda < \infty, \quad (9.9)$$

la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ coincide con la $C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$.

DEMOSTRACIÓN. — Aplicando la desigualdad (9.3) a cualquier función $f \in C_0\{m_n; A_\alpha\}$ con $n_1 = 0$ y $n_2 = n \rightarrow \infty$, resulta

$$B_n \leq A (\lambda q^\gamma)^n \quad \text{y} \quad M_n \leq A (\lambda q^\gamma)^n n^{(\alpha-1)n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por tanto, $f \in C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$ y

$$C_0\{m_n; A_\alpha\} \subset C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}.$$

De esto se deduce finalmente, teniendo presente

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{(\alpha-1)n}}{m_n}} < \infty,$$

que ambas clases $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ y $C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$ son idénticas.

OBSERVACIÓN 12. — De la misma forma que en el corolario 8, se puede demostrar que si

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ contiene solamente funciones constantes. Recordamos que esta conclusión se demostró por otro camino en el teorema 20.

Dada la sucesión positiva $\{m_n\}_0^\infty$ designaremos por $\{m_n^{(\alpha)}\}_0^\infty$ la sucesión que viene determinada por la condición de que $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^{(\alpha)}\}_0^\infty$ sea la regularizada convexa logarítmica de $\{n^{(1-\alpha)n} m_n\}_0^\infty$ ⁽¹⁹⁾.

TEOREMA 24. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$, las clases $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(\alpha)}; A_\alpha\}$ son idénticas.

⁽¹⁹⁾ En el caso que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} = 0$$

se tomará $m_n^{(\alpha)} = 0$ para $n > 1$ y $m_0^{(\alpha)} = m_0$.

DEMOSTRACIÓN. — Evidentemente, puesto que $m_n^{(\alpha)} \leq m_n$ se tiene

$$C_0 \{m_n^{(\alpha)}; A_\alpha\} \subset C_0 \{m_n; A_\alpha\}.$$

Recíprocamente, de las desigualdades (9.3) se siguen para cada función $f \in C_0 \{m_n; A_\alpha\}$ estas otras

$$|f^{(n)}(z)| \leq A q^{(1-\alpha)n} m_n^{(\alpha)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y, por tanto,

$$C_0 \{m_n; A_\alpha\} \subset C_0 \{m_n^{(\alpha)}; A_\alpha\}.$$

Luego

$$C_0 \{m_n; A_\alpha\} = C_0 \{m_n^{(\alpha)}; A_\alpha\}.$$

TEOREMA 25. — Si f es una función analítica y acotada en el ángulo A_α de amplitud $\alpha\pi > \pi$ e indefinidamente derivable en 0 es válida la desigualdad

$$n^{\gamma n} |f^{(n)}(0)| \leq 4 |e^\gamma|^{-\gamma n} B_{n_1}^{\frac{n_2-n}{n_2-n_1}} B_{n_2}^{\frac{n-n_1}{n_2-n_1}} \quad (n_1 \leq n \leq n_2) \quad (9.10)$$

siendo $\gamma = 1 - \alpha$,

$$B_n = n^{\gamma n} M_n \quad \text{y} \quad M_n = \sup_{z \in A_\alpha} |f^{(n)}(z)| \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

DEMOSTRACIÓN. — Se ve fácilmente que

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^2} f(z t^\gamma) dt \quad (a > 0)$$

es una función analítica en el ángulo A_1 , que no depende de a , puesto que f es acotada y analítica en A_α . Además

$$g^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^{-n\gamma+2}} f^{(n)}(z t^\gamma) dt$$

y, por tanto,

$$|g^{(n)}(z)| \leq \frac{e^a}{2} a^{\gamma n-1} M_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para cada $a > 0$,

$$|g^{(n)}(z)| \leq 2 e^n n^{\gamma n} M_n = 2 e^n B_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(0)| &= \left| \frac{f^{(n)}(0)}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^{-n\gamma+2}} dt \right| \\ &= \frac{|f^{(n)}(0)|}{(-n\gamma+1)!} \geq |e^\gamma|^{-\gamma n} n^{\gamma n} |f^{(n)}(0)|. \end{aligned}$$

De estas desigualdades se deduce inmediatamente (9.10) teniendo presente la desigualdad (9.4) existente entre las cotas de la función g , analítica en A_1 , y de sus derivadas.

§ 10. Funciones características. Clases equivalentes

Se dice que f es una función característica de una clase $C_0\{m_n; \Omega\}$ si pertenece a ella pero no a ninguna otra clase $C_0\{m'_n; \Omega\}$ contenida en $C_0\{m_n; \Omega\}$.

TEOREMA 26. — Toda función analítica en el recinto Ω con el punto frontera 0, que sea indefinidamente derivable en 0 y con las cotas de las derivadas

$$M_n = \sup_{z \in \Omega} |f^{(n)}(z)| \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10.1)$$

finitas, es función característica de la clase $C_0\{M_n; \Omega\}$ pero no de ninguna otra.

DEMOSTRACIÓN. — Se puede proceder de igual forma que en el teorema 6.

TEOREMA 27. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$, toda clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ posee funciones características.

DEMOSTRACIÓN. — En el caso que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} = 0,$$

la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$, según hemos visto en el teorema 20, contiene solamente funciones constantes y entonces el teorema se reduce a una trivialidad, por ser cada función constante una función característica de $C_0\{m_n; A_\alpha\}$.

Si

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} > 0$$

es $m_n^{(\alpha)} \neq 0$ para todo n y poniendo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{[(n+1)\gamma + 1]!} \quad (\gamma = 2 - \alpha)$$

y

$$\beta_n = n^{(1-\alpha)n} m_n^{(\alpha)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

podemos definir como en el teorema 7 la función

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \beta_v \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \right)^{-v} g \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} z \right) \quad (10.2)$$

Esta función, que como se ve fácilmente es entera, tiene sus derivadas en el origen

$$f^{(n)}(0) = a_n = \frac{(-1)^n n! s_n}{[(n+1)_{\gamma} + 1]!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

siendo

$$s_n = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \beta_v \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \right)^{n-v},$$

y pertenece a la clase $C_0\{m_n; A_{\alpha}\} \equiv C_0\{m_n^{(\alpha)}; A_{\alpha}\}$, puesto que por la demostración del teorema 20 resulta

$$|f^{(n)}(z)| \leq \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} \beta_v \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} \right)^{n-v} \left| g^{(n)} \left(\frac{\beta_{v+1}}{\beta_v} z \right) \right| \leq 2 n^{(\alpha-1)n} e^n s_n$$

y por ser $\{\beta_n\}_0^{\infty}$ logarítmicamente convexa se obtiene de igual forma que en el teorema 7,

$$s_n \leq \beta_n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 2 \beta_n = 2 n^{(1-\alpha)n} m_n^{(\alpha)}.$$

Como por otra parte se pueden hallar dos constantes positivas A y q de modo que

$$M_n \geq |a_n| = \frac{n! s_n}{[(n+1)_{\gamma} + 1]!} \geq \frac{1}{2^n} \frac{n! \beta_n}{[(n+1)_{\gamma} + 1]!} \geq \frac{m_n^{(\alpha)}}{A q^n}$$

para todo n , cualquier clase $C_0\{m_n'; A_{\alpha}\}$ que contenga a f contiene también a $C_0\{m_n; A_{\alpha}\} \equiv C_0\{m_n^{(\alpha)}; A_{\alpha}\}$ y, por consiguiente, f es función característica de $C_0\{m_n; A_{\alpha}\}$.

De manera análoga que en el teorema 8, vamos a ver:

TEOREMA 28. — Si la sucesión $\{n^{(1-\alpha')n} m_n\}_0^{\infty}$ es logarítmicamente convexa y $\alpha' > \alpha > 1$, la clase $C_0\{m_n; A_{\alpha}\}$ posee funciones características.

DEMOSTRACIÓN. — Se puede proceder de igual forma que en el teorema 27 tomando

$$\beta_n = n^{(1-\alpha')n} m_n$$

y

$$g(z) = \int_0^{\infty(-\phi)} \exp \{ -z t^{\alpha'-1} - t \} dt$$

para $|\arg z - (\alpha' - 1)\varphi| < \pi/2$ y variando φ en $|\varphi| < \pi(\alpha - 1)/2(\alpha' - 1) = \delta \pi/2 < \pi/2$, porque $\{\beta_n\}_0^{\infty}$ es una sucesión logarítmicamente convexa y g es una función característica de la clase $C_0\{n^{(\alpha'-1)n}; A_{\alpha}\} \equiv C_0\{[(\alpha' - 1)n]!; A_{\alpha}\}$.

Esto último se sigue por ser g analítica en A_α y poderse acotar sus derivadas así:

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(z)| &\leq \int_0^{\infty(-\phi)} |\exp \{-z t^{\alpha'-1} - t\} t^{(\alpha'-1)n} dt| \\ &\leq \int_0^{\infty(-\phi)} |e^{-t} t^{(\alpha'-1)n} dt| \leq \frac{[(\alpha' - 1)n]!}{\cos^{(\alpha'-1)n+1}(\delta \pi/2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

para $z \in A_\alpha$ puesto que entonces se puede elegir φ de modo que

$$|(\alpha' - 1)\varphi - \arg z| < \pi/2 \quad \text{y} \quad |\varphi| \leq \delta \pi/2,$$

y además sus derivadas en el origen valen:

$$g^{(n)}(0) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-t} t^{(\alpha'-1)n} dt = (-1)^n [(\alpha' - 1)n]! \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Como se ve fácilmente, estos resultados se pueden extender en la forma siguiente a recintos más generales:

TEOREMA 29. — Sea $\alpha' = \alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 1$ y $\alpha' > \alpha$ para $\alpha > 1$. Si Ω es un recinto (un intervalo para $\alpha = 0$) contenido en A_α con 0 por punto frontera y $\{n^{(1-\alpha')} m_n\}_0^\infty$ es una sucesión logarítmicamente convexa, la clase $C_0\{m_n; \Omega\}$ contiene funciones características.

Diremos que $C_0\{m_n; \Omega\}$ es una clase no trivial, si contiene funciones no constantes.

TEOREMA 30. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$, existe una clase $C_0\{m_n^*; A_\alpha\}$ mínima no trivial; esto es, contenida en cualquier clase no trivial $C_0\{m_n; A_\alpha\}$. La clase que posee dicha propiedad es $C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$. Por el contrario para $\alpha > 1$ no existe ninguna clase $C_0\{m_n^*; A_\alpha\}$ mínima no trivial.

DEMOSTRACIÓN. — Basta proceder como en el teorema 9, con la salvedad que aquí se deben utilizar los teoremas 20 y 21 en lugar de los teoremas 3, 4 y 5.

TEOREMA 31. — Sea $\alpha' = \alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 1$ y $\alpha' > \alpha$ para $\alpha > 1$. Si Ω es un recinto (un intervalo para $\alpha = 0$) contenido en A_α con 0 por punto frontera y $\{n^{(1-\alpha')} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ es una sucesión logarítmicamente convexa; para que la clase $C_0\{m_n^{(1)}; \Omega\}$ esté contenida en $C_0\{m_n^{(2)}; \Omega\}$ es necesario y suficiente que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(1)}}{m_n^{(2)}}} < \infty. \quad (10.3)$$

DEMOSTRACIÓN. — La suficiencia resulta inmediatamente de la definición de clase.

La necesidad de (10.3) se sigue de que $C_0\{m_n^{(2)}; \Omega\}$ debe contener a la función característica f de $C_0\{m_n^{(1)}; \Omega\}$ que se puede construir en el teorema 29 de forma semejante que en los teoremas 27 y 28 y que goza de la propiedad de que

$$\overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(1)}}{|f^{(n)}(0)|}} < \infty.$$

COROLARIO 9. — Con las mismas notaciones que en el teorema 31, si $\{n^{(1-\alpha')n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{(1-\alpha')n} m_n^{(2)}\}_0^\infty$ son logarítmicamente convexas, para que las clases $C_0\{m_n^{(1)}; \Omega\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; \Omega\}$ sean idénticas (o equivalentes) es necesario y suficiente que

$$0 < \overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(2)}}{m_n^{(1)}}} < \infty, \quad (10.4)$$

esto es, que $\{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}\}_0^\infty$ sean exponencialmente equivalentes.

COROLARIO 10. — Con las mismas notaciones que en el teorema 31, si $\{n^{(1-\alpha')n} m_n\}_0^\infty$ es logarítmicamente convexa, las funciones características f de $C_0\{m_n; \Omega\}$ están caracterizadas por la propiedad de que $\{m_n\}_0^\infty$ sea exponencialmente equivalente a la sucesión $\{M_n\}_0^\infty$ de cotas de las derivadas de f determinada por (10.1).

Teniendo en cuenta el teorema 24, resulta del teorema 31:

TEOREMA 32. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$ y

$$\overline{\lim}_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(1)}}}{n^{\alpha-1}} > 0,$$

para que la clase $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ esté contenida en $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ es necesario y suficiente que

$$\overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(1,\alpha)}}{m_n^{(2)}}} < \infty, \quad (10.5)$$

siendo $\{m_n^{(1,\alpha)}\}_0^\infty$ la sucesión determinada por la condición de que $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^{(1,\alpha)}\}_0^\infty$ sea la regularizada convexa logarítmica de $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$.

COROLARIO 11. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$ y

$$\overline{\lim}_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^{\alpha-1}} > 0$$

para $k = 1$ y $k = 2$, para que las clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ sean equivalentes es necesario y suficiente que

$$0 < \overline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(2,\alpha)}}{m_n^{(1,\alpha)}}} < \infty, \quad (10.6)$$

donde $\{m_n^{(k,\alpha)}\}_0^\infty$ es la sucesión determinada por la condición de que $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^{(k,\alpha)}\}_0^\infty$ sea la regularizada convexa logarítmica de $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^{(k)}\}_0^\infty$.

El corolario 8 se puede completar ahora así:

COROLARIO 12. — Para que la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ sea idéntica a $C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$, en el supuesto que $0 \leq \alpha \leq 1$, es necesario y suficiente que

$$0 < \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} < \infty. \quad (10.7)$$

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, si se verifica (10.7) por el corolario 8 las clases $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ y $C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$ son idénticas, y si

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} = 0 \quad \text{o} \quad \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} = \infty,$$

la clase $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ no puede ser equivalente a $C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$, ya que en el primer caso $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ contiene solamente funciones constantes y en el segundo por el teorema 32 no puede estar contenida en $C_0\{n^{(\alpha-1)n}; A_\alpha\}$ puesto que entonces, como se ve fácilmente, se tendría

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(\alpha)}}{n^{(\alpha-1)n}}} = \infty.$$

COROLARIO 13. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$ y

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-1}} > 0,$$

las funciones características f de $C_0\{m_n; A_\alpha\}$ están caracterizados por la propiedad de que $\{m_n^{(\alpha)}\}_0^\infty$ sea exponencialmente equivalente a la sucesión $\{M_n\}_0^\infty$ de cotas de las derivadas de f determinadas por (10.1).

§ 11. Funciones cuasi-analíticas con las mismas derivadas en el origen

Como ya hemos dicho en el § 5, fue CARLEMAN quien planteó la cuestión de ver si la reunión de dos clases cuasi-analíticas en un intervalo es también una clase cuasi-analítica. Este problema resuelto por SAN JUAN en [16], [17] y [19], fue también estudiado por MANDELBROJT en [9] y BANG en su tesis [1; § 7], siendo este último el que más ha profundizado en esta cuestión para el caso de la recta, pues, ha demostrado el importante:

TEOREMA 33. — Dadas las clases $C\{m_n^{(1)}\}$ y $C\{m_n^{(2)}\}$ de funciones indefinidamente derivables en la recta, para que cualquier función de $C\{m_n^{(1)} + m_n^{(2)}\}$ se pueda descomponer en suma de dos funciones de ambas clases, es necesario y suficiente que las sucesiones $\{\mu_n^{(1)}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{\mu_n^{(2)}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(2)}\}_0^\infty$, que las definen, se puedan elegir de modo que verifiquen las hipótesis H_1 o H_2 de § 5, o sea:

H_1 . Las sucesiones $\{\mu_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{\mu_n^{(2)}\}_0^\infty$ son logarítmicamente convexas.

H_2 . La máxima minorante π de las dos poligonales π_1 y π_2 que tienen por vértices los puntos $(n, \log \mu_n^{(1)})$ y $(n, \log \mu_n^{(2)})$ es convexa.

De forma más modesta y de manera análoga que en el § 5, vamos a estudiar ahora entre otras cosas si es posible encontrar dos funciones distintas, analíticas en el ángulo A_α pertenecientes a las clases $C_0\{m_n^{(1)}\}$; $A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}\}$; $A_\alpha\}$ y con las mismas derivadas angulares en 0. Todo ello naturalmente en el supuesto que $\{m_n\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(1)} + m_n^{(2)}\}_0^\infty$ no verifique la condición $C_{\alpha+1}$.

TEOREMA 34. — Sean $m_n = m_n^{(1)} + m_n^{(2)}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 \leq \delta \leq 1 - \alpha$, si $\{n^{\delta n} m_n\}_0^\infty$ no satisface la condición $C_{\alpha+1+\delta}$ y las sucesiones $\{n^{\delta n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{\delta n} m_n^{(2)}\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 , se pueden encontrar un par de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes respectivamente a las clases $C_0\{m_n^{(1)}\}$; $A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}\}$; $A_\alpha\}$ y con las mismas angulares en 0.

DEMOSTRACIÓN. — Aunque la demostración es análoga a la de los teoremas 11 y 13 creemos conveniente desarrollarla. En primer lugar, probaremos el caso $0 \leq \delta < 1 - \alpha$. Como $\{\overline{m}_n\}_0^\infty \equiv \{n^{\delta n} m_n\}_0^\infty$ no cumple la condición $C_{\alpha+1+\delta}$ existe una función $g_0 \neq 0$ analítica en el ángulo $|\arg(-z)| < (\alpha + 1 + \delta)\pi/2$, continua en su contorno Γ formado por las semirrectas $\arg z = \pm(1 - \alpha - \delta)\pi/2$ y tal que

$$|g_0(z)z^n| \leq m_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

de donde se deduce que

$$g(z) = \frac{g_0(z)}{(z-1)^2}$$

es una función analítica en el mismo ángulo con

$$|g(z)z^n| \leq \frac{\overline{m}_n}{|z-1|^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por otra parte, según la demostración del teorema 20,

$$h(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^n}{[(n+1)\gamma+1]!} \quad (\gamma = 1 + \delta = 2 - (1 - \delta))$$

es una función entera con las derivadas

$$|h^{(n)}(z)| \leq \frac{2n! e^n}{n^{\delta n}} \leq \frac{2 e^n}{n^{\delta n}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

en el ángulo $|\arg z| \leq (1 - \delta) \pi/2$. Por consiguiente, por el lema 5 se puede determinar $a > 0$ de forma que la integral

$$\int_{\Gamma} \frac{h(xt) g(t)}{t - a} dt$$

no sea idénticamente nula para $x > 0$ ⁽²⁰⁾.

La función

$$G(z) = \frac{g(z)}{z - a}$$

construida con este valor de a es una función analítica en el ángulo $|\arg(-z)| < (\alpha + 1 + \delta) \pi/2$, continua en Γ con

$$|(z - 1)^2 G(z) z^n| \leq A \overline{m}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $|\arg(-z)| \leq (\alpha + 1 + \delta) \pi/2$ y una constante $A > 0$, y

$$\int_{\Gamma} G(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por tanto, por el teorema 17 [19; 36] de SAN JUAN, se puede descomponer $(t-1)^2 G(t)$ sobre Γ en diferencia de dos funciones $(t-1)^2 G_2(t)$ y $(t-1)^2 G_1(t)$ tales que

$$|G_k(t) t^n| \leq \frac{A_k q_k^n \overline{m}_n^{(k)}}{|t - 1|^2} \quad (k = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \in A$, $\overline{m}_n^{(k)} = n^{\delta n} m_n^{(k)}$ y ciertas constantes positivas A_k y q_k .

Así se obtiene que

$$f_k(z) = \int_{\Gamma} h(zt) G_k(t) dt \quad (k = 1, 2)$$

es una función analítica en el ángulo A_{α} para $\alpha > 0$ e indefinidamente derivable en la semirrecta A_0 para $\alpha = 0$ ($\alpha = (1 - \delta) - (1 - \alpha - \delta)$) perteneciente a la clase $C_0 \{m_n^{(k)}; A_{\alpha}\}$, pues,

$$|f_k^{(n)}(z)| \leq \int_{\Gamma} |h^{(n)}(zt) t^n G_k(t) dt|$$

⁽²⁰⁾ Así como para $\alpha > 0$ y cada $x > 0$, según el lema 5, se pueden encontrar valores $a > 0$ de modo que dicha integral sea distinta de cero, esto no es posible para $\alpha = 0$, como veremos y sacaremos de ello partido en el teorema 35.

$$\leq \frac{2 e^n}{n^{\delta n}} \int_{\Gamma} |G_k(t) t^n d t|$$

$$\leq B_k (eq_k)^n \frac{\overline{m_n^{(k)}}}{n^{\delta n}} = B_k (eq_k)^n m_n^{(k)}$$

para $z \in A_\alpha$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y $B_k > 0$.

Además,

$$f_2^{(n)}(0) - f_1^{(n)}(0) = h^{(n)}(0) \int_{\Gamma} [G_2(t) - G_1(t)] t^n d t$$

$$= h^{(n)}(0) \int_{\Gamma} G(t) t^n d t = 0$$

y $f_1 \neq f_2$ puesto que

$$f_2(x) - f_1(x) = \int_{\Gamma} h(x t) G(t) = \int_{\Gamma} \frac{h(x t) g(t)}{t - a} d t \neq 0$$

para $x > 0$.

Sea $\delta = 1 - \alpha$. Entonces, como por hipótesis $\{\overline{m_n}\}_0^\infty \equiv \{n^{\delta n} m_n\}_0^\infty$ no satisface la condición C_2 existe por el teorema 4 de [16; 339] una función $G \neq 0$, continua en $A_0 = (0, \infty)$, con los momentos

$$\int_0^\infty G(t) t^n d t = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y

$$|G(t) t^n| \leq \frac{\overline{m_n}}{(1+t)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \geq 0$. Por tanto, se puede descomponer de igual forma que antes, G en diferencia de dos funciones G_2 y G_1 tales que

$$|G_k(t) t^n| \leq \frac{A_k q_k^n \overline{m_n^{(k)}}}{(1+t)^2} \quad (k = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots)$$

para $t \geq 0$, $\overline{m_n^{(k)}} = n^{\delta n} m_n^{(k)}$ y ciertas constantes positivas A_k y q_k .

Sea

$$h(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^n}{[(n+1)^\gamma + 1]!} \quad (\gamma = 1 + \delta = 2 - \alpha),$$

entonces

$$f_k(z) = \int_0^\infty h(z t) G_k(t) d t$$

es una función analítica en A_α para $\alpha > 0$ e indefinidamente derivable en A_0 para $\alpha = 0$, y perteneciente a la clase $C_0\{m_n^{(k)}; A_\alpha\}$, pues, como se ve fácilmente

$$\begin{aligned} |f_k^{(n)}(z)| &\leq \int_0^\infty |t^n h^{(n)}(z t) G_k(t)| dt \\ &\leq B_k (eq_k)^n n^{-\delta n} \int_0^\infty \frac{\overline{m_n^{(k)}}}{(1+t)^2} dt \\ &= B_k (eq_k)^n n^{-\delta n} \overline{m_n^{(k)}} = B_k (eq_k)^n m_n^{(k)}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f_2^{(n)}(0) - f_1^{(n)}(0) = h^{(n)}(0) \int_0^\infty G(t) t^n dt = 0$$

y $f_1 \neq f_2$ puesto que si fuese $f_1 = f_2$ resultaría

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{G(t)}{z^2(z^\gamma + t)} dt &= \int_0^\infty G(t) \int_0^\infty e^{-zu} h(u^\gamma t) u^{\gamma+1} du \\ &= \int_0^\infty e^{-zu} u^{\gamma+1} du \int_0^\infty h(u^\gamma t) G(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zu} u^{\gamma+1} f(u) du = 0 \quad (f = f_2 - f_1) \end{aligned}$$

para $\operatorname{Re} z > 0$ y

$$\int_0^\infty \frac{G(t)}{t+z} dt = 0$$

para $|\arg z| < \pi$ y, por tanto, $G = 0$.

Como consecuencia de este teorema y del lema 3 resulta:

COROLARIO 14. — Si $0 \leq \alpha \leq 1$, cualquiera que sea la sucesión positiva $\{\lambda_n\}_0^\infty$ con

$$\lim_n \frac{\lambda_n}{n^{\alpha-1}} = \infty$$

y $\alpha' > \alpha$, existe un par de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes respectivamente a dos clases, $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_{\alpha'}\}$, tales que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^{\alpha'+1}} = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (11.1)$$

y con las mismas derivadas angulares en 0. Además las sucesiones $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^{(2)}\}_0^\infty$ se pueden elegir logarítmicamente convexas.

OBSERVACIÓN 13. — Si en el corolario 14 se elige la sucesión $\{\lambda_n\}_0^\infty$ de forma que

$$\lim_n \frac{\lambda_n}{n^{\alpha+1}} < \infty$$

se sigue

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^{\alpha+1}} = 0$$

y, por tanto, que ambas clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ son cuasi-analíticas.

En el caso $\alpha=0$ se puede mejorar el teorema 34 en la forma siguiente:

TEOREMA 35. — Sean $m_n = m_n^{(1)} + m_n^{(2)}$, $0 \leq \delta \leq 1$ y $x_0 > 0$, si $\{n^{\delta n} m_n\}_0^\infty$ no satisface la condición $C_{1+\delta}$ y las sucesiones $\{n^{\delta n} m_n^{(1)}\}_0^\infty$ y $\{n^{\delta n} m_n^{(2)}\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 , se pueden encontrar un par de funciones indefinidamente derivables y distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes respectivamente, a las clases $C\{m_n^{(1)}; A_0\}$ y $C\{m_n^{(2)}; A_0\}$ y tales que $f_1(x) = f_2(x)$ para $x \leq x_0$.

DEMOSTRACIÓN. — Siendo

$$h(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^\gamma}{[(n+1)^\gamma + 1]!} \quad (\gamma = 1 + \delta = 2 - (1 - \delta))$$

una función entera tal que $|h(z)| \leq 2$ sobre las semirrectas

$$\arg z = \pm (1 - \delta) \pi/2$$

y

$$|h(z)| \leq \sum_0^\infty \frac{\rho^n}{(\gamma n)!} < A_\epsilon e^{(1+\epsilon)\rho^{1/\gamma}}$$

sobre la circunferencia $|z| = \rho$ para cada $\epsilon > 0$ y $A_\epsilon > 0$, por un teorema de HEINS [6; 242] resulta

$$|h(z)| < 2 |\exp \{(-z)^{1/\gamma}\}|$$

para $|\arg(-z)| < \gamma \pi/2$.

Por tanto, si $g_0 \neq 0$ es la función que se puede construir de manera semejante a la del teorema 34 para $\alpha = 0$, poniendo

$$g(z) = \frac{\exp \{-(x_0 z)^{1/\gamma}\}}{(1 + (-z)^{1/2})^4} g_0(z),$$

tendremos para $\delta < 1$ que la integral

$$\int_{\Gamma} \frac{h(xt)g(t)}{t-z} dt,$$

extendida a lo largo de la línea Γ formada por las semirrectas $\arg t = \pm (1-\delta)\pi/2$, es idénticamente nula en el ángulo $|\arg z| < (1-\delta)\pi/2$ para $0 \leq x < x_0$, pero no para todo $x > 0$ según el lema 5, por tanto como podemos determinar $a > 0$ de forma que

$$\int_{\Gamma} \frac{h(xt)g(t)}{t-a} dt \neq 0,$$

si ponemos

$$G(z) = \frac{g(z)}{z-a} \quad (|\arg(-z)| \leq (1+\delta)\pi/2),$$

y procedemos del mismo modo que en el teorema 34 queda demostrado el teorema.

En el caso $\delta = 1$ se llega a la misma conclusión poniendo

$$G(t) = g(t+i0) - g(t-i0) \quad (t \geq 0)$$

y observando que

$$\int_0^\infty G(t) \frac{\operatorname{sen}(xt)^{1/2} + (xt)^{1/2}}{(xt)^{3/2}} dt \equiv \int_0^\infty G(t) h(xt) dt = 0$$

para $0 \leq x \leq x_0$ pero no para todo $x \geq 0$, puesto que en caso contrario, siendo

$$\begin{array}{lll} G(t) = O(1) & \text{y} & h(t) = O(1) \quad \text{para } t \rightarrow 0 \\ G(t) = O(1/t) & \text{y} & h(t) = O(1/t) \quad \text{para } t \rightarrow \infty \end{array}$$

por el lema 4 resultaría $g(t+i0) - g(t-i0) = G(t) = 0$ para $t > 0$, por lo que sería g una función entera y, por tanto, $g = C^{te} = 0$ y $g_0 = 0$.

TEOREMA 36. — Dada una sucesión positiva $\{\mu_n\}_0^\infty$ que no verifique la condición $C_{\alpha-1}$ para $\alpha > 1$, si $\{m_n/\mu_n\}_0^\infty \equiv \{(m_n^{(1)} + m_n^{(2)})/\mu_n\}_0^\infty$ no satisface la condición C_2 y el par de sucesiones $\{m_n^{(1)}/\mu_n\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}/\mu_n\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 , se puede encontrar un par de funciones analíticas distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes respectivamente a las clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ y con las mismas derivadas angulares en 0.

DEMOSTRACIÓN. — Como por hipótesis $\{\bar{m}_n^{(1)}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(1)}/\mu_n\}_0^\infty$ y $\{\bar{m}_n^{(2)}\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(2)}/\mu_n\}_0^\infty$ satisfacen H_1 y H_2 , y $\{\bar{m}_n\}_0^\infty \equiv \{\bar{m}_n^{(1)} + \bar{m}_n^{(2)}\}_0^\infty$ no verifica C_2 , se pueden encontrar por el teorema 34 dos funciones $g_1 \neq g_2$ pertenecientes a las clases $C_0\{\bar{m}_n^{(1)}; A_1\}$ y $C_0\{\bar{m}_n^{(2)}; A_1\}$, respectivamente, y

con las mismas derivadas angulares en 0. Sea F la función construida en el lema 1 para $m_n = \mu_n$ y $\gamma = \alpha - 1$, entonces poniendo

$$f_k(z) = \int_0^{\infty (-\phi/\gamma)} F(t) g_k(z t^\gamma) dt \quad (k = 1, 2)$$

para $|\arg z| < \alpha \pi/2$ y eligiendo ϕ de manera que $|\phi - \arg z| < \pi/2$ y $|\phi| < (\alpha - 1) \pi/2$, resulta de igual forma que en el teorema 12 que las funciones analíticas f_1 y f_2 pertenecen respectivamente a las clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$, con las derivadas angulares

$$f_1^{(n)}(0) = g_1^{(n)}(0) \int_0^\infty F(t) t^{n\gamma} dt = g_2^{(n)}(0) \int_0^\infty F(t) t^{n\gamma} dt = f_2^{(n)}(0).$$

Finalmente, $f_1 \neq f_2$. En efecto, si fuese $f_1 = f_2$ se tendría

$$\int_0^\infty F(t^{1/\gamma}) t^{1/\gamma-1} g(x t) dt \equiv 0$$

para $x > 0$ y $g = g_2 - g_1$, de donde resultaría por el lema 4, teniendo presente que

$$\begin{array}{lll} F(t^{1/\gamma}) t^{1/\gamma-1} = O(t^{-1}) & \text{y} & g(t) = O(t) \quad \text{para } t \rightarrow 0 \\ F(t^{1/\gamma}) t^{1/\gamma-1} = O(t^{-2}) & \text{y} & g(t) = O(1) \quad \text{para } t \rightarrow \infty, \end{array}$$

$g_2 - g_1 = g = 0$ o $F = 0$, lo que va contra la construcción realizada.

COROLARIO 15. — Si $\alpha > 1$, cualquiera que sea la sucesión positiva y no decreciente $\{\lambda_n\}_0^\infty$ que haga convergente a la serie

$$\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n}$$

se puede encontrar un par de funciones analíticas distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes respectivamente a dos clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ tales que

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n^{\alpha-1}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{\lambda_n^{\alpha+1}} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (11.2)$$

DEMOSTRACIÓN. — Se puede proceder como en el corolario 3 pero aplicando el teorema 36 en lugar del teorema 12.

OBSERVACIÓN 14. — Si en el corolario 15 se elige la sucesión $\{\lambda_n\}_0^\infty$ de forma que

$$\lim_n \frac{\lambda_n^{\alpha-1}}{n^{\alpha+1}} < \infty,$$

se sigue

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^{\alpha+1}} < \infty \quad (k = 1, 2)$$

y, por tanto, que ambas clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha\}$ son cuasi-analíticas.

Eligiendo en el corolario 14 $0 < \alpha \leq 1$ y la sucesión $\{\lambda_n\}_0^\infty$ de forma que

$$\overline{\lim}_n \frac{\lambda_n}{n} < \infty,$$

lo que es evidentemente posible, resulta la existencia de pares de funciones $f_1 \neq f_2$, indefinidamente derivables en $x \geq 0$, con todas las derivadas iguales en $x = 0$, analíticas para $x > 0$ y pertenecientes a clases cuasi-analíticas en la semirrecta $x \geq 0$. Ahora vamos a ir más lejos construyendo un par de funciones $f_1 \neq f_2$, indefinidamente derivables en la recta, analíticas para $x \neq 0$, iguales para $x < 0$ y pertenecientes a sendas clases cuasi-analíticas en la recta. En otras palabras, existen funciones analíticas en un intervalo (a, b) que admiten prolongaciones cuasi-analíticas distintas en la recta.

TEOREMA 37. — Si $\{m_n/(\alpha n)!\}_0^\infty \equiv \{(m_n^{(1)} + m_n^{(2)})/(\alpha n)!\}_0^\infty$ no cumple la condición C_1 y las sucesiones $\{m_n^{(1)}/(\alpha n)!\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}/(\alpha n)!\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 , existe un par de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, analíticas en el ángulo completo $A_\alpha^{(2)}$: $|\arg(\pm z)| < \alpha \pi/2$, iguales en $|\arg(-z)| < \alpha \pi/2$, con derivadas angulares en 0 dentro de cada ángulo completo $A_{\alpha-\delta}^{(2)}$ con $0 < \delta < \alpha$, y tales que

$$|f_k^{(n)}(z)| \leq A_k q_k^n m_n^{(k)} \cos^{-(\alpha n+1)}(\theta/\alpha) \quad (k = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (11.3)$$

para $z = \pm r e^{i\theta}$, $r > 0$ y $|\theta| < \alpha \pi/2$, y ciertas constantes positivas A_k y q_k^* .

DEMOSTRACIÓN. — Como $\{m_n\}_0^\infty \equiv \{m_n/(\alpha n)!\}_0^\infty$ no cumple la condición C_1 se puede construir una función $g \neq 0$, indefinidamente derivable en la recta R , igual a cero para $x \leq 0$ y perteneciente a la clase $C_0\{\overline{m_n}; R\}$. Por otra parte, por el teorema 33 existen dos funciones, $g_1 \neq g_2$, pertenecientes a las clases $C_0\{m_n^{(1)}/(\alpha n)!\}; R\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}/(\alpha n)!\}; R\}$, respectivamente, y cuya diferencia $g_2 - g_1 = g$. Entonces, las funciones f_1 y f_2 definidas por

$$f_k(z) = \frac{1}{\alpha z^{1/\alpha}} \int_0^\infty \exp\{- (t/z)^{1/\alpha}\} t^{1/\alpha-1} g_k(t) dt \quad \text{para } |\arg z| < \alpha \pi/2, \quad (11.4)$$

$$f_k(z) = \frac{1}{\alpha (-z)^{1/\alpha}} \int_0^\infty \exp\{- (-t/z)^{1/\alpha}\} t^{1/\alpha-1} g_k(-t) dt \quad \text{para } |\arg(-z)| < \alpha \pi/2$$

y

$$f_k(0) = g_k(0),$$

* Este teorema es más preciso que el teorema 2 de [5].

son evidentemente analíticas en $A_\alpha^{(2)}$, iguales en $|\arg(-z)| < \alpha\pi/2$, pero no idénticas en $|\arg z| < \alpha\pi/2$. Además, como

$$f_k(x e^{i\theta}) = e^{-i\theta/\alpha} \int_0^\infty \exp\{-t e^{-i\theta/\alpha}\} g_k(x t^\alpha) dt$$

para $x \in R$ y $|\theta| < \alpha\pi/2$, se sigue que $\varphi_k(x) = f_k(x e^{i\theta})$ es una función indefinidamente derivable en R tal que

$$\varphi_k^{(n)}(x) = f_k^{(n)}(x e^{i\theta}) e^{in\theta} = e^{-i\theta/\alpha} \int_0^\infty \exp\{-t e^{-i\theta/\alpha}\} t^{\alpha n} g_k^{(n)}(x t^\alpha) dt$$

en cada dirección $\arg(\pm x e^{i\theta}) = \theta$ con $|\theta| < \alpha\pi/2$, y

$$\begin{aligned} |f_k^{(n)}(x e^{i\theta})| &\leq \int_0^\infty \exp\left\{-t \cos \frac{\theta}{\alpha}\right\} t^{\alpha n} A_k q_k^n \frac{m_n^{(k)}}{(\alpha n)!} dt \\ &= A_k q_k^n m_n^{(k)} \cos^{-(\alpha n+1)}(\theta/\alpha) \quad (k = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

de donde se deduce por el lema 8 que f_k tiene derivadas angulares $f_k^{(n)}(0) = (\alpha n)! g_k^{(n)}(0)$ en $x=0$ dentro de cada ángulo $A_{\alpha-\delta}^{(2)}$: $|\arg(\pm z)| < (\alpha-\delta)\pi/2$ de amplitud $(\alpha-\delta)\pi < \alpha\pi$, aunque no necesariamente para $\delta = 0$. Precisamente, esto se afirma en el siguiente:

TEOREMA 38. — Sea $\{\mu_n\}_0^\infty$ una sucesión positiva que no cumpla la condición C_α . Si $\{m_n/\mu_n\}_0^\infty \equiv \{m_n^{(1)} + m_n^{(2)}/\mu_n\}_0^\infty$ no cumple la condición C_α y las sucesiones $\{m_n^{(1)}/\mu_n\}_0^\infty$ y $\{m_n^{(2)}/\mu_n\}_0^\infty$ verifican las hipótesis H_1 y H_2 , existe un par de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, analíticas en $A_\alpha^{(2)}$, iguales en $|\arg(-z)| < \alpha\pi/2$ y pertenecientes a las clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha^{(2)}\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha^{(2)}\}$.

DEMOSTRACIÓN. — Puede desarrollarse de manera análoga que en el teorema 37 pero empleando en lugar de (11.4) la transformación

$$f_k(z) = z^{-1/\alpha} \int_0^\infty F[t/(\pm z)^{1/\alpha}] g_k(\pm t) dt, \quad (11.5)$$

en donde F es la función construida en el lema 1 para $m_n = \mu_n$ y $\gamma = \alpha$. Para demostrar en este caso que $f_1 \neq f_2$ se puede utilizar el lema 4.

COROLARIO 16. — Si la sucesión positiva $\{\mu_n\}_0^\infty$ no cumple la condición C_α y $\alpha > 0$, existen pares de funciones analíticas distintas, $f_1 \neq f_2$, pertenecientes, respectivamente, a dos clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha^{(2)}\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha^{(2)}\}$ tales que

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{m_n^{(k)}}{\mu_n}} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (11.6)$$

OBSERVACIÓN 15. — *Eligiendo en el corolario 16 la sucesión $\{\mu_n\}_0^\infty$ de modo que*

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{\mu_n}}{n^{\alpha+1}} < \infty,$$

se sigue

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n^{(k)}}}{n^{\alpha+1}} < \infty \quad (k = 1, 2)$$

y, por tanto, que ambas clases $C_0\{m_n^{(1)}; A_\alpha^{(2)}\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; A_\alpha^{(2)}\}$ son cuasi-analíticas.

