

INDICE DE MATERIAS

- M. TORRES IGLESIAS. — *Sobre los grupos finitos π -separables.* 429
- M. CALVO. — *Aplicación de los métodos de promedios al estudio del movimiento de satélites artificiales* 461
- A. PLANS. — *La topología débil del conjunto de los rayos del espacio de Hilbert, definida mediante hiperplanos* 525
- D. REVUELTA. — *Estudio de proteínas en vinos de Aragón ...* 529
- L. HERRERO SÁNCHEZ. — *Materias celulósicas secundarias; su ennoblecimiento* 537
- J. S. URIETA NAVARRO y C. GUTIÉRREZ LOSA. — *Segundos coeficientes del virial del sistema nitrógeno-propano, por medidas de compresibilidad* 547
- F. GÓMEZ BELTRÁN, A. ROY, L. A. ORO y F. PALACIO. — *Estudio de algunos oxinatos complejos de iones de los metales de transición* 565

REVISTA
DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES
DE
ZARAGOZA

SERIE 2^a

TOMO XXVI

Núm. 3



1971

SOBRE LOS GRUPOS FINITOS π -SEPARABLES

P O R

MIGUEL TORRES IGLESIAS

Departamento de Algebra y Fundamentos. Universidad de Zaragoza

Summary

Chapter I

The main results in this chapter are the following:

a) Given a finite group G and a set of prime numbers π , we define $O^\pi(G)$ as usual, and by recurrency: $O^{\pi, \pi'}(G) = O^{\pi'}(O^\pi(G))$, etc. So we can construct two descending fully invariant π -series:

$$G \supseteq O^\pi(G) \supseteq O^{\pi, \pi'}(G) \supseteq \dots \quad (1.4)$$

$$G \supseteq O^{\pi'}(G) \supseteq O^{\pi', \pi}(G) \supseteq \dots \quad (1.3)$$

Now, we have proved:

Theorem 3. — G is π -separable if and only if (1.3) and (1.4) finish in 1.

Propositon 3. — If G is π -separable, then

$$[O^\pi(G), O^{\pi, \pi'}(G)] = O^{\pi, \pi'}(G).$$

We can define the π -height of a finite π -separable group G as the number of π -factors in (1.4). If we compare this number with the well known π -length of a π -separable group, we see they coincide as affirms proposition 4.

b) Using the definition given in [1] of Frattini subgroup over π in a finite group (written $\Phi_\pi(G)$) we can construct another π -serie:

$$1 \subseteq \Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\pi, \pi'}(G) \subseteq \dots \quad (1.7)$$

such that $\Phi_{\pi, \pi'}(G)$ is the inverse image in G of $\Phi_{\pi'}(G/\Phi_\pi(G))$. Now (1.7) finishes in G if and only if G is π -separable.

c) We have studied the class of π -separable groups, considered as a formation. Given a formation \mathcal{F} , we can define

$$G^{\mathcal{F}} = \bigcap \{ M \triangleleft G \text{ and } G/M \in \mathcal{F} \}$$

as usual, where G is a given group. Now we introduce two classes of groups.

$$\mathcal{F}^* = \{ G \mid G^{\mathcal{F}} = G \} \text{ and } \mathcal{F}' = \{ G \mid G_1 \in \mathcal{F}^* \forall G_1 \text{ subgroup of } G \}$$

Then \mathcal{F}^* and \mathcal{F}' are closed under quotients (Lemma 1) and \mathcal{F}' is a formation (Proposition 8). If \mathcal{F} is the π -separable groups formation, then $\mathcal{F}' = 1$. Dually we have studied the class of π -separable groups as a Fitting class from this point of view.

Chapter II

A well known property of π -separable groups is:

$$(P) \text{ If } \bar{G} = G/O_{\pi'}(G) \text{ then } Z_G(O_{\pi}(\bar{G})) \subseteq O_{\pi}(\bar{G}).$$

We have studied the kind of groups which have (P), without assuming π -separability; in theorems 1, 2, 3 we extend this property to quotients, products and normal subgroups in some special cases.

Chapter III

In this chapter we have related property (P) with other π -properties. Our main results are the following:

Theorem 1. — G is π -separable if and only if every homomorphic imagen of G verifies (P).

This result is improved in Theorem 2.

Theorem 3. — If G verifies (P) and (D_{π}) , and Q is a π -Sylow subgroup of $O_{\pi',\pi}(G)$, then:

$$Z_G(Q) \subseteq O_{\pi',\pi}(G).$$

Now, generalizing from p to π the definition of p -constraint given in [2] chapter 8, we say:

A finite group is π -constrained if $Z_G(Q) \subseteq O_{\pi',\pi}(G)$.

Theorem 4. — A π -constrained group verifies the property (P).

Proposition 2. — If G is a π -constrained group, then $\text{Inn } G$ involves $\text{Inn } O_{\pi',\pi}(G)$.

This chapter ends at a lattice-diagram corresponding to the subgroups of a group G with (P) and (D_{π}) which have appeared in the preceding discussion.

Note: (D_{π}) has the usual meaning.

Introducción

Sea π un conjunto de números primos y π' su complementario; se llama grupo π -separable a aquel que admite una serie de composición en que cada factor es un π -grupo o un π' -grupo donde π -grupo es aquel cuyo orden es solamente divisible por primos en π . En este trabajo nos hemos dedicado al estudio de esta clase de grupos finitos, así como de ciertas propiedades relacionadas con la π -separabilidad. Para ello se han reunido las secciones de que consta el trabajo en tres capítulos.

En el primer capítulo se hace un estudio de los grupos π -separables, introduciendo, junto con las π -series ya conocidas, nuevas π -series y con ellas nuevas propiedades de estos grupos. Asimismo se consideran los grupos π -separables desde el punto de vista de las Formaciones y de las Clases de Fitting; haciendo en cada caso un estudio general válido para grupos finitos y aplicando luego al caso de los grupos π -separables.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de una π -propiedad que verifican los grupos π -separables, generalizando a los grupos que la verifican algunos resultados ya clásicos en grupos π -separables y p-resolubles y que únicamente usaban para su obtención el hecho de cumplir dicha propiedad. Se dan también algunos nuevos.

En el capítulo tercero se relacionan las dos π -propiedades anteriores entre sí y con otras.

Algunos de estos resultados son generalizaciones inmediatas de otros ya conocidos y que se encuentran en la bibliografía clásica de los grupos finitos. En todos estos casos se hace referencia a las fuentes de los mismos.

Las proposiciones, teoremas y definiciones se numeran en cada capítulo independientemente. Los números entre corchetes corresponden a la bibliografía, que, ordenada alfabéticamente, se encuentra al final de este trabajo.

CAPITULO I

§ 1. π -series ascendentes y descendentes en un grupo finito

Sea π un conjunto de números primos y π' su complementario; diremos que un número natural es un π -número si solamente es divisible por primos de π . Un grupo finito G se llama π -grupo si su orden $|G|$ es un π -número y un elemento x de un grupo finito G es un π -elemento si su orden $|x|$ es un π -número; asimismo llamaremos π -subgrupo a aquel cuyo orden es un π -número.

Dado un grupo finito G cualquiera, la clase de los π -subgrupos normales es no vacía, pues a ella pertenece 1; dados dos π -subgrupos normales M y N , el subgrupo MN es también π -subgrupo normal y por tanto tiene sentido la siguiente

Definición 1. — Dado un grupo finito G , llamaremos $O_\pi(G)$ al mayor π -subgrupo normal del mismo.

Proposición 1. — En todo grupo finito G se tiene:

- 1.º $O_\pi(G)$ es un subgrupo característico de G .
- 2.º G es un π -grupo sí y sólo sí $O_\pi(G) = G$.
- 3.º Si G es un π' -grupo, $O_\pi(G) = 1$.

Las demostraciones son inmediatas.

Como consecuencia de la definición 1, se tiene que: si $\bar{G} = G/O_\pi(G)$, entonces $O_\pi(\bar{G}) = 1$. Ahora bien en \bar{G} podemos considerar $O_{\pi'}(\bar{G})$ y $O_{\pi, \pi'}(G)$ su antiimagen por el homomorfismo canónico $G \rightarrow \bar{G}$. Análogamente se define $O_{\pi, \pi', \pi}(G)$ como la imagen inversa en G de $O_\pi(G/O_{\pi, \pi'}(G))$ por el homomorfismo canónico $\bar{G} \rightarrow G/O_{\pi, \pi'}(G)$, etc.

Llegando a construir una sucesión ascendente de subgrupos característicos:

$$(1.1) \quad 1 \subseteq O_\pi(G) \subseteq O_{\pi, \pi'}(G) \subseteq O_{\pi, \pi', \pi}(G) \subseteq \dots$$

Que llamaremos π -serie ascendente superior. De modo análogo, definiremos la π -serie ascendente inferior.

$$(1.2) \quad 1 \subseteq O_{\pi'}(G) \subseteq O_{\pi', \pi}(G) \subseteq O_{\pi', \pi, \pi'}(G) \subseteq \dots$$

Definición 2. — Sea G un grupo finito; llamaremos $O^\pi(G)$ al subgrupo de G engendrado por los π' -elementos.

Proposición 2. — En todo grupo finito G se tiene:

- 1.º $O^\pi(G)$ es un subgrupo totalmente invariante de G .
- 2.º $G/O^\pi(G)$ es un π -grupo.
- 3.º Si $N \triangleleft G$ y G/N es un π -grupo, se sigue: $N \supseteq O^\pi(G)$ y recíprocamente: todo subgrupo normal de G que contiene a $O^\pi(G)$ es tal que su índice es un π -número.

- 4.º Si G es un π' -grupo, $O^\pi(G) = G$.
 5.º Si G es un π -grupo, $O^\pi(G) = 1$ y viceversa.

Demostración:

1.º Sea x un π' -elemento y φ un endomorfismo de G ; como un endomorfismo transforma un elemento x en otro φx de orden $|\varphi x|$ divisor de $|x|$, se tiene que φx es un π' -elemento; por lo que $\varphi x \in O^\pi(G)$. Como, por lo anterior, la imagen de cualquier generador de $O^\pi(G)$ por cualquier endomorfismo φ de G pertenece a $O^\pi(G)$, este subgrupo es totalmente invariante.

2.º Sea $\bar{x} \in G/O^\pi(G)$ y sea $\bar{x} = xO^\pi(G)$; como todo elemento x de un grupo finito puede expresarse como producto de un π -elemento y un π' -elemento (cf. [8], pág. 396), se tiene:

$$x = x_\pi x_{\pi'} = x_{\pi'} x_\pi$$

tenemos $\bar{x} = \bar{x}_\pi$, ya que $x_{\pi'} \in O^\pi(G)$; luego \bar{x} es un π -elemento, y por tanto $G/O^\pi(G)$ es un π -grupo.

3.º Sea x cualquiera de $O^\pi(G)$, entonces x es producto de π' -elementos, de ahí que también lo sea $\bar{x} = xN$ y por tanto $\bar{x} = 1(\in G/N)$ lo que implica que $x \in N$. El recíproco es trivial pues si $N \supseteq O^\pi(G)$, G/N es imagen homomorfa de $G/O^\pi(G)$.

Notemos que $O^\pi(O^\pi(G)) = O^\pi(G)$; en efecto, sea x de $O^\pi(G)$ entonces x es producto de π' -elementos de G que lo son de $O^\pi(G)$, por tanto $x \in O^\pi(O^\pi(G))$. Ahora bien podemos definir, sucesivamente: $O^{\pi, \pi'}(G) = O^{\pi'}(O^\pi(G))$, $O^{\pi, \pi', \pi}(G) = O^\pi(O^{\pi, \pi'}(G))$, etc. y considerar la π -serie descendente superior:

$$(1.3) \quad G \supseteq O^\pi(G) \supseteq O^{\pi, \pi'}(G) \supseteq O^{\pi, \pi', \pi}(G) \supseteq \dots$$

Y la π -serie descendente inferior:

$$(1.4) \quad G \supseteq O^{\pi'}(G) \supseteq O^{\pi', \pi}(G) \supseteq O^{\pi', \pi, \pi'}(G) \supseteq \dots$$

Notas:

1.ª Observemos la siguiente "dualidad" entre $O^\pi(G)$ y $O_\pi(G)$:

$O_\pi(G)$ es el mayor subgrupo normal cuyo orden es π -número y $O^\pi(G)$ es el menor subgrupo normal cuyo índice es π -número. Se puede definir, respectivamente, como el producto de todos los π -subgrupos normales de G y como la intersección de todos los subgrupos normales cuyo índice es un π -número. Nótese asimismo que: $O_\pi(G) \cap O^\pi(G) = 1$ y que $O^\pi(G)O_\pi(G) = G$.

2.ª Si f es un homomorfismo de grupos finitos

$$f: G \rightarrow G'$$

aplica un elemento de $O^\pi(G)$ en uno de $O^\pi(G')$, como basta comprobarlo para generadores. Tenemos, pues, definido un homomorfismo de pares de grupos

$$f: (O^\pi(G), G) \rightarrow (O^\pi(G'), G')$$

y por tanto induce un homomorfismo de π -grupos

$$f: G/O^\pi(G) \rightarrow G'/O^\pi(G')$$

Queda así definido un functor de la categoría de los grupos finitos en la de los π -grupos.

§ 2. π -series en grupos finitos π -separables

Definición 3. — Llamamos grupo π -separable a un grupo finito que admite una serie de composición tal que cada factor es un π -grupo o un π' -grupo.

Teorema 1. — En un grupo finito π -separable se tiene:

- 1.º Las π -series ascendentes superior e inferior acaban en G y recíprocamente: si una de las dos series acaba en G , G es π -separable.
- 2.º Subgrupos e imágenes homomorfas de grupos π -separables son π -separables.
- 3.º Un subgrupo normal minimal de un grupo π -separable es un π -grupo o un π' -grupo.

La demostración puede encontrarse en [2], pág. 227.

Teorema 2. — Si G es un grupo finito π -separable y $\bar{G} = G/O_\pi(G)$, entonces se cumple la siguiente propiedad:

$$(P) \quad Z_{\bar{G}}(O_\pi(\bar{G})) \subseteq O_\pi(\bar{G}).$$

La demostración puede verse en [2], pág. 228.

Lema. — Un subgrupo normal maximal G_1 de un grupo π -separable es tal que G/G_1 es un π -grupo o un π' -grupo.

Demostración: Si G_1 es un subgrupo normal maximal de G , forma parte de una serie de composición y por tanto G/G_1 es un π -grupo o un π' -grupo c. q. d.

Teorema 3. — Si G es π -separable, las dos series descendentes inferior y superior terminan en 1; recíprocamente, si una de estas dos series termina en 1, G es π -separable.

Demostración: El recíproco es evidente por los teoremas de refinamiento para series normales y de Jordan-Hölder.

Sea, pues, G π -separable y supongamos que una de las series acaba en H , al cabo de un cierto número de pasos de modo que:

$$G \supseteq O^\pi(G) \supseteq O^{\pi, \pi'}(G) \supseteq \dots \supseteq O^{\pi, \pi', \dots, \pi}(G) = H \neq 1$$

Entonces, $O^\pi(H) = H$ y como H es π -separable, sus subgrupos normales maximales son de índice π -número o π' -número y como $O^\pi(H) = H$, dicho índice es necesariamente un π' -número por tanto $O^{\pi'}(H) \neq H$, contra la hipótesis de que la serie acaba en H c. q. d.

Como consecuencia de la definición de π -separabilidad y del teorema anterior, tenemos:

Teorema 4. — Las ocho propiedades siguientes son equivalentes:

1. G admite una serie normal cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.
2. G admite una serie normal maximal (de composición) cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.
3. G admite una serie invariante cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.
4. G admite una serie invariante maximal (principal) cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.
5. G admite una serie característica cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.
6. G admite una serie característica maximal cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.

7. G admite una serie totalmente invariante cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.

8. G admite una serie totalmente invariante maximal cuyos factores son π -grupos o π' -grupos.

Demostración:

$1 \Leftrightarrow 2$, $3 \Leftrightarrow 4$, $5 \Leftrightarrow 6$ y $7 \Leftrightarrow 8$ por los teoremas de refinamiento de Ω -series en los casos $\Omega = 1$, $\Omega = \text{Int } G$, $\Omega = \text{Aut } G$ y $\Omega = \text{End } G$, respectivamente; ver, por ejemplo [6], pág. 64.

$7 \Rightarrow 5 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Trivial.

$2 \Rightarrow 7$. En efecto: por el teorema anterior, G es π -separable, es decir, cumple la propiedad 2 si y sólo si las series descendentes acaban en 1 y éstas son totalmente invariantes. c. q. d.

Proposición 3. — Si G es un grupo finito π -separable, entonces:

$$[O^\pi(G), O^{\pi, \pi'}(G)] = O^{\pi, \pi'}(G).$$

Demostración: Bastará suponerlo para G π -separable y tal que $O^\pi(G) = G$.

Sea, pues, G un grupo finito π -separable que no admite cocientes que sean π -grupos propios. Llamemos $H = O^{\pi'}(G)$; dicho subgrupo es π -separable así como $H/[G, H]$. Como $O^{\pi'}(H) = H$, se tiene $O^{\pi'}(H/[G, H]) = H/[G, H]$; supongamos que este grupo no es trivial; entonces, por la π -separabilidad, $O^\pi(H/[G, H]) \neq H/[G, H]$; escribiendo $P/[G, H] = O^\pi(H/[G, H])$, tenemos:

1.º $H/P \cong H/[G, H]/P/[G, H]$ es un π -grupo.

2.º $[H, G] \subseteq P$ y por tanto $[H/P, G/P] = 1$.

De 1.º deducimos que G/P es una extensión de un π -grupo H/P por un π' -grupo G/H y por tanto, según el teorema de Schur-Zassenhaus; se tiene:

$G/P = (H/P)(S/P)$ en donde S/P es un subgrupo de G/P isomorfo a G/H .

De 2.º se deduce que la aplicación:

$$\begin{aligned} H/P \times S/P &\rightarrow G/P \\ (hP, sP) &\rightarrow hsP \end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo entre grupos finitos del mismo orden. Por tanto, es un isomorfismo. Así, pues, se tiene que S/P es un subgrupo normal de G/P y $G/S \cong H/P \neq 1$, que es un π -grupo, contra la hipótesis de que G no admite π -cocientes propios. Luego $H = [G, H]$ c. q. d.

Corolario 1. — Sea G un grupo finito π -separable tal que $O^\pi(G) = G$, entonces $[G, G] = G^1(\pi')$, en que $G^1(\pi')$ es el subgrupo normal máximo de G tal que $G/G^1(\pi')$ es π' -grupo abeliano.

Demostración: De la definición de $G^1(\pi')$ se deduce:

$$G^1(\pi') \supseteq O^{\pi'}(G) \quad \text{y} \quad G^1(\pi') \supseteq [G, G],$$

por tanto $G^1(\pi') \supseteq O^{\pi'}(G)[G, G]$, y como $G/O^{\pi'}(G)[G, G]$ es π' -grupo abeliano, se tiene $[G, G]O^{\pi'}(G) = G^1(\pi')$.

Pero por la proposición anterior

$$O^{\pi'}(G) = [G, O^{\pi'}(G)] \subseteq [G, G]$$

y por tanto $G^1(\pi') = [G, G]$ c. q. d.

Corolario 2. — Si G es un grupo finito π -separable, el cociente $O^\pi(G)/[O^\pi(G), O^\pi(G)]$ es un π' -grupo.

Demostración 1.^a: Bastará probarlo para G tal que $O^\pi(G) = G$, entonces por el corolario 1, $G/[G, G] = G/G^1(\pi')$ que es un π' -grupo c. q. d.

Demostración 2.^a: (prescinde del corolario 1). $O^\pi(G)/[O^\pi(G), O^\pi(G)]$ es imagen homomorfa de $O^\pi(G)/[O^\pi(G), O^{\pi, \pi'}(G)]$ que por la proposición 3 coincide con $O^\pi(G)/O^{\pi, \pi'}(G)$ que es π' -grupo c. q. d.

Nota: ¿Puede generalizarse la noción de grupo π -separable a grupo π -separable con dominio de operadores Ω ?