Si además

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{\mu_n}}{n} < \infty,$$

las clases $C_0\{m_n^{(1)}; R\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; R\}$ son también cuasi-analíticas, resultando así:

COROLARIO 17. — *Existen pares de funciones distintas, $f_1 \neq f_2$, indefinidamente derivables en la recta analítica para $x \neq 0$, iguales para $x < 0$ y pertenecientes a sendas clases cuasi-analíticas en R .*

§ 12. La clase $C_0\{n^{(\alpha+1)n}; \Omega'_\alpha\}$

De igual forma que SAN JUAN para las clases semi-analíticas [19;60] y BANG para las clases cuasi-analíticas en la recta [1; § 7] podemos enunciar aquí:

TEOREMA 39. — *Si f y f^* pertenecen respectivamente a las clases cuasi-analíticas $C_0\{n^{\alpha n}; \Omega'_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^*; \Omega'_\alpha\}$ con las mismas derivadas angulares en el origen, resulta $f = f^*$.*

DEMOSTRACIÓN. — Basta tener presente que si $\{m_n^*\}_0^\infty$ verifica la condición $C_{\alpha+1}$, la sucesión $\{m_n^* + n^{(\alpha+1)n}\}_0^\infty$ la verifica también.

LEMA 9. — *Sea $\{n^{(1-\alpha)n} m_n^*\}_0^\infty$ una sucesión logarítmicamente convexa y $0 \leq \alpha \leq 1$. Si la clase $C_0\{m_n^*; \Omega'_\alpha\}$ no está contenida en $C_0\{n^{(\alpha+1)n}; \Omega'_\alpha\}$ y $\Omega'_\alpha \subset A_\alpha$ existen dos clases semi-analíticas $C_0\{m_n^{(1)}; \Omega'_\alpha\}$ y $C_0\{m_n^{(2)}; \Omega'_\alpha\}$ que verifican las hipótesis del teorema 35 para $\delta = 1 - \alpha$, siendo además la primera una clase parcial de $C_0\{m_n^*; \Omega'_\alpha\}$.*

DEMOSTRACIÓN. — Es una consecuencia del lema 7.

TEOREMA 40. — *En el supuesto que el conjunto Ω'_α con 0 por punto frontera, esté contenido en A_α , $0 \leq \alpha \leq 1$, si toda función cuasi-analítica*

f en Ω'_α con las mismas derivadas que una función f^* de $C_0\{m_n; \Omega_\alpha\}$ es idéntica a f^* la clase $C_0\{m_n; \Omega'_\alpha\}$ está contenida en $C_0\{n^{(\alpha+1)n}; \Omega'_\alpha\}$.

DEMOSTRACIÓN. — Se puede proceder de igual modo que en el teorema 16, utilizando el lema 9 y el teorema 35 en lugar del lema 6 y de los teoremas 11 y 13, ya que por el teorema 24 puede suponerse la sucesión $\{n^{(1-\alpha)n} m_n\}_0^\infty$ logarítmicamente convexa.

TEOREMA 41. — La intersección de todas las clases $C_0\{m_n; \Omega'_\alpha\}$ no cuasi-analíticas en Ω'_α es la clase

$$C_0\{n^{(\alpha+1)n}; \Omega'_\alpha\}.$$

DEMOSTRACIÓN. — Basta proceder como en el teorema 7.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BANG, T.: *On quasi analytiske Funktioner*. Tesis, Copenhagen, 1946.
- [2] CARLEMAN, T.: *Les fonctions quasi analytiques*. París, Gauthier-Villars, 1926.
- [3] CARTAN, H.: *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives*. Act. Sc. et Ind. núm. 867, 1940.
- [4] CARTAN, H. y S. MANDELPROJT: *Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables*. Acta Math., t. 72, (1940), pág. 31.
- [5] GORNY, A.: *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle*. Acta Math., t. 71, (1939), 317-358.
- [6] HEINS, M.: *On the Phragmén-Lindelöf Principle*. Trans. Amer. Math. Soc., t. 60, (1946), pág. 242.
- [7] KOLMOGOROFF, A.: *Une généralisation de l'inégalité de J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction*. C. R. Acad. Sc., t. 207, (1938), 764-765.
- [8] MANDELPROJT, S.: *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions*. París, Gauthier-Villars, 1935.
- [9] MANDELPROJT, S.: *Sur les fonctions indéfiniment dérivables*. Acta Math., t. 72, (1940), 15-29.
- [10] MANDELPROJT, S.: *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications*. París, Gauthier-Villars, 1952.
- [11] OSTROWSKI, A.: *Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen*. Acta Math., t. 53, (1930), 181-266.
- [12] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Moments de fonctions analytiques et problème de Watson*. C. R. Acad. Sc., t. 9, (1956), 359-382.
- [13] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Complemento a un teorema de Ahlfors-Heins sobre funciones sub-armónicas*. Rev. de la Acad. de Ciencias de Zaragoza, t. 9, (1954), Fasc. 2.º, 119-125.
- [14] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Funciones con momentos nulos*. Rev. de la Real Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, t. 49, (1955), 331-368.
- [15] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Los problemas de unicidad en la teoría de series asintóticas. Expresión de funciones semi-analíticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes*. Rev. de la Real Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, t. 50, (1956), 191-227.

- [16] SAN JUAN, R.: *Sur le problème de Watson de la théorie de séries asymptotiques et solution a un problème de M. Carleman*. Atti du Congress international de mathematiciens, t. 2, 1936.
- [17] SAN JUAN, R.: *Sur le problème de Watson dans la théorie des series asymptotiques et solution d'un problème de Carleman de la theorie des fonctions quasi-analytiques*. Acta Math., t. 75, (1942), 241-254.
- [18] SAN JUAN, R.: *Sumación de series divergentes y aproximación asintótica óptima*. Monografías de la R. Acad. de Ciencias de Madrid, 1942.
- [19] SAN JUAN, R.: *El problema de Watson y las clases semi-analíticas*. Publicaciones del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1955.
- [20] WATSON, G. N.: *A theory of asymptotic series*. Trans. Roy. Soc., A., t. 241, (1911), 279-313.
- [1]* RAMÍREZ DURO, D.: *Series asintóticas débiles*. Rev. de la Acad. de Ciencias de Zaragoza, t. 14, (1959), Fasc. 2.º, 19-62.
- [2]* RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo*. Rev. Las Ciencias, Madrid. Año XXIII, (1958), 533-539.
- [3]* RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo*. Annali di Mat. pura ed appl. (IV), t. 48, (1959), 147-159.
- [4]* RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzioni caratteristiche*. Boll. Unione Mat. Italiana (3), t. 14, (1959), 525-531.
- [5]* RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Solución de un problema de Bang de la teoría de clases cuasi-analíticas*. Rev. Las Ciencias, Madrid. Año XXV, (1960), 257-261.
- [6]* RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico*. Rev. de la Acad. de Ciencias de Zaragoza, t. 16 (1961), Fasc. 1.º, 47-51.
- [7]* SAN JUAN, R.: *Los ingégalités de Gorny-Cartan pour des développements asymmptotiques*. C. R. Acad. Sci. París, t. 248, (1959), 3676-3678.
- [8]* SAN JUAN, R.: *Las desigualdades de Gorny-Cartan para las cotas de los desarrollos asintóticos en un ángulo*. Rev. Mat. Hispano-Amer., t. 19, (1959), 122-151.

Seminario Matemático
Universidad de Zaragoza

ESTUDIO LOCAL PARTICULAR DE UNA CORRESPONDENCIA BIRRACIONAL

p o r

JOSÉ JAVIER ETAYO

Al estudiar, en los entornos de un punto invariante, una correspondencia birracional entre dos variedades superpuestas, se puede ver cómo tal correspondencia induce sobre cada uno de los entornos de órdenes sucesivos otra correspondencia birracional, que será una proyectividad en el primer entorno, una transformación cuadrática en el segundo, etc.

La proyectividad subordinada en el primer entorno es una afinidad definida en el espacio tangente a la variedad, que es un espacio afín "centrado". Se pueden estudiar para ella las direcciones, de cada dimensión, que permanecen invariantes. Entonces, si dos figuras que se corresponden birracionalmente son tangentes en el punto invariante, la dirección de la variedad lineal tangente será invariante en esa correspondencia.

De igual modo, pasando a la correspondencia cuadrática definida en el segundo entorno, dos figuras que tengan un contacto de segundo orden se transformarán mediante esa correspondencia cuadrática en otras dos que tienen también un contacto de segundo orden. Y así sucesivamente.

Esto da entonces un procedimiento sencillo para calcular, por ejemplo, curvas de un determinado grado que tengan en ciertos puntos contactos de orden dado con otras curvas conocidas y cumplan además otras condiciones. O problemas de tipos análogos.

Esta nota fue redactada hace algunos años, cuando el autor se iniciaba en el manejo del instrumento algebraico, y en ella se trataba fundamentalmente de relacionar, para su mejor comprensión, los conceptos de correspondencias birracionales y algebraicas. Esto hace que, al resucitarla ahora, conservando casi totalmente la redacción original, parezca alargarse innecesariamente la preparación teórica, ya que para este tema concreto bastaba con servirse directamente de las correspondencias birracionales. No era éste, sin embargo, el fin del trabajo, sino el de servir de ejercicio de entrenamiento al autor, y en ese sentido está escrito, aunque posiblemente ya no tenga otro valor que el sentimental que para él supone de ser uno de los primeros artículos que compuso.

Como es bien sabido, se debe a ZARISKI la teoría aritmética de las correspondencias birracionales, que él construyó para resolver el problema de la reducción de singularidades en variedades algebraicas tridimensionales. En su memoria O. ZARISKI: *Foundations of a general theory of biratio-*

nal correspondences, Trans. Am. Math. Soc., 53 (1943), establece las bases que permiten desarrollar esta teoría sobre un cuerpo arbitrario, k . En ella, si V y V' son dos variedades proyectivas de puntos generales,

$$(\xi_0, \dots, \xi_n), \quad (\xi'_0, \dots, \xi'_m), \quad (1)$$

respectivamente, se les puede asignar a cada una dos cuerpos de funciones racionales: los

$$\Sigma = k(\xi_0, \dots, \xi_n), \quad \Sigma' = k(\xi'_0, \dots, \xi'_m),$$

respectivamente, y los

$$K = k(\eta_1, \dots, \eta_n), \quad K' = k(\eta'_1, \dots, \eta'_m),$$

engendrados por las coordenadas no homogéneas, en los que

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}, \quad \eta'_h = \frac{\xi'_h}{\xi'_0}, \quad i = 1, \dots, n; \quad h = 1, \dots, m; \quad (2)$$

estos últimos permitirán establecer localmente las propiedades de aquellas subvariedades para las cuales sea, en cada caso, $\xi_0 \neq 0$, $\xi'_0 \neq 0$. Aquellas otras en las que esto no se verifica se estudian también localmente tomando como divisor otra coordenada no nula sobre ellas. El cuerpo Σ es una extensión transcendente simple de K y éste consta de todos los elementos de Σ que son homogéneos de grado cero.

Pues bien, si son V y V' birracionalmente equivalentes, los cuerpos K y K' son isomorfos sobre k y, salvo un automorfismo, podemos identificarlos: identificación que se extiende igualmente de modo natural a Σ y a Σ' . Equivale esto a considerar, para cada una de estas identificaciones, a V y V' como modelos proyectivos de un mismo cuerpo K . Entonces, dos subvariedades

$$W \subset V \quad \text{y} \quad W' \subset V'$$

de estas variedades se dirán correspondientes en la correspondencia birracional determinada por la identificación de K y K' , cuando existe una valoración v de K tal que W y W' sean, respectivamente, los centros de v en V y en V' .

Esta definición así establecida para las correspondencias birracionales no es válida para correspondencias algebraicas entre V y V' , puesto que en este caso no son isomorfos K y K' . Pero, entonces, llamando

$$P = k[\xi_0, \dots, \xi_n], \quad P' = k[\xi'_0, \dots, \xi'_m]$$

a los anillos homogéneos de polinomios sobre V y V' , formaremos la variedad doble V^* correspondiente al anillo bihomogéneo

$$P^* = k[\xi_0, \dots, \xi_n; \xi'_0, \dots, \xi'_m],$$

cuyo cuerpo de cocientes denotaremos por

$$\Sigma^* = k(\xi_0, \dots, \xi_n; \xi'_0, \dots, \xi'_m).$$

Esta variedad doble es la que nos permite establecer la correspondencia algebraica entre V y V' .

En efecto, Σ y Σ' son ahora subcuerpos de Σ^* , por lo que cada valoración v^* de Σ^* , al restringirse a ambos subcuerpos Σ y Σ' según las valoraciones v y v' , respectivamente, define sobre las variedades V y V' sendas subvariedades W y W' que son, respectivamente, los centros de v y v' sobre ellas. Diremos entonces que W' es la transformada de W en la correspondencia algebraica así definida. Esta es la idea de ABELLANAS, que generaliza la de ZARISKI, y que ha sido estudiada en varias memorias, de las que utilizaremos las dos siguientes:

P. ABELLANAS: *Théorie arithmétique des correspondances algébriques*, Rev. Mat. Hisp.-Amer., 9, (1949).

P. ABELLANAS: *Correspondencias algebraicas*. II, Rev. Mat. Hisp.-Amer., 11 (1951).

Inversamente, si en una correspondencia algebraica definida entre V y V' según esta definición fuesen isomorfos K y K' , la correspondencia algebraica sería una correspondencia birracional y, así, se pueden estudiar éstas desde el punto de vista de la teoría aritmética sobre un cuerpo base arbitrario, como un caso particular de las algebraicas.

Completemos las notaciones hasta ahora introducidas, y que seguiremos utilizando a lo largo de esta nota, con las siguientes: el cuerpo de coordenadas no homogéneas sobre la variedad doble lo designaremos por

$$K^* = k(\eta_1, \dots, \eta_n; \eta'_1, \dots, \eta'_m),$$

de acuerdo con las expresiones (2). Y a los anillos afines de polinomios sobre V , V' y V^* , respectivamente, por

$$A = k[\eta_1, \dots, \eta_n], \quad A' = k[\eta'_1, \dots, \eta'_m] \quad (3)$$

$$A^* = k[\eta_1, \dots, \eta_n; \eta'_1, \dots, \eta'_m]. \quad (4)$$

Si, aproximándonos más a nuestro problema, las dos variedades V y V' fuesen superpuestas, estarían definidas por un mismo ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ del anillo de polinomios en $n+1$ indeterminadas

$$k[X_0, \dots, X_n],$$

y como, entonces,

$$\begin{aligned} k[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a} &\simeq k[\xi_0, \dots, \xi_n], \\ k[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a} &\simeq k[\xi'_0, \dots, \xi'_n], \end{aligned}$$

será condición de superposición de ambas subvariedades el isomorfismo $P \simeq P'$. Por extensión al cuerpo de cocientes, serán también isomorfos Σ y Σ' . Miradas ambas variedades como modelos proyectivos distintos de Σ , ese isomorfismo entre P y P' equivale a un isomorfismo entre los puntos generales (1) de V y V' , en el que

$$\xi_i \rightarrow \xi'_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Si el grado de trascendencia de Σ , y por tanto de Σ' , sobre k es $r+1$, y el de Σ^* sobre Σ o sobre Σ' es $s+1$, el grado de trascendencia de Σ^* sobre k será $r+s+2$. Algunos problemas relativos al estudio de variedades superpuestas que se corresponden en transformaciones birracionales o algebraicas han sido desarrollados en J. FERNÁNDEZ BIARGE: *Sobre las variedades de coincidencia de una correspondencia birracional*, Rev. Mat. Hisp.-Amer., 10 (1950). — J. FERNÁNDEZ BIARGE: *Coincidencias en una correspondencia algebraica*, Rev. Mat. Misp.-Amer., 10 (1950).

Dado ahora un punto simple de V por el ideal $\mathfrak{p}_0$ de $\mathbf{P}$, a cada divisor primo mínimo $\mathfrak{p}_0^*$ de $\mathbf{P}^*$ $\mathfrak{p}_0$ le corresponde el ideal

$$\mathfrak{p}_0' = \mathfrak{p}_0^* \cap \mathbf{P}'$$

de $\mathbf{P}'$, que representa un punto de V' ; a su vez, $\mathfrak{p}_0^*$ es también un divisor primo mínimo de $\mathbf{P}^* \mathfrak{p}_0'$. Cada uno de estos puntos $\mathfrak{p}_0'$ es el transformado del punto $\mathfrak{p}_0$ en la correspondencia algebraica establecida. Si $\mathfrak{p}_0$ es un punto invariante en esta correspondencia, se verificará que uno de sus transformados $\mathfrak{p}_0'$ se corresponde con él en el isomorfismo $\mathbf{P} \simeq \mathbf{P}'$, que define la superposición de las variedades V y V' .

Por otra parte, si

$$\xi_0, \xi_0' \notin \mathfrak{p}_0^*, \quad (5)$$

condición que no supone ninguna restricción puesto que, en caso contrario, elegiríamos, como hemos dicho anteriormente, otras ξ_i, ξ_i' que lo verificasen, formaríamos los anillos afines $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}^*$, con cuerpos de cocientes K, K' y K^* en las coordenadas no homogéneas (2), dados por (3) y (4). Entonces, a los ideales homogéneos $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0'$ y $\mathfrak{p}_0^*$ de $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ y $\mathbf{P}^*$, respectivamente, corresponden en $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}^*$ los ideales no homogéneos $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ y $\mathfrak{p}^*$, respectivamente.

Por ser la correspondencia birracional y, por tanto, isomorfos K y K' , resultará de todo esto que, si el punto $\mathfrak{p}$ de V es invariante en esa correspondencia birracional entre las variedades superpuestas V y V' , habrán de corresponderse los puntos $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}'$ en los dos isomorfismos

$$\mathbf{P} \simeq \mathbf{P}', \quad K \simeq K'$$

que nos indican, respectivamente, esas dos condiciones: la de ser superpuestas V y V' y la de ser birracional la correspondencia entre ellas. Supondremos, además, en adelante, que $\mathfrak{p}$ es regular con relación a $\mathfrak{p}'$.

Sean

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{\mathfrak{p}}, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{A}'_{\mathfrak{p}'}, \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{A}^*_{\mathfrak{p}^*}$$

los anillos locales correspondientes a las subvariedades $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ y $\mathfrak{p}^*$, respectivamente, y $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ y $\mathfrak{m}^*$ los ideales máximos respectivos de estos anillos locales. Entonces,

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^* \cap \mathbf{Q}, \quad \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^* \cap \mathbf{Q}'. \quad (6)$$

Por ser p regular, la dimensión de p^* será s y se podrá, por tanto, encontrar r elementos

$$\theta_1^*, \dots, \theta_r^* \in Q^*,$$

que podemos además suponer pertenecientes a A^* a consecuencia de (5), que sean parámetros de uniformización en p^* , esto es:

$$m^* = Q^*(\theta_1^*, \dots, \theta_r^*).$$

Del mismo modo, para p y p' se tendría:

$$\begin{aligned} m &= Q(\theta_1, \dots, \theta_r), & \theta_i &\in A, \\ m' &= Q'(\theta_1', \dots, \theta_r'), & \theta_i' &\in A'. \end{aligned}$$

Entonces, por ser $p \subset p^*$, $p' \subset p^*$, se tiene:

$$\Theta \equiv \Theta^* A (m^{*2}), \quad \Theta' \equiv \Theta^* A' (m^{*2}),$$

donde se han representado por estos símbolos las matrices

$$\begin{aligned} \Theta &= (\theta_1, \dots, \theta_r), \quad \Theta' = (\theta_1', \dots, \theta_r'), \quad \Theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_r^*) \\ A &= (\alpha_i^j), \quad A' = (\alpha_i'^j), \quad i, j = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

y siendo

$$\alpha_i^j, \alpha_i'^j \in Q^*,$$

y no pertenecientes a m^* si son distintas de cero.

Vamos a construir un homomorfismo τ definido sobre Q^* mediante el proceso siguiente: Si ζ es un elemento de Q^* que pertenece a m^{*p} pero no a m^{*p+1} , su resto respecto de m^{*p} será:

$$\zeta \equiv \varphi^p(\theta_1^*, \dots, \theta_r^*) (m^{*p}),$$

siendo φ^p una forma homogénea de grado p en las θ_i^* . Entonces, τ se define mediante la expresión

$$\tau(\zeta) = \varphi^p(x_1, \dots, x_r), \quad (7)$$

siendo las x_i indeterminadas sobre Q^* .

En particular, por ser

$$\theta_i, \theta_i' \in m^*, \quad \theta_i, \theta_i' \notin m^{*2}$$

y

$$\begin{aligned} \theta_i &\equiv \alpha_i^1 \theta_1^* + \dots + \alpha_i^r \theta_r^* & (m^{*2}) \\ \theta_i' &\equiv \alpha_i'^1 \theta_1^* + \dots + \alpha_i'^r \theta_r^* & (m^{*2}), \end{aligned}$$

será

$$\tau(\theta_i) = \alpha_i^1 x_1 + \dots + \alpha_i^r x_r \quad (8)$$

$$\tau(\theta_i') = \alpha_i'^1 x_1 + \dots + \alpha_i'^r x_r. \quad (9)$$

o bien, componiendo estos homomorfismos en el homomorfismo aplicado a toda una matriz, se tendrá:

$$\tau(\Theta) = XA, \quad \tau(\Theta') = XA',$$

donde

$$X = (x_1, \dots, x_r).$$

Por otra parte, el homomorfismo natural

$$\nu: \quad Q^* \rightarrow R^* = Q^*/m^* \quad (10)$$

induce un homomorfismo, que representaremos por la misma notación, en el anillo de polinomios con r indeterminadas:

$$Q^* [x_1, \dots, x_r] \xrightarrow{\nu} R^* [x_1, \dots, x_r]$$

equivalente a tomar clases de restos respecto de m^* en los coeficientes de todo polinomio de

$$Q^* [x_1, \dots, x_r].$$

Luego cada

$$\tau(\xi) \in Q^* [x_1, \dots, x_r]$$

definido en (7) se transforma mediante ν en una

$$\overline{\nu}^p(x_1, \dots, x_r) \in R^* [x_1, \dots, x_r]$$

a la que llamaremos la *forma inicial* del elemento $\xi \in Q^*$. Resulta de aquí que, dado un elemento cualquiera $\xi \in Q^*$, su forma inicial se obtiene aplicándole el homomorfismo producto de τ y ν :

$$\nu[\tau(\xi)] = (\nu \cdot \tau)(\xi) = \overline{\nu}^p(x_1, \dots, x_r).$$

Particularizando de nuevo, si en el homomorfismo (10)

$$\alpha_i^j \equiv \overline{\alpha}_i^j(m^*), \quad \alpha_i'^j \equiv \overline{\alpha}_i'^j(m^*), \quad i, j = 1, \dots, r,$$

cada polinomio $\tau(\theta_i)$, $\tau(\theta_i')$, dados por (8) y (9), se transforma mediante ν en el polinomio

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_i^1 x_1 + \dots + \overline{\alpha}_i^r x_r, \\ \overline{\alpha}_i'^1 x_1 + \dots + \overline{\alpha}_i'^r x_r, \end{aligned}$$

respectivamente. Esto es:

$$\nu[\tau(\theta_i)] = \sum_{j=1}^r \overline{\alpha}_i^j x_j, \quad \nu[\tau(\theta_i')] = \sum_{j=1}^r \overline{\alpha}_i'^j x_j,$$

Estas expresiones finales son, pues, las formas iniciales de los elementos θ_i y θ_i' , que también podemos escribir en la forma:

$$(\nu \cdot \tau)(\theta) = X\overline{A}, \quad (\nu \cdot \tau)(\theta') = X\overline{A}',$$

siendo

$$\overline{A} = (\overline{\alpha}_i^j), \quad \overline{A}' = (\overline{\alpha}_i'^j).$$

Análogamente, para los elementos de Q (o de Q') se podrían obtener mediante $\nu \cdot \tau$ sus formas iniciales, siendo ahora el homomorfismo τ equi-

valente a la sustitución de cada θ_i (o θ'_i) por la indeterminada x_i en el residuo de ese elemento respecto de la potencia conveniente de $\mathfrak{m}$ (o de $\mathfrak{m}'$), y el homomorfismo ν es el homomorfismo natural

$$Q \xrightarrow{\nu} R = Q/\mathfrak{m}$$

(o

$$Q' \xrightarrow{\nu} R' = Q'/\mathfrak{m}').$$

Si es ahora $\mathfrak{p}_0^*$ una componente aislada de $P^*\mathfrak{p}_0$ y, por tanto, $\mathfrak{p}^*$ una componente aislada de $A^*\mathfrak{p}$, se tendrá $Q^*\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$ y el determinante $|\bar{A}| \neq 0$; y lo mismo para $\mathfrak{p}'_0$. Entonces, los elementos $(\theta_1, \dots, \theta_r)$, y en su caso los $(\theta'_1, \dots, \theta'_r)$, se pueden elegir como parámetros de uniformización para $\mathfrak{p}^*$. Se verifica así:

$$\Theta' \equiv \Theta A^{-1} A' \quad (\mathfrak{m}^{*2}).$$

Ahora bien, en este caso, los anillos

$$R[x_1, \dots, x_r], \quad R'[x_1, \dots, x_r]$$

pueden considerarse sumergidos en el

$$R^*[x_1, \dots, x_r]$$

y las formas iniciales de los elementos de Q , o de Q' , considerados como de estos anillos, coinciden con las formas iniciales cuando se les considera elementos de Q^* . Y como, de la condición de ser $\mathfrak{p}$ punto invariante y regular, se sigue

$$Q = Q', \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}',$$

resultará que la forma inicial de θ'_i es la imagen por τ de

$$\beta_i^1 \theta_1 + \dots + \beta_i^r \theta_r,$$

donde, por ser, según (6), $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^* \subset Q^*$, se ha tomado

$$A^{-1} A' \equiv B \pmod{\mathfrak{m}},$$

siendo

$$B = (\beta_i^j), \quad \beta_i^j \in Q, \quad \beta_i^j \notin \mathfrak{m}.$$

Entonces,

$$\Theta' \equiv \Theta B \pmod{\mathfrak{m}^2}. \quad (11)$$

Como ya habíamos advertido, a este resultado podíamos haber llegado más directamente mediante la teoría de ZARISKI, pero el objeto del trabajo no era tanto llegar a este resultado como relacionar los distintos conceptos que habían sido vertidos en el desarrollo de estas teorías.

Pues bien, si en esas condiciones escribimos

$$\Theta' = \Theta B,$$

obtenemos las ecuaciones de una afinidad con un punto invariante en el origen de coordenadas y de la que diremos que es la afinidad subordinada sobre el primer entorno del punto invariante por la transformación birracional que estamos estudiando. Las ecuaciones de la afinidad, desarrolladas, son:

$$\begin{cases} \theta_1' = \beta_1^1 \theta_1 + \dots + \beta_1^r \theta_r \\ \dots \\ \theta_r' = \beta_r^1 \theta_1 + \dots + \beta_r^r \theta_r \end{cases} \quad (12)$$

Como se sabe, las direcciones invariantes en esta afinidad vendrán dadas por los hiperplanos

$$c_1 \theta_1 + \dots + c_r \theta_r = 0,$$

donde $(c_1, \dots, c_r)$ es una solución del sistema

$$(c_1, \dots, c_r) (B^T - \lambda E) = 0,$$

siendo E la matriz unidad y B^t la transpuesta de B , y donde λ es una raíz de la ecuación

$$|B - \lambda E| = 0.$$

A su vez, las intersecciones de hiperplanos invariantes darán direcciones invariantes según variedades lineales de menor dimensión. Como el primer entorno es el espacio tangente, todos los problemas de tangencia entre sub-variedades de V y V' se trasladan a problemas de incidencia entre las variedades lineales de este entorno.

Vamos a definir el segundo entorno del punto p . Llamaremos para simplificar ϕ_i^1 a las expresiones

$$\varphi_i^1 = \beta_i^1 \theta_1 + \dots + \beta_i^r \theta_r$$

que aparecen en las ecuaciones (12) de la afinidad. Podemos representar, entonces, por Φ^1 a la matriz

$$\Phi^1 = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_r^1) = \Theta B.$$

De (11) se sigue, según estas notaciones,

$$\Theta' - \Phi^1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^2}.$$

es decir, los términos del primer miembro son al menos de segundo grado en las θ_i ; luego

$$\Theta' - \Phi^1 = \Phi^2 + \Psi,$$

donde

$$\Phi^2 \in \mathfrak{m}^2, \quad \Phi^2 \notin \mathfrak{m}^3, \quad \Psi \in \mathfrak{m}^3.$$

Entonces,

$$\Theta' - \Phi^1 - \Phi^2 \equiv 0 \pmod{m^3}.$$

Escribiendo ahora

$$\Theta' = \Phi^1 + \Phi^2,$$

es decir,

$$\begin{cases} \theta_1' = \varphi_1^1 + \varphi_1^2 \\ \dots\dots\dots \\ \theta_r' = \varphi_r^1 + \varphi_r^2 \end{cases}$$

donde

$$\Phi^2 = (\varphi_1^2, \dots, \varphi_r^2)$$

es una matriz de formas de segundo grado en $\theta_1, \dots, \theta_r$, se tendrá una transformación cuadrática que es la inducida por la transformación birracional en el segundo entorno.

Así, sucesivamente, de

$$\Theta' - (\Phi^1 + \Phi^2 + \dots + \Phi^q) \equiv 0 \ (m^{q+1})$$

se deduce la transformación de grado q :

$$\begin{cases} \theta_1' = \varphi_1^1 + \varphi_1^2 + \dots + \varphi_1^q \\ \dots\dots\dots \\ \theta_r' = \varphi_r^1 + \varphi_r^2 + \dots + \varphi_r^q \end{cases} \quad (13)$$

donde las φ_i^l son formas de grado l en $\theta_1, \dots, \theta_r$ con coeficientes de $\mathbf{Q}$. De esta transformación diremos que es la subordinada por la correspondencia birracional en el entorno de orden q del punto $\mathbf{p}$.

Podemos ilustrar esta teoría con el ejemplo tan sencillo de las colineaciones entre dos planos superpuestos. Si los puntos generales de estos planos son

$$(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \quad \text{y} \quad (\xi_0', \xi_1', \xi_2') = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) B,$$

siendo B la matriz de la colineación y $|B| \neq 0$, será, evidentemente,

$$\mathbf{P} = k [\xi_0, \xi_1, \xi_2] \simeq \mathbf{P}' = k [\xi_0', \xi_1', \xi_2'],$$

que son anillos de polinomios sobre una misma variedad, el plano proyectivo. Siendo la colineación una correspondencia de grado uno, la transformación subordinada en el primer entorno de un punto invariante coincidirá con la misma colineación y, por tanto, las direcciones invariantes son las definidas por las rectas invariantes de la colineación que pasan por ese punto. Pero es interesante en este ejemplo el hecho de que, aunque a primera vista pudiera pensarse que la colineación no debería subordinar en los restantes entornos correspondencias de grado superior, sino que habría de ser $\Theta' - \Phi^1 = 0$ y, por tanto, las restantes formas Φ^i parece que deberían ser idénticamente nulas, ocurre que, por el contrario, induce en ocasiones transformaciones de grado tan grande como se quiera, si las ecuaciones son desarrollables en serie en los entornos del punto invariante.

Elijamos como ejemplo la colineación

$$\rho(\xi_0', \xi_1', \xi_2') = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} t_1 & 1 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

o sea,

$$\begin{aligned} \rho \xi_0' &= t_1 \xi_0 \\ \rho \xi_1' &= \xi_0 + t_1 \xi_1 \\ \rho \xi_2' &= t_2 \xi_2 \end{aligned}$$

cuyos puntos invariantes son $(0, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

Para estudiar la transformación en los entornos del punto $(0, 0, 1)$ habrá que elegir la recta $\xi_2 = 0$ como recta del infinito al pasar al anillo afín A. Entonces, las ecuaciones no homogéneas de la colineación son

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \frac{\xi_0'}{\xi_2'} = \frac{t_1}{t_2} \frac{\xi_0}{\xi_2} = \frac{t_1}{t_2} \eta_1 \\ \eta_2' &= \frac{\xi_1'}{\xi_2'} = \frac{\xi_0 + t_1 \xi_1}{t_2 \xi_2} = \frac{1}{t_2} \eta_1 + \frac{t_1}{t_2} \eta_2 \end{aligned}$$

o sea:

$$\begin{aligned} \eta_1' &= a \eta_1 \\ \eta_2' &= b \eta_1 + a \eta_2 \end{aligned}$$

siendo

$$a = \frac{t_1}{t_2} \quad b = \frac{1}{t_2} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

la matriz de la colineación en el anillo afín

$$A = k [\eta_1, \eta_2].$$

Como estas coordenadas son, además, parámetros de uniformización en este punto, esa colineación es la subordinada en el primer entorno y coincide con la colineación que en el plano afín induce la colineación dada en el plano proyectivo. Como

$$(\eta_1', \eta_2') = (\eta_1, \eta_2) A,$$

se tendrá

$$(\eta_1', \eta_2') - (\eta_1, \eta_2) A \equiv 0 \text{ (m}^q\text{)}$$

para todo q , luego no subordina en los restantes entornos correspondencias de orden superior. La única dirección invariante se obtendría, como antes hemos dicho, mediante

$$|A - \lambda E| = (a - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = a$$

de donde

$$(c_1, c_2)(A^T - a E) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

así que es la $\eta_1 = 0$, o en homogéneas, $\xi_0 = 0$, es decir, es la recta invariante de la colineación que pasa por $(0, 0, 1)$.

Pero en el caso de hacer el estudio en el punto $(0, 1, 0)$, observaremos que, al tomar ξ_1 como coordenada del infinito, y ser por tanto,

$$\eta_1' = \frac{\xi_0'}{\xi_1'} = \frac{t_1 \xi_0}{\xi_0 + t_1 \xi_1} = \frac{t_1 \eta_1}{\eta_1 + t_1} = \eta_1 \left[1 - \frac{\eta_1}{t_1} + \frac{\eta_1^2}{t_1^2} - \dots \right]$$

$$\eta_2' = \frac{\xi_2'}{\xi_1'} = \frac{t_2 \xi_2}{\xi_0 + t_1 \xi_1} = \frac{t_2 \eta_2}{\eta_1 + t_1} = \frac{t_2}{t_1} \eta_2 \left[1 - \frac{\eta_1}{t_1} + \frac{\eta_1^2}{t_1^2} - \dots \right]$$

esto permitirá definir transformaciones de todos los grados posibles en los correspondientes entornos. En particular, en el primer entorno se tendrá la afinidad con el origen invariante:

$$(\eta_1', \eta_2') = (\eta_1, \eta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad a = \frac{t_2}{t_1}$$

y dos direcciones invariantes, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, que coinciden con las rectas invariantes $\xi_0 = 0$, $\xi_2 = 0$, del estudio proyectivo.

Pero, en este caso,

$$\begin{aligned} (\eta_1', \eta_2') &= (\eta_1, \eta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{\eta_1^2}{t_1} + \frac{\eta_1^3}{t_1^2} - \dots, -\frac{t_2}{t_1^2} \eta_1 \eta_2 + \frac{t_2}{t_1^3} \eta_1^2 \eta_2 - \dots \right) \\ &\equiv (-b \eta_1^2, -a b \eta_1 \eta_2) (\mathbf{m}^3), \end{aligned}$$

llamando $1/t_1 = b$.

Es decir, en el segundo entorno se subordina la transformación cuadrática

$$\begin{cases} \eta_1' = \eta_1 - b \eta_1^2 \\ \eta_2' = a \eta_2 - ab \eta_1 \eta_2 \end{cases}$$

en el tercero, la transformación cúbica

$$\begin{cases} \eta_1' = \eta_1 - b \eta_1^2 + b^2 \eta_1^3 \\ \eta_2' = a \eta_2 - ab \eta_1 \eta_2 + ab^2 \eta_1^2 \eta_2 \end{cases}$$

y así sucesivamente.

Esta situación se vuelve a presentar únicamente en otras dos ocasiones. Cuando es una homología con centro y eje incidentes,

$$\rho(\xi_0', \xi_1', \xi_2') = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

en la que $(0, 1, 0)$ es el centro de homología, el resultado es el anterior, sin más que hacer $a = 1$. Así que

$$\begin{cases} \theta_1' = \theta_1 - b \theta_1^2 + b^2 \theta_1^3 - \dots \\ \theta_2' = \theta_2 - b \theta_1 \theta_2 + b^2 \theta_1^2 \theta_2 - \dots \end{cases}$$

ecuaciones de las que se obtienen las correspondencias inducidas en cada entorno.

Y también cuando se trata de la colineación

$$\rho(\xi_0', \xi_1', \xi_2') = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

cuyo único punto invariante es el $(0, 0, 1)$. Entonces, para

$$\theta_1 = \eta_1 = \frac{\xi_0}{\xi_2}, \quad \theta_2 = \eta_2 = \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \theta_1' &= \theta_1 \left[1 - \frac{\theta_2}{t} + \frac{\theta_2^2}{t^2} - \dots \right] \\ \theta_2' &= \frac{\theta_1 + t \theta_2}{t} \left[1 - \frac{\theta_2}{t} + \frac{\theta_2^2}{t^2} - \dots \right] \end{aligned}$$

que, para $a = 1/t$, nos da las formas:

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= (\varphi_1^1, \varphi_2^1) = (\theta_1, a \theta_1 + \theta_2) \\ \Phi^2 &= (\varphi_1^2, \varphi_2^2) = (-a \theta_1 \theta_2, -a^2 \theta_1 \theta_2 - a \theta_2^2) \\ \Phi^3 &= (\varphi_1^3, \varphi_2^3) = (a^2 \theta_1^3, a^3 \theta_1 \theta_2^2 + a^2 \theta_2^3), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

las cuales, según (13), nos permitirán escribir las sucesivas correspondencias subordinadas en cada entorno.

PRODUCTOS METABOLICOS DE LA DEHIDROEPIANDROSTERONA CON HIGADO DE RATA

p o r

VICENTE PIAZUELO MORER

A. CONSIDERACIONES GENERALES

I. GENERALIDADES

Brown-Séquard (1), ingirió, en 1889, un extracto testicular y mencionó que como consecuencia había adquirido un aumento de vigor y una mayor capacidad para el trabajo.

En 1911, Pézard (1), consiguió el aumento de la cresta de los capones por inyección de extracto de tejido gonadal masculino.

La extracción de testículo de toro con solventes no polares (1), produjo a McGee, en 1927, preparados altamente potentes.

Butenandt, siguiendo a Pézard, administró extractos testiculares y urinarios a gallos previamente castrados, observando que se producía una regresión de los caracteres sexuales secundarios, antes atrofiados, lo que le impuso la ardua tarea de aislar el principio activo capaz de producir estos efectos fisiológicos (2).

El establecimiento de la función endocrina de una glándula va siempre precedido de una serie de estudios que pueden dividirse en varias etapas:

a) Extirpación de la glándula y estudio de los efectos fisiológicos producidos.

b) Intentos de reemplazar la glándula extirpada por administración de extractos glandulares, libres de células, e investigación de los efectos producidos por el suministro de cantidades masivas de estos extractos.

c) Aislamiento y caracterización del principio activo.

d) Síntesis de la hormona y comprobación de que las sustancias biológica y sintética son idénticas.

e) Estudio de los procesos metabólicos que conducen a su inactivación.

Teniendo presente estos principios, consiguió Butenandt en 1931, aislar de extractos urinarios una sustancia pura, de fórmula empírica $C_{19}H_{30}O_2$, a la que denominó androsterona (1, 2, 3, 4).

No se tenía, por aquel entonces, una idea clara de las estructuras de la colesteroína y de los ácidos biliares. Es más, algunos de los conocimientos resultaron erróneos.

Rosenheim y King (2, 6) revisaron los estudios hechos acerca del problema y llegaron a la conclusión, en 1932, de que el núcleo fundamental de todas las sustancias esteroideas es el cicloperhidropentanofenantreno.

Sobre esa base pudo Butenandt dar la fórmula de la androsterona, que, si entonces hipotética, fue plenamente confirmada por Ruzicka en 1934 por síntesis a la hormona (5).