La definición natural sería la siguiente:

“Llamamos Ω -grupo π -separable a aquel que posee una Ω -serie

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_k = 1$$

en que cada factor es un π -grupo o un π' -grupo.”

Obviamente todo Ω -grupo π -separable es π -separable considerado tan sólo como grupo finito sin dominio de operadores. Recíprocamente, sea G π -separable; entonces, según el teorema 4, apartado 7, es un $(\text{End } G)$ -grupo π -separable.

Ahora bien, dar un dominio de operadores es dar una aplicación $\Omega \rightarrow \text{End } G$ y, por tanto, una biyección entre un conjunto cociente Ω/R de Ω y un subconjunto de $\text{End } G$, donde R es la equivalencia asociada a la aplicación anterior y Ω/R es un dominio de operadores para G mediante la ley:

$$\begin{aligned} \Omega/R \times G &\rightarrow G \\ (\bar{\omega}, g) &\sim \rightarrow \omega g \end{aligned}$$

siendo $\omega \in \bar{\omega}$. Así, pues, todo dominio de operadores actúa como un dominio de operadores contenido en $\text{End } G$; luego si G es π -separable, la serie totalmente invariante que aparece en el teorema 4, apartado 7, es Ω -invariante, pues es Ω/R -invariante, luego G es un grupo π -separable, como Ω -grupo.

§ 3. Sobre la π -longitud

Definición 4. — Se llama π -longitud de un grupo π -separable al número de π -factores de la π -serie inferior ascendente

$$1 \subseteq O_\pi(G) \subseteq O_{\pi, \pi}(G) \subseteq \dots$$

que anotaremos, para mayor comodidad:

$$1 = P_0(G) \subseteq N_0(G) \subset P_1(G) \subset \dots \subset P_1(G) \subseteq N_1(G) = G$$

siendo: $N_i(G)/P_i(G)$ π' -grupo, $P_i(G)/N_{i-1}(G)$ π -grupo y l la π -longitud.

Definición 5. — Llamamos π -altura de un grupo π -separable, al número de π -factores de la π -serie inferior descendente.

$$G \supseteq O^{\pi'}(G) \supseteq O^{\pi, \pi'}(G) \supseteq \dots$$

que denotaremos, para mayor comodidad:

$$G = N^0(G) \supseteq P^0(G) \supset N^1(G) \supset \dots \supset N^h(G) \supseteq P^h(G) = 1$$

siendo como antes $N^1(G)/P^1(G)$ π' -grupo, $P^1(G)/N^{h+1}(G)$ π -grupo y h la π -altura.

Nota: No confundir la π -altura de un grupo π -separable, aquí definida con la π -altura de Fitting de un grupo π -resoluble (cf. [1]).

Tratamos ahora de comparar l y h .

Lema 1. — Sea G π -separable y sea

$$1 = P_0 \subseteq M_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_m \subseteq M_m = G$$

una serie invariante tal que M_i/P_i es un π' -grupo y P_i/M_{i-1} es un π -grupo. Entonces :

$$M_i \subseteq N_i(G) \quad \text{y} \quad P_i \subseteq P_i(G)$$

(cf. [6], 6-2 Hilfssatz, pág. 688). La demostración dada allí sirve perfectamente aquí, aunque aquella se haga para grupos p -resolubles.

Lema 2. — Sea G π -separable y sea

$$G = M^0 \supseteq P^0 \supseteq M^1 \supseteq \dots \supseteq M^m \supseteq P^m = 1$$

una serie invariante, tal que M^i/P^i es un π' -grupo y P^i/M^{i+1} es un π -grupo. Entonces :

$$M^i \supseteq N^i(G) \quad \text{y} \quad P^i \supseteq P^i(G)$$

Demostración: Supongamos que $M^i \supseteq N^i(G)$ para un cierto i ; está claro que esto ocurre trivialmente en el caso $i = 0$. Entonces :

$$N^i(G)/N^i(G) \cap P^i \cong P^i N^i(G)/P^i \subseteq M^i/P^i$$

ya que $P^i \subseteq M^i$ y $N^i(G) \subseteq M^i$ por hipótesis; entonces, $N^i(G)/N^i(G) \cap P^i$ es un π' -grupo y por tanto :

$$P^i(G) \subseteq N^i(G) \cap P^i \subseteq P^i$$

Análogamente, a partir de este último contenido, se demostraría que $M^{i+1} \supseteq N^{i+1}(G)$ y así sucesivamente. c.q.d.

Apoyándonos en estos dos lemas y comparando las π -series ascendente inferior y descendente inferior, se tiene :

$$N^k(G) \subseteq N_{h-k}(G) \quad k = 0, 1, \dots, h \quad (1.5)$$

$$N^k(G) \subseteq N_{h-k}(G) \quad k = 0, 1, \dots, h$$

$$N^k(G) \supseteq N_{h-k}(G) \quad k = 0, 1, \dots, l$$

$$P_k(G) \supseteq N_{l-k}(G) \quad k = 0, 1, \dots, l \quad (1.6)$$

Haciendo en (1.5) $k = 0$, se tiene $G = N^0(G) = N_h(G)$ y como $N_1(G) = G$, se tiene $l \leq h$.

Haciendo en (1.6) $k = 0$, se tiene $1 = P_0(G) = P_l(G)$ y como $P^1(G) = 1$, se tiene: $h \leq l$.

Queda, por tanto, probada la siguiente

Proposición 4. — En un grupo finito G π -separable, la π -altura h y la π -longitud l coinciden.

§ 4. Sobre una π -serie ascendente

En este párrafo desarrollamos una teoría de tipo algo distinto a la anterior, encaminada a construir una nueva π -serie ascendente de naturaleza distinta a las consideradas en los anteriores apartados. Para ello aplicaremos a los grupos π -separables la teoría y algunos resultados dados en [1] por Enguehard. Para ello interesa dar, previamente las principales definiciones, cuya justificación está dada en [1].

Definición 6. — Se llama grupo π -nilpotente a un grupo finito G , extensión de un π' -grupo por un π -grupo nilpotente.

Definición 7. — (Enguehard). El mayor subgrupo normal π -nilpotente de un grupo finito G se llamará grupo de Fitting sobre π de G , y se anotará $F_\pi(G)$.

Definición 8. — (Enguehard). Llamamos subgrupo de Frattini sobre π , y se anotará $\Phi_\pi(G)$ a la intersección de todos los subgrupos maximales de G cuyo índice es un π -número.

De la definición resulta inmediatamente que dicho subgrupo es característico.

Notas: Si G es un π -grupo, el subgrupo de Frattini sobre π coincide con el subgrupo de Frattini $\Phi(G)$.

Si G es un π' -grupo, $\Phi_\pi(G) = G$.

Si $\pi_1 \subseteq \pi_2$ se tiene: $\Phi_{\pi_2}(G) \subseteq \Phi_{\pi_1}(G)$.

Recordemos que todos los grupos poseen subgrupos maximales, excepto los cíclicos de orden primo.

Proposición 5. — En todo grupo finito $\Phi_\pi(G/\Phi_\pi(G)) = 1$ y por tanto $G/\Phi_\pi(G)$ es Φ -libre en el sentido de Gaschütz, para todo π .

Demostración: Sea $\bar{x} \in G/\Phi_\pi(G)$ un elemento perteneciente a todo subgrupo maximal $M/\Phi_\pi(G)$ de índice π -número, entonces, si $\bar{x} = x\Phi_\pi(G)$, x pertenece a todo subgrupo maximal M de G de índice π -número y por tanto $x \in \Phi_\pi(G)$; luego $\bar{x} = 1$. c. q. d.

Proposición 6. — En todo grupo finito $\Phi_\pi(G/\Phi_\pi(G)) = 1$ y por tanto $G/\Phi_\pi(G)$ es π -nilpotente.

Demostración: Si G es π -separable, $\Phi_\pi(G)$ es π -separable y por tanto se le puede aplicar el teorema 3.6 de [2], capítulo 6, y recordando que según el teorema de Feit-Thompson todo grupo finito de orden impar es resoluble, tenemos que todo grupo π -separable cumple los teoremas de Sylow para π' y de ahí que se pueda aplicar el teorema 3.3. apartado (a) de [1] según el cual se tiene que $\Phi_\pi(G)$ es un grupo π -nilpotente. c. q. d.

Corolario. — En un grupo π -separable, se tiene

- 1.º $\Phi_\pi(G) \cap \Phi_{\pi'}(G) = \Phi(G)$.
- 2.º $[F_\pi(G), F_{\pi'}(G)] \subseteq \Phi_\pi(G) \subseteq F_\pi(G)$.
- 3.º $F_\pi(G/\Phi_\pi(G)) = F_\pi(G)/\Phi_\pi(G)$.

Para probarlo basta considerar las proposiciones 3.4 y 3.5 de [1].

Nota: Comparar 2.º y 3.º con los resultados clásicos sobre los subgrupos de Fitting y de Frattini; ver, por ejemplo [2], pág. 219, teor. 1.6.

En lo que sigue, dado un grupo finito G , designaremos con $Syl_\pi(G)$ a la clase de π -subgrupos de Sylow del mismo. Recordemos, asimismo, que un π -subgrupo de Sylow es un subgrupo de orden π -número maximal.

Lema 1. — Sea T un subgrupo de un grupo G π -separable, tal que $[G:T]$ es un π -número; entonces T contiene a $O_\pi(G)$.

Demostración: Por ser G π -separable, T es también π -separable, entonces por el teorema 3.6 de [2], tanto T como G verifican los teoremas de Sylow generalizados para π y π' . Como $[G:T]$ es un π -número.

$$\text{Syl}_{\pi'}(G) \supseteq \text{Syl}_{\pi'}(T)$$

y entonces $O_{\pi'}(G) \subseteq \bigcap \{P \mid P \in \text{Syl}_{\pi'}(G)\} \subseteq \bigcap \{P \mid P \in \text{Syl}_{\pi'}(T)\} \subseteq T$, quedando probado el lema.

Lema 2. — Si G es un grupo finito π -separable no trivial, entonces $\Phi_\pi(G) \neq 1$ o bien $\Phi_{\pi'}(G) \neq 1$.