En ese mismo año de 1934 (3, 4, 5), aislaron Butenandt y Dannenbaum, de orina masculina una hidroxiketona, $C_{19}H_{28}O_2$. La hidrogenación del derivado clorado en C_3 produjo a Butenandt una clorocetona saturada, $C_{19}H_{30}OCl$, lo que hizo suponer que la hidroxiketona insaturada era un compuesto con la configuración estereoquímica de la androsterona, por lo cual la denominó dehidroandrosterona.

En 1934 sintetizó Ruzicka (5) una clorocetona, $C_{19}H_{30}OCl$ por oxidación del cloruro de β -colesterilo.

Un año más tarde, Wallis y Fernholz (4, 5) sugirieron que ambas clorocetonas debían tener distinta composición espacial, y, una vez definida la posición del doble enlace, concluyeron que la sustancia aislada por Butenandt y Dannenbaum es el epímero en C-3, es decir, posee la misma orientación que el colesterol ya que, a diferencia de la androsterona, es precipitable por digitonina. De ahí su nombre de dehidroepiandrosterona.

Otros nombres que aparecen en la literatura son: dehidrotransandrosterona, dehidroisoandrosterona, DHEA, y DHA. Fieser y Fieser (7) proponen para el compuesto el nombre de androstenolona basándose en el hecho de que se encuentra más relacionado con el colesterol que con la androsterona o su epímero.

La importancia clave de la DHA estriba en que parece ser el precursor común de andrógenos y estrógenos (8).

II. AISLAMIENTO DE LA DHA EN HUMANOS

La DHA, como hemos dicho, fue aislada por Butenandt (2, 4, 7) en 1934 de la orina de hombres normales.

Su importancia transcendental se proclamó a causa de la sospecha de una relación con el colesterol, y más tarde (8), como posible intermediario en el metabolismo de esteroideas.

Callow y Callow obtuvieron dos años más tarde la sustancia de hombres normales y Crooke y Callow en 1939 (10) de pacientes con tumores adrenocorticales.

Hirschman (11) aplicó en 1940 la cromatografía en columna al estudio de esteroideas urinarios de mujeres ovariectomizadas, y relató la obtención de 12,2 mgs. de unos cristales, de la fracción cetónica, precipitables por digitonina, con un punto de fusión de $141-151^\circ C$, así como otros 15,7 mgs. de un producto menos puro de punto de fusión $133-148^\circ C$. La identificación del compuesto con DHA se hizo por formación del acetato y benzoato.

Engel y colaboradores (11) obtuvieron 68 mgs. de DHA de la orina de mujeres normales, junto con androsterona y otros productos; y, en vista de que Callow y Callow habían encontrado en años anteriores que muje-

res castradas y normales excretan DHA en cantidad similar a la de hombres normales, y cantidad aumentada en la orina de un eunuco, dedujeron que el compuesto debía ser de origen extragonadal. En apoyo de esta deducción estaba el hallazgo de incrementos de DHA por Crooke y Callow en pacientes con tumores corticales.

En el estudio de 17-cetosteroides urinarios, Pincus y Pearlman (12) encontraron descomposición parcial de DHA a productos no alcohólicos, como consecuencia de la hidrólisis ácida a que debe ser sometida la orina para dejar los esteroides neutros en libertad, y un año más tarde, el mismo Pearlman (13) encontraba un producto cristalino, aparentemente homogéneo, de punto de fusión $156,5-157,5^{\circ}\text{C}$ y $[\alpha]_D = +50^{\circ}$ que concluyó se trataba de una mezcla de DHA y androsterona, recalcando, a la vista de sus propias experiencias y de los trabajos hasta entonces realizados, que la DHA era la única hidroxiketona, precipitable por digitonina, de la orina de machos y hembras normales, y estableciendo su punto de fusión en $147,0-148,0^{\circ}\text{C}$ y su $[\alpha]_D^{29} = +12^{\circ}$ (1,92 % en etanol).

El descubrimiento de que parte de la DHA es excretada como sulfato es obra de Munson, Gallagher y Kock (14) quienes aislaron, en 1944, la sal sódica del sulfato de DHA a partir de la orina de un hombre joven normal. La hidrólisis de la semicarbazona produjo DHA libre que fue identificada en forma de benzoato.

Muchos son los trabajos de aislamiento de DHA en fluidos, tejidos y órganos de animales y humanos. Sin embargo, nos limitaremos a citar los trabajos de Lieberman y colaboradores (15), sobre cetosteroides en orina de personas enfermas y sanas, que constituyen un compendio de los estudios de aislamiento e identificación de DHA realizados hasta 1948.

Trabajos posteriores que merecen citarse son los de Dorfman en 1957 (16) y más recientemente los de Okada y colaboradores en 1959 (17).

III. SÍNTESIS DE LA DHA

Los primeros relatos de síntesis de DHA tuvieron lugar en 1935, es decir, un año más tarde del aislamiento de la propia hormona. Fueron cuatro laboratorios distintos los que consiguieron su preparación por degradación oxidativa del colesterol, previa protección del grupo hidroxilo y del doble enlace.

Tomando como base los trabajos de Wallis y Fernholz (4, 5), la magnífica obra de Fieser (7) y el tratado de Giral (6), reseñamos en la figuras 1 y 2 el método de obtención de la DHA en el laboratorio.

La síntesis de la DHA y en general de todas las hormonas esteroides, se ha atacado hoy día desde el punto de vista de la producción en gran escala. A Rusel E. Marker y colaboradores (18-28) se deben los adelantos más extraordinarios en este campo. Marker subvencionado por la compañía Parke Davis organizó una expedición botánica en búsqueda de nuevas fuentes naturales de esteroides. La investigación se extendió a varios centenares de plantas del sur de los Estados Unidos y México y trajo, como consecuencia, el descubrimiento de una decena de nuevas especies de sa-

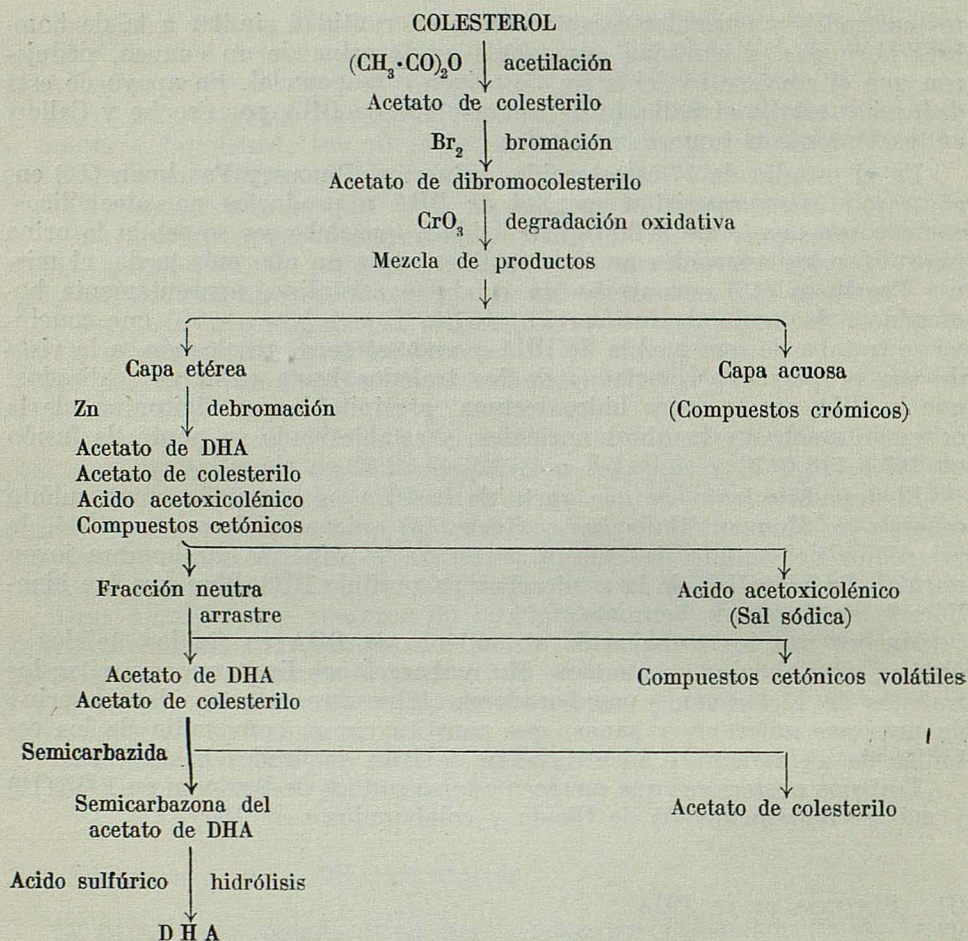


FIG. 1. — Esquema de la obtención de D H A

pogeninas que contienen el núcleo esteroides fundamental. Los más altos rendimientos se obtienen a partir de diosgenina, una sapogenina existente en las plantas del género *Dioscorea*, que si bien fue aislada primeramente por los japoneses Tsukamoto y Ueno en 1936 de un extracto de *Dioscorea Tokoro*, fueron Marker, Tsukamoto y Turner (21) los que consiguieron por primera vez la degradación a esteroides en C_{21} (Fig. 3). Detalles del proceso pueden encontrarse en (29).

El paso de esteroides en C_{21} a esteroides en C_{19} se realiza por uno de dos métodos:

- a) Método de Schmidt-Thome (Fig. 4).
- b) Método de Tendick y Lawson (Fig. 5).

En creciente desarrollo se encuentran las síntesis microbiológicas de hormonas esteroides, entre las que podemos citar las de Eppstein y colaboradores (30) y las oxidaciones bacterianas de Kramli y Hovart (31) y Levy y Talalay (32, 33).

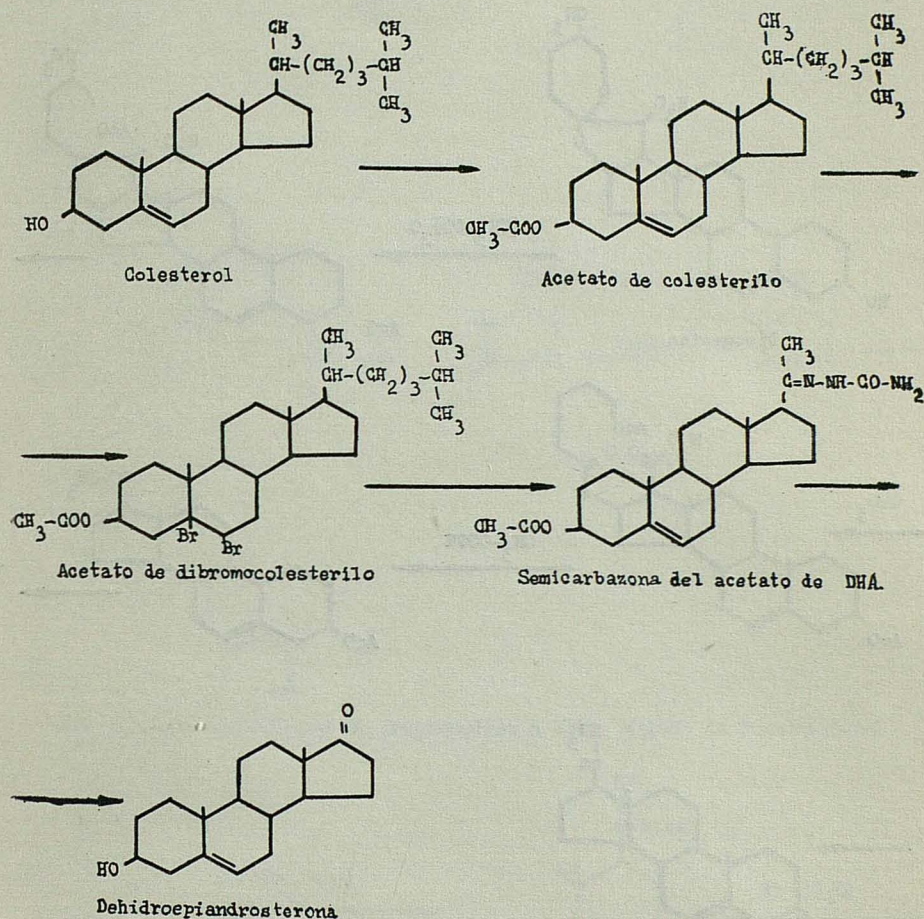


FIG. 2. — Síntesis de la dehidroepiandrosterona

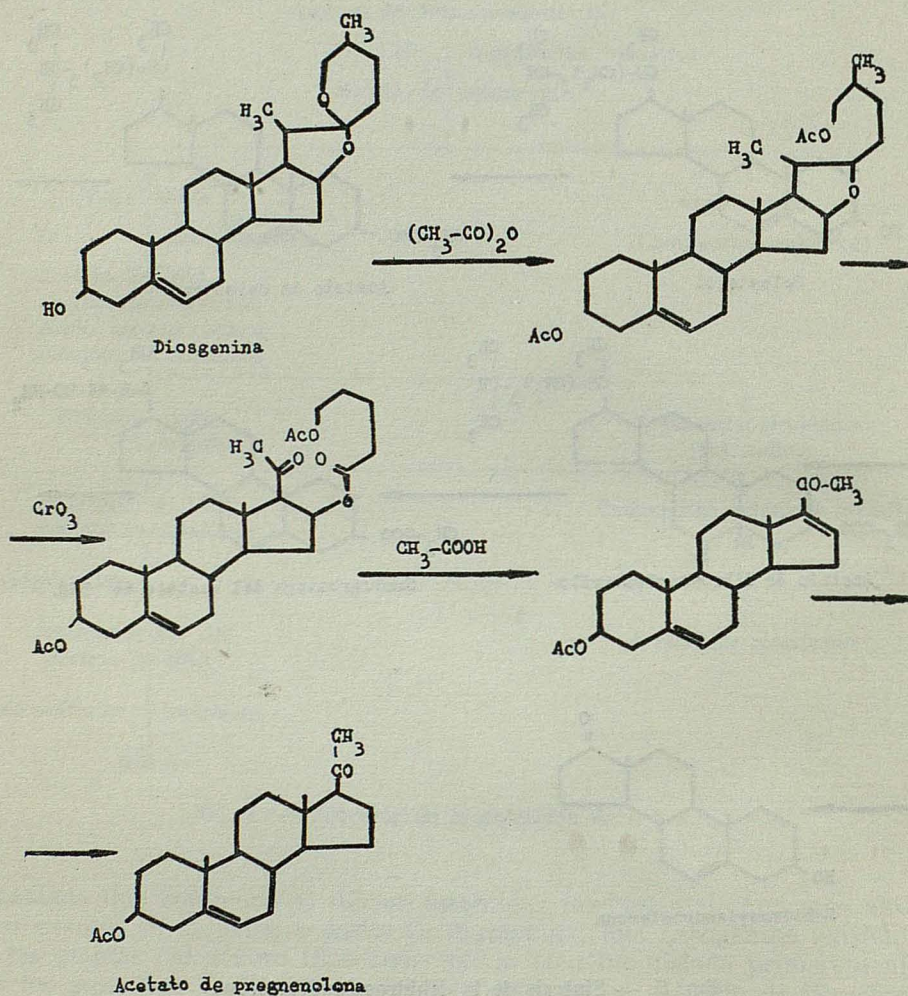


FIG. 3. — Degradación de MARKER de la diosgenina

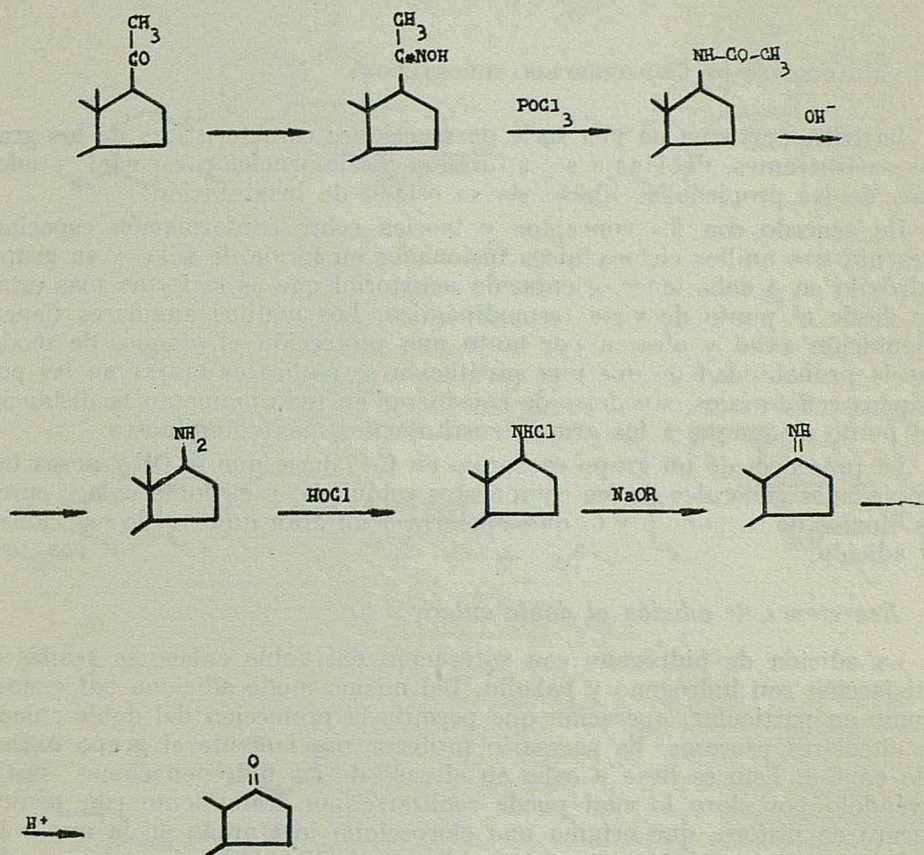


FIG. 4. — Transformación de pregnenolona a DHA. Método de SCHMIDI-THOMÉ

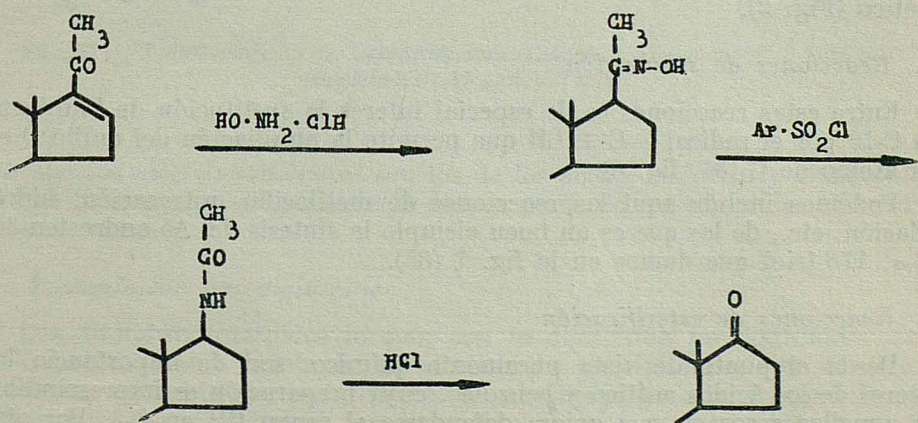


FIG. 5. — Transformación de la 16-dehidropregnenolona a DHA. Método de TENDICK y LAWSEN

IV. REACCIONES DE LA DEHIDROEPIANDROSTERONA

La DHA participa de una serie de reacciones características de los grupos sustituyentes, debidas a su naturaleza y conformación espacial, y además, de las propiedades típicas de su estado de insaturación.

De acuerdo con los conceptos y teorías sobre conformación espacial, presenta tres anillos ciclohexánicos fusionados en forma de silla, y su grupo hidróxilo en 3 debe tener orientación acuatorial que es la forma más estable desde el punto de vista termodinámico. Los metilos angulares tienen orientación axial y ofrecen por tanto una protección al ataque, de modo que la probabilidad de que una sustitución se realice es mayor en las posiciones ecuatoriales, sin dejar de considerar en todo momento la distancia del punto de ataque a los grupos sustituyentes más voluminosos.

La presencia de un grupo carbonilo en C-17 hace que la DHA posea las propiedades generales de los compuestos cetónicos, y el doble enlace entre los átomos de carbono 5 y 6, que concurre a un gran número de reacciones de adición.

a) *Reacciones de adición al doble enlace*

La adición de hidrógeno con saturación del doble enlace se realiza a satisfacción con hidrógeno y paladio. Del mismo modo adiciona halógenos, bromo en particular, operación que permite la protección del doble enlace en ulteriores procesos. Es necesario proteger previamente el grupo hidróxilo en C-3. Esto se lleva a cabo en el caso de las hidrogenaciones, sustituyéndolo por cloro lo cual puede realizarse por tratamiento con pentacloruro de fósforo, que origina una clorocetona insaturada de la que más tarde se regenera el 3 β -hidroxiesteroide con facilidad. En los procesos de halogenación se forma el 3 β -acetoxiderivado por tratamiento con anhídrido acético (Fig. 2).

b) *Reacciones de sustitución*

Entre estas reacciones es de especial interés la sustitución de hidrógeno en C-19 por el radical $-\text{C} \equiv \text{CH}$ que permite la ampliación del anillo D en un átomo de C (34, fig. 6).

Podemos incluir aquí las reacciones de metilación, nitrosación, hidroxilación, etc., de las que es un buen ejemplo la síntesis del Δ^5 -androstén-3 β , 16- α , 17 β -triol que damos en la fig. 7 (35).

c) *Reacciones de esterificación*

Desde el punto de vista puramente químico, son de importancia los ésteres de los ácidos acético y benzoico, cuya preparación es imprescindible en aquellos casos en que quiere defenderse el grupo OH en C-3. Por otra parte la identificación de la DHA y sus derivados se hace en una de estas dos formas (figs. 2, 6, 9, 10 y 11). En terreno puramente bioquímico, los

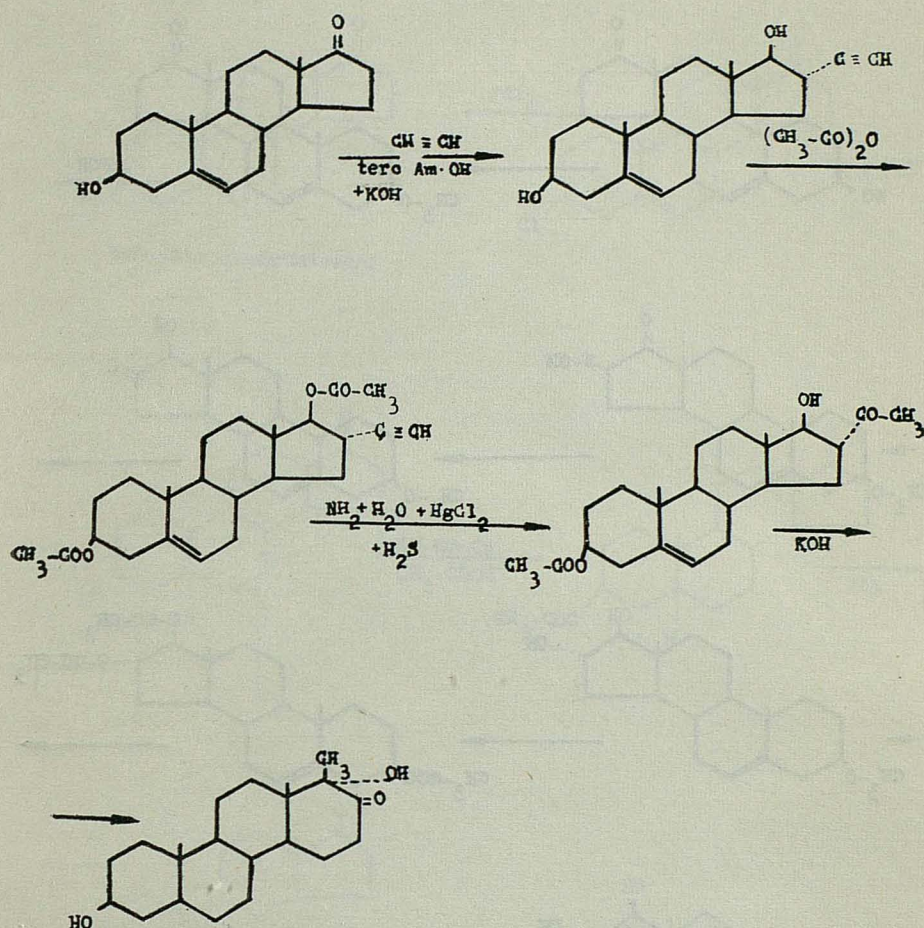


FIG. 6. — Transformación de dehidroepiandrosterona a 17- α -metil- Δ^5 -D-homoandrosteno-3 β , 17 α -diol-17-ona

con jugados más trascendentes son los de los ácidos sulfúrico y glucurónico ya que la excreción urinaria de la mayor parte de los esteroides se realiza en esta forma.

d) Precipitación por digitonina

Los 3 β -hidroxiesteroides forman con la digitonina un digitónido complejo prácticamente insoluble en alcohol. La precipitación con un ligero exceso de digitonina es cuantitativa. La ebullición de este precipitado con piridina rompe el complejo con liberación de la digitonina y el esteroide. La separación de uno y otro compuesto se lleva a cabo por extracción con éter en el que la digitonina es insoluble, consecuencia del gran número

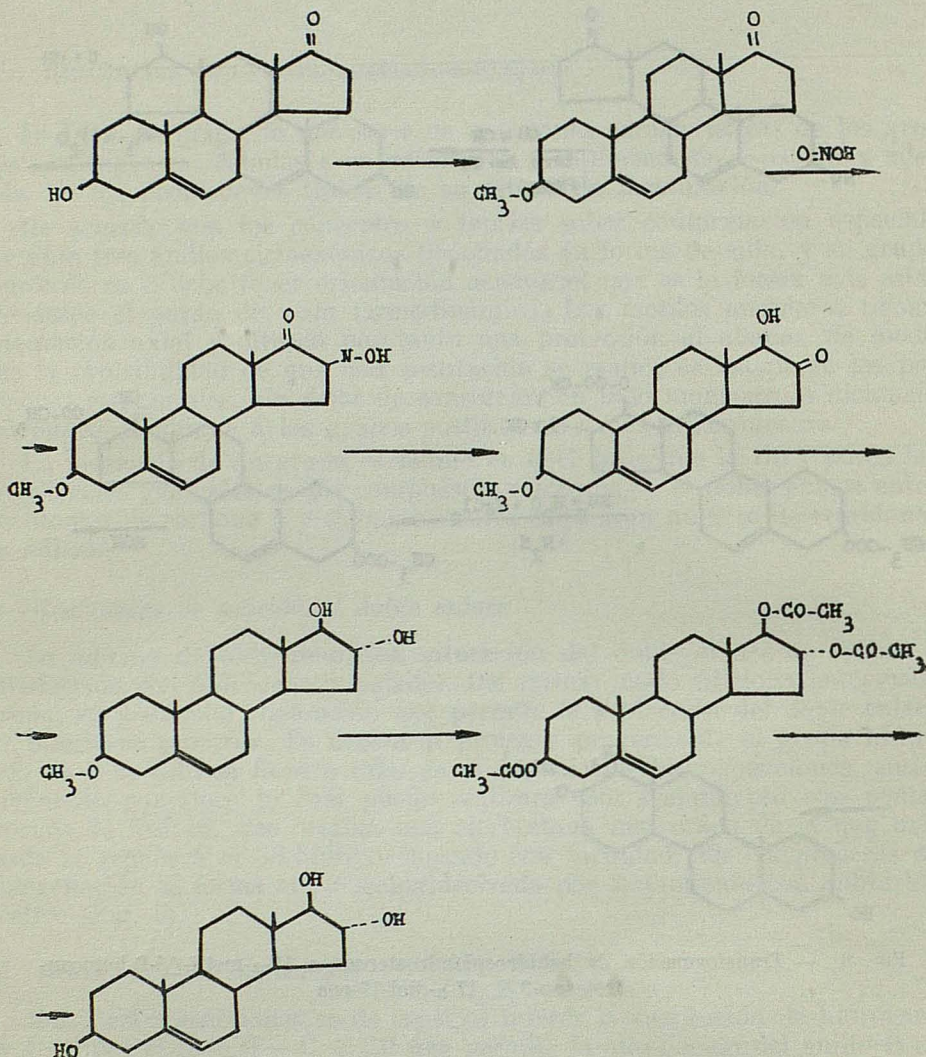


FIG. 7. — Obtención de Δ^5 -androstén-3 β , 16 α , 17 β -triol desde DHA

de grupos hidróxilo que existen en la molécula. Los compuestos con el grupo OH en 3 forman también digitónidos pero más solubles en alcohol. La importancia de la reacción estriba en que mediante ella es posible la separación de esteroides 3α - y 3β -hidroxilados.

e) *Reacciones debidas al grupo cetónico*

Mencionaremos únicamente dos reacciones: 1. — La reacción con el m-dinitrobenceno en solución alcalina alcohólica, que es base de la deter-

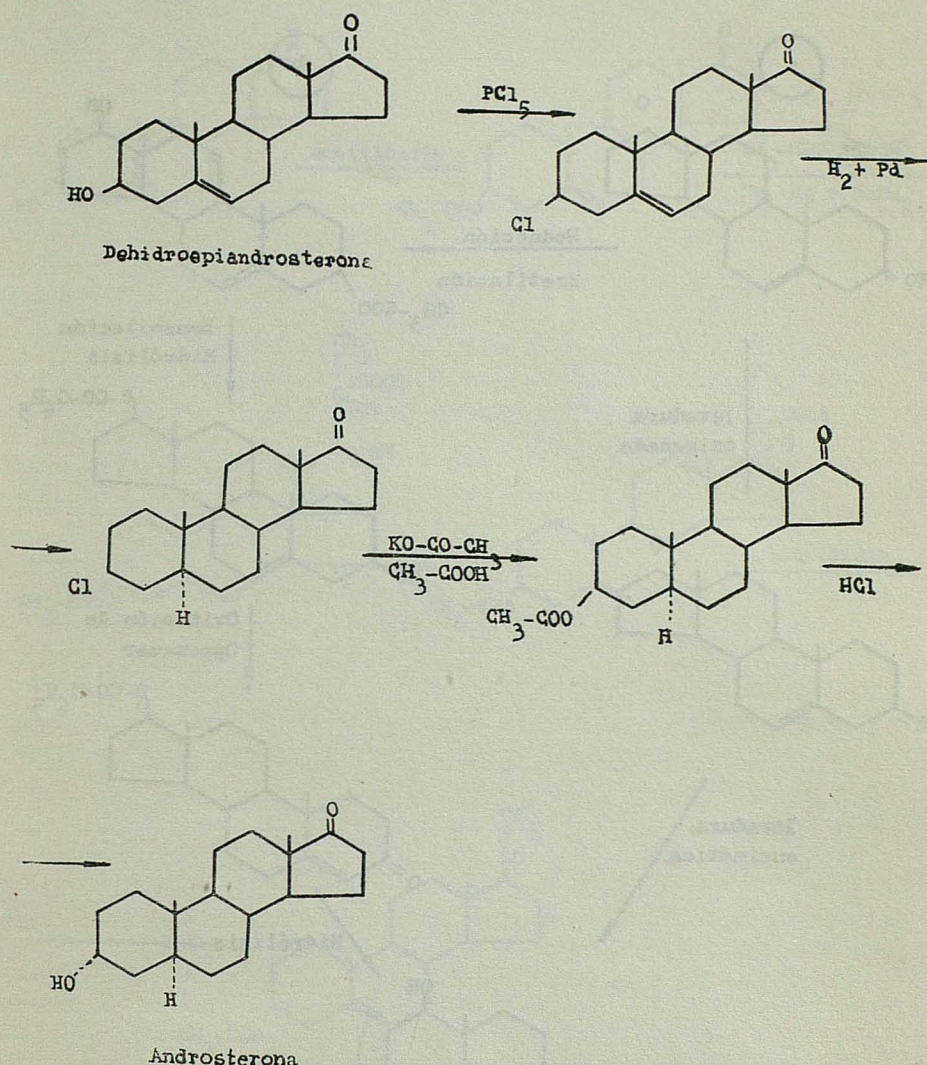


FIG. 8. — Relación de DHA a androsterona

minación de 17-cetosteroides de Zimmermann, y 2. — La que produce con el reactivo T de Girad, fundamento de la separación de compuestos cetónicos y no cetónicos. De la primera hablaremos extensamente más adelante.

El reactivo T de Girad es el clorhidrato de trimetil-amino-aceto-hidrazida $[(CH_3)_3 \equiv N^+-CH_2-CO-NH-NH_2] \cdot Cl^-$. Forma con los grupos cetónicos las hidrazonas correspondientes que son solubles en agua. Se separan los compuestos no cetónicos por extracción con solventes orgánicos, éter o

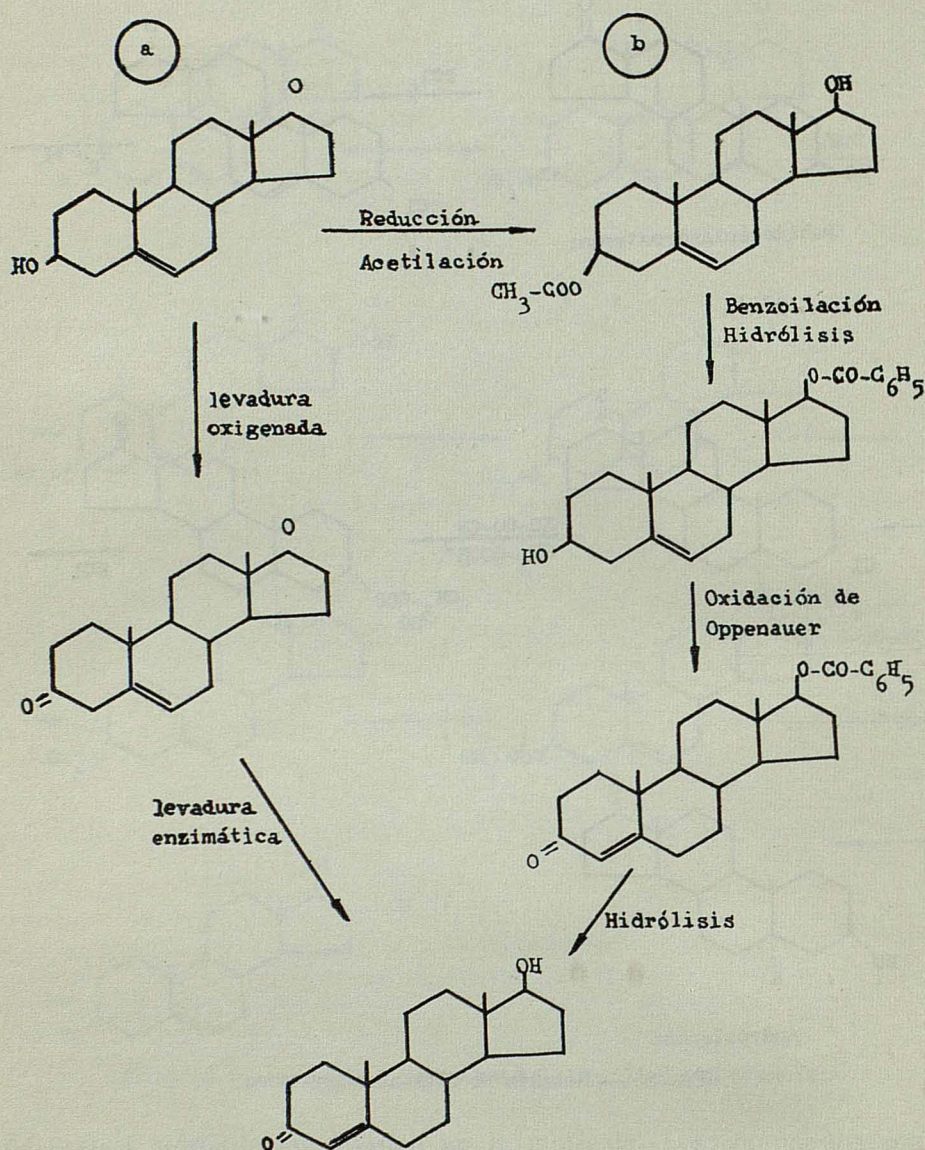


FIG. 9. — Síntesis de testosterona a partir de DHA

a) Método de MAMOLI

b) Método de BUTENANDT-RUZICKA

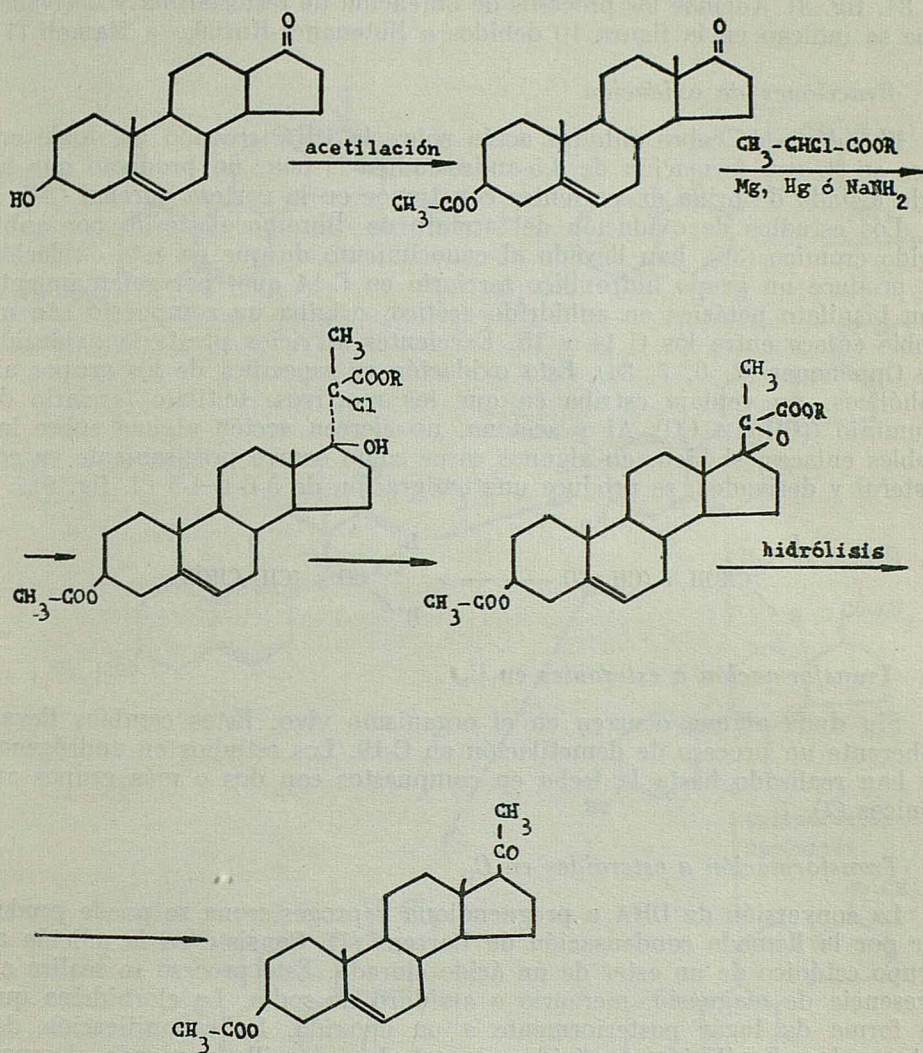


FIG. 10. — Síntesis de esteroides en C₂₁ a partir de los DHA
Condensación de DARZENS

cloroformo preferentemente, y se recuperan las cetonas de la capa acuosa mediante hidrólisis con ácido sulfúrico y extracción.

f) Reacciones de isomerización

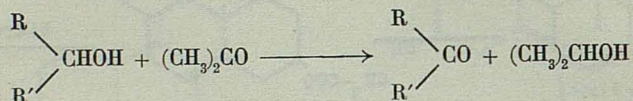
Cabe considerar aquí la relación existente entre androsterona y DHA a través de 3β -cloro- Δ^5 -androstén-17-ona, tres compuestos existentes en la orina humana cuya interconversión fue demostrada por Butenandt (4, 5,

7, 34, fig. 8). Además los procesos de obtención de testosterona y derivados que se indican en la figura 10 debidos a Butenandt-Ruzicka y Mamoli (7).

g) *Reacciones de oxidación*

El sulfato de cobre anhidro actúa sobre la DHA creando un doble enlace en 3, con formación de 3,5-androstadien-17-ona, un producto que ha sido aislado de orina de pacientes con tumor en la corteza adrenal (34).