Demostración: Por ser G π -separable, $O_\pi(G) \neq 1$ o bien $O_{\pi'}(G) \neq 1$. Supongamos, por ejemplo, que $O_{\pi'}(G) \neq 1$. Entonces, según el lema 1, si T es un subgrupo maximal de G tal que su índice es un π -número, se tiene que $T \supseteq O_{\pi'}(G)$. Al considerar la intersección de todos estos T maximales tenemos:

$$\Phi_\pi(G) \supseteq O_{\pi'}(G) \neq 1. \quad \text{c.q.d.}$$

Por lo tanto podemos realizar un proceso análogo al descrito en el párrafo 1 para la construcción de las π -series ascendentes y obtener una serie característica:

$$1 \subseteq \Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\pi, \pi'}(G) \subseteq \Phi_{\pi, \pi', \pi}(G) \subseteq \dots \quad (1.7)$$

definiendo $\Phi_{\pi, \pi'}(G)$ de modo que

$$\Phi_{\pi, \pi'}(G)/\Phi_\pi(G) = \Phi_{\pi'}(G/\Phi_\pi(G))$$

y así sucesivamente.

Esta serie, según el lema 2, acaba en G si este grupo es π -separable, y por tanto tenemos una nueva caracterización de los grupos π -separables, que queda enunciada en el siguiente

Teorema 5. — Un grupo finito G es π -separable sí y sólo si admite una serie característica.

$$1 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_n = G$$

tal que C_i/C_{i-1} es π -nilpotente y C_{i+1}/C_i es π' -nilpotente.

Demostración: Si G admite tal serie, es trivialmente π -separable, y si G es π -separable, recordando el hecho de que $\Phi_\pi(G)$ es π -nilpotente y $\Phi_{\pi'}(G)$ es π' -nilpotente si G es π -separable, se tiene según la observación anterior que la π -serie (1.7) acaba en G . c. q. d.

§ 5. La formación de los grupos π -separables

Este párrafo se divide en dos partes, el primer apartado es de carácter general y en el segundo aplicamos los resultados del primero al caso particular de los grupos π -separables.

(5-1) Formaciones

Definición 9. — Llamamos *formación* a una clase \mathcal{F} no vacía de grupos finitos, tal que:

(F-1) Si G pertenece a \mathcal{F} , G/H pertenece a \mathcal{F} para todo H subgrupo normal de G .

(F-2) Si G/H_1 y G/H_2 pertenecen a \mathcal{F} , $G/H_1 \cap H_2$ pertenece a \mathcal{F} .

Dada una formación \mathcal{F} y un grupo finito cualquiera G , notemos que la familia

$$\{M \mid M \triangleleft G \text{ y } G/M \in \mathcal{F}\}$$

es no vacía pues 1 es de \mathcal{F} y por tanto G pertenece a esta familia. Por tanto tiene sentido considerar el siguiente subgrupo $G^{\mathcal{F}}$ de G :

$$G^{\mathcal{F}} = \bigcap \{M \mid M \triangleleft G \text{ y } G/M \in \mathcal{F}\}$$

Notemos que la clase de los π -grupos es una formación y tal que, para todo grupo finito, $O_{\pi}(G)$ es precisamente $G^{\mathcal{F}}$.

Proposición 7. — Sean G un grupo finito cualquiera y \mathcal{F} una formación entonces:

- 1.º $G^{\mathcal{F}}$ es un subgrupo característico de G .
- 2.º $G \in \mathcal{F}$ sí y sólo si $G^{\mathcal{F}} = 1$.
- 3.º $G/G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$.
- 4.º Si N es un subgrupo normal de G y $G/N \in \mathcal{F}$ entonces N contiene a $G^{\mathcal{F}}$; y recíprocamente: si $G^{\mathcal{F}} \subseteq N \triangleleft G$, se tiene $G/N \in \mathcal{F}$.

Demostración: 1.º Sea φ un automorfismo de G y consideremos las familias

$$\mathcal{G}_1 = \{M \mid M \triangleleft G \text{ y } G/M \in \mathcal{F}\} \quad \mathcal{G}_2 = \{\varphi M \mid M \triangleleft G \text{ y } G/M \in \mathcal{F}\}$$

Si $M' \in \mathcal{G}_2$, se tiene $M' = \varphi M$, y como $\varphi \in \text{Aut } G$, M' es subgrupo normal de G ; además φ es un homomorfismo biyectivo de pares $(M, G) \rightarrow (M', G)$ y por tanto queda definido un isomorfismo: $G/M \rightarrow G/M'$, y de ahí que $G/M' \in \mathcal{F}$; por tanto $M' \in \mathcal{G}_1$. Así pues $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$. Por otro lado $M \in \mathcal{G}_1$ implica $M = \varphi M'$ (hacer $M' = \varphi^{-1} M \in \mathcal{G}_1$) luego $M \in \mathcal{G}_2$ y de ahí que $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$.

Como $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$, se tiene:

$$\begin{aligned} G^{\mathcal{F}} &= \bigcap \{M \mid M \triangleleft G \text{ y } G/M \in \mathcal{F}\} = \bigcap \{\varphi M \mid M \triangleleft G \text{ y } G/M \in \mathcal{F}\} = \\ &= \varphi \left[\bigcap \{M \mid M \triangleleft G \text{ y } G/M \in \mathcal{F}\} \right] = \varphi G^{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

(pues φ es biyectiva). Como esta igualdad vale para todo automorfismo φ de G , se tiene: $G^{\mathcal{F}}$ car G . c.q.d.

2.º En efecto, si $G \notin \mathcal{F}$, por ser $G^{\mathcal{F}}$ el menor subgrupo normal de G tal que $G/G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$, se tiene $G^{\mathcal{F}} \neq 1$.

Los demás apartados son triviales.

(Cf. con la proposición 2).

Supongamos que \mathcal{F} es una formación dada; definimos las siguientes clases no vacías

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* &= \{G \mid G^{\mathcal{F}} = G\} \\ \mathcal{F}' &= \{G \mid G_1 \in \mathcal{F}^* \text{ para todo subgrupo } G_1 \text{ de } G\} \end{aligned}$$

Primeras consecuencias inmediatas a partir de la definición, son:

- 1.ª — $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}^*$.
- 2.ª — Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son formaciones tales que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, se tiene $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}'$.

3.ª — $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}^* = \{1\}$.

4.ª — Si S es un subgrupo de $G \in \mathcal{F}'$; entonces $S \in \mathcal{F}'$.

Lema 1. — \mathcal{F}^* y \mathcal{F}' verifican (F-1).

Demostración: (a) Sea $G \in \mathcal{F}^*$, entonces $G = G^{\mathcal{F}}$. Si $H <| G$ y existe $M/H <| G/H$ tal que $G/H/M/H \in \mathcal{F}$, se tiene $G/M \in \mathcal{F}$ luego $M = G$ y por tanto $M/H = G/H$.

(b) Sea $G \in \mathcal{F}'$ y H un subgrupo normal de G . Supongamos que S/H es un subgrupo de G/H ; entonces S es un subgrupo de G luego $S \in \mathcal{F}^*$ y por (a), $S/H \in \mathcal{F}^*$; por tanto $G/H \in \mathcal{F}'$. c.q.d.

Lema 2. — Sea $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ una sucesión exacta de grupos finitos tal que: H y K pertenecen a \mathcal{F}^* ; entonces: $G \in \mathcal{F}^*$.

Demostración: Si $N <| G$ tal que $G/N \in \mathcal{F}$; tenemos G/NH pertenece a \mathcal{F} . Pero por el lema 1: $G/NH \in \mathcal{F}^*$ ya que $G/H \cong K \in \mathcal{F}^*$, y por tanto: $G/NH = 1$, de donde $NH = G$.

Entonces $G/N \cong NH/N \cong H/N \cap H \in \mathcal{F}^*$ pues es un cociente de H . Por otro lado: $G/N \in \mathcal{F}$, luego $G/N = 1$, es decir $G = N$; lo que nos dice que $G \in \mathcal{F}^*$. c.q.d.

Lema 3. — Si $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ es una sucesión exacta de grupos finitos, tal que H y $K \in \mathcal{F}'$; entonces $G \in \mathcal{F}'$.

Demostración: Sea S un subgrupo de G ; tenemos la sucesión exacta

$$1 \rightarrow S \cap H \rightarrow S \rightarrow S/S \cap H \rightarrow 1$$

de modo que $S \cap H \in \mathcal{F}^*$, pues es subgrupo de H , y por otro lado $S/S \cap H \cong SH/H \in \mathcal{F}^*$, por ser subgrupo de $G/H \cong K$. Por el lema 2, $G \in \mathcal{F}'$ ya que $S \in \mathcal{F}^*$. c.q.d.

Proposición 8. — \mathcal{F}' es una formación de grupos.

Demostración: En el lema 1 se probó que \mathcal{F}' verifica (F-1); veamos, ahora, que verifica (F-2).

Sean G/H_1 y G/H_2 de \mathcal{F}' ; entonces tenemos la sucesión exacta.

$$1 \rightarrow H_2/H_1 \cap H_2 \rightarrow G/H_1 \cap H_2 \rightarrow G/H_2 \rightarrow 1$$

tal que:

$$G/H_2 \in \mathcal{F}' \quad \text{y} \quad H_2/H_1 \cap H_2 \cong H_1H_2/H_1 \in \mathcal{F}'$$

por tanto, aplicando el lema 3, $G/H_1 \cap H_2 \in \mathcal{F}'$. c.q.d.

Como \mathcal{F}' es una formación, tiene sentido considerar la clase $(\mathcal{F}')^*$.

Proposición 9. — $\mathcal{F} \subseteq (\mathcal{F}')^*$.

Demostración: Sea $G \in \mathcal{F}$ y sea $N <| G$ tal que $G/N \in \mathcal{F}'$; entonces $G/N \in \mathcal{F}$, por ser \mathcal{F} formación, de ahí que: $G/N = 1$; luego $N = G$, lo que implica que $G^{\mathcal{F}'} = G$, es decir:

$$G \in (\mathcal{F}')^* \quad \text{c.q.d.}$$

Nota: En la formación \mathcal{F} de los π -grupos, la formación \mathcal{F}' es la de los π' -grupos y en este caso $(\mathcal{F}')' = \mathcal{F}$.