Los estudios de oxidación del acetato de dibromocolesterol por anhídrido crómico (36), han llevado al conocimiento de que en esta oxidación se produce un grupo hidroxílico terciario en C-14 que, por calentamiento con bisulfato potásico en anhídrido acético, origina un compuesto con un doble enlace entre los C 14 y 15. Excelentes servicios presta la oxidación de Oppenauer (2, 6, 7, 34). Esta oxidación es específica de los grupos alcohólicos. Su ventaja estriba en que los reactivos, butilato terciario de aluminio $((CH_3)_3 \equiv CO)_3 Al$ y acetona, no ejercen acción alguna sobre los dobles enlaces, si bien, en algunos casos como ocurre precisamente en colesterol y derivados, se produce una emigración de 5-6 a 4-5 (2, fig. 9).



h) *Transformación a esteroides en C₁₈*

Sin duda alguna ocurren en el organismo vivo. Estos cambios llevan inherente un proceso de demetilación en C-19. Los estudios en andrógenos se han realizado hasta la fecha en compuestos con dos o más grupos cetónicos (7).

i) *Transformación a esteroides en C₂₁*

La conversión de DHA a pregnenolona y progesterona se puede producir por la llamada condensación de Darzens (7). Consiste en la adición al grupo cetónico de un ester de un ácido clorado. Este proceso se realiza en presencia de magnesio, mercurio o amiduro de sodio. La clorhidrina que se forma da lugar posteriormente a un epoxido. La saponificación del ester y decarboxilación por ácido mineral abre el anillo quedando el grupo cetónico en libertad (fig. 10).

Otros tratamientos que conducen a esteroides en C₂₁ son los de Butenandt y Schmidt-Thome (37, 38) y Serini (7). El primero introduce un carbono en la cadena lateral a través de la cianhidrina y, el C-21 obtenido en la hidrólisis del nitrilo con bromuro de metilmagnesio y reducción posterior (fig. 11). En la reacción de Serini la DHA toma los dos carbonos de la cadena lateral del compuesto de Grignard.

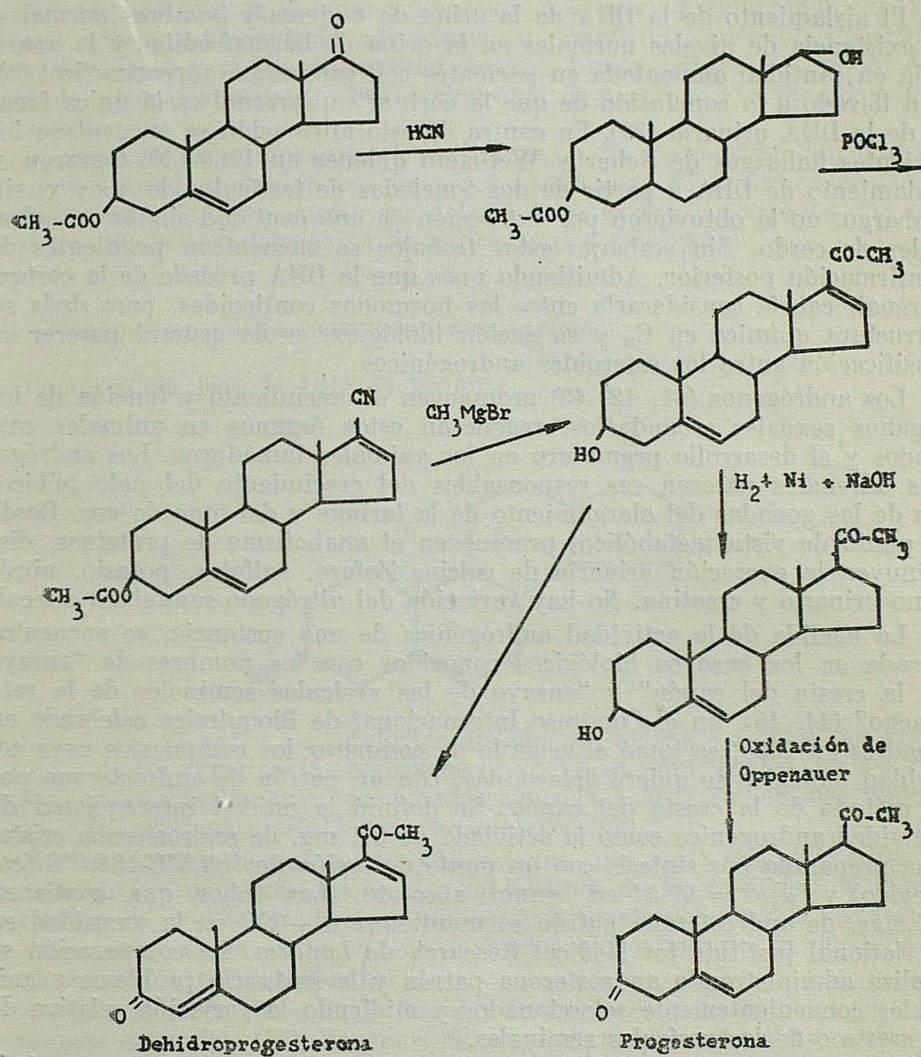


Fig. 11. — Transformación de DHA en progesterona.
Método de BUTENANDT y SCHMIDT-THOMÉ

V. ACTIVIDAD DE LA DHA Y RELACIÓN CON ESTADOS CLÍNICOS

El aislamiento de la DHA de la orina de mujeres y hombres normales, la existencia de niveles normales en la orina de hermafroditas y la aparición en cantidad aumentada en pacientes con carcinoma adrenocortical (8), han llevado a la conclusión de que la corteza suprarrenal es la única fuente de la DHA urinaria (39). En contra de esta afirmación se encuentran los recientes hallazgos de Neher y Wettstein quienes en 1960 (40) lograron el aislamiento de DHA a partir de dos toneladas de testículos de buey y, sin embargo, no la obtuvieron por extracción de una cantidad similar de adrenales de cerdo. Sin embargo estos trabajos se encuentran pendientes de confirmación posterior. Admitiendo pues que la DHA procede de la corteza adrenal, cabría considerarla entre las hormonas corticoides, pero dada su estructura química en C_{19} y su acción biológica, es de general parecer su clasificación entre los esteroides androgénicos.

Los andrógenos (41, 42, 43) promueven el crecimiento y función de los órganos sexuales secundarios, regeneran estos órganos en animales castrados y el desarrollo prematuro en los animales inmaduros. Los andrógenos adrenales parecen ser responsables del crecimiento del pelo púbico, los de las gonadas del alargamiento de la laringe y del tono de voz. Desde el punto de vista metabólico, promueven el anabolismo de proteínas, disminuyen la excreción urinaria de calcio, fósforo, sulfatos, potasio, nitrógeno urinario y creatina. No hay variación del nitrógeno sanguíneo o fecal.

La medida de la actividad androgénica de una sustancia, se encuentra basada en los ensayos biológicos conocidos con los nombres de "ensayo de la cresta del capón" y "ensayo de las vesículas seminales de la rata macho" (44, 45). En el Congreso Internacional de Bioquímica celebrado en Londres en 1935, se tomó el acuerdo de comparar los compuestos cuya actividad biológica se quiere determinar, con un patrón de androsterona por el método de la cresta del capón. Se definió la unidad internacional de actividad androgénica como la actividad de 0,1 mg. de androsterona cristalina preparada por síntesis con un punto de fusión de $183,5^{\circ}\text{C}$ - $184,5^{\circ}\text{C}$ (corregido) y $[\alpha]_D^{20} = 97,3^{\circ}$ en etanol absoluto. Los tubos que contienen 50 mgs. de androsterona patrón se mantienen a -2°C en la oscuridad en el National Institute for Medical Research de Londres. La comparación se realiza administrando androsterona patrón y la sustancia problema a animales convenientemente seleccionados y midiendo la variación relativa de la cresta o de las vesículas seminales.

Poco se sabe acerca de las relaciones existentes entre estructura química y actividad fisiológica. Pincus (43) relata una mayor potencia para aquellos compuestos que poseen unión etilénica 4,5 en conjugación con un 0 carbonílico en C-3. La insaturación en el anillo B disminuye esta actividad al igual que la falta del grupo metilo en C-10.

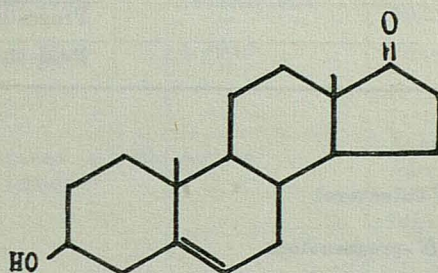
Desde el punto de vista clínico, la DHA adquiere especial interés dado su aislamiento de la orina de pacientes con cáncer adrenocortical (8, 11, 39, 46-55) y los estudios realizados acerca de su influencia en el artrismo reumatoide (50, 54, 55). Los resultados obtenidos a este respecto han ser-

vido para obtener una valiosa información para el diagnóstico, y así (43) se han encontrado excreción disminuida de 17-cetosteroides, en general, en los casos de eunocoidismo, síndrome de Turner (agénesis gonadal), enfermedad de Addison, mixedema y anorexia nerviosa; y aumentada, en virilismo adrenal, hiperplasia adrenocortical congénita (pseudohermafroditismo femenino y macrogenitosomía precoz), tumor celular intersticial del testículo y, ocasionalmente, en el síndrome de Cushing y arrenoblastoma del ovario.

La hiperplasia adrenocortical virilizante se ha reconocido (52) que es una enfermedad producida por un error metabólico. El síndrome de feminización testicular (52) parece ser debido a un exceso de enzimas que intervienen en la transformación de andrógenos a estrógenos.

VI. METABOLISMO DE LA DEHIDROEPIANDROSTERONA

Comprobada para la DHA la fórmula



vamos a ver, de entre los productos aislados de tejidos y fluidos del organismo y de las experiencias realizadas in vivo e in vitro, cuáles son los que pueden estar directamente relacionados con ella y los estudios más importantes realizados para establecer esta interrelación.

En los estudios de síntesis de DHA veíamos que podía realizarse a partir de colesterol y de esteroides en C_{21} , hablábamos de la capacidad de transformación de Δ^5 -3 β -hidroxiesteroides en Δ^4 -3-cetosteroides en la oxidación de Oppenauer, de la formación de derivados hidroxilados y la posibilidad de demetilación a esteroides en C_{18} .

De la admirable revisión de Engel y Langer acerca de la bioquímica de hormonas esteroides (56), llegamos al conocimiento de los trabajos referentes a la biosíntesis de DHA y productos relacionados que resumimos en las tablas 1 y 2.

Respecto a los caminos catabólicos, en los que realizamos nuestras experiencias, el estado actual de los conocimientos está resumido en la tabla 3, en la que únicamente hemos colocado los esteroides que conservan el doble enlace entre los átomos de C 5 y 6 y cuyo grupo 3-hidroxilo tiene conformación, es decir, los Δ^5 -3 β -hidroxiesteroides.

La DHA está reseñada en la tabla 3 con el número 3. En ella no damos más que unas pocas referencias pues muchas se mencionaron ya en los

TABLA 1. — ESTEROIDES RELACIONADOS CON LA DHA AISLADOS DE TEJIDOS O FLUIDOS DEL ORGANISMO

Origen	Producto
Sangre venosa adrenal (cáncer de pecho)	17 α -OH-progesterona 11 β -OH-androstenodiona
Adrenal humana (síndrome adrenogenital)	Progesterona
Adrenal humana (hiperplasia adrenal congénita)	17 α -OH-progesterona
Rebanadas adrenal humana (hipertensión, cáncer)	11 β -OH-androstenodiona
Rebanadas adrenal humana (hiperfunción adrenocortical)	11 β -OH-androstenodiona
Adrenal de perro	3 β -OH-5 α -androstan-11, 17-diona 16 α -OH-progesterona Pregnenolona 17 α -OH-pregnenolona
Sangre venosa adrenal (después de administrar ACTH)	17 α -OH-pregnenolona
Ovario humano	17 α -OH-progesterona Androstenodiona
Placenta humana, ovario	Progesterona
Cuerpo lúteo de bovino	Progesterona

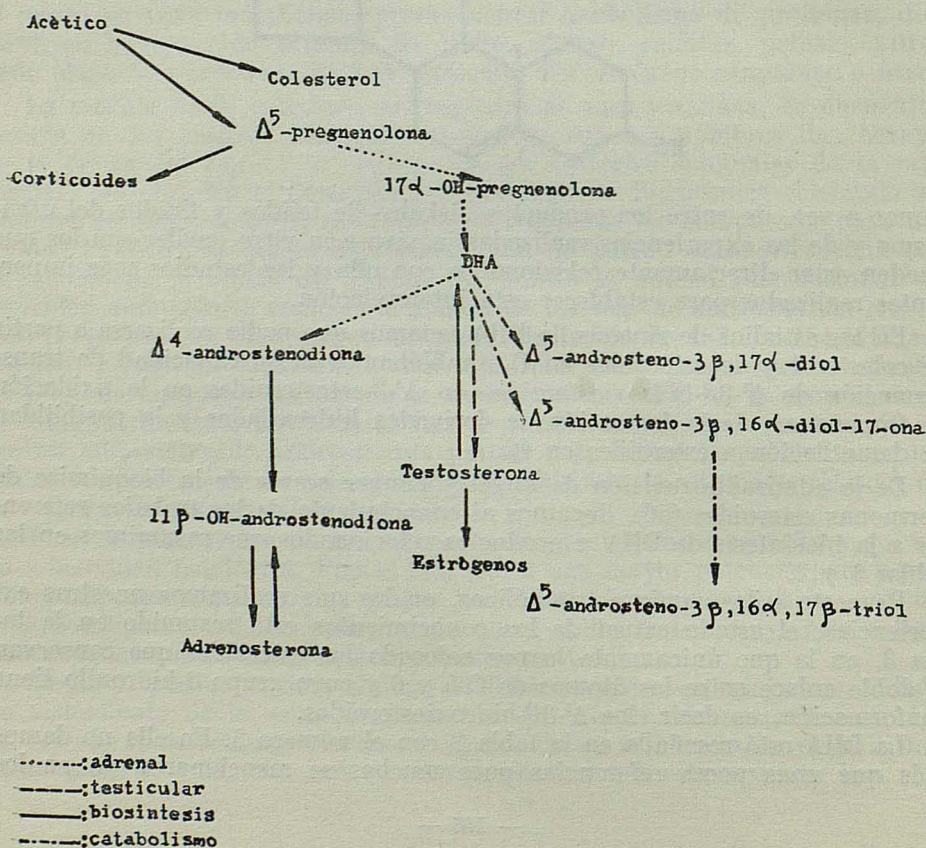


Fig. 12. — Caminos metabólicos de la DHA

TABLA 2. — ESTEROIDES RELACIONADOS CON LA DHA. — TRABAJOS IN VITRO

<i>Especie</i>	<i>Sistema</i>	<i>Substrato</i>	<i>Productos</i>
Feto humano.	Rebanadas adrenal	Acetato	{ Pregnenolona DHA Androstenodiona
Humana.	Homogeneizados tumor adrenocortical	{ Pregnenolona-H ³ Colesterol-C ¹⁴	{ DHA DHA
Humana.	Papillas o rebanadas adrenal	Pregnenolona	{ Prógesterona 17 α -OH-progesterona
		Progesterona	17 α -OH-progesterona
Bovino.	Extractos mitocondria adrenal	Colesterol	Progesterona
Humano.	Cuerpo lúteo	Progesterona	{ 17 α -OH-progesterona Androstenodiona
Bovino.	Cuerpo lúteo	Acetato	Progesterona
Humano.	Rebanadas de tumor testicular	Acetato	{ 17 α -OH-progesterona Testosterona Androstenodiona Adrenosterona 11 β -OH-androstenodiona DHA
		Progesterona	{ 17 α -OH-progesterona Testosterona Androstenodiona 11 β -OH-androstenodiona
		Testosterona	{ Androstenodiona 11 β -OH-androstenodiona 11 β -OH-testosterona
Humano.	Tumor testicular	Acetato	Progesterona - testosterona
Caballo.	Perfusión testicular	Acetato	{ Progesterona 17 α -OH-progesterona androstenodiona

apartados anteriores, y el número tan extenso de trabajos de aislamiento realizados justifica, a nuestro parecer, esta omisión.

Las investigaciones detalladas en las tablas antes mencionadas y los trabajos de carácter enzimático en los tejidos adrenal, testicular y hepático, permiten indicar los caminos metabólicos de la DHA presentados en la figura 12 como los más probables.

Llegando a la etapa final de su metabolismo, los esteroides, en parte, son esterificados en el hígado, órgano de inactivación, y los conjugados formados, sulfatos y glucuronatos, son excretados en la orina junto a la fracción neutra.

TABLA 3. — $\Delta^5-3-\beta$ —HIDROXIESTEROIDES AISLADOS O IDENTIFICADOS EN TEJIDOS Y FLUIDOS

<i>Esteroides</i>	<i>Especie</i>	<i>Origen</i>	<i>Sistema</i>	<i>Adminis- trado</i>	<i>Referencia</i>
1. Δ^5 —androsteno—3 β , 17 α —diol	Conejo	Hígado	Perfusión	DHA	Dorfman y Shipley (34)
	Conejo	Hígado	Homogeneizado	DHA	Dorfman y Shipley (34)
	Humana	Orina	Tumor adrenal		Hirschmann y Hirschmann (58)
	Humana	Orina	Normal		Fotherby (59)
	Humana	Orina	Normal	DHA	Mason y Kepler (49)
	Humana	Orina	Addisonianos	DHA	Miller y Dorfman (60)
2. Δ^5 —androsteno—3 β , 17 β —diol	Humana	Orina	Pac. Simonnds	DHA	Schiller et al. (61)
	Conejo	Hígado	Perfusión	DHA	Dofman y Shipley (34)
	Conejo	Hígado	Homogeneizado	DHA	Rosenkrantz et al. (57)
	Conejo	Hígado	Homogeneizado	DHA-hemi- succinato	Schneider y Mason (8)
	Rata	Hígado	Homogeneizado	DHA	Ungar et al. (57)
	Humanos	Orina	Hipogonadales	2	Dorfman et al. (57)
3. Δ^5 —androsteno—3 β —ol—17—ona	Humanos	Orina	Artríticos	2	(54)
	Humanos	Orina	Normales		Fotherby (59)
	Humanos	Orina	Normales		Starka y Kutova (62)
4. Δ^5 androsteno—3 β , 7 α , 17 β —triol	Rata	Hígado	Rebanadas	DHA	Marrian (57)
	Humana	Orina	Normal		Fotherby (59)
	Humana	Orina	Normal		Mason y Kepler (49)
5. Δ^5 —androsteno—3 β , 16 α , 17 β —triol	Humana	Orina	Addisonianos	DHA	Mason y Kepler (67)
	Humana	Orina	Addisonianos	DHA	Schneider y Mason (8)
	Conejo	Hígado	Homogeneizado	DHA	Fotherby (59)
6. Δ^5 —androsteno—3 β , 16 β , 17 β —triol	Humana	Orina	Normal		Schneider y Lewbart (83)
	Humanos	Orina	Normal	DHA	Schneider y Lewbart (83)
	Conejo	Hígado	Rebanadas	Varios	Okada et al. (17)
7. Δ^5 —androsten—3 β , 7 α , diol—17 ona	Humanos	Orina	Cáncer adrenal		Starka y Kutova (62)
	Rata	Hígado	Homogeneizado	DHA	Fotherby et al. (63)
	Humana	Orina	Normal		Fotherby et al. (64)
	Humana	Orina	Normal		Fotherby (59)
	Humana	Orina	Normal		Okada et al. (17)
	Humana	Orina	Cáncer adrenal		Colás (65)
8. Δ^5 —androsteno—3 β , 16 α —diol—17—ona	Rata	Hígado	Rebanadas	DHA	Starka y Kutova (62)
	Rata	Hígado	Homogeneizado	DHA	Okada et al. (17)
	Humanos	Orina	Cáncer adrenal		Okada et al. (17)
9. Δ^5 androsteno—3 β —ol—7, 17 diona	Humana	Orina	Cáncer adrenal		Okada et al. (17)
10. Δ^5 —androsteno—3 β , 7 α , 16 α —triol—17—ona	Humana	Orina	Cáncer adrenal		Okada et al. (17)
11. Δ^5 —androsteno—3 β , 16 α , diol—7, 17—diona	Humana	Orina	Cáncer adrenal		Okada et al. (17)

B. METODOS

I. COLECCIÓN DE INCUBADOS

1. Consideraciones generales

El conocimiento de que algunas de las muchas reacciones químicas que ocurren en los seres vivos pueden realizarse *in vitro* ha proporcionado un avance extraordinario en nuestros conocimientos del metabolismo.

Para el estudio de los procesos químicos que tienen lugar en un tejido determinado es preciso conocer su fisiología con objeto de seleccionar la técnica adecuada. Si una reacción se ha demostrado con rebanadas de tejido es necesario demostrar que también ocurre en homogeneizados y estos estudios son los puntos de partida para el estudio con fracciones celulares.

Los homogeneizados son suspensiones de los elementos componentes de las células —núcleos, mitocondrias, enzimas, etc.—, en soluciones de elevada densidad. Un homogeneizado es tanto más correcto cuanto menores son el número de células intactas y el daño de los elementos intracelulares.

El objeto primordial de la técnica de homogeneizados es aislar la reacción mejor que el enzima, es decir, tratar de ver cuáles son los elementos componentes de las células responsables de que la reacción se verifique. En segundo lugar, llegar al conocimiento de mecanismos de reacción y desarrollar procedimientos de obtención de nuevos enzimas. La adición de ciertos substratos y cofactores permite, a veces, la reconstrucción de sistemas enzimáticos que toman parte en la función celular.

Los hallazgos hechos acerca del metabolismo de andrógenos sugieren para el hígado un papel preponderante.

Poco se conoce acerca de la estructura de las membranas celulares hepáticas. La estructura más grande del interior de una célula hepática (1) es el núcleo, cuya densidad e índice de refracción difieren de las del citoplasma que lo rodea. El citoplasma se encuentra constituido por mitocondrias, microsomas y fluido citoplásmico, que son portadores, así como los núcleos de importantes sistemas enzimáticos, bien comunes, bien específicos.

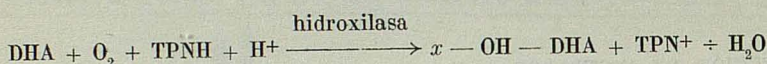
Entre las sustancias esteroideas excretadas en la orina los productos hidroxilados y oxigenados representan una buena proporción.

Los microsomas y mitocondrias del hígado son una fuente rica de enzimas que catalizan oxigenaciones e hidroxilaciones de diversos substratos, particularmente de aquellos enzimas que requieren piridin-nucleótidos (DPN o TPN) para su actividad.

El TPN participa como coenzima en un gran número de oxidaciones, o más bien deshidrogenaciones biológicas y en reacciones de hidroxilación en las que participa como donador de electrones.

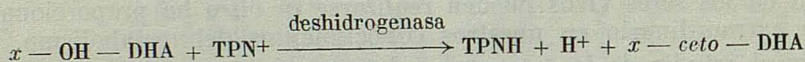
Para el problema que nos ocupa pudiéramos escribir:

a) Hidroxilación:



en la que uno de los átomos del oxígeno molecular se introduce en el substrato y el otro es reducido a ion hidróxilo.

b) Deshidrogenación:



2. Preparación de homogeneizados

El líquido de suspensión utilizado es la llamada solución de Krebs-Ringer (72) mezcla de las siguientes soluciones, todas ellas isotónicas con el suero de rata y que mezcladas en cualquier proporción dan soluciones que son también isotónicas:

a)	NaCl al 0,9 %	0,154 M
b)	KCl al 1,15 %	0,154 M
c)	CaCl ₂ al 1,22 %	0,110 M
d)	KH ₂ PO ₄ al 2,11 %	0,154 M
e)	MgSO ₄ · 7H ₂ O al 3,82 %	0,154 M
f)	NaHCO ₃ al 1,30 %	0,154 M
g)	Solución reguladora de fosfatos 0,1 M, pH = 7,4 (17,8 g. de Na ₂ HPO ₄ · 2H ₂ O + 20 ml. de HCl 1 N diluido a 1 litro)	

Para preparar la solución de Krebs-Ringer se mezclan las soluciones anteriores en la siguiente proporción:

a)	100 partes
b)	4 partes
c)	3 partes
d)	1 parte
e)	1 parte

Para la solución de Krebs-Ringer -bicarbonatos, se añade además la solución f) en cantidad determinada (72), se borbotea CO₂, etc.

Para la solución Krebs-Ringer-fosfatos (KRF), que es la utilizada en nuestras experiencias, se omite la solución d) y se añaden 20 partes de la solución g).

Se añade al hígado cortado a pequeños trozos, colocado en el vaso que previamente se mantiene en hielo triturado, la cantidad conveniente y se homogeneiza en aparato de Virtis.

3. Separación de fracciones celulares

La separación de los diversos elementos componentes de las células se practica por los métodos de centrifugación diferencial (68-72). En una solución de sacarosa 0,34 M la centrifugación de la muestra (73) conduce a la separación de las siguientes fracciones:

- a) Centrifugación a 700 g por 10 minutos. Se separan núcleos, eritrocitos, tejido conectivo y células intactas.
- b) Centrifugación del sobrenadante anterior a 5.000-24.000 g por 10 minutos. Se separan las mitocondrias.
- c) Centrifugación del sobrenadante anterior a 54.000 g por 60 minutos. Se separan los microsomas.

El medio de suspensión por nosotros utilizado puede tener diferencias de viscosidad y peso específico con el medio patrón, pero consideramos que estas diferencias son francamente despreciables dada la diferencia tan grande en la fuerza centrífuga para la separación de las diversas fracciones.

En nuestras experiencias utilizamos la centrífuga refrigerada MSE a una velocidad de 2.000 r. p. m. que, según los cálculos corresponde a 482,8 g. Obtenemos por tanto un homogeneizado, parcialmente purificado, en el que se habrán eliminado los aglomerados moleculares y células intactas probablemente.

4. Incubación

El sobrenadante procedente de la centrifugación se coloca en un matraz erlenmeyer de 500 ml. y se añaden cantidades apropiadas de solución de dehidroepiandrosterona en propilenglicol, de solución de TPN en agua destilada y de una solución de glucosa-6-fosfato en KRF (pH 7,2-7,4). Las tres soluciones se mantienen en congelador a -30°C .

La incubación se realiza por dos horas a 38°C , en matraz abierto y con agitación continua.

5. Resumen de operaciones

a) *Extracción del hígado.*—Se pesa una rata macho de más de 200 g., se mata con éter, se extrae el hígado, se lava con solución fría de NaCl al 0,9 % por dos veces y se pesa.

b) *Homogeneización.*—Si el hígado pesó X gramos se homogeneiza con 4X ml. de Krebs-Ringer-fosfatos pH 7,2-7,4 en el aparato de Virtis a 3.000 r. p. m. por 30 sg. El homogeneizado se transfiere cuantitativamente a una probeta con 2X ml. de KRF y se mide el volumen total de homogeneizado (será algo menos de 7X ml.) volumen que llamaremos Y.

c) *Centrifugación.*—Con el rotor núm. 6886 de la centrífuga MSE

a 2.000 r. p. m. por 10 minutos. El residuo se desprecia. El sobrenadante se mide para saber el volumen, que llamaremos Z.

d) *Incubación*. — En un matraz de 500 ml. se ponen los Z ml. de sobrenadante del homogeneizado y además:

1. 0,2 X ml. de una solución de DHA en propilenglicol conteniendo 12,5 mg. por ml.
2. X ml. de una solución de TPN conteniendo 2 micromoles por ml. en agua destilada.
3. X ml. de una solución conteniendo 20 micromoles de glucosa-6-fosfato por ml. (en KRF pH 7,2-7,4).

Las tres soluciones anteriores se mantienen en congelador.

e) *Almacenamiento*. — Mantenido a -30° se dispone un erlenmeyer de 2 litros limpio y seco y con tapón forrado de papel de aluminio.

Al terminar la incubación, el incubado se transfiere a dicho matraz con ayuda de 2×5 ml. de KRF. En el matraz se van conservando todos los incubados.

II. EXTRACCIÓN DE INCUBADOS

Una vez que se han completado diez incubaciones, aproximadamente, en el matraz erlenmeyer mantenido a -30° C, temperatura que excluye toda posible actividad enzimática, procedemos a realizar las operaciones previas a la extracción.

Descongelamos el contenido del matraz con agua a temperatura ambiente y sometemos a ebullición, en placa previamente calentada, por dos minutos con agitación continua. Esta operación se hace necesaria con objeto de denaturar las proteínas, con lo que queda destruida toda acción enzimática.

La suspensión así obtenida la extraemos por cuatro veces con tres veces su volumen de cloroformo y los extractos se lavan por tres veces con un volumen igual de agua destilada. Secamos con 4 % (peso/volumen) de sulfato sódico anhidro y filtramos.

Los filtrados se concentran en evaporador rotatorio, a vacío y 40° C, temperatura a la que no hay posibilidad de destrucción o transformación de las sustancias esteroideas.

El residuo de evaporación se trata por tres veces con 5 ml. de metanol anhidro, con objeto de eliminar los últimos vestigios de humedad, y lo transferimos con 5 ml. de una mezcla de metanol y cloroformo a partes iguales, a un matraz de 50 ml, previamente tarado, con ayuda de una pipeta Pasteur.

Evaporamos en la vitrina bajo nitrógeno y mantenemos en desecador de vacío sobre cloruro de calcio anhidro hasta su utilización.

III. SEPARACIÓN Y ANÁLISIS

1. Cromatografía en columna

Todas las cromatografías en columna realizadas por nosotros se hicieron en columna de silica gel. Las cantidades de relleno utilizadas, en cada caso, fueron proporcionales a la masa de producto a cromatografiar. Generalmente se usó un peso en gramos de silica gel igual a la cuarta parte del peso de la sustancia a cromatografiar expresado en miligramos.

Para el cálculo de la columna suponemos que la densidad de la silica impregnada de etanol es igual a la unidad. El volumen ocupado será:

$$V = M$$

V = mililitros, M = gramos.

Columnas eficientes se obtienen haciendo $h = 40$ r. La obtención de altura y radio se hace resolviendo el sistema:

$$r = \text{antlg.} \frac{[\log V - \log (40 \pi)]}{3}$$

$$h = 40 \text{ r}$$

En ocasiones hubimos de modificar algo estas dimensiones por no disponer del tamaño adecuado.

Para el relleno de la columna, saturamos la silica con etanol absoluto hasta que comienzan a formarse grumos. Añadimos la menor cantidad posible del primer solvente cromatográfico para formar un barro que se añade a la columna teniendo la llave parcialmente abierta. Una vez que la cromatografía está en marcha es conveniente proseguirla hasta el final. El empacado correcto de la columna se logra con más facilidad golpeando las paredes lateralmente.

Cuando el nivel de líquido está a 1 mm. sobre la superficie de la columna de silica gel, se deja discurrir por las paredes interiormente, la solución de la sustancia a cromatografiar en el primer solvente, con la ayuda de una pipeta Pasteur.

Por el número de fracciones recogidas hasta que aparecen las primeras gotas coloreadas, deducimos de modo aproximado el volumen de retención de la columna. Es necesario conocer este volumen para hacer las correcciones necesarias en el corte de las fracciones cromatográficas.

Salvo indicación en contrario, el sistema de solventes utilizado es el mismo de Okada et al. (17):

- a) Diclorometano con 20 % de etanol absoluto. $V = 2$ m. (V = volumen en ml.; m = peso en mgs. del producto a cromatografiar).
- b) Diclorometano con 4 % de etanol absoluto. $V = 1,5$ m.
- c) Diclorometano con 10 % de etanol absoluto. $V = 1,5$ m.
- d) Etanol absoluto. $V = m$.

Se recogen en colector automático de fracciones provisto de sifón volumétrico, se evaporan a sequedad bajo nitrógeno y se colocan en desecador a vacío sobre cloruro cálcico anhidro hasta su utilización.

2. *Cromatografía sobre papel*

El sistema utilizado es el de benceno-metanol-agua (BMA) preparado del siguiente modo:

Mezclamos en embudo separador:

1.000 ml. de benceno
700 ml de metanol
300 ml. de agua

agitamos enérgicamente y dejamos estar la suspensión por 18 horas, al cabo de las cuales la fase estacionaria, metanol-agua saturada de benceno, se coloca en el tanque cromatográfico, y la capa superior, fase móvil, constituida por benceno saturado de metanol y agua se guarda en frasco con tapón esmerilado para adicionarla a las navecillas de cromatografía descendente después de la estabilización.

Con objeto de saturar la atmósfera del tanque lo más rápidamente posible se colocan en los soportes, lateralmente, hojas de papel de filtro cuyo extremo inferior está sumergido en la fase estacionaria. En el centro del tanque se coloca un cristalizador con la fase móvil en la que se encuentra introducido el extremo inferior de un cilindro de papel de filtro. El tiempo de estabilización en estas condiciones es de cuatro a cinco horas.

El tiempo de desarrollo de un cromatograma sobre papel Whatman 42, que es el utilizado por nosotros, es de 8 a 9 horas.

La separación de pequeñas cantidades de sustancias se hizo por cromatografía con goteo y el reconocimiento del contenido de las fracciones de cromatografía en columna colocando gotas sobre círculos dibujados en papel del mismo tipo y sometiéndolas a las adecuadas observaciones posteriores.

3. *Reacción de Pettenkofer*

Esta reacción, de extraordinaria importancia en la detención y determinación cuantitativa de sustancias esteroides, fue descrita por Pettenkofer (7) en 1844 para los ácidos biliares. Schmidt y Hughes (74) utilizan la reacción para determinaciones colorimétricas de ácido cólico. Disuelven la sustancia en acético 60 %, añaden ácido sulfúrico 16 N y una solución al 0,9 % de furfural en acético y calientan a 67°C por 12 minutos en la oscuridad. La solución se colorea de azul y la absorción es máxima a 610-660 mμ.

Munson y colaboradores (75) realizaron un trabajo exhaustivo investigando la especificidad de la reacción para esteroides, sobre la base del descubrimiento de Kerr y Hohn de que la reacción era fuertemente positiva para la DHA. Consecuencia de su trabajo fue la conclusión de que la reacción es positiva en general para todas aquellas sustancias esteroides que

contienen insaturación actual o potencial en el anillo A, y en particular para la DHA y sus derivados simples.

Reactivos

1. *Solución de furfural*. — Se destila furfural en baño a presión reducida recogiendo en cada destilación únicamente la fracción media. El producto incoloro así obtenido se disuelve rápidamente en acético 50 % a una concentración del 0,56 % (v/v) y se almacena en cuarto frío. El reactivo preparado de este modo es estable por varios meses.

2. *Solución patrón de DHA*. — Utilizamos la solución de DHA que contiene aproximadamente 5 mgs./10 ml. en etanol de 95 %. Tomamos 0,1 ml. de esta solución.

3. *Acido sulfúrico 16 N*.

4. *Acido acético 50 %*. — Tomamos 470 ml. de ácido acético glacial y añadimos 590 ml. de agua destilada. Como puede calcularse, la concentración de la solución resulta ser un poco más baja de lo indicado, pero con ella obtenemos buenos resultados.

Reacción a macroescala

Tomamos cantidades apropiadas de las soluciones problemas y el patrón antes indicado, los colocamos en tubos con tapón esmerilado, evaporamos bajo nitrógeno a 50°C y después en desecador de vacío por una hora. Disponemos al propio tiempo un blanco sin furfural, que nos servirá de referencia, y uno con furfural (que nos permitirá conocer su estado), de acuerdo con la siguiente tabla:

TABLA 5. — REACTIVOS PARA EL ENSAYO DE MUNSON A MACROESCALA

	Acético glacial ml.	Acético 50 % ml.	R. furfural ml.	Sulfúrico 16N, ml.
Muestra	0,2	—	0,8	3,0
Patrón	0,2	—	0,8	3,0
Blanco sin furfural	0,2	0,8	—	3,0
Blanco con furfural	0,2	—	0,8	3,0

Reacción a microescala

La utilizamos para el ensayo de cromatogramas sobre papel. Para ello cortamos en porciones de 1 cm. de anchura y las colocamos en tubos con tapón esmerilado. Añadimos a cada tubo 3,0 ml. de metanol de modo que el papel quede completamente sumergido. Se dejan estar al menos por dos horas en la oscuridad. Separamos el papel con la ayuda de unas pinzas, evaporamos la solución bajo nitrógeno a 50°C y colocamos los tubos en desecador de vacío por 15 minutos. Junto a las muestras evaporamos y desecamos un patrón de DHA, de acuerdo con la siguiente tabla:

TABLA 6. — REACTIVOS PARA EL ENSAYO DE MUNSON A ESCALA MICRO

	Acético glacial ml.	Acético 50 %, ml.	R. furfural ml.	Sulfúrico 16N, ml.
Muestra	0,05	—	0,20	0,75
Patrón	0,05	—	0,20	0,75
Blanco sin furfural	0,05	0,20	—	0,75
Blanco con furfural	0,05	—	0,20	0,75

Método

Mezclamos perfectamente el contenido de los tubos y observamos en frío al cabo de cinco minutos a ojo desnudo. A veces realizamos esta observación con el espectrofotómetro a 660 mu.

Calentamos los tubos en la oscuridad en baño de agua mantenido a 67° por 12 minutos, al cabo de los cuales introducimos en agua a 0° C por un momento y observamos los tubos en espectrofotómetro Beckman DU o B a 660 mu.

Todos los Δ^5 -3 β -hidroxiesteroides dan positiva esta reacción de Pettenkofer, lo que demuestra la importancia extraordinaria para el trabajo que nos ocupa.

La reacción, entre otras cosas, es esencial para el corte de las fracciones cromatográficas.

4. *Reacción de Zimmermann*

Es la reacción más difundida en la determinación de 17-cetosteroides.

El tratamiento de una 17-cetona con m-dinitrobenceno en álcali alcohólico da lugar a un pigmento rojo-violáceo que presenta un máximo de absorción a 500 mu aproximadamente.

La literatura se encuentra plagada de modificaciones introducidas a la reacción de Zimmermann (14, 76-80). Estas modificaciones se encuentran, en su mayor parte, en la concentración de los reactivos a utilizar. Algunas previenen la precipitación de los carbonatos utilizando las soluciones en alcohol diluido, otras evitan los errores procedentes de cromógenos y sustancias impurificantes mediante extracción del color con un solvente orgánico.

Un microprocedimiento interesante es el debido a Hildegard Wilson (79). De este trabajo se desprende que los 17-cetosteroides son los más cromogénicos en la reacción de Zimmermann. Además, las 3-cetonas saturadas reaccionan dando un color cuya absorción es del 69 por 100 y las 20-cetonas con una absorción del 17 por 100, de la correspondiente a la de las 17-cetonas. La conclusión es, que la reacción no es específica para los 17-cetosteroides. Los Δ^4 -3-cetosteroides dan una banda de intensidad comparable a 380 mu y las 20-cetonas dan una banda a 520 mu de intensidad una quinta parte de la correspondiente a los 17-cetosteroides. Las 3-cetonas saturadas dan un color intenso, pero el ensayo es negativo para las 6, 7 y 12-cetonas (7).

Un estudio profundo de la reacción de Zimmermann ha permitido a Corker y colaboradores (80) establecer el mecanismo de la reacción.

Los ensayos realizados por nosotros son:

a) *Macrométodo*

TABLA 7. — REACTIVOS PARA EL ENSAYO DE ZIMMERMANN

	Etanol 95 %	DHA (5 mgs./10 ml.) en etanol de 95 %	m-dinitrobenceno 2 % en etanol 95 %	KOH 2,5 N en etanol 95 %
Blanco de reactivos ...	0,2	—	0,2	0,2
Patrón de DHA ...	—	0,2	0,2	0,2
Muestra ...	0,2	—	0,2	0,2

La manera de practicar este ensayo consiste en colocar los 0,2 ml. de patrón y la cantidad apropiada de muestra y evaporar a sequedad bajo nitrógeno a 60° C. Desecar a vacío por 15 minutos, disolver los residuos en 0,2 ml. de etanol y agregar las cantidades ya indicadas de m-dinitrobenceno y potasa alcohólica. Se tapan los tubos y se dejan estar por una hora en la oscuridad. Se añaden 10 ml. de etanol y se determinan las densidades ópticas a 430 y 520 mu.

b) *Micrométodo*

La sensibilidad es de 2 microgramos de 17-cetosteroides.

Las cantidades de etanol 95 por 100 y solución de m-dinitrobenceno son la mitad que en la reacción a macroescala, la de potasa alcohólica igual. Se agita, se deja estar por tres horas en baño de hielo, se añade 0,5 ml. de etanol 80 por 100 y se lee a 530 mu.

Las soluciones de m-dinitrobenceno y KOH deben prepararse inmediatamente antes del uso.

Para aplicar la reacción a cromatogramas sobre papel se corta la pista cromatográfica en tiras de 1 cm. de anchura y se someten a tratamientos previos análogos a los señalados para la reacción de Pettenkofer.

Preparación de la solución de KOH

Disolvemos 10 gr. de KOH en 50 ml. de etanol caliente. Centrifugamos o filtramos varias veces a través de lana de vidrio, titulamos 0,5 ml. de solución con ácido sulfúrico 0,1 N usando naranja de metilo como indicador. Diluimos la solución hasta 2,48-2,52 N. Guardar en cuarto frío y descartarla tan pronto como aparezca la menor coloración.

Wilson y Carter (81) recomiendan añadir a la solución de KOH una pequeña cantidad de ácido ascórbico y mantener bajo nitrógeno.

5. *Reacción del azul de terrazol (BT)*

Es característica de los compuestos reductores, azúcares, etc. Entre los esteroides dan reacción positiva los alfa-cetoles, es decir, los compuestos que

contienen un grupo carbonílico y uno hidróxilo próximos, con preferencia los que los tienen en la cadena lateral.

El reactivo conocido como azul de tetrazol es el cloruro de 3,3'-dianisol-bis-4,4'-(3:5-difenil)-tetrazolio, sustancia que da con los compuestos reductores en solución débilmente alcalina formazanos coloreados (2,7).

Utilizamos dos tipos de reacciones: a) Macro y b) Para pulverizaciones sobre cromatogramas en papel.

a) *Escala macro*

Reactivos: 1. Hidróxido de tetrametilamonio 1 por 100. Disponemos de una solución de la sustancia al 10 por 100 que diluimos en el momento de su uso. Tomamos 0,5 ml. de la solución al 10 por 100 y completamos a 5 ml. con etanol absoluto.

2. Reactivo azul de tetrazol. Pesamos 7 mgs. de sustancia y los disolvemos en 10 ml. de etanol absoluto.

3. Solución patrón de DOCA.

Práctica. — La reacción se lleva a cabo añadiendo 0,25 ml. de hidróxido de tetrametilamonio al residuo seco que se va a analizar y 0,35 ml. del reactivo de azul de tetrazol. Incubamos por 1 hora en la oscuridad y diluimos la mezcla resultante con 4 ml. de ácido acético al 1 por 100 (v/v) en alcohol de 50 por 100. Se mide la D. O. a 510 mu.

b) *Para pulverizaciones*

Se prepara el siguiente reactivo: Disolvemos 10 mgs. de azul de tetrazol en 10 ml. de agua destilada y agregamos 5 ml. de solución al 10 por 100 de hidróxido sódico. Rociamos y secamos.

Como patrón se utiliza una solución patrón de cromatografía (ver anexo) que permite hacer un estudio comparativo de R_F .

Kingsley y Getchell (81) hacen una revisión completa de las modificaciones del método y ponen en marcha una modificación según la cual extraen el color con cloroformo y realizan lecturas a 525 mu. El método ha sido objeto, sin embargo, de severas críticas (82).

6. *Reacción frente al ácido fosfotúngstico (PTA)*

Las primeras referencias de este método que han llegado a nuestro conocimiento son las observaciones de Schneider y Lewbart (83). En este trabajo dan los autores la reacción del ácido fosfotúngstico para el reconocimiento de derivados 7-hidroxilados de esteroides.

En toda la literatura anterior por nosotros revisada no encontramos ninguna referencia al método. El reconocimiento en cromatogramas sobre papel se venía haciendo, o bien por las coloraciones obtenidas con soluciones de tricloruro de antimonio, o bien con soluciones alcohólicas de ácido fosfomolibdico.

Okada y colaboradores (17) y Starka y Kutova (62) utilizan en sus trabajos esta reacción.

En nuestros ensayos hemos utilizado pulverizaciones de los cromatogramas con solución al 10 por 100 de ácido fosfotúngstico en etanol de 95 por 100 recién preparada. Los cromatogramas se calientan a 80° C por siete minutos, tiempo suficiente para la aparición de la coloración azul característica.

Los derivados de la DHA que no poseen un grupo hidróxilo en C-7 producen color rojizo (17) que según hemos observado se vuelve azul con el tiempo. Estas coloraciones nos sirvieron en aquellos casos en que por la magnitud del patrón de DHA elegido no nos fue posible su detección a la luz ultravioleta.

7. Observaciones a la luz ultravioleta

La presencia de un grupo carbonilo en la molécula da lugar a una débil absorción ultravioleta a 290 m μ que no puede medirse con gran exactitud. La introducción en un compuesto así, de un halógeno, hidróxilo y acetóxilo produce variaciones en la longitud de onda y densidad óptica que dependen de si el grupo tiene conformación axial o ecuatorial. Los sustituyentes axiales desplazan la longitud de onda en una cantidad de + 20 a + 30 m μ , los ecuatoriales de — 5 m μ .

Las observaciones en la región ultravioleta deben ir complementadas con las observaciones en el infrarrojo en donde las variaciones son más significativas.

Las cetonas α , β -insaturadas presentan dos bandas de absorción en el ultravioleta:

- a) Banda fuerte entre 230-260 m μ debida al sistema de dobles enlaces conjugados.
- b) Banda débil a 290 m μ debida al grupo carbonílico, CO, que hemos visto existe también en las cetonas saturadas.

La existencia de sustituyentes en los átomos de C en posición o respecto del grupo CO, la conformación de estos sustituyentes, la presencia en la molécula de dobles enlaces que extiendan la conjugación, son factores que producen desplazamientos en la longitud de onda de los máximos de absorción y en la intensidad de las bandas. Los cálculos a este respecto son complicados y no vamos a entrar en ellos ya que nuestras experiencias se han limitado al cálculo de espectros y a observaciones de absorción puramente cualitativas.

C. DESCRIPCION DE ENSAYOS

I. EXPERIENCIAS PRELIMINARES. — COLECCIÓN DE INCUBADOS NÚM. 1

Preparamos la colección de incubados núm. 1 siguiendo la guía dada en la sección Métodos. La composición y características de esta primera serie de incubados viene dada en la tabla núm. 8.

TABLA 8
COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 1

Rata N.º	Peso g.	Higado g.	Homoge- neizado ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
1	287	10,9	75	7,0	62,5	2,2	1	10,9	1	10,9	1
2	255	9,2	60	7,0	50,0	1,9	1	9,2	1	9,2	1
3	298	10,4	71	7,0	57,0	2,1	1	10,4	1	10,4	1
4	264	8,4	50	7,0	42,0	1,7	1	8,4	1	8,4	1
5	276	10,0	68	7,0	56,0	2,0	2	10,0	1	10,0	2
6	323	8,5	57	6,95	48,0	1,7	2	8,5	1	8,5	2
7	328	11,8	77	7,0	62,0	2,3	2	11,8	1	11,8	2
8	308	9,6	65	7,0	52,0	2,0	2	9,6	1	9,6	2
9	276	10,5	73	6,95	62,0	2,1	2	10,5	1	10,5	2
10	300	9,4	65	6,95	53,0	1,9	2	9,4	1	9,4	2
11	269	8,9	65	6,95	53,0	1,8	2	8,9	1	8,9	2

El residuo de la extracción se colocó en desecador a vacío hasta peso constante. Obtuvimos una goma densa, oscura con un peso de 0,72605 gramos que disolvimos en 1 ml. de metanol.

Cromatografía sobre papel

Sobre un papel Whatman 42 trazamos cuatro pistas cromatográficas que numeramos de 1 al 4. En las pistas números 1, 3 y 4 colocamos 10 microlitos de la solución anterior y en la número 2, 10 microlitos de solución patrón para cromatografía.

Dejamos estabilizar el cromatograma por 14 horas al cabo de las cuales colocamos en la cubeta cromatográfica 50 ml. de la fase móvil, benceno saturado de metanol y agua (BMA). El desarrollo del cromatograma dura 8 horas, al cabo de las cuales lo sacamos del tanque y colocamos en vitrina para proceder al secado.

Observación a la luz ultravioleta

Los resultados se dan en la Tabla núm. 9.

TABLA 9
COLECCION DE INCUBADOS N.º 1
EXAMEN A LA LUZ ULTRAVIOLETA

Pista N.º	Frente solvente mm.	Distancia mancha a línea de partida mm.	R_F
1	306	193	0,63
2	309	67-114-256	0,22-0,37-0,83
3	313	190	0,61
4	313	194	0,62

Reacción al azul de tetrazol

Cortamos las pistas 2 y 3 y las sometemos a la acción del reactivo.

Aparecen coloreadas las manchas que aparecieron en el ultravioleta y además una amplia mancha en la pista núm 3 con las siguientes características.

Límites de la mancha	157-184 mm.
Línea de partida-centro mancha	171 mm.
Frente de solvente	313 mm.

$$R_F = 0,55$$

Determinación de 17-cetosteroides. Método de Wilson

Realizamos esta determinación sobre la pista núm. 1. Realizamos la operación según se ha indicado en III-II para reacciones a microescala. Los resultados se dan en la Tabla 10 y Figuras 13 y 15.

Determinación de Δ 5-3 β -hidroxiesteroides. — Método de Munson

Procesamos la tira núm. 4 según III-II. Los resultados se dan en la Tabla núm. 11 y figuras 14 y 15. Es de advertir que el patrón de DHA tomado fue demasiado pequeño.

TABLA 10

COLECCION DE INCUBADOS. N.º 1. — REACCION DE WILSON

<i>Cm.</i>	<i>D.O.</i> (515 <i>mu</i>)	
—1	0,120	
0	0,300	
1	0,343	
2	0,775	
3	0,431	
4	0,137	
5	0,125	
6	0,107	
7	0,098	
8	0,185	
9	0,203	
10	0,231	
11	0,125	
12	0,096	
13	0,177	
14	0,238	
15	0,226	
16	0,216	
17	0,430	
18	0,375	
19	0,508	
20	0,361	
21	0,312	
22	0,433	
23	0,560	
24	1,000	
25	0,880	
26	0,820	
27	0,565	
28	0,960	
29	0,370	
30	0,355	
31	0,130	
32	0,227	
33	0,190	
P.	0,570	(patrón que contiene 10 microgramos de DHA)
P.	0,560	
B.	0,038	
B. (referencia)	0,000	

Las D.O. situadas a la derecha de la columna principal se midieron a una concentración 1/5 de las demás debido a la intensidad de color.

FIG. núm. 13. — Colección de incubados número 1. Reacción de Wilson para 17-cetosteroides. Longitud de onda 530 milimicras.

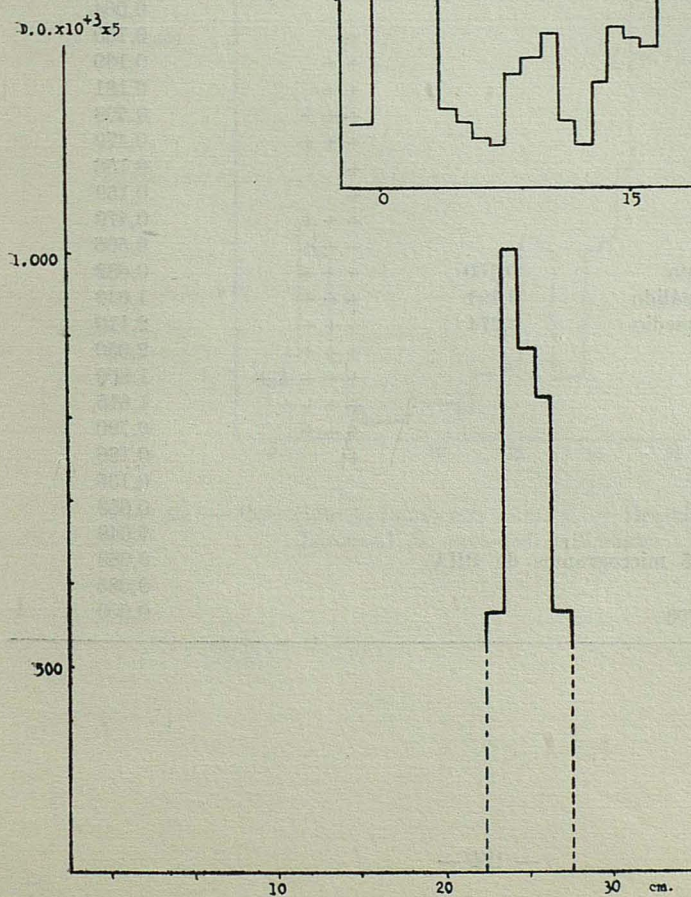
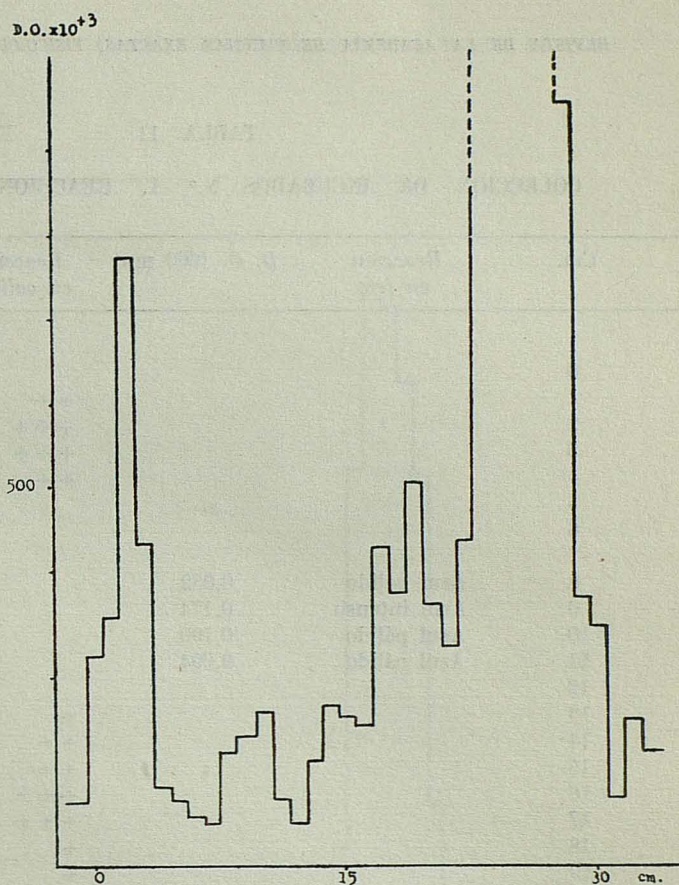


FIG. núm. 13 a. — Colección de incubados núm. 1. Reacción de Wilson. Complemento de la figura 13.

TABLA 11

COLECCION DE INCUBADOS. N.º 1. REACCION DE MUNSON

<i>Cm.</i>	<i>Reacción en frío</i>	<i>D. O. (660 mμ)</i>	<i>Reacción en caliente</i>	<i>D. O. (660 mμ)</i>
1				0,032
0				0,140
1			++	0,211
2			+++	0,540
3			+++	0,462
4			++	0,163
5				0,061
6				0,037
7				0,037
8	Azul pálido	0,032		0,046
9	Azul intenso	0,174		0,099
10	Azul pálido	0,190		0,096
11	Azul pálido	0,094		0,092
12				0,064
13			+	0,160
14			++	0,160
15			++	0,181
16			+++	0,508
17			+++	0,479
18			+	0,156
19			+	0,159
20			+++	0,479
21			+++	0,505
22	Magenta	0,160	+++	0,682
23	Azul pálido	0,191	+++	1,640
24	Azul medio	0,274	+++	2,110
25			+++	2,050
26			+++++	1,860
27			++++	1,615
28			+++	0,790
29			+	0,186
30				0,136
31				0,083
32				0,049
P. (patrón de 7,5 microgramos de DHA)				0,089
P.				0,085
Blanco de reactivos				0,000

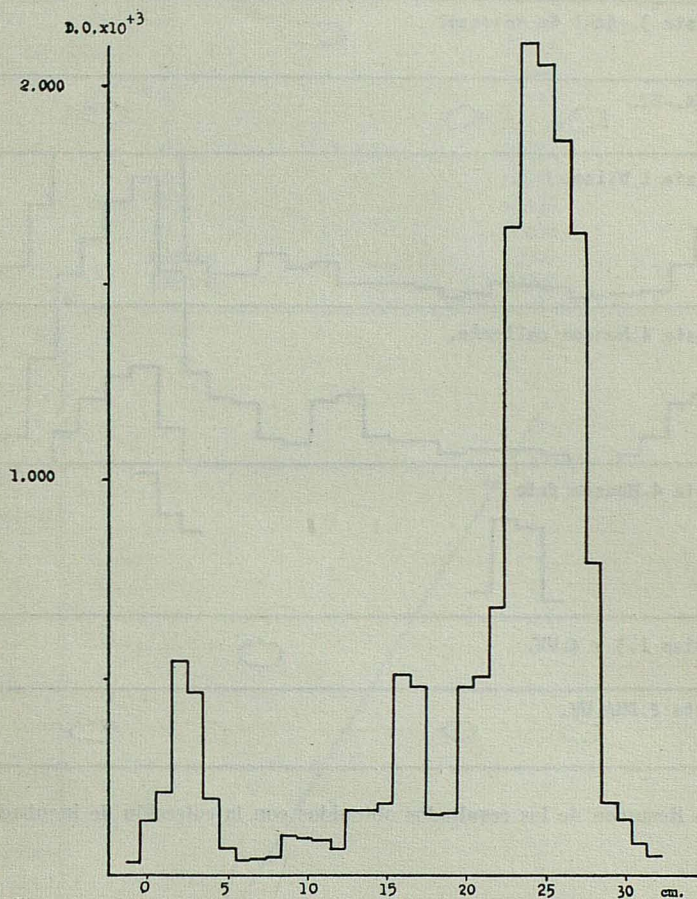


FIG. 14. — Colección de incubados núm. 1. — Reacción de MUNSON.
Longitud de onda 660 milimicras

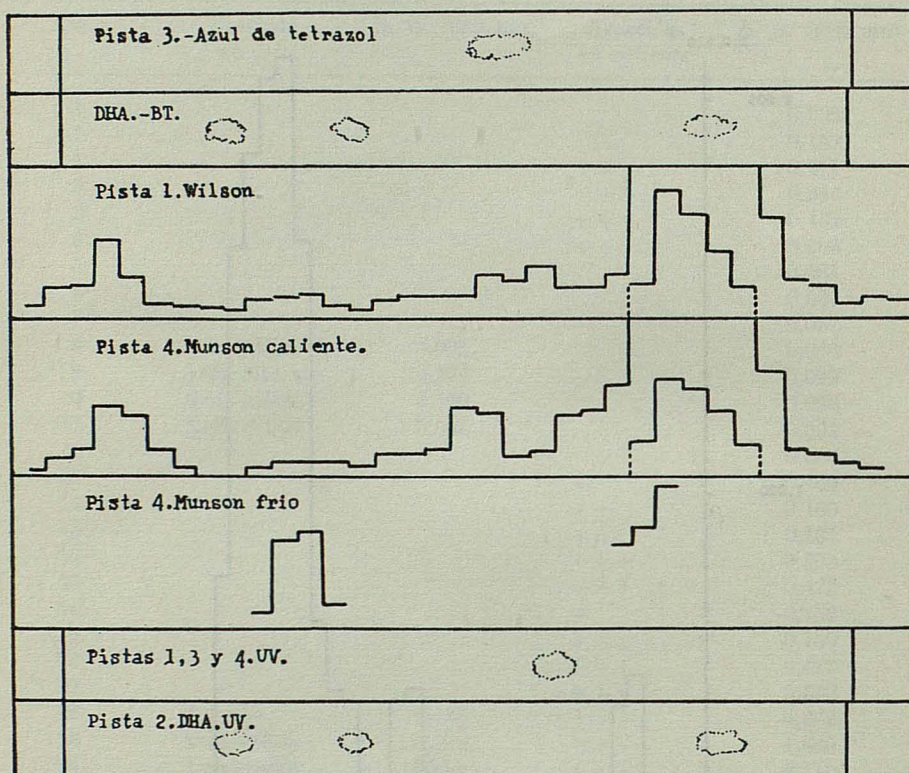


FIG. 15. — Resumen de los resultados obtenidos con la colección de incubados núm. 1

DETERMINACION DE LA CURVA DE CALIBRADO Y DEL ESPECTRO DE ABSORCION DE LA DHA (SCHERING) TRATADA SEGUN EL METODO DE WILSON

Para el desarrollo de las etapas del trabajo citadas y sucesivas determinamos estos valores que expresamos en las Tablas números 12 y 13 y gráficas números 16 y 17.

TABLA 12

CURVA DE CALIBRADO PARA DETERMINACION DE DHA POR EL METODO DE WILSON

<i>Conc. DHA (ug.)</i>	<i>D. O. (530 mμ)</i>
1	0,065
1	0,055
2	0,082
2	0,080
4	0,157
4	0,168
6	0,260
6	0,260
10	0,455
10	0,430
Blanco	0,000
Blanco	0,000

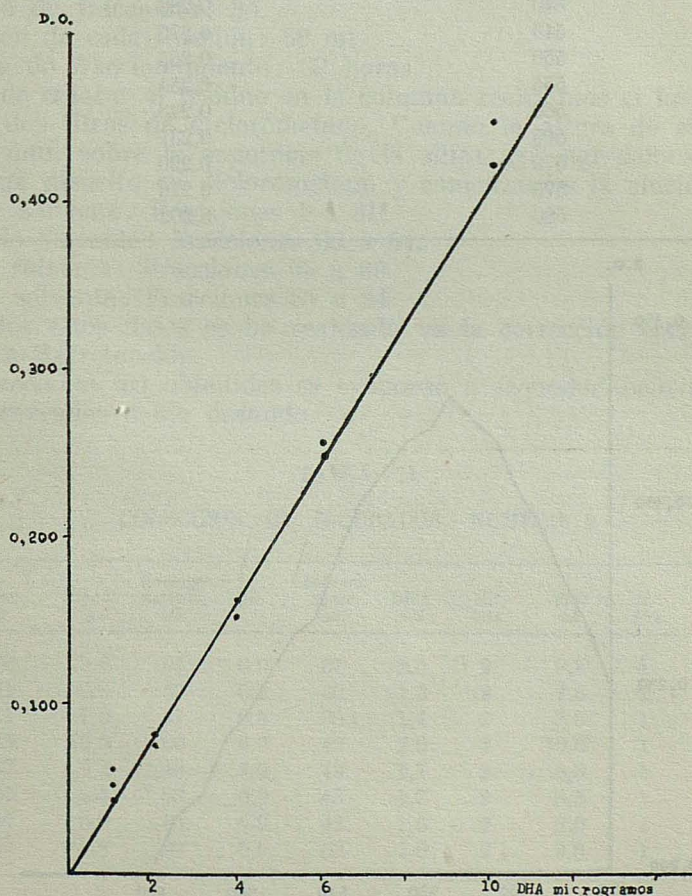


FIG. 16. — Curva de calibrado para la DHA por el método de Wilson.
Longitud de onda 530 milimicras

TABLA 13

VALORES DEL ESPECTRO DE ABSORCIÓN DE LA DHA DESPUES DEL TRATAMIENTO
SEGUN EL METODO DE WILSON

Muestra = 10 μ g. de DHA

(<i>mu</i>)	D. O.
480	0,252
485	0,267
490	0,281
495	0,298
500	0,307
505	0,321
510	0,325
515	0,333
520	0,324
525	0,322
530	0,311
535	0,303
540	0,288
545	0,270
550	0,265
555	0,254
560	0,243
565	0,237
570	0,220
575	0,216
580	0,202

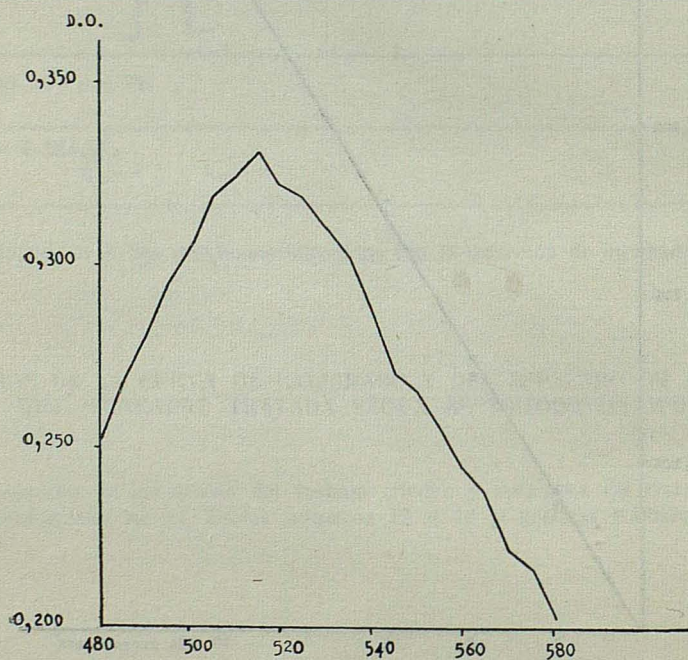


FIG. 17. — Espectro de absorción de la DHA.
Método de Wilson. Concentración 10 microgramos de DHA.

II. ESTUDIO DE LA COLECCIÓN E INCUBADOS NÚMEROS 1, 2 Y 3

Realizamos nuevas incubaciones cuyo detalle se da en las tablas 14 y 15.

Verificada la extracción y secado de los residuos, los acumulamos al residuo de la colección de incubados número 1, disolviéndolos en una mezcla a partes iguales, de metanol y cloroformo y transfiriéndolos a un matraz de 50 ml. previamente pesado por medio de una pipeta Pasteur.

La mezcla, que en adelante denominaremos colección de incubados 1, 2 y 3, fue evaporada bajo nitrógeno, secado, etc. y produjo un residuo total de 1,462 gr. que cromatografiamos a través de una columna de silica gel de acuerdo con los siguientes datos:

Características de la columna: Altura: 70 cm.; diámetro: 2,5 cm.; volumen de retención: 240 ml.; relleno: silica gel.

Sistema de solventes: Ver sección métodos.

Número de fracciones: 94.

Volumen de cada fracción: 60 ml.

Tiempo de fraccionamiento: 32 horas.

Antes de colocar el residuo en la columna realizamos el lavado haciendo pasar dos litros de diclorometano. Cuando la altura de este solvente era de 1 mm. sobre la superficie de la silica gel, agregamos el residuo previamente disuelto en diclorometano y comenzamos la elución.

Primer solvente: Fracciones 1 a 31.

Segundo solvente: Fracciones 32 a 54.

Tercer solvente: Fracciones 55 a 80.

Cuarto solvente: Fracciones 81 a 94.

En todos estos datos se ha realizado ya la corrección correspondiente al volumen de retención.

Las fracciones así obtenidas se evaporan a sequedad bajo nitrógeno y fueron observadas a ojo desnudo.

TABLA 14
COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 2

Rata LN.º	Peso g.	Higado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA mll	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P m.	N.º lote
12	302	9,8	67	6,9	57	2,0	2	9,8	1	9,8	2
13	281	7,5	50	6,9	40	1,5	2	7,5	1	7,5	2
14	211	7,0	47	6,9	38	1,4	2	7,0	1	7,0	3
15	245	10,0	60	6,9	43	2,0	2	10,0	1	10,0	3
16	267	8,3	59	7,0	49	1,7	2	8,3	1	8,3	3
17	251	8,5	53	6,9	43	1,7	2	8,5	1	8,5	3
18	285	8,0	51	6,9	42	1,6	2	8,0	1	8,0	3
19	313	9,8	62	6,9	53	2,0	2	9,8	1	9,8	3

TABLA 15
 COLECCIÓN DE INCUBADOS. NÚMERO 3

Rata N.º	Peso g.	Hígado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
20	262	9,5	64	7,0	52	1,9	1	9,5	1	9,5	3
21	245	9,3	63	7,0	55	1,9	2	9,3	1	9,3	3
22	228	7,9	53	6,9	45	1,6	2	7,9	2	7,9	3
23	237	7,9	54	6,9	44	1,6	2	7,9	2	7,9	3
24	252	7,8	54	6,9	43	1,6	2	7,8	2	7,8	3
25	232	6,8	44	6,9	36	1,4	2	6,8	2	6,8	3
26	236	7,0	45	—	35	1,4	3	7,0	2	7,0	4
27	238	7,2	49	—	40	1,5	3	7,0	2	7,0	4
28	234	8,5	52	7,0	45	1,7	3	8,5	2	8,5	4
29	215	6,4	42	7,0	35	1,3	3	6,4	2	6,4	4
30	211	7,4	50	7,0	41	1,6	3	7,4	2	7,4	4

Reacción de Munson

Con objeto de realizar el corte de fracciones con mayor conocimiento tomamos uno de cada tres tubos, en los que vamos a hacer una determinación de Munson. Debemos preparar una solución que contenga una concentración de esteroides de 30 $\mu\text{g.}/\text{ml.}$ como máximo. Realizados los cálculos oportunos, disolvemos el contenido de cada tubo en 25 ml. de metanol, tomamos 0,1 ml. y lo tratamos según Munson. Al propio tiempo tomamos 0,1 ml. de una solución que contiene 0,496 mgs. de DHA/10 ml., que resultó baja como veremos, y un blanco. Observamos coloraciones en frío y caliente. Los resultados se dan en la tabla 16 y figura 18.

No apareció coloración alguna en frío, a diferencia de la colección 1 y tampoco la reacción anómala que allí obtuvimos con el tubo número 22, lo que puede ser debido, probablemente, a una mayor dilución.

En experiencias realizadas para la reacción de Munson con distintas concentraciones de sulfúrico observamos que con ácido 32 N (Tabla 17), aparece una extensa gama de colores en frío, antes y después de agitar, tan intensas que fue imposible las lecturas en el espectrofotómetro.

Acumulación de fracciones

Teniendo presente los resultados de la reacción de Munson y la elución por el sistema de solventes cromatográficos, preparamos las fracciones que rotulamos de A a I del siguiente modo:

Fracción A: Reunimos tubos 1-7, pero antes tomamos del tubo núm. 2 dos porciones de 0,5 ml. para Zimmermann y azul de tetrazol.

Fracción B: Reunimos tubos 8-19 pero antes tomamos dos porciones de 0,5 ml. del tubo núm. 14 para Zimmermann y azul de tetrazol.

Fracción C: Reunimos tubos 20-26 y evaporamos a sequedad.

Fracción D: Reunimos tubos 27-31 y evaporamos a sequedad.

TABLA 16

COLECCIONES DE INCUBADOS. NUMEROS 1, 2 Y 3. REACCION DE MUNSON
DE LAS FRACCIONES CROMATOGRAFICAS: ACIDO SULFURICO 16 N

<i>Fracción núm.</i>	<i>Coloración en frío</i>	<i>D. O. (660 mμ)</i>
Primer solvente cromatográfico:		
2		0,096
5		0,066
8		0,035
11		0,528
14		0,670
17		0,266
20		0,007
23		0,005
26		0,000
29		0,019
Segundo solvente cromatográfico:		
32		0,010
35		0,177
38		0,034
41		0,026
44		0,000
47		0,005
50		0,000
53		0,000
Tercer solvente cromatográfico:		
56		0,000
59		0,017
62		0,000
65		0,003
68		0,000
71		0,000
74		0,000
77		0,006
Cuarto solvente cromatográfico:		
80		0,105
83		0,000
86		0,000
89		0,000
92		0,000
P.		0,045
P.		0,051
B.		0,000

Fracción E: Reunimos tubos 32-43, pero antes tomamos una muestra de 0,5 ml. del tubo núm. 35 para reacción de azul de tetrazol.

Fracción F: Reunimos tubos 44-54 y evaporamos a sequedad.

Fracción G: Reunimos tubos 55-77 y evaporamos a sequedad.

Fracción H: Reunimos tubos 78-82 y evaporamos a sequedad.

Fracción I: Reunimos tubos 83-94 y evaporamos a sequedad.

TABLA 17

COLECCIONES DE INCUBADOS. NUMEROS 1, 2 Y 3. REACCION DE MUNSON
DE LAS FRACCIONES CROMATOGRAFICAS: ACIDO SULFURICO 32 N

Fracción N.º	Coloración en frío antes de agitar	Intensidad de color	Color después de agitar
2	Anillo azul	Débil	Amarillo débil
5	" "	"	" "
8	" "	"	" "
11	" "	intenso	violeta intenso
14	" "	"	" "
17	" "	menos intenso	" "
20	nada		nada
23	"		"
26	"		"
29	"		"
32	"		"
35	anillo azul	intenso	violeta
38	" "	débil	nada
41	" "	muy débil	amarillo débil
44	nada		" "
47	"		" "
50	"		" "
53	"		" "
56	"		" "
59	"		" "
62	"		" "
65	"		" "
68	"		incoloro
71	"		amarillo débil
74	"		" "
77	anillo azul	débil	" "
80	nada		" "
83	"		verdoso débil
86	"		amarillo débil
89	"		" "
92	"		" "
P. (49,6 µg. DHA)	anillo azul	débil	nada
B.	nada		nada

Los resultados de estas reacciones de Zimmermann y azul de tetrazol se dan en la Tabla núm. 18, en donde puede verse son bajos los patrones tomados.

Cromatografía sobre papel de las fracciones anteriores

Colocamos por duplicado en dos hojas en las que hemos trazado seis pistas para C, D, F, G, H e I. Disolvimos los residuos correspondientes a estas fracciones en 2,5 ml. de metanol y colocamos manchas de 10 microlitros.

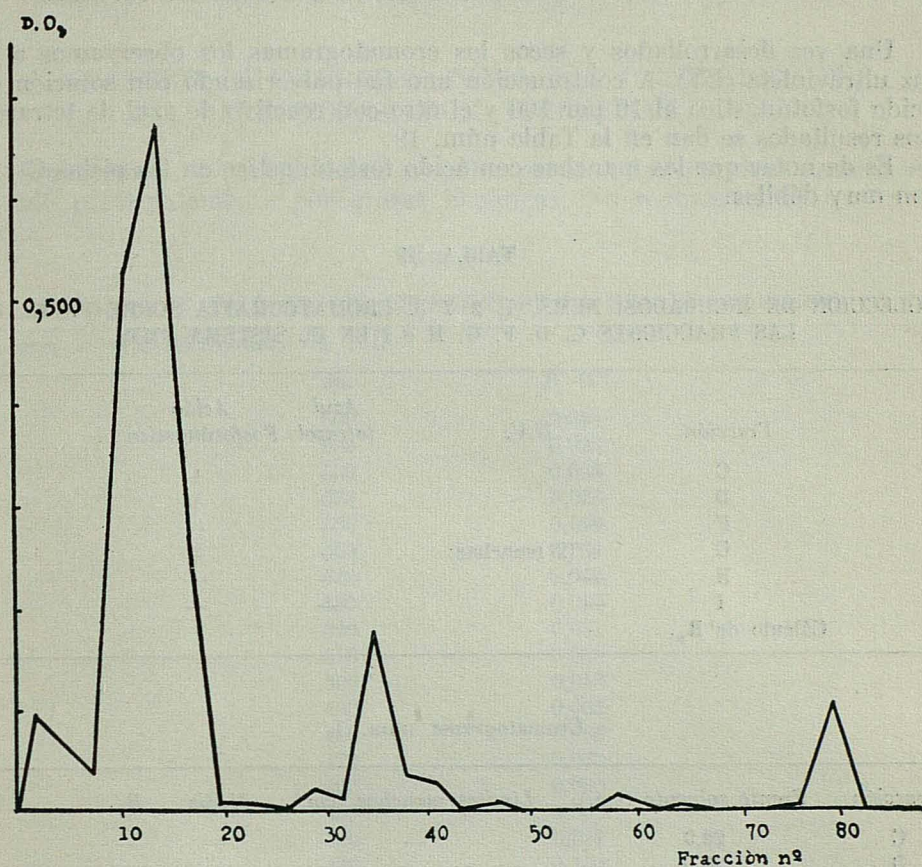


FIG. 18. — Reacción de Munson de las fracciones cromatográficas de la colección de incubados 1, 2 y 3

TABLA 18

COLECCION DE INCUBADOS. NUMS. 1, 2 Y 3. FRACCIONES A, B Y E DE CROMATOGRAFIA: REACCION DE ZIMMERMANN Y AZUL DE TETRAZOL

Fracción	Zimmermann	Azul de tetrazol		Muestra tomada
	430 mμ	D.O 520 mμ	D.O 510 mμ	
A	0,068	0,045	0,460	0,5 ml. de los 25 en que se había disuelto para Munson.
B	0,560	1,220	0,118	0,5 ml. de los 25 en que se había disuelto para Munson.
E	—	—	0,755	0,5 ml. de los 25 en que se había disuelto para Munson.
P ₁	0,012	0,012		10 μg. de DHA.
P ₂			0,053	20 μg. de DOCA.

Una vez desarrollados y secos los cromatogramas los observamos a la luz ultravioleta (UV). A continuación uno fue pulverizando con solución de ácido fosfotúngstico al 10 por 100 y el otro con reactivo de azul de tetrazol. Los resultados se dan en la Tabla núm. 19.

Es de notar que las manchas con ácido fosfotúngstico en las pistas C y D son muy débiles.

TABLA 19

COLECCION DE INCUBADOS. NUMS. 1, 2 Y 3. CROMATOGRAFIA SOBRE PAPEL DE LAS FRACCIONES C, D, F, G, H e I EN EL SISTEMA BMW

Fracción	U.V.	Azul tetrazol	Acido Fosfotúngstico
C	—	—	+
D	—	—	+
F	—	—	—
G	+ (2 manchas)	—	+
H	—	—	—
I	—	—	—
Cálculo de R_F .			

Cromatograma núm. 1

Fracción	Frente solvente (cm.)	Límites manchas (cm.)	Media	R_F
C	22,9	—	—	—
D	23,0	—	—	—
F	23,1	—	—	—
G	23,3	3,2 — 4,2	3,7	0,16 ultravioleta
		6,5 — 7,4	7,0	0,30 ultravioleta
H	23,3	—	—	—
I	23,3	—	—	—

Cromatograma núm. 2

Fracción	Frente solvente (cm.)	Límites manchas (cm.)	Media	R_F
C	23,9	22,3 — 23	22,7	0,95 Ac. fosfotúngstico
D	23,6	21,6 — 22,1	21,9	0,93 Ac. fosfotúngstico
F	23,8	—	—	— ultravioleta
G	24,1	3,0 — 4,0	3,5	0,15 ultravioleta
		6,5 — 7,2	6,9	0,29 ultravioleta
		7,1 — 9,0	8,1	0,34 Ac. fosfotúngstico
H	24,2	—	—	— Ac. fosfotúngstico
I	24,0	—	—	— Ac. fosfotúngstico

COLECCION DE INCUBADOS. NUMS. 1, 2 Y 3. ESTUDIO DE
FRACCIONES CROMATOGRAFICAS

Fracción A. — Aceite denso de color pardo-rojizo que debe estar constituido preferentemente por grasas hepáticas. No realizamos estudio posterior.