(5-2) La formación de los grupos π -separables

Proposición 10. — La clase de los grupos π -separables es una formación que cumple, además, la siguiente propiedad:

(E) Si G es una extensión de H por K y H y K son de \mathcal{F} , entonces $G \in \mathcal{F}$.

Demostración: (F-1) Pues todo grupo cociente de un grupo π -separable es π -separable.

(E) En efecto, si H y G/H son π -separables, admiten series de composición:

$$\begin{aligned} G/H &\supseteq G_1/H \supseteq G_2/H \supseteq \dots \supseteq G_n/H = H/H \\ H &\supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_m = 1 \end{aligned}$$

y entonces, G admite la serie normal

$$G \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = H \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = 1$$

formada por factores que son π -grupos o π' -grupos y de ahí que G es π -separable.

(F-2) Sean G/H_1 y G/H_2 grupos π -separables: entonces tenemos: $1 \rightarrow H_1/H_1 \cap H_2 \rightarrow G/H_1 \cap H_2 \rightarrow G/H_1 \rightarrow 1$ exacta y tal que $H_1/H_1 \cap H_2 (\cong H_1 H_2/H_2 \triangleleft G/H_2)$ y G/H_1 son π -separables; luego por (E), $G/H_1 \cap H_2$ es π -separable. c.q.d.

Análogas consideraciones son válidas para:

a) Los grupos π -resolubles, es decir grupos π -separables cuyos π -factores son resolubles.

b) Los grupos π -separables de π -longitud $\leq k$ (con $k \geq 0$ fijo) (cf. [6] 6.4 Hilfssatz apartados (a) y (d)).

c) Los π' -grupos (hacer $k = 0$).

d) Los π -grupos.

Para los grupos π -nilpotentes son válidos (F-1) y (F-2).

Definición 10. — Decimos que una formación \mathcal{F} es π -saturada en una clase \mathcal{C} si:

$$G/\Phi_\pi(G) \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad G \in \mathcal{C} \Rightarrow G \in \mathcal{F}$$

(cf. [1]).

Entonces se tiene la siguiente

Proposición 11. — La formación de los grupos π -nilpotentes es π -saturada en la formación de los grupos π -separables.

Demostración: Por el corolario de la proposición 6, apartado 3.º,

$$F_\pi(G/\Phi_\pi(G)) = F_\pi(G)/\Phi_\pi(G)$$

Por otra parte, de la definición de subgrupo de Fitting sobre π , se deduce que si $G/\Phi_\pi(G)$ es π -nilpotente: $G/\Phi_\pi(G)$ coincide con su subgrupo de Fitting sobre π ; luego

$$G/\Phi_\pi(G) = F_\pi(G)/\Phi_\pi(G)$$

y por tanto, comparando estas dos últimas igualdades, tenemos: $G = F_\pi(G)$ que es π -nilpotente. c.q.d.

Proposición 12. — Si \mathcal{F} es la formación de los grupos π -separables, $\mathcal{F}' = \{1\}$.

Demostración: Llamemos \mathcal{F}_π y $\mathcal{F}_{\pi'}$ a las formaciones de los π -grupos y de los π' -grupos, respectivamente, entonces:

$$\mathcal{F}_\pi \subseteq \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_{\pi'} \subseteq \mathcal{F}$$

De ahí que:

$$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'_{\pi'} = \mathcal{F}_{\pi'} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'_\pi = \mathcal{F}_\pi$$

y por tanto $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_\pi \cap \mathcal{F}_{\pi'} = \{1\}$. c.q.d.

§ 6. La clase de Fitting de los grupos π -separables

En este párrafo hacemos un estudio paralelo al del anterior, estando también dividido en dos partes

(6-1) Clases de Fitting

Definición 9b. — Llamamos clase de Fitting, a una clase \mathcal{K} no vacía de grupos finitos tal que

(CF-1) $G \in \mathcal{K}$ implica $H \in \mathcal{K}$ (para todo $H \triangleleft G$).

(CF-2) Si H_1 y H_2 son subgrupos normales de G tales que $H_1 \in \mathcal{K} \Rightarrow H_1 H_2 \in \mathcal{K}$.

Dada una clase de Fitting \mathcal{K} y un grupo finito cualquiera G ; notemos que la familia $\{M \mid M \triangleleft G \text{ y } M \in \mathcal{K}\}$ es no vacía, pues $1 \in \mathcal{K}$, y por tanto, está en la familia.

Llamamos $G_{\mathcal{K}}$ al siguiente subgrupo de G

$$G_{\mathcal{K}} = \Pi \{M \mid M \triangleleft G \text{ y } M \in \mathcal{K}\}$$

que es el mayor subgrupo normal de G en \mathcal{K} .

Notemos que la clase de los π -grupos es de Fitting y que para todo G finito, $O_{\pi}(G)$ es precisamente $G_{\mathcal{K}}$

Proposición 7b. — Sea G un grupo finito cualquiera y \mathcal{K} una clase de Fitting, entonces:

- 1.º $G_{\mathcal{K}}$ es un subgrupo característico de G .
- 2.º $G \in \mathcal{K}$ si y sólo si $G_{\mathcal{K}} = G$.
- 3.º $G_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$.
- 4.º Si $N \triangleleft G$ y $N \subseteq G_{\mathcal{K}}$ entonces $N \in \mathcal{K}$ y recíprocamente: si $N \triangleleft G$ y $N \in \mathcal{K}$, se tiene $N \subseteq G_{\mathcal{K}}$

Demostración:

- 1.º Sea φ un automorfismo de G ; $\varphi G_{\mathcal{K}}$ es un subgrupo normal de G y pertenece a \mathcal{K} , luego

$$G_{\mathcal{K}} \cdot \varphi G_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$$

y es subgrupo normal de G . Por tanto: $G_{\mathcal{K}} \cdot \varphi G_{\mathcal{K}} \subseteq G_{\mathcal{K}} \Rightarrow G_{\mathcal{K}} \supseteq \varphi G_{\mathcal{K}}$ c. q. d.

2.º, 3.º y 4.º son triviales.

(cf. con la proposición 1).

Dada una clase de Fitting \mathcal{K} , definimos las siguientes clases de grupos no vacías

$$\mathcal{K}^* = \{G \mid G_{\mathcal{K}} = 1\}$$

$$\mathcal{K}' = \{G \mid S \in \mathcal{K}^* \forall S, \text{ subgrupo de } G\}$$

Como consecuencia inmediata de la definición, tenemos:

- 1.ª $\mathcal{K}^* \supseteq \mathcal{K}'$.
- 2.ª $\mathcal{K}^* \cap \mathcal{K} = \{1\}$ (basta comprobar la proposición 7b, apartado 3.º).
- 3.ª Si \mathcal{K} y \mathcal{H} son clases de Fitting tales que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{K}' \supseteq \mathcal{H}'$.
- 4.ª Si S es un subgrupo de G y $G \in \mathcal{K}'$, entonces $S \in \mathcal{K}'$.

Lema 1b. — \mathcal{K}^* y \mathcal{K}' verifican (CF-1).

Demostración: Sea $G \in \mathcal{K}^*$ y H un subgrupo normal de G ; si calculamos $H_{\mathcal{K}}$ tenemos, por la proposición 7b, apartado 1.º:

$$H_{\mathcal{K}} \text{ car } H \triangleleft G$$

y por tanto $H_{\mathcal{K}} \triangleleft G_{\mathcal{K}}$, $H_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$; por consiguiente $H_{\mathcal{K}} = 1$.

Sea $G \in \mathcal{K}'$ y S un subgrupo de G , entonces se tiene: $S' \in \mathcal{K}^*$ para todo S' , subgrupo de S ; pues lo es de G . c.q.d.

Lema 2b. — Si $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ es una sucesión exacta de grupos tal que $H, K \in \mathcal{K}^*$; entonces $G \in \mathcal{K}^*$.

Demostración: Sea $N \triangleleft G$ y $N \in \mathcal{K}$, entonces $N \cap H \in \mathcal{K}$; pero por el lema 1b, $N \cap H \in \mathcal{K}^*$ de donde $N \cap H = 1$.

Por otro lado:

$$N = N/N \cap H = NH/H \triangleleft G/H = K$$

por tanto $NH/H \in \mathcal{K}^*$ y de ahí que $N = 1$. c. q. d.

Lema 3b. — Si $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ es una sucesión exacta de grupos y si H y K pertenecen a \mathcal{K}' , entonces $G \in \mathcal{K}'$.

Demostración: Sea S un subgrupo de G , entonces tenemos

$$1 \rightarrow S \cap H \rightarrow S \rightarrow SH/H \rightarrow 1$$

exacta, de modo que $S \cap H \in \mathcal{K}^*$ por ser subgrupo de H y además $SH/H \in \mathcal{K}^*$ por ser subgrupo de $G/H = K$. Entonces, por el lema 2b, $S \in \mathcal{K}^*$. c. q. d.

Proposición 3b. — Sea \mathcal{K} una clase de Fitting y supongamos que \mathcal{K}' verifica la siguiente propiedad:

$$G \in \mathcal{K}', \text{ implica } G/H \in \mathcal{K}' \quad (\forall H \triangleleft G)$$

Entonces \mathcal{K}' es una clase de Fitting.

Demostración: Por el lema 1b, bastará probar que \mathcal{K}' verifica CF-2. Sean H_1 y H_2 subgrupos normales de G , y H_1 de \mathcal{K}' ; entonces:

$$1 \rightarrow H_1 \rightarrow H_1 H_2 \rightarrow H_2/H_1 \cap H_2 \rightarrow 1$$

es exacta y tal que H_1 y $H_2/H_1 \cap H_2$ pertenecen a \mathcal{K}' ; con ello por el lema 2b se tiene $H_1 H_2 \in \mathcal{K}'$. c. q. d.

Proposición 9b. — $\mathcal{K} \subseteq (\mathcal{K}')^*$, siempre que \mathcal{K}' sea clase de Fitting.

La demostración es inmediata.

Notemos que si \mathcal{K} es la clase de Fitting de los π -grupos, se tiene que $(\mathcal{K}')' = \mathcal{K}$.

(6-2) La clase de Fitting de los grupos π -separables

Proposición 10b. — La clase de los grupos π -separables es una clase de Fitting que cumple la propiedad (E) (cf. proposición 10).