TABLA 20

TABLA DE VALORES DEL ESPECTRO DE LA DHA EN SULFURICO

Muestra = 49,6 microgramos de DHA

<i>mu</i>	<i>D. O.</i>
600	0,024
590	0,025
580	0,025
570	0,025
560	0,028
550	0,034
540	0,042
530	0,050
520	0,051
510	0,054
500	0,058
490	0,062
480	0,065
470	0,063
460	0,060
450	0,062
440	0,082
430	0,180
420	0,500
410	0,925
400	0,960
390	0,760
380	0,550
370	0,375
360	0,250
350	0,195
340	0,195
230	0,220
320	0,298
310	0,480
300	0,497
290	0,400
280	0,295
270	0,235
260	0,175
250	0,170
240	0,190
230	0,210
220	0,257

TABLA 21

COLECCION DE INCUBADOS. NUMEROS 1, 2 Y 3. TABLA DE VALORES DEL ESPECTRO EN SULFURICO DE LOS CRISTALES OBTENIDOS DE LA FRACCION B DE CROMATOGRAFIA DESPUES DE CINCO RECRISTALIZACIONES

Blanco: Acido sulfúrico concentrado.

Muestra: 45 microgramos de la FRACCION B disueltos en 4 ml de sulfúrico.

(m μ)	D. O.	(m μ)	D. O.
600	0,020	405	0,670
595	0,030	400	0,695
590	0,025	395	0,700
585	0,025	390	0,630
580	0,027	385	0,565
575	0,030	380	0,485
570	0,032	375	0,430
565	0,032	370	0,370
560	0,035	365	0,325
555	0,037	360	0,290
550	0,039	355	0,265
545	0,041	350	0,265
540	0,047	345	0,235
535	0,054	340	0,215
530	0,057	335	0,220
525	0,064	330	0,210
520	0,068	325	0,225
515	0,075	320	0,268
510	0,082	315	0,340
505	0,089	310	0,420
500	0,093	305	0,435
495	0,099	300	0,455
490	0,105	295	0,450
485	0,115	290	0,400
480	0,113	285	0,352
475	0,117	280	0,285
470	0,113	275	0,257
465	0,112	270	0,210
460	0,107	265	0,185
455	0,100	260	0,184
450	0,120	255	0,168
445	0,112	250	0,175
440	0,125	245	0,187
435	0,140	240	0,212
430	0,180	235	0,213
425	0,252	230	0,250
420	0,360	225	0,340
415	0,470	220	0,225
410	0,600		

Fracción B — Después de tres recrystalizaciones obtenemos cristales, blanco-amarillentos de metanol. Después de secar a vacío sobre cloruro de calcio obtenemos un punto de fusión de 120-138°. A 132°C se observa un cambio en el sistema de cristalización. Realizada una cuarta recrystalización los cristales tienen un punto de fusión de 128-139°C.

Sospechamos, dada la polaridad de esta fracción de que se encuentra constituida primordialmente de la DHA sin transformar y a ese respecto obtenemos los espectros en ácidos sulfúrico de la DHA (Schering) y de los cristales obtenidos de esta fracción B. Los resultados obtenidos se dan en las Tablas 20 y 21 y Figuras 19 y 20.

Tratando de hacer una cromatografía sobre papel con objeto de separar una sustancia todavía más pura en la que hacer una determinación de poder rotatorio nos encontramos con dos franjas que absorben débilmente en el ultravioleta. Los R_F para estas manchas B_1 y B_2 fueron 0,93 y 0,74 respectivamente. R_F del patrón fue de 0,89.

En el proceso cromatográfico hubo sin duda una descomposición.

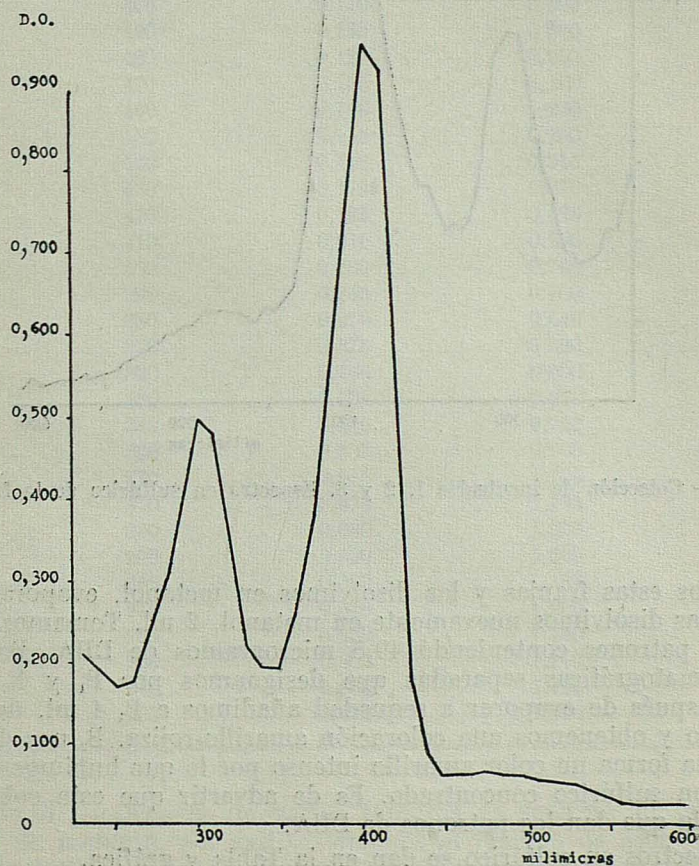


FIG. 19. — Espectro en sulfúrico de la DHA

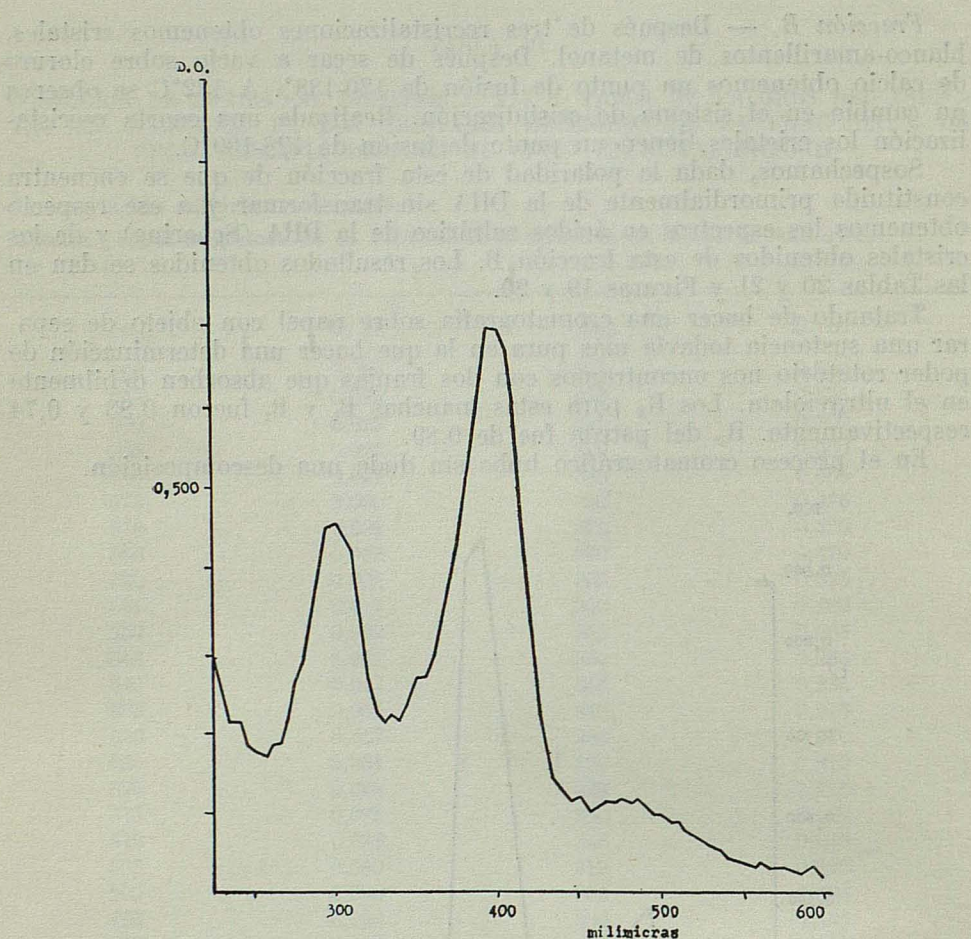


FIG. 20. — Colección de incubados 1, 2 y 3. Espectro en sulfúrico de la fracción B.

Cortamos estas franjas y las disolvimos en metanol, evaporamos a sequedad y las disolvimos nuevamente en metanol, 2 ml. Tomamos dos blancos y dos patrones conteniendo 49,5 microgramos de DHA. De las fracciones cromatográficas separadas que designamos por B_1 y B_2 tomamos 0,1 ml. Después de evaporar a sequedad añadimos a B_1 4 ml. de sulfúrico concentrado y obtenemos una coloración amarillo-rojiza. B_2 nos dio tratado en la misma forma un color amarillo intenso por lo que hubimos de diluirlo a 9 ml. con sulfúrico concentrado. Es de advertir que esta coloración es idéntica a la que dan los patrones de DHA.

Los espectros en sulfúrico se dan en la Tabla y gráfica.

TABLA 22

COLECCION DE INCUBADOS 1, 2 Y 3. VALORES DEL ESPECTRO
DE LAS FRACCIONES B_1 Y B_2

$m\mu$	B_1	B_2
600	0,045	0,075
590	0,048	0,080
580	0,053	0,087
570	0,055	0,093
560	0,060	0,102
550	0,065	0,112
540	0,072	0,125
530	0,080	0,143
520	0,090	0,160
510	0,099	0,183
500	0,110	0,205
490	0,120	0,230
480	0,127	0,250
470	0,135	0,260
460	0,145	0,270
450	0,155	0,290
440	0,166	0,315
430	0,179	0,370
420	0,195	0,525
410	0,210	0,720
400	0,230	0,760
390	0,243	0,700
380	0,270	0,640
370	0,375	0,620
360	0,460	0,600
350	0,502	0,650
340	0,530	0,750
330	0,605	0,960
320	0,645	1,100
310	0,670	1,135
300	0,640	1,300
290	0,620	1,200
280	0,620	1,180
270	0,640	1,200
260	0,630	1,150
250	0,603	1,110
240	0,605	1,150
230	0,670	1,300

Fracción E. — Después de varios intentos de separar los cristales que se forman de metanol, sin éxito, tomamos el residuo de esta fracción con un peso de 0,0469 gr. y lo recromatografiamos en columna de silica gel utilizando como solventes:

- a). Diclorometano. 58 ml.
- b). Diclorometano 4 % EtOH ... 48 ml.
- c). Diclorometano 10 % EtOH .. 48 ml.
- d). Etanol absoluto. 33 ml.

Silica gel utilizada, 12 gr. ; número de fracciones, 20 ; volumen de cada fracción, 10 ml. ; volumen de retención de la columna, 30 ml.

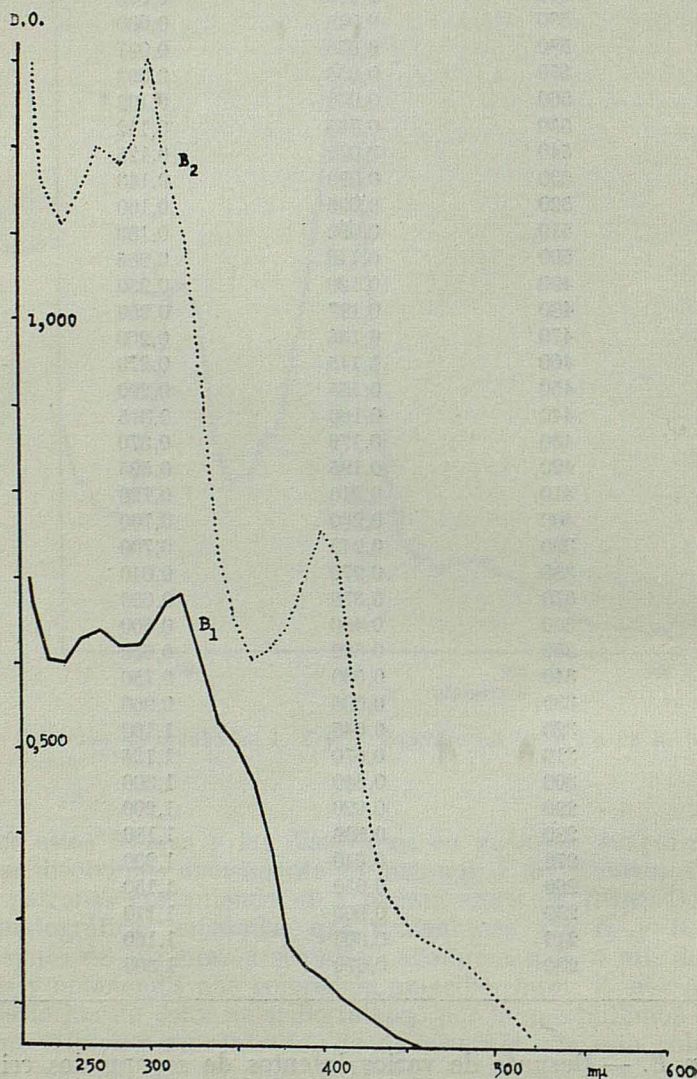


Fig. 21. — Espectro en sulfúrico de las fracciones B₁ y B₂

Efectuamos la reacción de Munsen en alícuotas de 0,2 ml. de cada fracción obteniendo los siguientes resultados:

TABLA 23

REACCION DE MUNSON PARA RECROMATOGRAFIA DE E. (Ver fig. 22)

Fracción n.º	D. O. (660 mμ)
1	0,010
2	0,015
3	0,010
4	0,005
5	0,007
6	0,010
7	0,020
8	0,015
9	0,005
10	0,005
11	0,128
12	0,522
13	0,500 color azul en frío
14	0,156
15	0,068
16	0,025
17	0,015
18	0,010
19	0,015
20	0,015
Patrón	0,360 (49,6 microgramos de DHA)
Patrón	0,360 (49,6 microgramos de DHA)
Blanco	0,010 con furfural
Blanco	0,000 sin furfural (referencia).

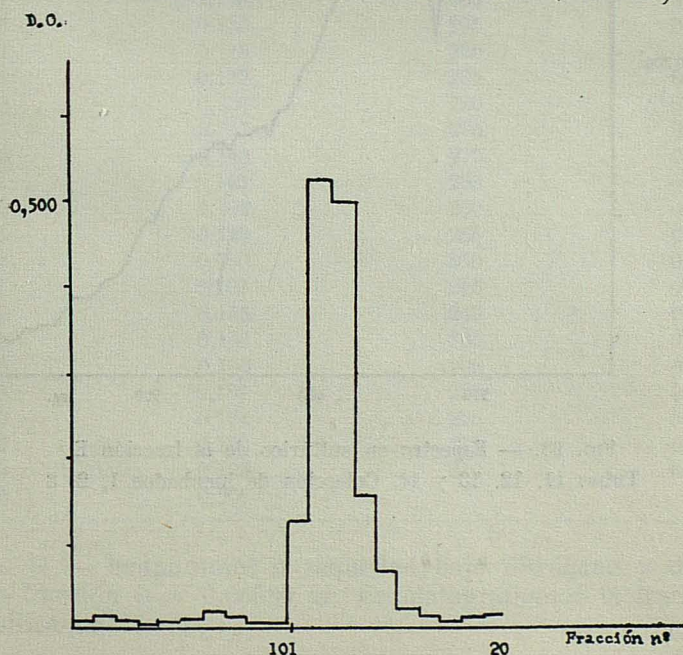


FIG. 22. — Reacción de Munsen para las fracciones de recomatografiar la fracción E de las colecciones 1, 2 y 3

De acuerdo con estos resultados reunimos las fracciones 11, 12, 13 y 14 y cristalizamos de metanol. Obtenemos unos cristales que secamos a vacío sobre cloruro de calcio por 24 horas y que dieron un punto de fusión de $175-177^{\circ}\text{C}$ que corresponde a $16-\alpha\text{-OH-DHA}$.

Obtenemos el espectro en sulfúrico de estos cristales. El resultado se da en la tabla 24 y figura número 23.

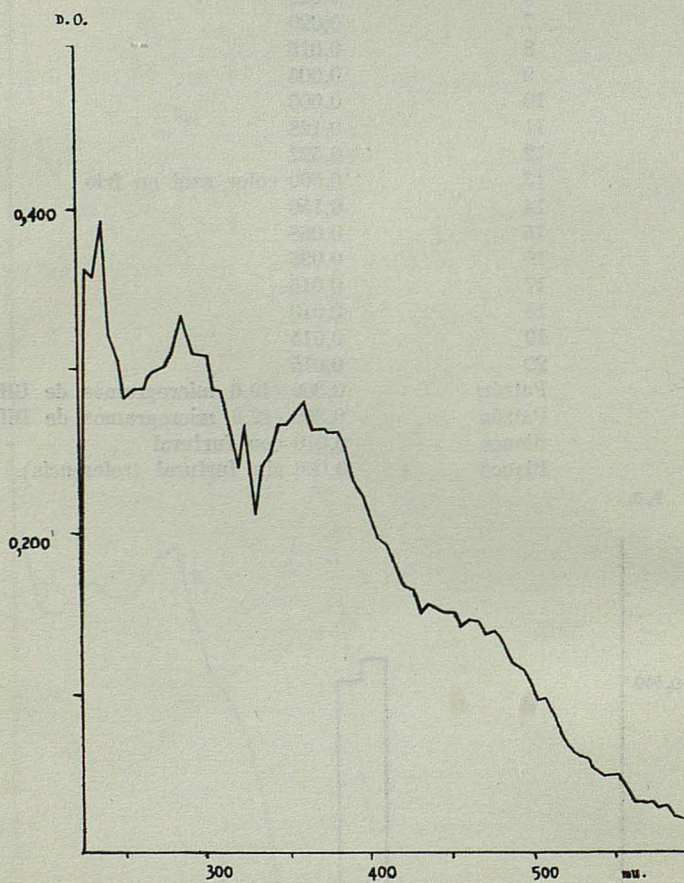


FIG. 23. — Espectro en sulfúrico de la fracción E.
Tubos 11, 12, 13 y 14. Colección de incubados 1, 2, 3

TABLA 24

VALORES DEL ESPECTRO EN SULFURICO DE LA SUSTANCIA SEPARADA DE LA FRACCION E

Tubos 11, 12, 13 y 14 de recromatografía.

<i>mu</i>	<i>D. O.</i>	<i>mu</i>	<i>D. O.</i>
600	0,024	400	0,221
595	0,021	395	0,230
590	0,023	390	0,249
585	0,028	385	0,259
580	0,031	380	0,259
575	0,032	375	0,263
570	0,032	370	0,263
565	0,032	365	0,279
560	0,038	360	0,273
555	0,048	355	0,265
550	0,048	350	0,266
545	0,049	345	0,248
540	0,052	340	0,240
535	0,058	335	0,207
530	0,061	330	0,263
525	0,067	325	0,237
520	0,075	320	0,265
515	0,086	315	0,287
510	0,096	310	0,285
505	0,094	305	0,316
500	0,108	300	0,318
495	0,115	295	0,317
490	0,118	290	0,333
485	0,132	285	0,312
480	0,136	280	0,300
475	0,137	275	0,300
470	0,143	270	0,297
465	0,145	265	0,287
460	0,142	260	0,287
455	0,149	255	0,281
450	0,150	250	0,303
445	0,152	245	0,320
440	0,155	240	0,392
435	0,148	235	0,355
430	0,163	230	0,361
420	0,167	225	0,187
420	0,174	220	0,458
415	0,188	215	0,482
410	0,195	210	0,538
405	0,207		

Fracción G. — Evaporamos a sequedad bajo nitrógeno y desecamos a vacío. Peso fracción G = 0.06530 gr. Cromatografiamos la fracción en columna de sílica-gel.

Eluyentes:

- a) Diclorometano 4 % 150 ml.
 b) Diclorometano 10 % 150 ml.
 c) Etanol absoluto 100 ml.

Número total de fracciones, 39; volumen de cada fracción, 10 ml.

Sobre una tira de papel Whatman 42 ponemos en círculos de 1 cm. de diámetro, previamente dibujados y numerados 10 microlitros de cada una de las fracciones. Examinamos mediante reacción al ácido fosfotúngstico, después de hecha la observación correspondiente en el ultravioleta. Los resultados se dan en la tabla 25 y figuras 24 y 25.

Los tubos de cromatografía 18, 19 y 20 de esta fracción, que son los que dan reacción más intensa frente al ácido fosfotúngstico, los transferimos cuantitativamente a un balón de 50 ml. Este residuo, una vez evaporado y seco dio un peso de 0,01735 gr. En él realizamos determinaciones de Mun-

TABLA 25

COLECCION DE INCUBADOS. NUMEROS 1, 2 Y 3. OBSERVACIONES A LA LUZ U. V. Y AL ACIDO FOSFOTUNGSTICO DE LAS FRACCIONES DE RECROMATOGRAPHIA DE LA FRACCION G

Tubo n.º	U. V.	Ac. fosfotúngstico 10 %
2	+++	—
3	—	marrón
4	+	—
10	++	—
12	++	—
13	+	—
15	++	—
17	—	+ azul violáceo
18	—	++++ " "
19	—	++++ " "
20	—	++ " "
21	—	+ " " p
22	—	marrón?
23	+++	—
25	+++	—
27	+	—
31	+	—
32	+	—
33	—	marrón
34	+++	—
35	+	—
38	+	—

son, Zimmermann y azul de tetrazol, según indicamos más adelante. Tomamos al propio tiempo 0,3 ml. de la solución en 35,3 ml. de metanol para determinar el espectro en sulfúrico. Los valores de este espectro se dan en la tabla 26 y figura 26.

Con objeto de separar impurezas antes de someter a cristalización cromatografiamos el residuo procedente de los tubos 18, 19 y 20. Se separaron dos bandas visibles al ultravioleta pero de las que sólo una da coloración con el ácido fosfotúngstico. Se disolvieron ambas en metanol y fueron sometidas a cristalización en congelador a -30° C. La cristalización no fue posible, debido, sin duda a la magnitud de la muestra.

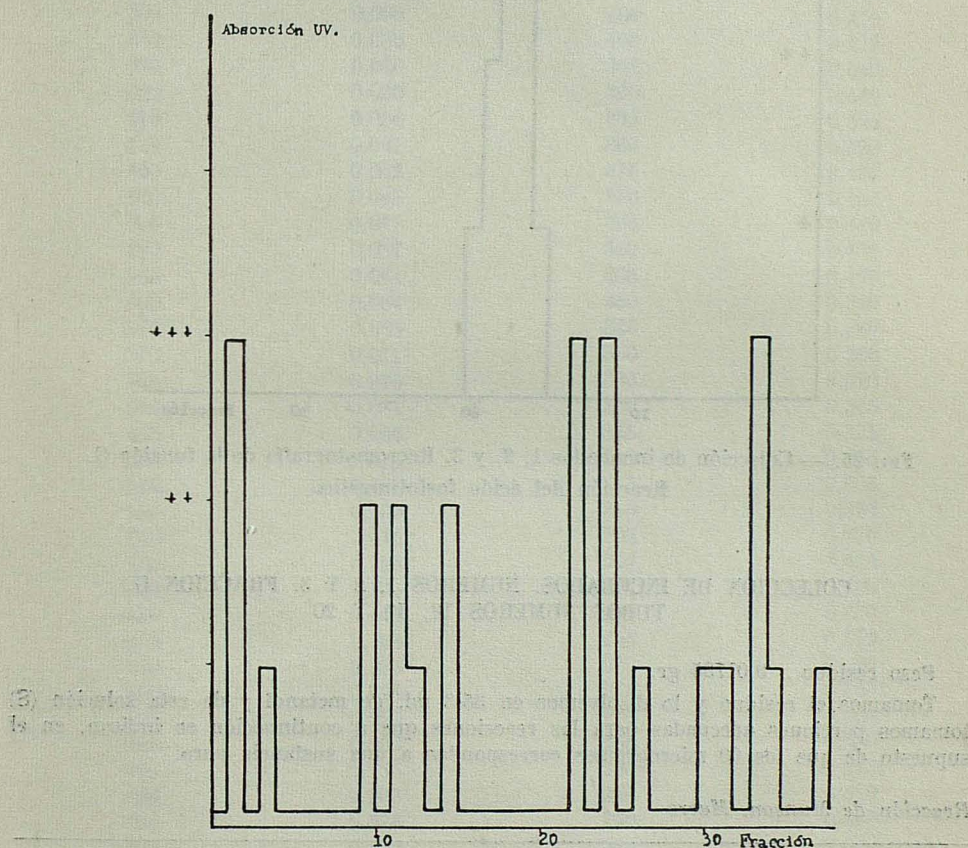


Fig. 24. — Colección de incubados 1, 2, 3. Recomatografía de la fracción G.

Absorción de la luz ultravioleta

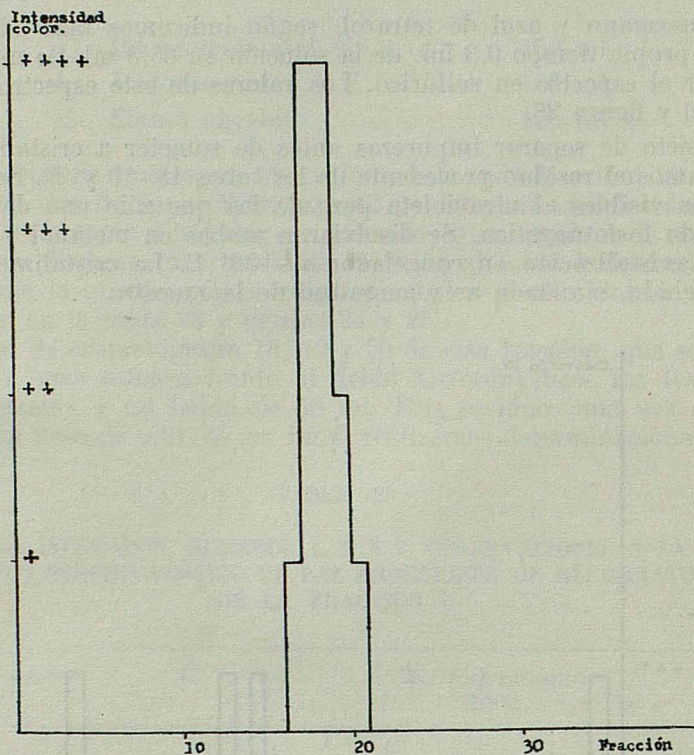


FIG. 25. — Colección de incubados 1, 2, y 3. Recromatografía de la función G.
Reacción del ácido fosfotungstico

COLECCION DE INCUBADOS. NUMEROS 1, 2 Y 3. FRACCION G.
TUBOS NUMEROS 18, 19 Y 20

Peso residuo... 0,01735 gr.

Tomamos el residuo y lo disolvemos en 35,3 ml. de metanol y de esta solución (S) tomamos porciones adecuadas para las reacciones que a continuación se indican, en el supuesto de que los 60 microgramos corresponden a una sustancia pura.

Reacción de Munson. Macro

Diferencia	Cantidad ml.	Calidad	AcOH glac.	R. furfural ml.	Sulfúrico 16 N ml.	AcOH 50 %	Frio	D. O. 660 mμ
Blanco ...	—	—	0,2	0,8	3,0	—	—	0,003
Blanco sin furfural.	—	—	0,2	—	3,0	0,8	—	0,000
Patrón ...	0,1	(1)	0,2	0,8	3,0	—	—	0,480
Muestra ...	0,1	(S)	0,2	0,8	3,0	—	+	0,067

TABLA 26

COLECCION DE INCUBADOS. NUMEROS 1, 2 Y 3. FRACCION G. ESPECTRO
DE LA SUSTANCIA CONTENIDA EN LOS TUBOS NUMEROS 18, 19 Y 20

Tabla de valores

($m\mu$)	D. O.	($m\mu$)	D. O.
660	0,024	430	0,334
655	0,027	425	0,354
650	0,027	420	0,390
645	0,027	415	0,408
640	0,028	410	0,450
635	0,028	405	0,470
630	0,030	400	0,490
625	0,030	395	0,540
620	0,033	390	0,540
615	0,036	385	0,535
610	0,037	380	0,520
605	0,042	375	0,495
600	0,045	370	0,465
595	0,057	365	0,440
590	0,057	360	0,435
585	0,061	355	0,408
580	0,064	350	0,390
575	0,068	345	0,380
570	0,071	340	0,360
565	0,075	335	0,370
560	0,081	330	0,365
555	0,086	325	0,395
550	0,093	320	0,455
545	0,098	315	0,505
540	0,105	310	0,570
535	0,115	305	0,610
530	0,124	300	0,620
525	0,135	295	0,620
520	0,148	290	0,600
515	0,168	285	0,570
510	0,180	280	0,560
505	0,198	275	0,530
500	0,220	270	0,520
495	0,233	265	0,530
490	0,255	260	0,515
485	0,266	255	0,510
480	0,275	250	0,525
475	0,282	245	0,590
470	0,285	240	0,630
465	0,290	235	0,640
460	0,291	230	0,650
455	0,295	225	0,720
450	0,302	220	0,810
445	0,305	Blanco de	
435	0,310	sulfúrico	0,000
440	0,317		

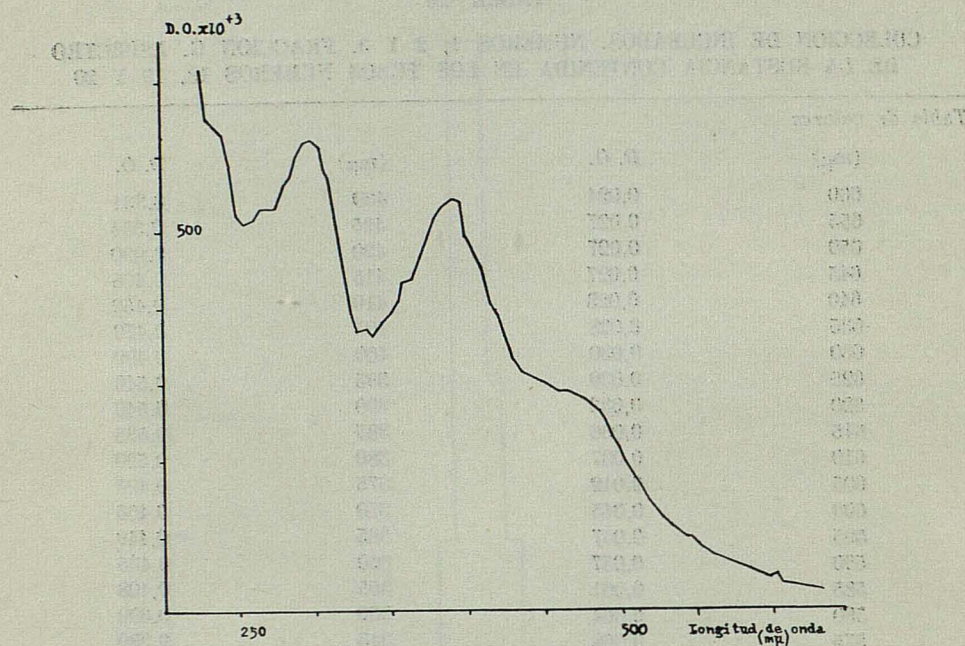


FIG. 26. — Espectro en sulfúrico de la fracción G. Fracciones 18, 19 y 20 de recromatografía. Colección de incubados 1, 2 y 3

(1) Es un patrón de DHA que contiene 5 mgs. de DHA/10 ml. = 50 microgramos/0,1 ml., o sea de la misma magnitud de la muestra en el supuesto de que fuese DHA pura.

En frío únicamente la muestra presentó un color azul pálido. Sin embargo, después del calentamiento a 67° por 12 minutos el color del patrón fue mucho más intenso.

Reacción de Zimmermann. Macro.

Referencia	Cantidad ml.	Calidad	Etanol 95 %	KOH 2,5 N	m-dinitro-benceno 1 %	B. O. 430 mu	D. O. 520 mu
Blanco ...	—	—	0,2	0,2	0,2	0,000	0,000
Patrón ...	0,3	(1)	0,2	0,2	0,2	0,175	0,490
Muestra ...	0,3	(S)	0,2	0,2	0,2	0,060	0,133

(1) Es un patrón que contiene 5 mgs. de DHA/10 ml. = 150 microgramos/0,3 ml., o sea, de la misma magnitud de la muestra tomada.

Reacción de azul de tetrazol. Macro.

Referencia	Cantidad ml.	Calidad	Hidrónido de te-trametilamonio ml.	R. azul de tetrazol ml.	D. O. 510 mu
Blanco ...	—	—	0,35	0,49	0,000
Patrón ...	0,1	(I)	0,35	0,49	1,140
Muestra ...	0,2	(S)	0,35	0,49	0,065

(1) Es un patrón que contiene 11,3 mgs. de DOCA/10 ml.=113 microgramos/0,1 ml. que es de magnitud semejante a la muestra tomada en el caso que fuese pura.

III. ESTUDIO DE LA COLECCIÓN DE INCUBADOS 4-12

Tratando de obtener más cantidad de extractos realizamos nuevas incubaciones cuyo detalle se da en las tablas 27 a 35 ambas inclusive.

Los pesos obtenidos de los extractos fueron:

Colección de incubados	núm.	4	...	...	...	0,55080	grs.
"	"	"	"	"	"	0,45637	"
"	"	"	"	"	"	0,53526	"
"	"	"	"	"	"	0,52649	"
"	"	"	"	"	"	0,38805	"
"	"	"	"	"	"	0,59862	"
"	"	"	"	"	"	0,39141	"
"	"	"	"	"	"	0,53659	"
"	"	"	"	"	"	0,93067	"

Extracto total 4,91426 grs.

Hicimos una separación de compuestos cetónicos y no cetónicos por medio del reactivo T de Girard. Al objeto de comprobar la marcha de la separación tomamos los extractos correspondientes a las colecciones 10, 11 y 12, con un peso total de 1,85867 grs., los disolvimos en 186 ml. de una mezcla a partes iguales de ácido acético y metanol acuoso 90 % (v/v). Agregamos 18,6 grs. de reactivo T de Girard dejando estar la mezcla durante la noche.

A la mezcla citada agregamos 1860 ml. de agua helada y $3 \times 186 = 558$ ml. de hidróxido sódico 2,5 N y extraemos por 10 veces con 1/2 de su volumen de cloroformo. Los extractos fueron lavados por tres veces con 1/2 de su volumen de agua destilada, secados sobre sulfato sódico anhidro y concentrados por evaporación al vacío. Esta fracción no cetónica pesó 1,28721 gramos. Fue rotulada con la letra N.

La solución acuosa conteniendo los compuestos cetónicos con un volumen total de 2418 ml. fue acidulada a pH 1 con ácido sulfúrico 16 N y extraída la solución ácida resultante por 10 veces con 1/2 de su volumen de cloroformo. Fue rotulada con la letra C y pesó 0,48535 grs.

A la vista de la buena marcha de la separación realizamos la de las colecciones 4 a 9 en conjunto con los siguientes resultados:

Residuo de la fracción no cetónica 4-9	1,40996 grs.
" " " " cetónica 4-9	0,71566 grs.

Agrupamos las fracciones no cetónicas (N) por una parte y las cetónicas (C) por otra, procedentes de las operaciones anteriores.

Resultados:

Fracción no cetónica (N) total 4-12	2,69717 grs.
Fracción cetónica (C) total 4-12	1,20100 grs.

Cromatografía de la fracción no cetónica

Calculamos la columna como de costumbre. La columna utilizada tiene 80 cm. de altura y 2,5 cm. de diámetro. Volumen de retención, 240 ml.

Sistemas de solventes:

a) Dicloroetano	3.240 ml.
b) Dicloroetano 4 % etanol	2.700 ml.
c) Dicloroetano 10 % etanol	2.700 ml.
d) Etanol absoluto	1.000 ml.

Número total de fracción, 185; volumen de retención, 240 ml.; volumen de cada fracción, 60 ml. Tiempo de duración, 48 horas.

Tomamos una de cada tres fracciones y las sometemos a la reacción de Munson. Los resultados se encuentran en la tabla 36 y figura 27.

Las fracciones recogidas de cada solvente fueron: a) números 1-54; b) números 55-100; c) números 101-147; d) números 148-175.

Después de realizar una observación a ojo desnudo realizamos la acumulación de fracciones como indicamos en la tabla número 37.

Las fracciones no cetónicas así obtenidas señaladas de N₁ a N₅ son sometidas a cromatografía sobre papel obteniendo los resultados de la tabla 38. Fueron almacenadas para estudios posteriores.

Cromatografía de la fracción cetónica

Realizamos análogas operaciones que con la fracción no cetónica obteniendo los resultados de las tablas 40 y 39. El sistema de solventes fue:

a) Diclorometano con 2 % de etanol	1.500 ml.
b) Diclorometano con 4 % de etanol	1.300 ml.
c) Diclorometano con 10 % de etanol	1.300 ml.
d) Etanol absoluto	800 ml.

Las fracciones correspondientes a cada solvente fueron: a) Fracciones 1-24. b) Fracciones 25-46. c) Fracciones 47-67. d) Fracciones 68-79.

Estudio de fracciones cetónicas de cromatografía

Antes de realizar la acumulación de las fracciones cetónicas realizamos ensayos de Zimmermann y azul de tetrazol según indicamos en la tabla 41. La acumulación de fracciones se indica en la tabla 40 y los resultados de la cromatografía sobre papel en la tabla 42.

Fracción C₁. — Probablemente constituido por grasas hepáticas. Su aspecto es análogo a la fracción A de las colecciones de incubados números 1, 2 y 3.

Fracción C₂. — Cristalizamos de metanol y obtenemos 0,18373 grs. de cristales con un punto de fusión de 133-145°C (1).

Recromatografiamos el residuo en columna con 248 grs. de sílica gel. *Sistemas de solventes:*

- | | |
|---|---------|
| a) Diclorometano con 2 % de EtOH | 450 ml. |
| b) Diclorometano con 4 % de EtOH | 200 ml. |

Volumen de cada fracción 10 ml.; núm. de fracciones, 65; volumen de retención de la columna, 180 ml.; fracciones correspondientes al primer solvente, 46; fracciones correspondientes al segundo solvente, 19. Tomamos 10 microlitros de cada fracción que colocamos sobre papel en el que determinamos absorción ultravioleta y reacción frente al ácido forsfotúngstico. Determinamos los puntos de fusión de las fracciones con características más salientes. Los resultados se encuentran en la tabla 43.

Reunimos los residuos de los tubos 4-9 y cristalizamos de éter, secamos etc. Los cristales obtenidos hacen un total de 23 mgs. con un punto de fusión de 144-146°C. Realizado el análisis elemental (para la DHA, C = 79,12; H = 9,79) nos dio H 10,0 y 9,87 %; C 79,14 y 79,06. Su poder rotatorio específico fue $[\alpha]_D^{25} = 7,61$ (poder rotatorio específico molecular), $c = 1,14$ % cloroformo.

De las aguas madres de 1 separamos 38 mgs. de unos cristales cuyo análisis elemental dio C 76,08 %, H % 9,45 %. Punto de fusión, 137-139°.

Todavía realizamos una tercera y cuarta cristalización de aguas madres en las que obtuvimos 10 y 9 mgs. de sustancia respectivamente aunque más impura.

El resto de fracciones cromatográficas fue distribuido en tres acumulados de los que no pudimos aislar la sustancia que impurificaba a la DHA según se deduce del cromatograma sobre papel de la fracción C₂.

Fracción C₃. — El peso total de la fracción fue de 0,14133 grs. Cromatografiamos en columna de sílica utilizando diclorometano con 2,4 y 10 % de etanol, 180, 150 y 150 ml. respectivamente. Las fracciones fueron de 10 ml. y el núm. total de fracciones ascendió a 46. Colocamos 10 microlitros de cada fracción en papel e hicimos reconocimiento al ultravioleta y

frente al ácido fosfotúngstico. De acuerdo con estos datos que transcribimos en la Tabla 44 hicimos el corte de fracciones que fue del siguiente modo:

1. ^a fracción	...	...	...	tubos	1-12	
2. ^a fracción	...	...	...	tubos	13-24	1,61 mgs.
3. ^a fracción	...	...	...	tubos	25-27	2,73 mgs.
4. ^a fracción	...	...	...	tubos	28-31	44,04 mgs.
5. ^a fracción	...	...	...	tubos	32-35	48,43 mgs.
6. ^a fracción	...	...	...	tubos	36-46	

De éstas la 4.^a y 5.^a fracción parecen ser las de más interés. Las dos aparecen en forma de gomas de color amarillo claro que ofrecen dificultad para su cristalización. La fracción 4 llegó a dar cristales de color amarillo claro, impuros que a 82°C fundieron completamente. Estos cristales aparecían al microscopio a manera de láminas claras no refringentes.

TABLA 27
COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 4

Rata n.º	Peso g.	Hígado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
31	236	9,2	61	6,9	50	1,8	3	9,2	2	9,2	4
32	215	6,8	46	6,9	38	1,4	3	6,8	2	6,8	4
33	246	10,3	70	6,9	55	2,0	3	10,3	2	10,3	4
34	280	12,1	78	6,9	64	2,4	3	12,1	2	12,1	4
35	287	11,8	78	6,9	65	2,3	3	11,8	2	11,8	4
36	257	12,5	82	6,9	72	2,5	3	12,5	2	12,5	5
37	242	10,4	78	6,8	66	2,1	3	10,4	2	10,4	5
38	260	9,5	64	6,9	49	1,9	3	9,5	2	9,5	5
39	264	8,5	58	6,9	46	1,7	3	8,5	2	8,5	5
40	236	8,3	63	6,9	50	1,7	3	8,3	2	8,3	5
41	266	8,9	59	6,9	47	1,8	3	8,9	3	8,9	5

TABLA 28
COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 5

Rata n.º	Peso g.	Hígado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
42	270	8,5	60	6,9	49	1,7	3	8,5	2	8,5	5
43	219	6,9	46	6,9	36	1,4	3	6,9	2	6,9	5
44	270	9,2	62	6,9	49	1,8	3	9,2	2	9,2	5
45	255	8,7	59	6,9	47	1,7	3	8,7	2	8,7	5
46	252	9,9	69	6,9	58	2,0	3	9,9	3	9,9	5
47	260	11,7	75	6,9	65	2,3	3	11,7	3	11,7	6
48	265	10,9	71	6,9	59	2,2	3	10,9	3	10,9	6
49	241	8,5	60	6,9	47	1,7	3	8,5	3	8,5	6
50	253	10,0	73	6,9	57	2,0	3	10,0	3	10,0	6

PRODUCTOS METABOLICOS DE LA DEHIDROEPIANDROSTERONA CON HIGADO DE RATA

TABLA 29
COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 6

Rata n.º	Peso g.	Higado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
51	251	9,4	64	6,9	52	1,9	3	9,4	3	9,4	6
52	224	7,4	54	6,9	44	1,5	3	7,4	3	7,4	6
53	245	9,0	63	6,9	51	1,8	3	9,0	3	9,0	6
54	235	10,8	76	6,9	61	2,2	3	11,0	3	11,0	6
55	247	9,0	60	6,9	45	1,8	3	9,0	3	9,0	6
56	263	9,0	65	6,9	52	1,8	3	9,0	3	9,0	6
57	261	10,9	75	6,9	62	2,2	3	10,9	3	10,9	6
58	256	10,0	70	6,9	56	2,0	3	10,0	3	10,0	7
59	235	7,8	56	6,9	45	1,6	3	7,8	3	7,8	7
60	220	8,8	60	6,9	49	1,8	3	8,8	3	8,8	7

TABLA 30
COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 7

Rata n.º	Peso g.	Higado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	T. N ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
61	227	7,5	50	6,9	40	1,5	3	7,5	3	7,5	7
62	240	8,8	60	6,9	48	1,8	3	8,8	3	8,8	7
63	226	7,9	56	6,9	45	1,6	4	7,9	4	7,9	8
64	223	7,9	56	6,9	45	1,6	4	7,9	4	7,9	8
65	280	12,0	80	6,9	65	2,4	4	12,0	4	12,0	8
66	236	10,8	75	6,9	63	2,2	4	10,8	4	10,8	8
67	230	8,0	66	6,9	46	1,6	4	8,0	4	8,0	8
68	248	9,8	71	6,9	58	2,0	4	9,8	4	9,8	8
69	252	10,0	74	6,9	60	2,0	4	10,0	4	10,0	8
70	224	9,8	70	6,9	59	2,0	4	9,8	4	9,8	8

TABLA 31
COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 8

Rata n.º	Peso g.	Higado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
71	258	9,7	66	6,9	53	2,0	4	9,7	4	9,7	8
72	230	8,8	61	6,9	48	1,8	4	8,8	4	8,8	8
73	289	11,0	76	6,9	62	2,2	4	11,0	4	11,0	8
74	225	7,8	55	6,9	43	1,6	4	7,8	5	7,8	8
75	230	7,3	53	6,9	42	1,5	4	7,3	5	7,3	8
76	207	7,8	57	6,9	47	1,7	4	7,8	5	7,8	8
77	220	8,5	61	6,9	51	1,7	4	8,5	5	8,5	8
78	241	9,2	70	6,9	56	1,8	4	9,2	5	9,2	8
79	217	8,5	60	6,9	49	1,7	4	8,5	5	8,5	8
80	246	10,5	75	6,9	46	2,1	4	10,5	5	10,5	8

TABLA 32

COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 9

Rata n.º	Peso g.	Hígado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
81	258	10,4	72	6,9	60	2,1	4	10,4	6	10,4	8
82	246	9,7	78	6,9	65	2,0	4	9,7	6	9,7	
83	276	10,7	73	6,9	59	2,1	4	10,7	6	10,7	
84	232	9,3	63	6,9	51	1,9	4	9,3	6	9,3	
85	241	7,9	51	6,9	44	1,6	4	7,9	6	7,9	
86	202	7,8	55	6,9	41	1,6	4	7,8	6	7,8	
87	247	8,8	60	6,9	49	1,8	4	8,8	6	8,8	
88	236	9,7	66	6,9	52	1,9	4	9,7	6	9,7	
89	215	8,9	64	6,9	51	1,8	4	8,9	6	8,9	
90	237	8,1	56	6,9	48	1,6	4	8,1	6	8,1	

TABLA 33

COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 10

Rata n.º	Peso g.	Hígado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
91	205	7,0	51	6,9	40	1,4	4	7,0	6	7,0	9
92	244	8,1	52	6,9	42	1,6	4	8,1	6	8,1	9
93	221	8,5	61	6,9	48	1,7	4	8,5	6	8,5	9
94	222	7,9	56	6,9	46	1,6	4	7,9	6	7,9	9
95	260	10,0	70	6,9	57	2,0	4	10,0	6	10,0	9
96	243	10,5	70	6,9	58	2,1	4	10,5	6	10,5	9
97	229	8,9	64	6,9	53	1,8	4	8,9	6	8,9	9
98	252	11,0	72	6,9	62	2,2	4	11,0	6	11,0	9
99	220	9,1	62	6,9	51	1,8	4	9,1	6	9,1	9
100	220	9,5	61	6,9	50	1,9	4	9,5	6	9,5	9

TABLA 34

COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 11

Rata n.º	Peso g.	Hígado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
101	235	9,0	61	6,9	50	1,8	4	9,7	6	9,0	9
102	244	9,7	68	6,9	56	2,0	4	9,7	6	9,7	9
103	260	9,0	61	6,9	49	1,8	5	9,0	6	9,0	9
104	251	8,9	61	6,9	50	1,8	5	8,9	6	8,9	9
105	244	9,0	63	6,9	52	1,8	5	9,0	6	9,0	9
106	247	8,5	59	6,9	49	1,7	5	8,5	6	8,5	9
107	237	8,5	61	6,9	50	1,7	5	8,5	6	8,5	9
108	232	9,3	64	6,9	52	2,0	5	9,3	6	9,3	9
109	216	9,4	65	6,9	54	2,0	5	9,4	6	9,4	9
110	222	8,5	58	6,9	50	1,7	5	8,5	6	8,5	9

TABLA 35

COLECCION DE INCUBADOS. NUMERO 12

Rata n.º	Peso g.	Higado g.	Homoge- neizado, ml.	pH	Sobrena- dante, ml.	DHA ml.	N.º lote	TPN ml.	N.º lote	G-6-P ml.	N.º lote
111	297	12,0	85	6,9	70	2,4	6	12,0	7	12,0	9
112	306	12,2	86	6,9	71	2,4	6	12,2	7	12,2	9
113	302	11,0	77	6,9	63	2,2	6	11,0	7	11,0	10
114	310	11,0	78	6,9	65	2,2	6	11,0	7	11,0	10
115	262	10,9	80	6,9	67	2,2	6	10,9	7	10,9	10
116	277	11,6	82	6,9	67	2,3	6	11,6	7	11,6	10
117	214	7,3	53	6,9	43	1,5	6	7,3	7	7,3	10
118	210	7,2	52	6,9	42	1,4	6	7,2	7	7,2	10
119	203	6,2	43	6,9	38	1,2	6	6,2	7	6,2	10
120	220	7,1	50	6,9	41	1,4	6	7,1	7	7,1	10

TABLA 36

Colección de incubados 4-12. Fracción no cetónica.

REACCION DE MUNSON PARA LAS FRACCIONES CROMATOGRAFICAS

Fracción n.º	D.O.	Fracción n.º	D.O.
3	0,010	93	0,002
6	turbio	96	0,005
9	0,088	99	0,025
12	0,020	102	0,007
15	0,060	105	0,007
18	0,048	108	0,020
21	0,032	111	0,015
24	0,014	114	0,020
27	0,034	117	0,013
30	0,007	120	0,015
33	0,007	123	0,012
36	0,005	126	0,013
39	0,007	129	0,007
42	0,007	132	0,015
45	0,030	135	0,007
48	0,005	138	0,007
51	0,007	141	0,010
54	0,007	144	0,010
57	0,013	147	0,005
60	0,007	150	0,015
63	0,027	153	0,057
66	0,007	156	0,012
69	0,007	159	0,005
72	0,270	162	0,015
75	0,085	165	0,005
78	0,014	168	0,012
81	0,035	171	0,005
84	0,008	174	0,010
87	0,010	177	0,011
90	0,012	183	0,025
Blanco con furfural	0,005	Patrón (49,6 µg. DHA)	0,415
Blanco sin furfural	0,000	Patrón (49,6 µg. DHA)	0,410

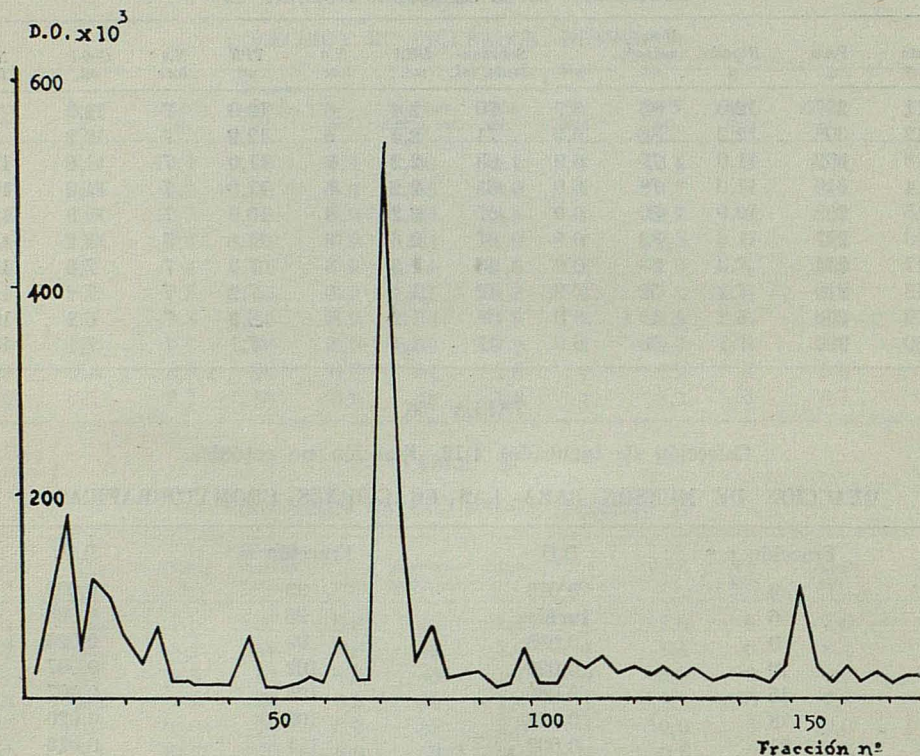


FIG. 27. — Reacción de Munson para la fracción no cetónica de la colección de incubados 4-12. (660 milimicras).

TABLA 37

COLECCION DE INCUBADOS NUMS. 4-12
ACUMULACION DE FRACCIONES CROMATOGRAFICAS

FRACCIÓN N ₁		
Tubos	1 a 12	ambos inclusive. Aceite rojizo. Abundante.
FRACCIÓN N ₂		
Tubos	13 a 30	ambos inclusive. Residuo blanco amarillento. Abundante.
FRACCIÓN N ₃		
Tubos	31 a 49	ambos inclusive. Residuo amarillento. Poco.
FRACCIÓN N ₄		
Tubos	50 a 60	ambos inclusive. Residuo amarillento. Muy poco.

PRODUCTOS METABOLICOS DE LA DEHIDROEPIANDROSTERONA CON HIGADO DE RATA

FRACCIÓN N₅

Tubos 61 a 84 ambos inclusive. Residuo pardo oscuro. Cristalino abundante.

FRACCIÓN N₆

Tubos 85 a 104 ambos inclusive. Residuo pardo oscuro. Poco.

FRACCIÓN N₇

Tubos 105 a 140 ambos inclusive. Residuo pardo oscuro. Poco.

FRACCIÓN N₈

Tubos 141 a 147 ambos inclusive. Residuo amarillo claro. Muy poco.

FRACCIÓN N₉

Tubos 148 a 175 ambos inclusive. Residuo pardo oscuro. Poco.

FRACCIÓN N₁₀

Tubos 176 a 185 ambos inclusive. Residuo amarillo claro. Poco.

TABLA 38

COLECCION DE INCUBADOS NUMS. 4-12

CROMATOGRAFIA SOBRE PAPEL DE LAS FRACCIONES NO CETONICAS

Patrón.—10 microlitros de DHA de 5 mgs/10 ml. No se observa en las pistas después de cromatografiar.

FRACCIÓN N ₃						
N. de manchas	R _F	UV	BT	PTA		
1	0,09	+	—	—		
FRACCIÓN N ₅						
1	0,11	+	—	+	naranja	
1	0,35	+	—	+	azul	
1	0,63	—	+	—		
1	0,74	+	—	+	naranja	
1	0,84	—	—	+	azul	
1	0,92	—	+	+	naranja	
FRACCIÓN N ₆						
1	0,30	+	—	—		
FRACCIÓN N ₇						
1	0,13	—	—	+	naranja	
1	0,36	—	—	+	azul	
1	0,91	+	—	+	naranja	
FRACCIÓN N ₈						
1	0,97	+	—	—	DUDOSA	
FRACCIÓN N ₉						
1	0,89	+	+	+	naranja	

Disolvemos los residuos en 2,5 ml. de metanol y tomamos 20 μ l. en sistema BMW.

TABLA 39

COLECCION DE INCUBADOS. NUMS. 4-12. REACCION DE MUNSON
PARA LOS COMPUESTOS CETONICOS

Fracción	Color en frío	Color en caliente	D. O. 660 μ
3			0,000
6	magenta	azul	0,400
9			0,040
12			0,332
15	azul muy débil		1,400 turbio
18			0,660
21			0,065
24			0,025
27	azul débil		0,098
30			0,153
33			0,036
36			0,015
39			0,025
42			0,032
45			0,010
48	magenta		0,105
51			0,063
54			0,021
57			0,007
60			0,000
63			0,002
66			0,005
69			0,012
72			0,005
75			0,010
78			0,010
Blanco sin furfural			0,000
Blanco sin furfural			0,000
DHA (10 μ gs)			0,370
DHA (10 μ gs)			0,340

TABLA 40

COLECCION DE INCUBADOS 4-12. — CORTE DE FRACCIONES DE LA CROMATOGRAFIA
DE LA FRACCION CETONICA

- Fracción C_1 . — Tubos 1 a 8, pero antes tomamos dos porciones de 0,5 ml. de la fracción 6 para Zimmermann y azul de tetrazol. El residuo se había disuelto en 25 ml. de metanol.
- Fracción C_2 . — Tubos 9 a 23, pero antes tomamos dos porciones de 0,5 ml. para Zimmermann y azul de tetrazol del tubo 15.
- Fracción C_3 . — Tubos 24 a 35, pero antes tomamos dos porciones del tubo 30 para Zimmermann y azul de tetrazol.
- Fracción C_4 . — Acumulamos tubos 36 a 44 y evaporamos a sequedad.
- Fracción C_5 . — Acumulamos tubos 45 a 60, pero antes tomamos dos porciones de 0,5 ml. para Zimmermann y azul de tetrazol del tubo 48.
- Fracción C_6 . — Acumulamos tubos 61 a 66 y evaporamos a sequedad.
- Fracción C_7 . — Acumulamos tubos 67 a 79 y evaporamos a sequedad.

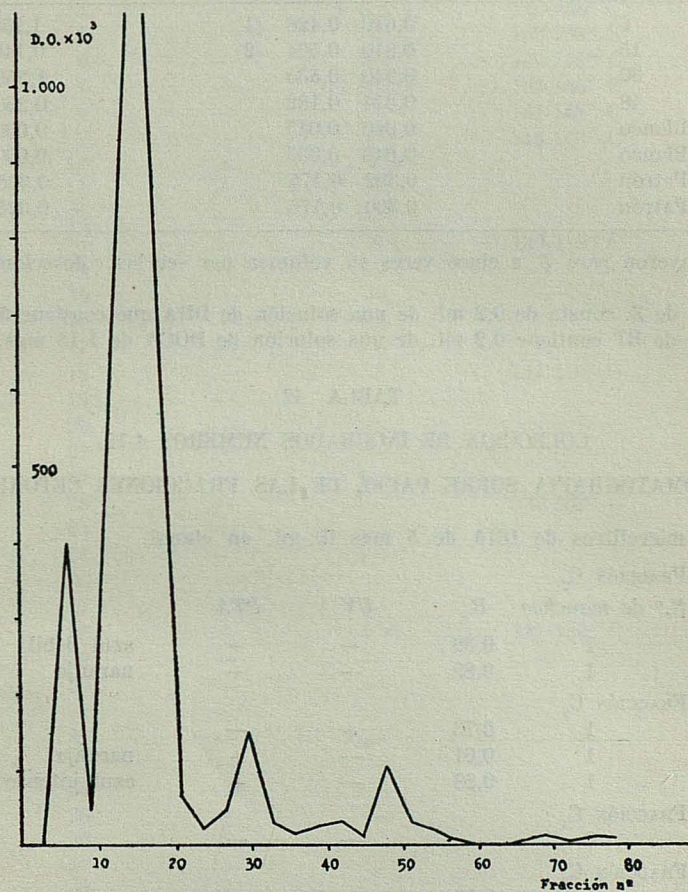


FIG. 28. — Reacción de Munson para la fracción cetónica de la colección de incubados 4-12 (660 milimicras)

TABLA 41

COLECCION DE INCUBADOS NUMS. 4-12. — REACCIONES MACRO-ZIMMERMANN Y AZUL DE TETRAZOL DE LA FRACCION CETONICA

Tubo o fracción	Zimmermann		Azul de tetrazol
	520 m μ	430 m μ	
6	0,610	0,428 (1)	1,250
15	0,810	0,504 (2)	0,140
30	0,940	0,530	1,350
48	0,314	0,182	0,260
Blanco	0,045	0,043	0,000
Blanco	0,040	0,035	0,000
Patrón	0,302	0,175	0,325
Patrón	0,300	0,175	0,325

1 y 2 se diluyeron para Z. a cinco veces su volumen por ser las coloraciones demasiado intensas.

El Patrón de Z. consta de 0,2 ml. de una solución de DHA que contiene 5 mgs./10 ml.

El Patrón de BT contiene 0,2 ml. de una solución de DOCA de 1,13 mgs./10 ml.

TABLA 42

COLECCION DE INCUBADOS NUMEROS 4-12.

CROMATOGRAFIA SOBRE PAPEL DE LAS FRACCIONES CETONICAS

Patrón.—25 microlitros de DHA de 5 mgs/10 ml. en etanol.

FRACCIÓN C ₂		R _F	UV	PTA	
N.º de manchas					
1		0,36	—	+	azul débil
1		0,89	—	+	naranja
FRACCIÓN C ₃		R _F	UV	PTA	
N.º de manchas					
1		0,73	+	—	
1		0,61	—	+	naranja
1		0,88	—	+	azul intenso
FRACCIÓN C ₄		R _F	UV	PTA	
N.º de manchas					
0		—	—	—	
FRACCIÓN C ₅		R _F	UV	PTA	
N.º de manchas					
1		0,13	+	—	
1		0,19	+	—	
1		0,03	—	+	azul muy débil
1		0,07	—	+	naranja muy débil
1		0,33	—	+	azul muy intenso
1		0,91	—	+	azul débil
FRACCIÓN C ₆		R _F	UV	PTA	
N.º de manchas					
0		—	—	—	
FRACCIÓN C ₇		R _F	UV	PTA	
N.º de manchas					
1		0,34	—	+	azul débil
Patrón		0,89	—	+	naranja

Disolvemos los residuos en 5 ml. de metanol y tomamos 10 microlitros.

TABLA 43

RECROMATOGRAFIA DE LA FRACCION C₂
 CARACTERISTICAS DE LAS FRACCIONES OBTENIDAS

Fracción nº	U.V.	PTA	P.F.
1	+	—	
2	—	—	123-132° C
3	—	—	
4	—	++++	142-146° C
5	—	—	133-139° C
6	—	—	146-149° C
7	—	++++	135-148° C
8	—	—	144-148° C
9	—	—	145-149° C
10	+	+++	
11	—	—	
12	—	—	
13	—	+++	130-139° C
14	—	—	
15	—	—	
16	—	++	
17	—	—	
18	—	—	144-148° C
19	—	++	
20	—	—	
21	—	—	
22	—	++	
23	—	—	136-138° C
24	—	—	
25	—	++	
26	—	—	
27	—	—	
28	—	++	137-139° C
29	—	—	
30	—	—	
31	—	+	
32	—	—	
33	—	—	
34	—	++	
35	—	—	
36	—	—	
37	—	+	
38	—	—	
39	—	—	
40	—	+	
41	—	—	
42	—	—	
43	—	+	145-150° C
44	—	—	
45	—	++++	
46	—	—	
47	—	—	

48 y ss. fueron estas observaciones negativas y no se determinó p. f.

Como habrá podido observarse para las reacciones de UV. y PTA se tomó uno de cada tres tubos, con algunas excepciones, para los p.f. se tomó uno cada cinco con bastantes excepciones.

TABLA 44

RECROMATOGRAFIA DE LA FRACCIÓN C_3 .

CARACTERISTICAS DE LAS FRACCIONES OBTENIDAS

<i>Fracción n.º</i>	<i>UV</i>	<i>PTA</i>	<i>Observaciones</i>
1-7	—	—	—
8	+	+	azul muy débil
9	+	+	azul muy débil
10	+	—	
11	+	—	
12	—	—	
13	—	—	
14	—	—	
15	+++	—	
16-24	—	—	
25	+++	—	
26	+++	—	
27	+++	+	azul
28	+++	+++	azul
29	+++	+++	azul
30	+++	+++++	azul
31	+++	++++	azul-naranja
32	+++	+++	azul-anaranja
33	+++	++	naranja-azulado
34	+++	+	naranja-azulado
35	+++	+	naranja-azulado
36	+++	—	
37	+++	—	
38-Final	—	—	

I. RESULTADOS

En los extractos procedentes de la incubación de dehidroepiandrosterona con hígado de rata macho aparecen un conjunto de Δ^5 -3 β -hidroexiesteroi-des que poseen características notables.

La colección de incubados número 1 nos indica la existencia de una sustancia con un R_F aproximado de 0,05 que dio positivas las reacciones de Munson, Zimmerman y azul de tetrazol. Un compuesto con $R_F = 0,03$ con análogas propiedades fue identificado en la fracción cetónica C_5 . Esta sustancia de color azul con el ácido fosfotungstico y una coloración anómala en el ensayo de Munson. Su R_M calculado fue de 1,51.

En las fracciones C_2 , C_3 y C_7 pudimos detectar la presencia de una sustancia con $R_F = 0,36$ que dio negativos los ensayos ultravioleta y azul de tetrazol y positivos los de Zimmermann y Munson. En esta reacción, la sustancia presentó coloración anómala en frío y coloración intensa, azul, con el ácido fosfotungstico. El compuesto fue aislado y cristalizado de la fracción C_3 pero los cristales quedaron pendiente de purificación posterior.

Otro compuesto con $R_F = 0,55$ nos dio reacciones positivas para azul de tetrazol, Zimmermann y Munson en caliente. En frío presenta la reacción normal de Munson. Se aisló de la fracción E y se determinó su punto de fusión y espectro.

En las fracciones cetónica y no cetónica se detectó una sustancia que presenta fuerte absorción en el ultravioleta y da reacciones positivas para Zimmermann y Munson frío y caliente. Su R_F en el sistema cromatográfico benceno-metanol-agua fue de 0,74. Se encuentra en las fracciones N_5 (no cetónica) y C_3 (cetónica), en la primera como vestigios, en la segunda en gran cantidad.

De las fracciones B -correspondiente a la colección de incubados 1,2 y 3-y C_2 , pudimos aislar, cristalizar y caracterizar una sustancia cuya existencia habíamos detectado en la colección 1, cuyos puntos de fusión, espectro y análisis elemental hemos dado anteriormente. Su R_F fue de 0,89.

Además de las sustancias antes mencionadas hemos encontrado una sustancia en N_3 con muy poca movilidad ($R_F = 0,09$) que absorbe en el ultravioleta. Existe en estos incubados en muy pequeña cantidad y da negativo el ensayo del ácido fosfotungstico.

Otra sustancia de $R_F = 0,07$ fue hallada en C_5 que no dio absorción en el ultravioleta pero da color anaranjado con el fosfotungstico. Creemos que

estas dos sustancias son idénticas pero necesitamos posterior confirmación.

En varios ensayos, C_5 y N_7 , por ejemplo, encontramos sustancias con $R_F = 0,13$ pero las reacciones fueron contradictorias por lo que no podemos afirmar si se trata de uno o de varios compuestos.

Una sustancia con $R_F = 0,19$ dando reacción positiva frente al ultravioleta, Zimmermann y azul de tetrazol y negativa al fosfotúngstico, fue detectada en la fracción cetónica.

Con reacción de Munson negativa encontramos en la fracción G otro compuesto de $R_F = 0,29$, ultravioleta positivo y fosfotúngstico negativo. Esta sustancia ya había advertido su presencia en la colección de incubados número 1.

Las fracciones C_2 y N_5 contienen una sustancia con $R_F = 0,62$. En ambas obtuvimos positivo el ensayo del azul de tetrazol. Sin embargo, en la C_2 observamos coloración naranja con el fosfotúngstico mientras el ensayo fue negativo en la N_5 .

Con $R_F = 0,84$ detectamos una nueva sustancia en N_5 . La sustancia se colorea de azul con el ácido fosfotúngstico y es negativa frente a azul de tetrazol y ultravioleta.

Notamos, finalmente, la existencia de al menos dos sustancias de igual o menor polaridad que la DHA. Estas sustancias dieron reacciones de azul de tetrazol, Munson frío y caliente y Zimmermann positivas pero no presentaron absorción en el ultravioleta.

El resumen de todos estos hallazgos se encuentra dado en la tabla n.º 45.

TABLA 45
RESUMEN DE RESULTADOS
Munson Munson Zimmer-

Sustancia	R_F	U.V.	frío	calien.	mann	BT	PTA	
a	0,03	—	magenta	+	+	+	+	azul
b	0,36	—	magenta	+	+	—	+	azul
c	0,55	—	+	+	+	+	...	
d	0,74	+	+	+	+	—	+	naranja
e	0,89	—	+	+	+	—	+	naranja
f	0,07	—	...	+	...	...	+	naranja
g	0,09	+	...	+	...	—	—	
h	0,13	—	—	+	...	...	+	naranja
i	0,13	+	—	+	...	...	—	
j	0,19	+	—	+	+	+	—	
k	0,29	+	...	+	...	...	—	
l	0,62	—	...	+	+	+	...	
m	0,84	—	...	+	...	—	+	azul

... Determinación no efectuada.
— resultado negativo.
+ resultado positivo.

U.V. absorción ultravioleta.
BT azul de tetrazol.
PTA ácido fosfotúngstico.

II. DISCUSION DE RESULTADOS

El conocimiento de los productos del catabolismo de la dehidroepiandrosterona es de interés a la vista de los hallazgos de cantidades aumentadas de este producto, en forma libre o conjugada, en los casos de carcinoma adrenal.

Solo mediante el conocimiento detallado de todos los productos de transformación de la dehidroepiandrosterona en adrenal y tejidos periféricos, podrá determinarse la relación entre la producción de DHA en los casos patológicos y normales y concluir si existe una producción de DHA aumentada o simplemente de un menor catabolismo del producto.

Los hallazgos de Δ^5 -3 β -hidroxiesteroides en la orina de pacientes con hiperplasia adrenal, o en los casos de verilismo adrenal, imponen la investigación de los productos metabólicos de la DHA a la que se ha mencionado hace tiempo como la sustancia origen.

Se ha indicado que la transformación a compuestos hidroxilados tiene lugar en el hígado, y, sin embargo, no se ha descartado plenamente la posibilidad de que esta hidroxilación se produzca en la misma corteza suprarrenal sobre todo en los casos de desórdenes.

A pesar del gran número de estudios realizados a este respecto, no existen investigaciones sistemáticas, con excepción de los trabajos de Fotherby en orina.

Nuestro objetivo ha sido realizar un estudio, de modo general, de los productos metabólicos de la dehidroepiandrosterona para pasar a continuación a estudios detallados, en hígado de rata macho, porque creemos que dada la relación existente entre los productos de excreción de individuos en estado normal y con tumores virilizantes, debe existir una diferencia en los caminos metabólicos según sea el sexo del animal.

De los resultados de nuestras experiencias vemos que las sustancias dadas en la tabla 45 presentan una reacción de Munson positiva, tratándose, por tanto de Δ^5 -3 β -hidroxiesteroides.

Sustancia (a).—Por presentar una reacción positiva frente al azul de tetrazol y el reactivo de Zimmermann debe ser, sin duda, una 16 α -hidrox-17-cetona, y dando además positiva la reacción del ácido fosfotúngstico debe encontrar un grupo OH en posición 7 α . Se trata por tanto del

3 β , 7 α , 16 α -trihidroxi- Δ^5 -androst-17-ona

compuesto que fue identificado por Okada y colaboradores (17) en la orina de un joven con cáncer adrenal. Su R_f de 0,03, por otra parte, está de acuerdo con la movilidad indicada por los autores anteriores para esa sustancia.

La identificación por nosotros de este compuesto en homogeneizados de hígado de rata tiene un doble valor, a saber: La indicación de que el producto es metabolizado por el hígado a partir de DHA y en segundo lugar que es de esperar la existencia de esta sustancia también en individuos normales.

Sustancia (b).—Haciendo análogos razonamientos llegamos a la conclusión de que se trata de

3 β , 7 α -dihidroxi- Δ^5 -androsteno-17-ona

sustancia que ya había sido identificada por varios autores en orinas normales y patológicas (17,83) y en estudios in vitro (62,83).

Sustancia (c).—Según las reacciones cualitativas de ensayo se trata de

3 β , 16 α -dihidroxi- Δ^5 -androsteno-17-ona

La sustancia fue aislada en la orina de normales por Fotherby el al. (63) en 1957 y Colás (65) comprobó su producción por incubación de rabanadas de hígado de rata. Nosotros conseguimos el aislamiento de un producto con un punto de fusión de 175-177° C del que hemos determinado el espectro de sulfúrico. El punto de fusión dado en la literatura es de 177-181° C. Su R_F (BMA) = 0,55.

Sustancia (d).—Presenta absorción fuerte en el ultravioleta por lo que debe tratarse de una cetona α , β -insaturada. De acuerdo con su movilidad (R_F = 0,74) debe tratarse de un producto ya mencionado por Okada (17):

3 β -hidroxi- Δ^5 -androsteno-7,17-diona.

Sustancia (e).—Se trata de la DHA en exceso recuperada. Sus reacciones y R_F coinciden con las del patrón. El producto fue aislado por nosotros, purificado por cristalizaciones repetidas de metanol e identificado por su punto de fusión, cromatografía, análisis elemental y espectro. Su poder rotatorio molecular determinado en cloroformo dio $[\alpha]_D^{25} = +7,61$.

La estructura de las demás sustancias se encuentran pendientes de ulteriores estudios.

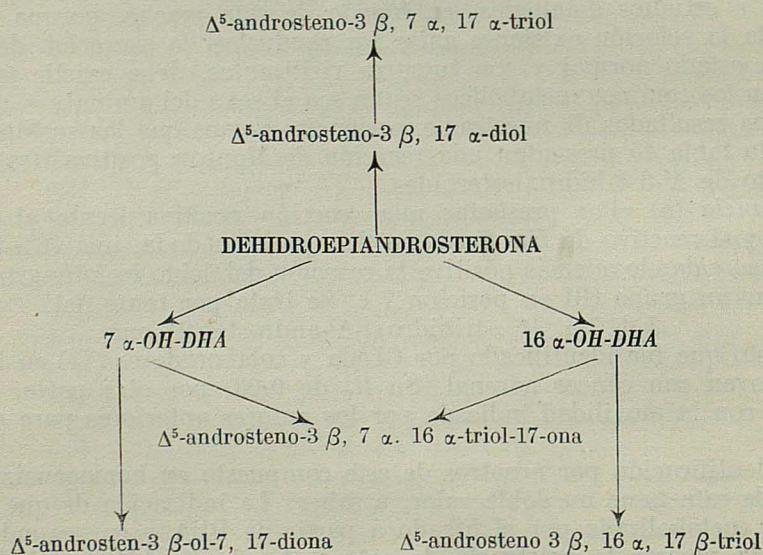


FIG. 29.—Camino catabólicos de la dehidroepiandrosterona.

CONCLUSIONES

Se describe, por primera vez, la presencia de $3\beta, 7\alpha, 16\alpha$ -trihidroxi- Δ^5 -androst-17-ona como producto del metabolismo de la dehidroepiandrosterona por homogeneizados de hígado de rato macho.

b) Se aisló y caracterizó la $3\beta, 16\alpha$ -dihidroxi- Δ^5 -androst-17-ona como un metabolito de la dehidroepiandrosterona en homogeneizados de hígado de rata macho.

c) Se detectó la $3\beta, 7\alpha$ -dihidroxi- Δ^5 -androst-17-ona y se determinó su espectro de absorción en sulfúrico, entre los productos del metabolismo.

d) Comprobamos la presencia de 3β -hidroxi- Δ^5 -androst-7,17 diona entre los productos metabólicos.

e) Los 7-hidroxiesteroides detectados, observamos presentan reacción anómala en frío frente al reactivo de Munson.

f) Observamos que la sensibilidad de la reacción de Munson aumenta con la concentración del ácido sulfúrico utilizado.

g) Observamos, en algunos casos, descomposición de la dehidroepiandrosterona en los procesos cromatográficos utilizados.

h) Se sugiere la formación de $3\beta, 7\alpha, 16\alpha$ -trihidroxi- Δ^5 -androst-17-ona a partir de $3\beta, 16\alpha$ -dihidroxi- Δ^5 -androst-17-ona y de $3\beta, 7\alpha$ -dihidroxi- Δ^5 -androst-17-ona mediante procesos de hidroxilación metabólica.

I. APARATOS

Homogeneizador Virtis. — Modelo 45. Posee accesorios intercambiables para acomodar muestras desde 0,2 a 450 ml., tapa de teflón y agitador de acero inoxidable. Tapa y demás accesorios pueden ser esterilizados. Los vasos pueden ser sumergidos en agua fría. La unidad está montada sobre una base estable con reostato para control de velocidad. Operando a 115 voltios, 60 ciclos, corriente alterna, se pueden obtener velocidades desde 100 a 45.000 r. p. m.

p^H-metro Beckman. — Zeromatic 9600. Rango de p^H 0-14. Exactitud 0,1 p^H. Reproducibilidad 0,02 p^H. Está provisto de compensador manual de temperatura y de compensador automático para variaciones muy rápidas.

Centrífugas. — Disponemos de dos centrífugas:

a) Centrífuga super-rápida SS-1 Servall. Velocidad máxima 16.000 r. p. m. = 32.700 g. Rotor forjado en duraluminio. Ocho compartimentos con ángulos de 34° para tubos de 50 ml. de capacidad. Cubierta sellada. Reostato que permite una variación de voltaje de 115 a 140 voltios. Tubos de polietileno de 50 ml. La fuerza centrífuga relativa se calcula por la fórmula:

$$\text{Fuerza centrífuga relativa} = \frac{4 \pi^2 r n^2}{32,2} \cdot g.$$

n = Núm. de revoluciones/segundo

r = radio en pies

El radio de la centrífuga es = 4,25 pulgadas

Se mantiene en cuarto frío a 0-5°C de temperatura

b) Centrífuga refrigerada MSE super-rápida. La fórmula para el cálculo de fuerza centrífuga relativa del aparato es:

$$\text{Fuerza centrífuga relativa} = 0,000284 \cdot r \cdot n^2$$

n = Núm. de revoluciones/minuto

r = radio en pulgadas desde el centro al extremo del tubo.

El indicador de velocidad viene graduado de 0 a 6.000 r. p. m. Sin embargo dispone de un accesorio capaz de alcanzar 20.000 r. p. m. Dispone de un control de velocidad manual, control automático de temperatura y control automático de tiempo. La temperatura mínima es de -15°C y el tiempo máximo de 3 horas en fracciones de 10 minutos.

El cabezal núm. 6886, por nosotros utilizado, tiene una capacidad de carga de 400 ml. distribuidos en ocho tubos. Radio al extremo interior = 5,3 pulgadas. $T.^{\circ} = 0^{\circ}\text{C}$.

Baño de incubación. — RSCo modelo 2156. Baño de agua con control variable de temperatura y velocidad de agitación. Dispone de un juego de trenes intercambiables para diversos tamaños de frascos. Temperatura desde 5°C sobre el ambiente hasta 100°C . Exactitud $\pm 0,5$.

Congelador. — Revco SZH 635-10. Permite el almacenamiento de sustancias a -30°C .

Evaporador rotatorio. — Modelo FE-1442. Permite la evaporación de grandes cantidades de soluciones sin interrupción. Evaporador y colector son rotatorios y van montados sobre baños de agua renovable de acero inoxidable. El evaporador posee un termorregulador con una exactitud de $\pm 0,6^{\circ}\text{C}$. El colector va comunicado por un tubo fijo a una bomba de vacío con los correspondientes frascos purificadores intermedios. Las partes fijas y móviles se conectan con juntas de teflón.

Bombas de vacío. — Disponemos de tres:

a) Modelo portátil para operaciones intermitentes con vacío fácilmente regulable.

b) Modelo Precisión (Thomas) con regulador de vacío con posibilidad de hasta 27 libras/pulgada cuadrada.

c) Modelo de difusión de mercurio para alto vacío.

Vitrina de gases. — Tiene regulador de velocidad y dirección de aire. En ella colocamos el sistema para evaporaciones bajo nitrógeno.

Estufa de desecación a vacío. — Provista de portezuela de vidrio resistente, manómetro y regulador de temperatura.

Balanzas. — Disponemos de dos:

a) Metler modelo H5 con sensibilidad de 0,5 mg.

b) Meler modelo B6 semimicro con sensibilidad de 0,05 mgs.

Colector automático de fracciones. — RSCo modelo 1205. Util para cromatografía en columna. Viene provisto de dispositivos y accesorios que permiten: a) Recogida de volúmenes iguales (sifón volumétrico). b) Recogida de volúmenes a tiempos iguales (control automático de tiempo). c) Recogida de igual número de gotas (célula fotoeléctrica).