La demostración es análoga a la desarrollada en dicha proposición 10.

Del mismo modo constituyen clases de Fitting, subclases de la de los π -separables, las siguientes:

a) Los grupos π -resolubles.

b) Los grupos π -separables de π -longitud $\leq k$, con k entero no negativo fijo (cf. [6] 6.4 Hilfssatz).

c) Los π' -grupos ($k = 0$).

d) Los π -grupos.

Proposición 11b.—Si \mathcal{K} es la clase de Fitting de los grupos π -separables, $\mathcal{K}' = \{1\}$. La demostración es análoga a la de la proposición 11.

CAPITULO II

§ 1. Introducción y primeras propiedades

En el teorema 2 del capítulo I, enunciamos la siguiente propiedad de los grupos finitos π -separables

$$(P) \quad \text{Si } \bar{G} = G/O_{\pi}(G), \text{ entonces } Z_{\bar{G}}(O_{\pi}(\bar{G})) \subseteq O_{\pi}(\bar{G})$$

El propósito de este capítulo es el estudio de estos grupos finitos, los cuales constituyen una clase muy amplia de grupos finitos. Algunos de los resultados aquí expuestos son ya conocidos en los grupos π -separables y p -resolubles; pero, realmente, sólo utilizan la propiedad (P). Otras propiedades expuestas, que son equivalentes a (P) no lo son a la π -separabilidad.

Interesa recordar la siguiente propiedad de los subgrupos característicos, que se empleará en lo que sigue:

Proposición 1. — Sea N un subgrupo característico de H y H un subgrupo normal de G ; entonces N es subgrupo normal de G .

La demostración consiste, simplemente, en considerar el automorfismo $n \sim \rightarrow n^g$ de N con $g \in G$, y aplicar la definición de subgrupo característico.

Sean H un subgrupo normal de N y éste subgrupo normal de G ; llamamos $C_G(N/H)$ al siguiente subgrupo de G :

$$C_G(N/H) = \{g \in G \mid g^{-1}pgH = pH, \forall p \in N\}.$$

En las dos proposiciones siguientes, adoptaremos para mayor comodidad la siguiente notación:

$$N = O_{\pi}(G) \quad P/N = O_{\pi}(G/N)$$

Proposición 2. — Sea G un grupo finito, entonces las dos propiedades siguientes son equivalentes:

- (1) G verifica (P).
- (2) $C_G(P/N) \subseteq P$.

Dmostración: (1) \Rightarrow (2). Sea g un elemento cualquiera de $C_G(P/N)$, entonces $g^{-1}pgN = pN$ para todo $p \in P$ y de ahí que gN es de $Z_{G/N}(P/N)$, luego $gN \in P/N$ y $g \in P$. c. q. d.

(2) \Rightarrow (1). Sea $xN \in Z_{G/N}(P/N)$ es decir: $xNpN = pNxN$ para todo $p \in P$, luego: $x^{-1}p xN = pN$ para todo $p \in P$, de donde $x \in C_G(P/N) \subseteq P \Rightarrow xN \in P/N$. c. q. d.

Corolario. — Si G verifica (P), se tiene $Z_G(P) \subseteq P$.

En efecto, basta notar que $Z_G(P) \subseteq C_G(P/N)$.

Nota: Este corolario está probado en ([3], pág. 332) para grupos p -resolubles, es decir para $\pi = \{p\}$ un solo número primo.

En la proposición siguiente consideraremos la propiedad (P) para el caso de $\pi = \{p\}$.

Proposición 3. — Las propiedades siguientes son equivalentes:

- (1) G verifica (P).
- (2) $C_G(P/N) \subseteq P$.
- (3) Si F/N es el subgrupo de Frattini de P/N , se tiene $C_G(P/F) = P$.
- (4) G/P es isomorfo al grupo $A_G(P/F)$ de automorfismos de P/F inducidos por elementos de G .

Demostración:

(1) \Leftrightarrow (2). Demostrado en la proposición 2.

(2) \Rightarrow (3). P/N es un p -grupo; entonces si F/N es el subgrupo de Frattini de P/N , se tiene que P/F es elemental abeliano (cf. [3], Teor. 12.2.1, pág. 176). Además F/N es nilpotente y por tanto (cf. [3], Teor. 10.4.3, pág. 157) se tiene:

$$[P/N, P/N] \subseteq F/N.$$

Sean ahora x, y cualesquiera de P , entonces

$$[xN, yN] \in F/N$$

por tanto: $[x, y]N \in F/N$, y de aquí que $[x, y]F = F$.

Se tiene: $y^{-1}xyF = xF (\forall x) \Rightarrow y \in C_G(P/F)$; deducimos de esto que:

$$P \subseteq C_G(P/F) \triangleleft G \tag{2.1}$$

Llamemos $K = C_G(P/F)$ y notemos que $K/P \cong K/N/P/N$ no es un p -grupo si el contenido $P \subset K$ es estricto.

Vamos a probar que, efectivamente $P = K$; en efecto, supongamos que P está contenido estrictamente en K , como K/P no es un p -grupo, existe al menos un elemento x perteneciente a K , pero no a P cuyo orden $|x|$ es primo con p . Por pertenecer a K , x induce el automorfismo idéntico en P/F . Asimismo induce un automorfismo en el p -grupo P/N , y por tanto, según el teorema 12.2.2 de [3], por ser este automorfismo la identidad en P/F , su orden es una potencia de p . Pero por otro lado el orden de este automorfismo es primo con p ya que lo es $|x|$. De estos dos hechos deducimos que el automorfismo inducido en P/N es el idéntico, es decir: $x \in C_G(P/N)$, y por tanto $x \in P$ por suponer cierto (2). En resumen: $P = K$. c.q.d.

Notas A: El argumento es válido para todo grupo finito hasta (2.1).

B: La demostración es una síntesis de las dadas en [3] y [6].

(3) \Rightarrow (4). Para todo $x \in G$ queda definido un automorfismo $f(x)$ de P/F dado por

$$\begin{array}{ccc} f(x) : P/F & \longrightarrow & P/F \\ & & pF \rightsquigarrow x^{-1}pxF \end{array}$$

y por tanto una aplicación

$$\begin{array}{ccc} f : G & \longrightarrow & \text{Aut } P/F \\ & & pF \rightsquigarrow f(x) \end{array}$$

que es un homomorfismo de grupos. Su imagen es $A_G(P/F)$; hallemos su núcleo:

$f(x) = 1_{P/F} \Leftrightarrow x^{-1}pxF = pF$ para todo $pF \Leftrightarrow x \in C_G(P/F)$, es decir: $x \in P$, y por tanto: $\ker f = P$; queda por tanto probado que:

$$A_G(P/F) \cong G/P. \quad \text{c.q.d.}$$

Nota: Realmente las propiedades (3) y (4) son la misma.

(4) \Rightarrow (1). Independientemente del hecho de que G sea un grupo finito que verifica (4), se tiene $P \subseteq \ker f$, como puede comprobarse, por ejemplo, en [3], pág. 333, en la demostración del teorema 18.4.5. Ahora bien:

$$G/\ker f \cong A_G(P/F) \cong G/P$$

Por tanto: $P = \ker f$.

Sea, pues, $xN \in Z_{G/N}(P/N)$ cualquiera, entonces:

$$(xN)pN(xN)^{-1} = pN \quad (\forall p \in P)$$

lo que implica que $[x, p] \in N$ y de ahí $[x, p] \in F$, es decir x induce la transformación idéntica en P/F , o sea: $x \in \ker f = P$ y $xN \in P/N$. c.q.d.

Para lo que sigue volveremos a la notación inicial.

Proposición 4. — Sea G un grupo finito, π un conjunto de números primos de modo que algún $p \in \pi$ divide al orden de G y algún $q \in \pi'$ divide al orden de G . Entonces, si G no tiene π -subgrupos normales propios ni π' -subgrupos normales propios, G no verifica (P).

Demostración: Basta notar que bajo las hipótesis de la proposición:

$$O_{\pi'}(G) = 1, \quad O_{\pi}(G) = 1; \quad \text{pero } Z_G(O_{\pi}(G)) = G \neq 1. \quad \text{c.q.d.}$$

§ 2. La propiedad (P) en relación con cocientes, productos y subgrupos normales

En este párrafo consideraremos algunos casos particulares en que la propiedad (P) es heredada por subgrupos normales y grupos cocientes, también la extenderemos a productos directos.

Teorema 1. — Sea G un grupo finito verificando (P) y H un π' -subgrupo normal de G ; entonces el grupo cociente G/H verifica (P).

Demostración: Por ser H un π' -subgrupo normal, se tiene $H \subseteq O_{\pi'}(G)$; hagamos la demostración por pasos sucesivos:

(a) $O_{\pi'}(G)/H \triangleleft G/H$. Evidente.

(b) $O_{\pi'}(G)/H$ es el π' -subgrupo normal máximo de G/H .

En efecto:

Sea $\varphi: G \rightarrow G/H$ el homomorfismo canónico, y sea $O_{\pi'}(G/H)$ el π' -subgrupo normal máximo de G/H ; entonces $\varphi^{-1}(O_{\pi'}(G/H))$ es normal, y su orden es un π' -número, pues:

$$|\varphi^{-1}(O_{\pi'}(G/H))| = |H| \cdot |O_{\pi'}(G/H)|$$

Por tanto

$$\varphi^{-1}(O_{\pi'}(G/H)) \subseteq O_{\pi'}(G).$$

Aplicando φ , tenemos

$$O_{\pi'}(G/H) \subseteq \varphi(O_{\pi'}(G)) = O_{\pi'}(G/H)$$

es decir: $O_{\pi'}(G/H) = O_{\pi'}(G)/H$.

(c) Por los teoremas de isomorfía para grupos se tiene:

$$G/H/O_{\pi'}(G)/H \cong G/O_{\pi'}(G)$$

y por tanto el teorema queda probado. c.q.d.

Con la misma demostración de este teorema queda probado el siguiente

Teorema 1 bis. — Si G es un grupo finito, H un π' -subgrupo normal y G/H verifica (P); entonces, G verifica (P).

Corolario. — Si G es un grupo finito que verifica (P) y $O_{\pi'}(G)$ está estrictamente contenido en G , se tiene: $O_{\pi'}(G)$ está estrictamente contenido en $O_{\pi, \pi'}(G)$.

Demostración: Por el teorema 1, $G/O_{\pi'}(G)$ verifica (P); por tanto basta considerar el caso en que $O_{\pi'}(G) = 1$.

Sea, pues, G verificando (P) de modo que $O_{\pi'}(G) = 1$; si además fuese $O_{\pi, \pi'}(G) = 1$, se tendrá por la proposición 4 que G no verificará (P), contra la hipótesis. c.q.d.

Teorema 2. — Sean G_i ($i = 1, \dots, n$) n grupos finitos verificando (P). Entonces $G_1 \times \dots \times G_n$ verifica (P).

Demostración: La haremos para $n = 2$ y en varios pasos sucesivos.

(a) Dados dos grupos G_1 y G_2 y sendos subgrupos normales N_i de G_i ($i = 1, 2$), se tiene: $N_1 \times N_2 \triangleleft G_1 \times G_2$.

(b) Dado un homomorfismo suprayectivo $G \rightarrow G'$ de grupos, la imagen de un subgrupo normal es un subgrupo normal; en particular, si $N \triangleleft G_1 \times G_2$ y $pr_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$ ($i = 1, 2$) son las proyecciones canónicas, $pr_i N$ es subgrupo normal de G_i .

(c) $|N_1 \times N_2| = |N_1| |N_2|$; por tanto, $O_{\pi'}(G_1) \times O_{\pi'}(G_2)$ es un π' -subgrupo normal de $G_1 \times G_2$ y por consiguiente contenido en $N = O_{\pi'}(G_1 \times G_2)$. Ahora bien, por la observación (b) $pr_i N$ es un π' -subgrupo normal de G_i , y por tanto está contenido en $O_{\pi'}(G_i)$ ($i = 1, 2$). Por ello, $N \subseteq G_1 \times O_{\pi'}(G_2)$ y $N \subseteq O_{\pi'}(G_1) \times G_2$, lo que nos dice que $N \subseteq O_{\pi'}(G_1) \times O_{\pi'}(G_2)$. De ahí que:

$$O_{\pi'}(G_1 \times G_2) = O_{\pi'}(G_1) \times O_{\pi'}(G_2)$$

(d) $G_1 \times G_2/N_1 \times N_2 \cong G_1/N_1 \times G_2/N_2$, siendo $N_i \triangleleft G_i$ para $i = 1, 2$.

(e) El apartado (c) sigue siendo válido cambiando en todos los sitios π' por π ; por tanto, si: $P/O_{\pi'}(G_1) \times O_{\pi'}(G_2)$ es el π -subgrupo normal máximo de

$$G_1 \times G_2/O_{\pi'}(G_1) \times O_{\pi'}(G_2), \text{ se tiene:}$$

$$P/O_{\pi'}(G_1) \times O_{\pi'}(G_2) \cong P_1/O_{\pi'}(G_1) \times P_2/O_{\pi'}(G_2)$$

en que $P_i/O_{\pi'}(G_i)$ es el π -subgrupo normal máximo de $G_i/O_{\pi'}(G_i)$.

(f) Sean ahora dos grupos G_1 y G_2 , sean N_1 y N_2 dos subgrupos normales $N_i \triangleleft G_i$. Entonces

$$Z_{G_1 \times G_2}(N_1 \times N_2) = Z_{G_1}(N_1) \times Z_{G_2}(N_2);$$

en efecto: $(t_1, t_2) \in Z_{G_1 \times G_2}(N_1 \times N_2)$ sí y sólo si $(t_1, t_2)(n_1, n_2) = (n_1, n_2)(t_1, t_2)$ para todo $n_i \in N_i \Leftrightarrow t_i n_i = n_i t_i$ para todo $n_i \in N_i \Leftrightarrow t_i \in Z_{G_i}(N_i)$ para $i = 1, 2 \Leftrightarrow (t_1, t_2)$ pertenece a $Z_{G_1}(N_1) \times Z_{G_2}(N_2)$.

De (e) y (f) se sigue que:

$$Z_{G_1}(O_{\pi'}(\overline{G}_1)) \subseteq O_{\pi'}(\overline{G}_1) \Rightarrow Z_{G_1 \times G_2}(O_{\pi'}(\overline{G}_1 \times \overline{G}_2)) \subseteq O_{\pi'}(\overline{G}_1 \times \overline{G}_2). \quad \text{c.q.d.}$$

Corolario 1: Sean H_1 y H_2 dos subgrupos de un grupo finito G , uno de ellos contenido en el centralizador del otro, tales que H_1 verifica (P) y H_2 es π' -subgrupo; entonces H_1H_2 verifica (P).

Demostración: La aplicación $f : H_1 \times H_2 \rightarrow H_1H_2$ dada por $f(h_1, h_2) = h_1h_2$ es un homomorfismo suprayectivo, puesto que por hipótesis $H_1 \subseteq Z_G(H_2)$. Entonces:

$$H_1H_2 \cong H_1 \times H_2 / \text{Ker } f.$$

Además:

$$\text{Ker } f = \{(x, y) \mid xy = 1\} = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H_1 \cap H_2\}$$

y como $H_1 \cap H_2$ es abeliano, se tiene $\text{Ker } f \cong H_1 \cap H_2$, que por ser subgrupo de H_2 es π' -grupo. De ahí, por los teoremas 1 y 2, H_1H_2 verifica (P). c.q.d.

Corolario 2. — Sea $G = G_1 \times \dots \times G_n$ de modo que $G, G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$ verifican (P); entonces G_n verifica (P).

Demostración:

Caso 1.º ($n = 2$). La demostración del teorema 2 es válida para este caso con los mismos pasos sucesivos.

Caso 2.º (n cualquiera). Por el teorema 2, el grupo

$$G' = G_1 \times \dots \times G_{n-1}$$

verifica (P), y como

$$G \cong G' \times G_n$$

por el caso 1.º, G_n verifica (P). c.q.d.

El próximo caso a considerar requiere dos lemas previos, los cuales, en definitiva, nos aseguran bajo ciertas hipótesis, el siguiente hecho:

Si H es subgrupo normal de G y el índice $[G:H]$ es un π' -número, se tiene

$$O_\pi(G/O_\pi(G)) = O_\pi(H/O_\pi(H)).$$

Para ello es necesario recordar las siguientes

Definición 1. — Se llama π -subgrupo de Sylow de un grupo finito G a un π -subgrupo maximal.

Notemos que, en general no todos los π -subgrupos de Sylow son de índice π' -número; esto es cierto para los grupos resolubles, cualquiera que sea π , y para $\pi = \{p\}$, un solo número primo, cualquiera que sea G finito (teoremas de Sylow).

Definición 2. — Se llama π -subgrupo de Hall de un grupo finito G , a aquel subgrupo H cuyo índice $[G:H]$ es un π' -número.

Notemos que todo π -subgrupo de Hall es π -subgrupo de Sylow.

Pues bien; se dice que un grupo finito verifica los teoremas de Sylow generalizados para el conjunto de números primos π , si posee una sola clase de π -subgrupos de Sylow conjugados y si éstos son de Hall (cf. [9], pág. 125-133).

Denotaremos por $\text{Syl}_\pi(G)$ la clase de los π -subgrupos de Sylow de G .

Lema 1. — Sea G un grupo finito que tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow y éstos son π -subgrupos de Hall; H un π' -subgrupo normal de G . Entonces G/H tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow y éstos son π -subgrupos de Hall.

Demostración: La haremos en varios pasos

(a) Sea $P \in \text{Syl}_\pi(G)$; entonces, de los isomorfismos

$$PH/H \cong P/P \cap H \quad \text{y} \quad P/P \cap H \cong P \quad (\text{pues } P \cap H = 1)$$

se deduce: $PH/H \cong P$.

Ahora bien: $[G/H:PH/H] = [G:PH]$, que divide a $[G:P]$, y como $[G:P]$ es un π' -número por ser P π -subgrupo de Hall, se tiene que PH/H es un π -subgrupo de Hall de G/H . Luego todo π -subgrupo de G/H de la forma PH/H , con P de $Syl_{\pi}(G)$, es un π -subgrupo de Hall.

(b) Demostremos que todo π -subgrupo de Sylow de G/H es de la forma antedicha. Sea, pues, $\bar{P}/H \in Syl_{\pi}(G/H)$; entonces \bar{P} es una extensión de un π -subgrupo H por un π -subgrupo \bar{P}/H y por tanto, según el teorema de Schur-Zassenhaus (cf. por ejemplo [2], pág. 22) \bar{P} es de la forma $\bar{P} = PH$ con P π -subgrupo de G , luego está contenido en algún π -subgrupo de Sylow P_1 de G ; por tanto:

$$P_1 H/H \supseteq PH/H$$

y como $[P_1 H:H] = |P_1|$, que es un π -número, se tiene que $P_1 H/H$ es un π -subgrupo de G/H y por tanto, por la maximalidad de PH/H se tiene: $PH = P_1 H$ con P_1 perteneciente a $Syl_{\pi}(G)$, (a) y (b) demuestran que todo π -subgrupo de Sylow de G/H es π -subgrupo de Hall y de la forma PH/H , en que P es π -subgrupo de Sylow de G .

(c) Sean ahora PH/H y $P'H/H$ dos tales π -subgrupos de Sylow; sabemos que P y P' son conjugados en G ; luego existe un g de G tal que $P' = gPg^{-1}$; por tanto:

$$P'H = (gPg^{-1})(gHg^{-1}) = gPHg^{-1}$$

lo que nos dice que:

$$P'H/H = \bar{g}(PH/H)\bar{g}^{-1} \quad \text{con} \quad \bar{g} = gH$$

luego son conjugados. El lema queda probado.

Lema 2. — Sea G un grupo finito que tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow que son π -subgrupos de Hall, y sea H un subgrupo normal de G tal que G/H es un π' -grupo. Entonces:

- 1.º Todo π -subgrupo de Sylow de H es π -subgrupo de Hall de H y de G .
- 2.º Todo π -subgrupo de Sylow de G lo es de H .
- 3.º $O_{\pi}(H) = O_{\pi}(G)$.