Rotores intercambiables para tamaños de tubos distintos. Entre los accesorios existen dos tipos de sifones el G. para soluciones acuosas y el H para solventes orgánicos.

Microscopio para puntos de fusión. — Kofler. Calentado eléctricamente. Permite el estudio de los cambios en cristales, durante y después de la fusión, por luz transmitida, reflejada o polarizada.

Polarímetro Hilger. — M 412. Triple campo. Va provisto de un círculo dividido en grados y de un retículo para lecturas de 0,012. Posee un transformador para una lámpara de 4 voltios que ilumina la escala y una lámpara de sodio colocada 10 cm. delante del tubo polarimétrico. Tubos de 20 y 5 cm. de longitud que permiten la lectura hasta con 0,5 ml. de solución.

Espectrofotómetros.

a) Beckman DU para visible y ultravioleta.

b) Beckman modelo B para observaciones en el visible.

Cubetas de silica y vidrio y además accesorios e implementos.

Aparato de micro y semimicro-combustión. — Sargent S-21570, con sus correspondientes controles manuales y automáticos de temperatura y tiempo, contador de burbujas, purificador de gas, tubos de combustión de cuarzo, absorbedores y medidores de paso de gas.

* * *

Lámparas de luz ultravioleta y fluorescente para observación de cromatogramas en papel por transparencia o reflexión.

Tanques para cromatografía en papel, circulares, con sus correspondientes tapas horadadas y sus correspondientes accesorios de vidrio y acero inoxidable.

Disponemos además de un laboratorio completo Kontes para trabajos de síntesis, cromatografía, extracción, etc. para trabajos en microescala.

II. MATERIALES

Los animales fueron ratas blancas Wistar, machos, criadas en nuestra colonia. Su alimentación fue "Purina Laboratory Chow" fabricado por la casa Purina en Colombia con patente de la Ralston Purina Co., St. Louis. Mc. U. S. A.

Reactivos:

DHA. Schering A. G. Berlín. Alemania.

Cortisol. Sigma. St. Louis, 13. Missouri. USA.

Cortisona. Sigma. St. Louis, 13. Missouri. USA.

Desoxicorticosterona Acetato. DCA. Sigma. USA.

Azul de tetrazol. N. B. Co. Cleveland. Ohio. USA.

Ácido fosfototúngstico. Merck. Bahway. N. J. USA.

m-dinitrobenceno. Eastman. Rochester, 3. N. Y. USA.

Recativo T de Girard. N. B. Co. Cleveland. Ohio. USA.

Silica gel activada. Davidson, Grade 923, 100-200 mallas. Shaar and Co. III. USA.

TPN. — Trifosfopiridinnucleótido.

a) Mann Research Lab. Inc. New York. USA. Sal sódica. Coenzima II.

b) Boehringer & Soehne. Mannheim. Alemania.

c) Calbiochem. USA. Sal sódica. Coenzima II. 87,5 % de pureza.

Glucosa-6-Fosfato. — G-6-P. Utilizamos de dos procedencias:

a) Mann. Sal disódica. Humedad 5,4 %. Riqueza sobre P = 87,3 %.

b) Boehringer & Soehne. Mannheim. Alemania. Sal disódica.

Además el lote 2 los preparamos con Glucosa-6-fosfato, sal bórica.

Calbiochem.

El resto de los reactivos utilizados fueron de casas de reconocida solvencia, calidad analítica, o fueron purificados según métodos que a continuación indicamos.

1. *Purificación de reactivos.*

Alcohol etílico absoluto. — Partimos de una mezcla de punto de ebullición constante que venden las Rentas Departamentales del Valle, Colombia, con un contenido aproximado del 95,6 % de alcohol en peso.

Colocamos 1,5 litros en un matraz de 5 litros, añadimos 500 grs. de cal viva, CaO, previamente calentada a 800°C, en horno eléctrico, durante dos horas. Refluimos por 6 horas el contenido del matraz con refrigerante esmerilado en cuyo extremo superior se ha colocado un tubo desecador con cloruro de calcio anhidro. Destilamos en matraz con columna Vigreux aislado de la atmósfera por tubos de cloruro de calcio anhidro. Todas las juntas son de esmerilado. Recogemos únicamente las fracciones intermedias.

El producto obtenido de este modo tiene una densidad de 0,7824, que según (84) corresponde a 99,8 % de riqueza alcohólica.

La técnica está de acuerdo con las indicaciones de (85).

Para la eliminación de aldehídos agregamos al alcohol absoluto antes obtenido 4 grs. por litro de metafenileno-diamina hidrocloreuro. Mantenemos en la oscuridad agitando de vez en cuando. Destilamos poco antes del uso la cantidad necesaria.

Purificación de metanol — Añadimos 0,5 grs. de 2,4-dinitrofenilhidrazina y 2 ml. de ácido sulfúrico concentrado a 2 litros de metanol. Hervimos a reflujo por 30 minutos. Destilamos en matraz provisto de columna Vigreux a razón de 3 ml. por minuto. Desechamos cabezas y colas. Si el metanol ha de usarse en cromatografía, lo hervimos a reflujo por 16-20 horas sobre lentejas de NaOH (5 % peso/volumen) y polvo de zinc en la misma proporción. Destilamos por dos veces fuera de la humedad del aire.

Purificación de cloroformo. — Lavamos la cantidad de cloroformo deseada por dos veces con 1/5 de su volumen de agua destilada. Secamos sobre sulfato sódico anhidro (2 %) y destilamos sobre carbonato potásico (1 %).

Benceno para cromatografía. — Hervimos a reflujo por 30 minutos sobre ácido sulfúrico concentrado en la proporción de 50 ml. por litro. Lavamos con agua, solución de NaOH, agua, secamos con sulfato sódico anhidro y destilamos.

2. Soluciones necesarias.

INCUBACIÓN

a) Solución de DHA en propilen glicol. — Preparamos a medida que vamos necesitando una solución que contiene 12,5 mgs. de DHA/ml., en lotes de 100 ml. que numeramos de 1 al 6. Para la disolución completa calentamos en baño de agua a 38°C.

b) Solución de TPN en agua destilada.

Lote 1. — Disolvemos 333 mgs. de TPN, sal sódica, Mann Research Lab., hasta 200 ml. en agua destilada.

Lote 2-5. — Disolvemos 381 mgs. de TPN, sal sódica, Calbiochem, hasta 200 ml. en agua destilada.

c) Solución de glucosa-6-fosfato (G-6-P).

Lote 1. — Solución de 20 micromoles/ml., obtenida disolviendo glucosa-6-P, sal sódica. 3H₂O, Mann, en KRP, recién preparado.

Lote 2. — La preparamos de concentración semejante a la anterior partiendo de glucosa-6-fosfato, sal bórica. Tomamos 1 g. que añadimos a 35,4 ml. de agua formando una suspensión. Con agitación continua fuimos agregando poco a poco 3,9 ml. de ácido sulfúrico 1 N. Filtramos el precipitado de sulfato de bario y agregamos al filtrado 57,5 ml. de KRP, p^H 7,4. La solución resultante tenía un p^H de 7,2.

Lotes 3-8. — Solución de 20 micromoles/ml. obtenida por disolución de G-6-P, disódica, Calbiochem, en la cantidad adecuada de KRP.

Todas las soluciones anteriores se mantienen en congelador a -30°C y se ponen a la temperatura ambiente antes del uso.

SOLUCIONES PATRÓN

a) Solución de DHA. — Preparamos dos:

- 1) Conteniendo 5 mgs. de DHA/10 ml. en etanol de 95 %.
- 2) Conteniendo 0,5 mgs. de DHA/10 ml. en etanol de 95 %.

b) Soluciones de DOCA. — Preparamos igualmente dos:

- 1) Contiene 11,3 mgs. de DOCA/10 ml. en etanol de 95 %.
- 2) Contiene 1,13 mgs. de DOCA/10 ml. de etanol de 95 %.

Patrón de cromatografía. — Lo preparamos para cromatogramas en papel disolviendo hasta 5 ml. en etanol absoluto:

7,56 mgs. de cortisol (Compuesto F)
7,08 mgs. de cortisona (Compuesto E)
6,92 mgs. de DOCA.

B I B L I O G R A F I A

1. WHITE, A.; HANDLER, P.; SMITH, E. L. y STETTEN, D. W.: *Principles of Biochemistry*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1959).
2. FIESER, L. F. y FIESER, M.: *Química Orgánica*, Grijalbo, S. A. México (1960).
3. LEHMAN, R. W. y EMBREE, N. D.: *Soybeans and soybean products*, II, Markley K. S. ed., Inters. Pub., Inc., New York (1951).
4. WALLIS, E. S. y FERNOLZ, E.: *J. Chem. Soc.*, 57, 1379 (1935).
5. WALLIS, E. S. y FERNOLZ, E.: *J. Chem. Soc.*, 57, 1504 (1935).
6. GIRALD, F.: *Productos químicos y farmacéuticos*, Ed. Atlante, México (1946).
7. FIESSER, L. F. y FIESER, M.: *Steroids*, Reinhol Pub. Co., New York (1959).
8. SCHNEIDER, J. J. y MASON, H. L.: *J. Biol. Chem.*, 172, 771 (1948).
9. BUTLER, G. G. y MARRIAN, G. F.: *J. Biol.*, 119, 565 (1937).
10. ENGEL, L. L.; THORN, G. W. y LEWIS, R. A.: *J. Biol. Chem.*, 137, 205 (1941).
11. HIRSCHMAN, J.: *J. Biol. Chem.*, 136, 483 (1940).
12. PINGUS, G. y PEARLMAN, W. H.: *Endocrinol.*, 29, 413 (1941).
13. PEARLMAN, W. H.: *Endocrinol.*, 30, 270 (1942).
14. MUNSON, P. L.; GALLAGHER, T. F. y KOCH, F. C.: *J. Biol. Chem.*, 152, 67 (1944).
15. LIEBERMANN, S.; DOBRINER, K.; HILL, B. R.; FIESER, L. F. y RHOADS, C. F.: *J. Biol. Chem.*, 172, 263 (1948).
16. DORFMAN, R. I.: *Ann. Rev. of Biochem.*, 26, 533 (1957).
17. OKADA, M.; FUKUSHIMA, D. K. y GALLAGHER, T. F.: *J. Biol. Chem.*, 234, 1688 (1959).
18. MARKER, R. E. y ROHRMANN, E.: *J. Am. Chem. Soc.*, 61, 3592 (1939).
19. MARKER, R. E. y ROHRMANN, E.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 518 (1940).
20. MARKER, R. E. y SHABICA, A. C.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2523 (1940).
21. MARKER, R. E.; TSUKAMOTO, T. y TURNER, D. L.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2525 (1940).
22. MARKER, R. E.; JONES, E. M. y KRUEGER, J.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2532 (1940).
23. MARQUER, R. E.; JONES, E. M. y TURNER, D. L.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2537 (1940).
24. MARKER, R. E. y TURNER, D. L.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2540 (1940).
25. MARKER, R. E.; TURNER, D. L. y ULSHAFFER, P. R.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2542 (1940).
26. MARQUER, R. E.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2543 (1940).
27. MARKER, R. E. y KRUEGER, J.: *J. Am. Chem. Soc.*, 62, 2548 (1940).
28. MARKER, R. E.; WAGNER, R. B.; ULSHAFFER, P. R.; WITTBECKER, E. L.; GOLDSMITH, D. P. J. y RUOF, C. H.: *J. Am. Chem. Soc.*, 69, 2167 (1947).
29. MUELLER, G. P.: *Nature*, 181, 771 (1958).
30. EPPSTEIN, S. H.; MEISTER, P. D.; MURRAY, H. C. y PETERSON, D. H.: *Vitam. & Hormon.*, XIV, Acad. Press. Inc., Pub., New York (1956), pág. 359-432.
31. KRAMLI, A. y HORVARTH, J.: *Nature*, 162, 618 (1948).

32. LEVY, H. R. y TALALAY, P.: J. Biol. Chem. 209 (1959).
33. LEVY, H. R. y TALALAY, P.: J. Biol. Chem., 204 (1959).
34. DORFMAN, R. I. y SHIPLEY, R. A.: *Androgens*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1956).
35. HUFFMAN, M. N. y LOTT, M. H.: J. Biol. Chem., 172, 789 (1948).
36. ST. ANDRÉ, A. F.; Mc-PHILLAMY, H. B.; NELSON, J. A.; SHABICA, A. C. y SCHELZ, C. R.: J. Am. Chem. Soc., 74, 5506 (1952).
37. BUTENANDT, A. y SCHMIDT-THOMÉ, J.: Ber. 71, 1487 (1938).
38. BUTENANDT, A. y SCHMIDT-THOMÉ, J.: Ber. 72, 182 (1939).
39. MUNSON, P. L. y KENNY, A. D.: *Recent Progress in Hormone Research*, IX, 135 (1954).
40. ENGEL, L. L. y LANGER, L. J.: Ann. Rev. in Biochem., 30, 499 (1961).
41. HARPER, H. A.: *Review of Physiological Chemistry*, Lange Medical Pub., Los Altos, Cal. (1957).
42. HARPER, H. A.: *Review of Physiological Chemistry*, Lange Medical Pub., Los Altos, Cal. (1957).
43. Ciba Fundation, *The Steroid Hormones*, London (1959).
44. BURN, J. H.; FINNEY, D. J. y GOODWIN, L. G.: *Biological Standardization*, Oxford University Press, London (1952).
45. DEULOFEU, V. y MARENZI, A. D.: *Curso de Química Biológica*, El Ateneo, Buenos Aires (1957).
46. FUKUSHIMA, D. K.
47. BUTLER, G. C. y MARRIAN, G. F.: J. Biol. Chem. 124, 237 (1938).
48. VENNING, E. H.; HOFFMAN, M. M. y BROWNE, J. S. L.: J. Biol. Chem., 146, 369 (1942).
49. MASON, H. L. y KEPLER, E. J.: J. Biol. Chem., 161, 235 (1945).
50. NATHANSON, I. T.; ENGEL, L. L.; KENNEDY, B. J. y KELLEY, R. M.: *Symposium on Steroids in Experimental and Clinical Practice*, The Blakiston Co., Philadelphia (1951).
51. FREEMAN, H.; PINCUS, C.; BACHRACH, S.; JOHNSON, C. W.; MC CABE, G. E.; MC GILPIN, H. H. y SCANLON, J. C.: Ibid. (1951).
52. SAVARD, K.: Clin. Chem., 7, 228 (1961).
53. REINHOLD, J. G., Ann. Rev. in Biochem., 26, 587 (1957).
54. UNGAR, F.; MILLER, A. M. y DORFMAN, R. I.: J. Biol. Chem., 206, 597 (1954).
55. ENGEL, L. L.: *Proc. of the Second National Cancer Conference, II*, Am. Cancer Soc., New York (1952).
56. ENGEL, L. L. y LANGER, L. J.: Ann. Rev. of Biochem., 30, 499 (1961).
57. DORFMAN, R. I. y UNGAR, F.: *Metabolism of Steroid Hormones*, Burgess Pub. Co., Minneapolis, Min. (1954).
58. HIRSCHMANN, H. y HIRSCHMANN, F. B.: J. Biol. Chem., 157, 601 (1945).
59. FOTHERBY, K.: Biochem. J., 69, 596 (1958).
60. MILLER, A. M.: DORFMAN, R. I. y MILLER, M.: *Endocrinol.*, 46, 105 (1950).
61. SCHILLER, S.; MILLER, A. M.; DORFMANN, R. I., SEVRINGHANS, E. y McCULLAGH, E. P.: *Endocrinol.* 37, 262 (1945).
62. STARKA, L. y KUTOVA, J.: Biochem. Biophys. Acta. 56, 76 (1962).
63. FOTHERBY, K.; COLÁS, A.; ATHERDEN, S. M. y MARRIAN, G. F.: Biochem. J., 64 50P (1956).
64. FOTHERBY, K.; COLÁS, A.; ATHERDEN, S. M. y MARRIAN, G. F.: Biochem. J., 66, 664 (1957).
65. COLÁS, A.: Biochem. J., 82, 390 (1962).
66. HIRSCHMANN, H.: J. Biol. Chem., 150, 363 (1943).
67. MASON, H. L. y KEPLER, E. J.: J. Biol. Chem. 167, 73 (1947).
68. DE DUVE, C. y BERTHAT, J.: Intern. Rev. Cytol., 3, 225 (1954).

PRODUCTOS METABOLICOS DE LA DEHIDROEPIANDROSTERONA CON HIGADO DE RATA

69. HOGEBOOM, G. H.; SCHNEIDER, W. C. y PALLADE, G. E.: *J. Biol. Chem.* 172, 619 (1948).
70. HOGEBOOM, G. H.; SCHNEIDER, W. C. y STRIEBICH, M. J.: *J. Biol. Chem.* 196, 111 (1952).
71. SCHNEIDER, W. C. y HOGEBOOM, G. H.: *Cancer Research*, 11, 1 (1951).
72. UMBREIT, W. W.; BURRIS, R. H. y STAUFFER, J. F.: *Manometric Techniques*, Burgess Pub. Co., Minneapolis (1957).
73. COLWICK, S. P. y KAPLAN, N. O.: *Methods in Enzymology*, Acad. Press. Inc. Pub. New York (1955).
74. SCHMIDT, L. H. y HUGNES, H. B.: *J. Biol. Chem.*, 143, 771 (1942).
75. MUNSON, P. L.; JONES, M. E.; MC CALL, P. J. y GALLAGHER, T. F.: *J. Biol. Chem.*, 176, 73 (1948).
76. LANGSTROTH, G. O. y TALBOT, N. B.: *J. Biol. Chem.*, 128, 759 (1939).
77. HOLTORFF, A. F. y KOCH, F. C.: *J. Biol. Chem.*, 135, 377 (1940).
78. CAHEN, R. L. y SALTER, W. T.: *J. Biol. Chem.*, 152, 489 (1944).
79. WILSON, E.: *Arch. Biochem. Biophys.*, 52, 217 (1954).
80. COHEN, S. y KALUSZYNER, A.: *Anal. Chem.*, 29, 161 (1957).
- 80a. CORKER, C. S.; NORYMBERSKY, J. K. y THOW, R.: *Biochem. J.*, 83, 583 (1962).
81. KINGLEY, G. y CETCHELL, G.: *Anal. Biochem.*, 2, 1 (1961).
82. BONGIOVANNI, A. M.: *Anal. Biochem.*, 2, 617, (1961).
83. SCHNEIDER, J. J. y LEWBART, N. L.: *Recent Progress in Hormone Research*, XV, 201 (1959).
84. LANGE, N. A.: *Handbook of Chemistry*, Handbook Pub. Inc., Sandusky, Ohio (1952).
85. VOGEL, A.: *A Textbook of Practical Organic Chemistry*, Longmans Green and Co., London (1951).

ESTUDIO CARIOLOGICO DEL *STEROPLEURUS DILUTUS* Bol.

p o r

HORACIO MARCO MOLL

INTRODUCCIÓN

Como continuación de nuestros estudios acerca de la cariólogía de las especies pertenecientes al grupo de los Ehipigerinos de España, presentamos en este trabajo, el cariotipo y particularidades en la meiosis de la especie *Steropleurus dilutus* Bol., recogida en la Sierra del Guadarrama, en el área de San Rafael.

Esta especie fue descrita por Bolívar en el año 1878, en los Anales de la Sociedad Española de Historia Natural, en su tomo VII, presentándose en ejemplares de unos 30 mm. de longitud, tanto en el macho como en la hembra, exhibiendo éstas, un oviscapto de unos 28 mm. de longitud, por término medio.

Estas especies se identifican fácilmente por presentar un pronoto marcadamente rugoso, con unos lóbulos laterales lisos, los cuales protegen a unos pequeños élitros finamente reticulados y de un color amarillento.

El estudio de esta especie nos servirá para comprobar analogías o diferencias con otras especies ya estudiadas, no solamente del género *Steropleurus*, sino del *Callicrania*, MARCO MOLL (3, 4, 5).

MATERIAL Y MÉTODOS

Como en trabajos anteriores se han recogido testículos y ovarios de la especie objeto de este estudio, previamente anestesiados con cloroformo. Como medio fijador se ha empleado el Carnoy 3:1, la solución Karpechenko (11:4, solución A con relación a la solución B), así como el Navashin-Karpechenko (1:1, de solución A: solución B). Los testículos y ovarios fueron incluidos en parafina según la técnica del alcohol butílico, que nos sigue dando resultado magníficos. Los cortes seriados se ejecutaron en espesores de 15 micras.

Igualmente se ha utilizado la tinción de Feulgen, en piezas fijadas con Carnoy.

Como técnicas de tinción, se han empleado con éxito la del cristal violeta y la de la hematoxilina férrica de Heidenhein, con diferenciación en solución férrica.

La técnica del smear a base de orceina acética y de la 8-oxiquinoleína MARCO MOLL (3), igualmente se ha aplicado con éxito.

Los dibujos se han realizado con cámara clara en papel al nivel de la mesa. Las microfotografías en cámara LEITZ, sobre placas ortocromáticas Vafca, sensibilidad 29° Scheiner, con tiempos de exposición de 5 a 7 segundos y utilizando filtro núm. 401/3.

ESTABLECIMIENTO DEL NÚMERO CROMOSÓMICO Y MORFOLOGÍA

Al igual que en trabajos anteriores, no tenemos referencias directas sobre el cariotipo de esta especie, MAKINO (2), aun cuando en las especies *Steropleurus carinatta* Bol. (5) y *Steropleurus balearicus* Bol. (4) establecimos de las observaciones correspondientes, un número cromosómico $2n = 28 + X$ para el macho y de $2n = 28 + XX$ para la hembra.

En las placas metafásicas espermatogoniales se observa una disposición muy semejante al del citado género *Steropleurus* (*S. carinatta* y *S. balearicus*), como puede apreciarse en las figs. 2 de la lám. I y en las correspondientes 3 y 4 de la lámina II.

El número de cromosomas es por lo tanto numéricamente igual al de los dos *Steropleurus* anteriormente estudiados.

Morfológicamente, los cromosomas se distribuyen en los tipos metacéntrico y acrocéntrico. Hay dos cromosomas marcadamente metacéntricos, con los dos brazos prácticamente iguales, que corresponden a dos autosomas. El cromosoma sexual X es metacéntrico, pero con los dos brazos marcadamente desiguales.

Los restantes cromosomas son típicamente acrocéntricos y por lo tanto el kinetocoro es terminal, perfectamente apreciable en las placas metafásicas por la orientación de la porción monobraquial del cromosoma en si-

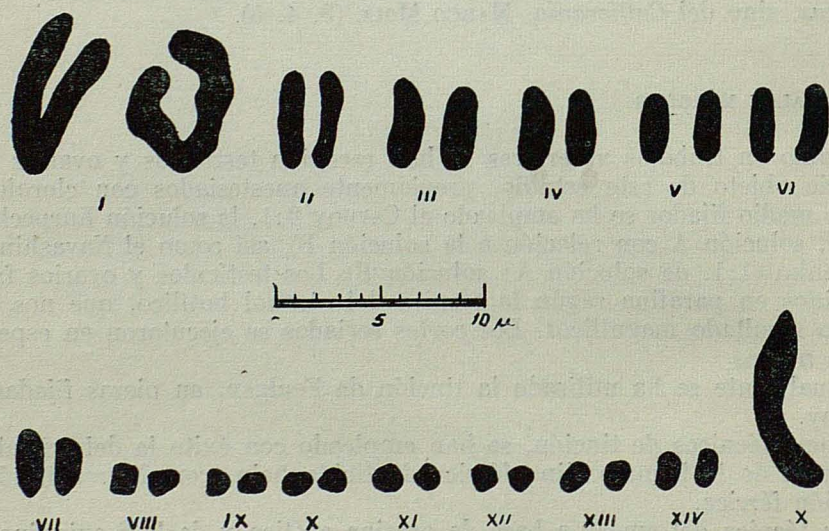


FIG. 1. — *Steropleurus dilutus* Bol. Idiograma de los cromosomas espermatogoniales

tuación radial y centrífugamente dispuesto, estando por ello localizado el kinetocoro en la parte central de la citada placa. El telómero terminal es por lo tanto apenas o prácticamente imposible de apreciar.

Estos cromosomas acrocéntricos se distribuyen en dos grupos, unos marcadamente monobraquiales y otros de tipo puntiforme, al que cabe establecer un subtipo o elipsoidal, que al igual que ocurre con todos los cromosomas de este tipo y en particular en los Ortópteros (teniendo en cuenta los trabajos cariológicos que se han hecho sobre estos insectos, WHITE (6)), siempre ocupan una posición central, en la placa metafásica.

El cariotipo de la especie *Steropleurus dilutus* Bol. lo podemos establecer con las siguientes características:

CARIOTIPO: *Steropleurus dilutus* Bol.

	metacéntrico	acrocéntrico			Total
		monobraquial	elipsoidal	puntiforme	
macho.....	2 + X	12	2	12	28 + X
hembra....	2 + XX	12	2	12	28 + XX

Aunque se observa en preparaciones tratadas por el fijador Karpechenko una marcada contracción de los cromosomas, en las obtenidas a base de un previo tratamiento por la 8-oxiquinoleína o por la orceína acética existe por el contrario una mayor expansión, por lo que podemos obtener una media aproximada en los dos tipos de tratamiento, para establecer el siguiente análisis de los cromosomas del *Steropleurus dilutus* Bol. (figura 1).

I. Par de cromosomas de gran tamaño, de tipo metacéntrico, con una gran constricción submediana, una relación de brazos casi igual a la unidad y una longitud de unas 21 micras, por 1,5 micras de ancho.

II. Par acrocéntrico monobraquial (al igual que los siguientes), de 4 micras de longitud por 1 micra de anchura.

III. Cromosomas de 4 micras de largo por casi 2 micras de ancho.

IV. Longitud de unas 3,75 micras de largo por 2 micras de ancho.

V. Con una longitud de 3,25 micras, por 1,5 micras de ancho.

VI. Cromosomas de 3,5 micras de largo por 1 micra de ancho.

VII. Cromosomas de 3,25 micras de largo por 1,5 micras de ancho.

VIII. Cromosomas acrocéntricos puntiformes de 1,5 micras de diámetro.

IX, X, XI, XII, XIII. Cromosomas puntiformes de 1,25 micras de diámetro.

XIV. Cromosomas de 2 micras de largo por 1,5 de ancho, que por su aspecto se separa como de tipo elipsoidal.

El cromoxoma X presenta una ligera curvatura, indicio de una constricción primaria poco acusada, que determina una relación de brazos $a/b = 1,25$. Longitud de 8,5 micras por 1,5 micras de ancho.

COMPORTAMIENTO DE LOS CROMOSOMAS EN LA MEIOSIS

En los cistos del *Steropleurus dilutus* Bol. (lámina I, fig. 1), se observan inicialmente los núcleos correspondientes a los espermatocitos de primer orden, de tamaño relativamente grande, siendo de resaltar, por la técnica del cristal violeta, como los cromonemata, aparecen bien claros, con sus cromómeros bien divididos, mostrando bien patentes sus cromátidas, como corresponde al estado del núcleo zigoténico.

En el estado zigoténico es de notar la presencia de un corpúsculo bien patente, que destaca fuertemente de las restantes formaciones del núcleo zigoténico, con reacción diferencial de Feulgen, que corresponde al cromosoma X, que nos muestra un marcado heteropictotismo positivo, con una posición marcadamente polar, que se hace bien patente en el estado subsiguiente o pachiténico.

En el estado diploténico se presentan bien caracterizados los bivalentes (fig. 2 y lámina III, fig. 7), que mantienen una gran semejanza con los estudiados en el *Steropleurus carinatta*, en el cual el cromosoma metacéntrico lleva tres lazos, que difiere de los cuatro hallados en el *Steropleurus carinatta*, que corresponden a la presencia de cuatro quiasmas, indicativo de la existencia de cromómeros idénticos, localizados en los cromosomas análogos.

Se aprecia igualmente la existencia de quiasmas en los restantes bivalentes, ya en número de dos o de uno.

Los quiasmas del cromosoma metacéntrico, llevan un quiasma distal, con una clara terminilización. Los quiasmas de este bivalente, presentan una marcada rotación de 90° , perfectamente apreciables en las placas objeto de estudio.

Los cromosomas acrocéntricos monobraquiales suelen llevar dos quiasmas, adoptando la clásica forma anillada, mientras que otros, sólo exhiben un único quiasma, con la rotación de 180° , que determina la adopción de la clásica forma de aspa.

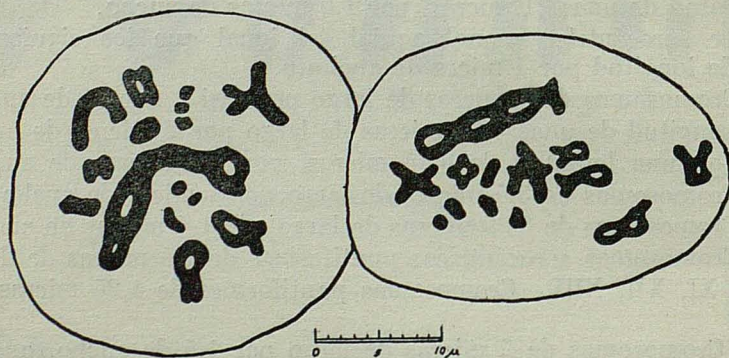


FIG. 2. — *Steropleurus dilutus* Bol. — Disposición de los bivalentes

Los cromosomas puntiformes o no es apreciable el quiasma o adoptan una disposición en anillo, que es difícilmente detectable.

LAMINA I

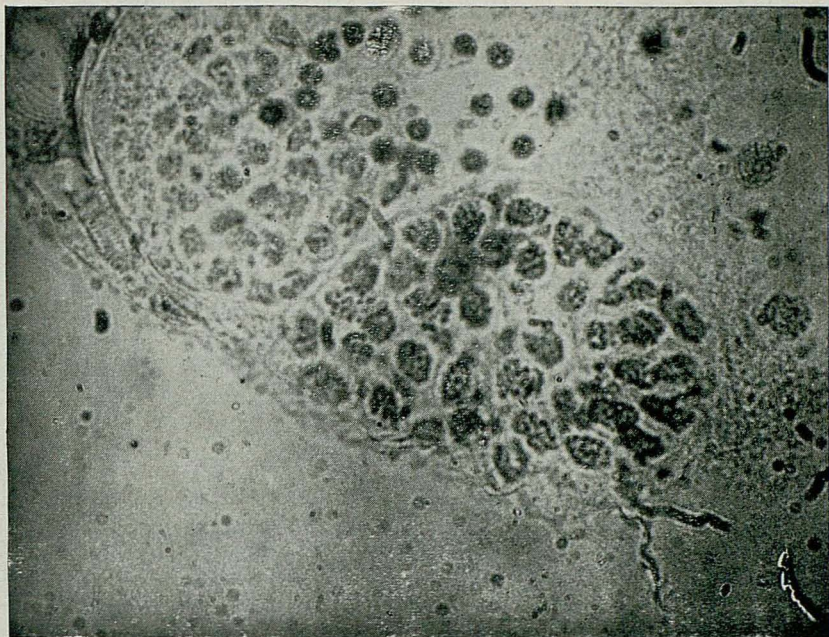


FIG. 1. — Cistos con núcleos de espermatoцитos de primer orden en el estado leptoténico. Se observa el marcado estado de heteropícnosis positiva del cromosoma sexual X. Cristal violeta. Aumento en placa: 750 x.



FIG. 2. — Placa metafásica espermatoγονial. Orceína acética. Obj. 100 x; oc. 12 x
Aumento real en placa: 2.000 x.

LAMINA II



—FIG. 3 y 4. — Placas metafásicas espermatogoniales. Orceina acética. Aumento real en placa de la fig. 3, 2.000 x y en la fig. 4, 2.700 x.

LAMINA III



FIG. 5. — Núcleos con placas en metáfase I. Cristal violeta. Aumento real en placa : 2.800 x.

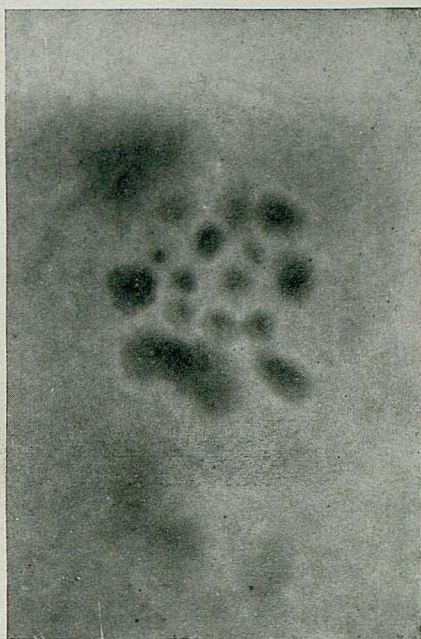


FIG. 6. — Placas en metáfase I. Cristal violeta. Aumento real en placa : 2.300 x.



FIG. 7. — Placa cromosómica con bivalentes, mostrando la disposición de los quiasmas. Orceína acética, previo tratamiento con la 8-oxiquinoleína. Aumento real en placa : 2.700 x.

De las observaciones realizadas, se aprecia que el número de quiasmas por núcleo, oscila entre los 13 y los 15, con casos de dos terminilizaciones.

En el estado diakinésico, como ocurre siempre y en particular en los cromosomas de estos insectos, hay un fuerte engrosamiento, a la que sigue una marcada disminución de los quiasmas.

En la formación de la placa metafásica I se colocan los bivalentes engrosados, con aspecto semejante a los estudiados en *Steropleurus carinata* y *Steropleurus balearicus* Bol., como puede apreciarse en la fig. 3 y en la lámina III, figs. 5 y 6.

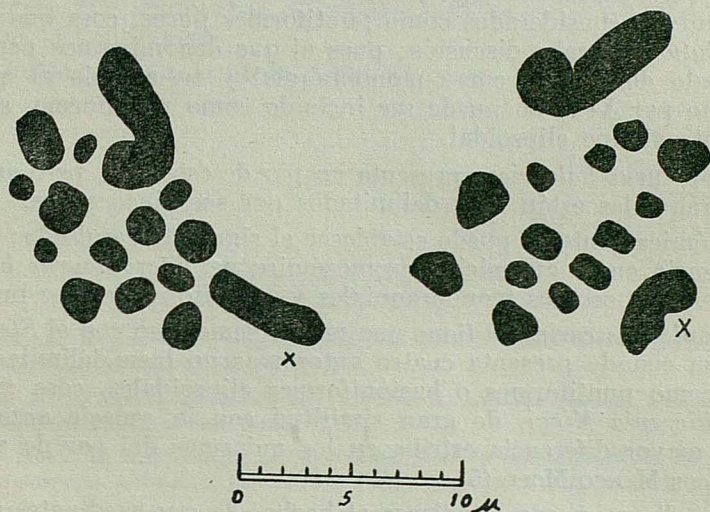


FIG. 3. — *Steropleurus dilutus* Bol. — Placas metafásicas. I auxocitarias

Las fases restantes se realizan sin que tenga lugar la presencia de anomalía alguna y con las características propias de todo proceso ulterior correspondiente a la meiosis final.

Hay que hacer resaltar, que el cromosoma X sigue manteniendo su marcada independencia durante todo el proceso, con una intensa heteropiconosis negativa en estas últimas fases.

DISCUSIÓN

Estableciendo un estudio comparativo con anteriores trabajos sobre el género *Steropleurus* (4 y 5) y del género *Callicrania* (5), apreciamos que se mantiene la identidad general del tipo cromosómico, no solamente en el número, como apuntábamos en un principio, sino también en el aspecto general de los cromosomas, ya que en las tres especies anteriores y en la que es objeto de estudio en el presente trabajo, destaca la presencia de dos autosomas metacéntricos, que es característica de estos géneros, ya que igualmente los seguimos encontrando en otras especies que serán objeto de un trabajo ulterior.

El carácter de un solo heterocromosoma sexual en el macho y de dos en la hembra, es peculiar en los Ortópteros, WHITE (6).

En los restantes autosomas, sí apreciamos una pequeña diferencia en lo que respecta a los cromosomas acrocéntricos monobraquiales, ya que en las especies citadas, describimos diez parejas de autosomas de este tipo, aunque bien pudiera considerarse que un par que incluimos como acrocéntrico puntiforme, debiera ser considerado más bien como bastoniforme elipsoidal, ya que tanto en *Steropleurus carinatta* como en *Callicrania Mieg*i, en preparaciones observadas, era algo aventurado el poder precisar si un par de ellos podrían ser considerados como puntiformes puros, cosa que en *Steropleurus dilutus*, no cabe discusión, pues al que denominamos par VII está perfectamente delimitado como monobraquial y en cambio al que designamos como par XIV, no puede ser incluido como puntiforme, sino como perteneciente al tipo elipsoidal.

El *Steropleurus balearicus* presenta un par de este tipo, pero en cambio, los monobraquiales están bien delimitados por sus cinco pares.

Cromosómicamente se puede establecer el siguiente resultado: una marcada diferencia en la guarnición cromosómica del *Steropleurus balearicus*, con sus diez cromosomas monobraquiales y sus catorce de tipo puntiforme.

El *Steropleurus carinatta* tiene una mayor semejanza con el *Steropleurus dilutus*, aun cuando presenta cuatro autosomas no bien delimitados en su inclusión como puntiformes o bastoniformes elipsoidales, cosa que ocurre con la *Callicrania Mieg*i, de gran similitud con la especie anterior, aun cuando la mayor diferencia estriba en los quiasmas del par de autosomas metacéntricos MARCO MOLL (5).

De todo ello se puede establecer el hecho, de que mediante un estudio cuidadoso de las guarniciones cromosómicas de estas cuatro especies, se observan pequeñas diferencias, que caben perfectamente como las necesarias para el establecimiento de los caracteres cromosómicos de las distintas especies (*Steropleurus*), aunque no así se pueda dar éste criterio, hasta el momento actual, en lo que se refiere al género (*Steropleurus* y *Callicrania*).

CONCLUSIONES

1.º Se analiza la constitución cromosómica del *Steropleurus dilutus* Bol. con un cariotipo $n = 14$ autosomas tanto para el macho como para la hembra, con un solo heterocromosoma para el macho y dos X para la hembra (en su estado diploico).

2.º Los cromosomas estudiados se reparten en cuatro tipos: metacéntricos, acrocéntricos bastoniformes, acrocéntricos elipsoidales y acrocéntricos puntiformes.

3.º El número de quiasmas por núcleo oscila entre los 13 a los 15.

S U M M A R Y

We analyze the chromosomal constitution of the Ephigerino *Steropleurus dilutus* Bol., which displays a cariotype $n = 14$ autosomes both for the male and the female, with only a single heterochromosome for the male in the diploid form and two heterochromosomes for the female.

The chromosomes which have been submit to this present study are divided into four different: the metacentric chromosomes, the acrocentric chromosomes, the acrocentric ellipsoidal chromosomes and the acrocentric needleform chromosomes.

Each nucleus contains about from 13 up to 15 chiasms.

Facultad de Ciencias
Laboratorio de Biología
Zaragoza

B I B L I O G R A F I A

- (1) COLEMAN, L. C.: *Chromosome structure in the Acrididae with special reference to X-chromosome*. Genetics, 28, 1943.
- (2) MAKINO, S.: *Atlas of chromosome numbers in animals* (second edition). The Iowa State College Press. Amer. Iowa. 1951.
- (3) MARCO MOLL, H.: *Aplicación de la orceína y de la 8-oxiquinoleína en el estudio de los cromosomas animales*. Rev. Acad. Cienc. Zaragoza, VIII, fasc. 2. 1953.
- (4) MARCO MOLL, H.: *Notas citogenéticas sobre el Steropleurus balearicus Bol.* Rev. Acad. Ciencias. Zaragoza, XI, fasc. 2. 1956.
- (5) MARCO MOLL, H.: *Espermatogénesis y estudio cromosómico de dos especies de Ephigerinos*. Rev. Acad. Cienc. Zaragoza, XII, fasc. 2. 1957.
- (6) WHITE, M.J.D.: *Cytogenetics of Orthopteroid Insects*. Advances in Genetics, IV. 1951.