Demostración: Como siempre, llamaremos $Syl_{\pi}(H)$ y $Syl_{\pi}(G)$ a las familias de π -subgrupos de Sylow de H y de G respectivamente

1.º Sea $\bar{P} \in Syl_{\pi}(H)$; entonces $\bar{P} \in Syl_{\pi}(G)$; de donde $\bar{P} \subseteq P \cap H \subseteq H$; pero siendo $P \cap H$ π -grupo y siendo \bar{P} maximal en H , se tiene: $\bar{P} = P \cap H$. Por otro lado $H \triangleleft G$ y P subgrupo de G nos dice que:

$$HP/H \cong P/H \cap P = P/\bar{P},$$

luego $[HP:H] = [P:\bar{P}]$ es un π -número. Pero por otro lado, $[G:H]$ es un π' -número luego $[HP:H]$ también lo es, de donde: $[P:\bar{P}] = 1$, es decir $P = \bar{P}$; luego P es un π -subgrupo de Sylow de G y por ende un π -subgrupo de Hall de G y de H . En definitiva, hemos probados que $Syl_{\pi}(H) \subseteq Syl_{\pi}(G)$.

2.º Sea ahora, $P \in Syl_{\pi}(G)$ y $P_1 \in Syl_{\pi}(H)$; como por hipótesis P y P_1 son conjugados en G , se tiene $P = tP_1 t^{-1}$ con $t \in G$. Pero $P_1 \subseteq H \triangleleft G$ implica $tP_1 t^{-1} \subseteq H$, lo que nos dice que: $P \in Syl_{\pi}(H)$ y por tanto: $Syl_{\pi}(H) = Syl_{\pi}(G)$.

3.º Sabemos que: $O_{\pi}(G) \subseteq P$ para todo $P \in Syl_{\pi}(G)$ (cf. [9], pág. 125); luego $O_{\pi}(G) \subseteq \bigcap \{P \mid P \in Syl_{\pi}(G)\}$. Ahora bien si x pertenece a esta intersección, se

tiene $x \in P$ para todo P lo que implica $txt^{-1} \in P$ para todo P y para todo t de G , luego dicha intersección es un subgrupo normal, y como es un π -subgrupo, coincide con $O_\pi(G)$. Tenemos, pues, que:

$$O_\pi(G) = \bigcap \{P \mid P \in \text{Syl}_\pi(G)\} = \bigcap \{P \mid P \in \text{Syl}_\pi(H)\} \triangleleft H. \quad (*)$$

Como, por la proposición 1, $O_\pi(H) \text{ car } H \triangleleft G$ implica $O_\pi(H) \triangleleft G$, se tiene que: $O_\pi(H) \subseteq O_\pi(G)$ lo que junto con (*) nos dice: $O_\pi(G) = O_\pi(H)$. c.q.d.

Teorema 3. — Sea G un grupo finito que verifica (P), tal que tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow que son π -subgrupos de Hall. Entonces: si H es un subgrupo normal de G tal que G/H es un π' -grupo, H verifica (P).

Demostración: La haremos en varios pasos.

(a) $O_{\pi'}(H) \triangleleft G$; en efecto, basta recordar la proposición 1, ya que: $O_{\pi'}(H) \text{ car } H$ y $H \triangleleft G$.

(b) $O_{\pi'}(H) = O_{\pi'}(G) \cap H$; en efecto:

Por (a) $O_{\pi'}(H) \triangleleft G$, luego $O_{\pi'}(H) \subseteq O_{\pi'}(G)$ y por tanto $O_{\pi'}(H) \subseteq O_{\pi'}(G) \cap H$; pero por otro lado $O_{\pi'}(G) \cap H$ es un π' -subgrupo normal de H y de ahí que: $O_{\pi'}(G) \cap H \subseteq O_{\pi'}(H)$.

(c) Recordemos que si $M \subseteq N \subseteq H \triangleleft G$ se tiene:

$$Z_G(M) \supseteq Z_G(N) \supseteq Z_H(N)$$

(d) Consideremos los grupos cociente $G/O_{\pi'}(G)$ y $H/O_{\pi'}(G) \cap H$, con H subgrupo normal de G y G/H π' -grupo. Según los teoremas de isomorfía para grupos:

$$HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G) = H/O_{\pi'}(G) \cap H = H/O_{\pi'}(H)$$

Por tanto podemos considerar $H/O_{\pi'}(H)$ como subgrupo normal de $G/O_{\pi'}(G)$ tal que su índice es un π' -número. Entonces, según los lemas 1 y 2 anteriores y según (c), se tiene:

$$Z_{G/O_{\pi'}(G)}(O_\pi(\bar{G})) \supseteq Z_{H/O_{\pi'}(G) \cap H}(O_\pi(\bar{G}))$$

de ahí que si G verifica (P), H también verifica (P), ya que:

$$O_\pi(\bar{G}) \supseteq Z_{G/O_{\pi'}(G)}(O_\pi(\bar{G})) \text{ implica}$$

$$O_\pi(\bar{H}) \supseteq Z_{H/O_{\pi'}(G) \cap H}(O_\pi(\bar{H})) = Z_{\bar{H}}(O_\pi(\bar{H})) \text{ c. q. d.}$$

§ 3. Caso en que $O_{\pi'}(G) = 1$

Consideramos en este párrafo los grupos finitos que verificando la propiedad (P) cumplen: $O_{\pi'}(G) = 1$.

Lema. — Sea H un π -subgrupo normal de G y sea $\hat{G} = G/H$ tal que $O_{\pi'}(\hat{G}) = 1$; entonces: $O_{\pi'}(G) = 1$.

Demostración: Si H es un π -subgrupo normal de G , $HO_{\pi'}(G)$ es también subgrupo normal de G y como

$$HO_{\pi'}(G)/H = O_{\pi'}(G)/H \cap O_{\pi'}(G) = O_{\pi'}(G)$$

se tiene que $HO_{\pi'}(G)/H$ es un π' -subgrupo normal de \hat{G} y por tanto es igual a 1, es decir: $O_{\pi'}(G) = 1$. c. q. d.

Teorema 4. — Sea G un grupo finito que admite un π -subgrupo normal H tal que :

1.º $\hat{G} = G/H$ verifica (P).

2.º G no tiene π' -subgrupos normales propios.

Entonces: G verifica (P).

Demostración: Por la hipótesis 2.ª sobre \hat{G} y por el lema anterior, $O_{\pi}(G) = 1$ y de ahí que

$$O_{\pi', \pi}(G) = O_{\pi}(G)$$

llamando $P = O_{\pi}(G)$, se tiene $H \triangleleft P \triangleleft G$; por tanto, $P/H \triangleleft G/H$ y es π -subgrupo normal máximo. Entonces, por la hipótesis 1.ª:

$$Z_{G/H}(P/H) \subseteq P/H.$$

Ahora bien, recordemos que si $\varphi: G \rightarrow \hat{G}$ es el homomorfismo canónico y $K \subseteq G$, se tiene:

$$\varphi(Z_G(K)) \subseteq Z_{\hat{G}}(\varphi(K))$$

por tanto, en nuestro caso:

$$\varphi(Z_G(P)) \subseteq Z_{G/H}(P/H) \subseteq P/H.$$

Por tanto, y por ser $\varphi^{-1}(P/H) = P$, se tiene:

$$Z_G(P) \subseteq \varphi^{-1} \varphi(Z_G(P)) \subseteq P \quad \text{c. q. d.}$$

Teorema 5. — Sea G un grupo finito que verifica (P) y tal que $O_{\pi}(G) = 1$; sea H un subgrupo normal de G que contiene a $O_{\pi}(G)$. Entonces, H verifica (P).

Demostración: Por la proposición 1, $O_{\pi}(H)$ es subgrupo normal de G y por ser π' -subgrupo se tiene que $O_{\pi'}(H) = 1$. Por otro lado, $O_{\pi}(G) \triangleleft H$ y $O_{\pi}(H) \triangleleft G$, por la misma proposición. De ahí que $O_{\pi}(H) = O_{\pi}(G)$, y se tiene:

$$Z_G(O_{\pi}(G)) \subseteq O_{\pi}(G)$$

lo que implica:

$$Z_H(O_{\pi}(H)) \subseteq O_{\pi}(H) \quad \text{c. q. d.}$$

Combinando este teorema con los teoremas 1 y 1 bis del párrafo 2, se tiene:

Corolario. — Si G verifica (P) y H es subgrupo normal de G tal que $O_{\pi', \pi}(G) \subseteq H$; entonces H verifica (P).

Demostración: Se tiene que

$$O_{\pi'}(G) \triangleleft O_{\pi', \pi}(G) \triangleleft H \triangleleft G.$$

Si G verifica (P), por el teorema 1, $G/O_{\pi'}(G)$ verifica (P) y no tiene π' -subgrupos normales propios, de ahí que por el teorema 5 anterior, $H/O_{\pi'}(G)$ verifica (P) y por el teorema 1 bis, H verifica (P). c. q. d.

(Notemos que en este corolario $O_{\pi}(G)$ es cualquiera.)

Proposición 5. — Sea G un grupo finito que verifica (P) y tal que $O_{\pi}(G) = 1$. Entonces, si H es un subgrupo cualquiera de G conteniendo a $O_{\pi}(G)$, se tiene $O_{\pi}(H) = 1$.

Demostración: Sea N un π' -subgrupo normal de H ; en estas condiciones $[N, O_{\pi}(G)]$ es subgrupo normal de N y de $O_{\pi}(G)$ (considerados en H) y por tanto:

$$[N, O_{\pi}(G)] \subseteq N \cap O_{\pi}(G) = 1;$$

de ahí que $N \subseteq Z_G(O_{\pi}(G)) \subseteq O_{\pi}(G)$, luego N es π -grupo y por ello $N = 1$. c. q. d.

Hasta ahora hemos estudiado la propiedad (P) para un conjunto π de números primos fijo. En el siguiente resultado de este párrafo interviene esta propiedad referida a dos conjuntos π y σ , por lo cual se distinguirán con las notaciones (P_π) y (P_σ) .

Proposición 6. — Sea G un grupo finito, $\pi \subseteq \sigma$ de modo que G verifica (P_π) y $O_\pi(G) = 1$; entonces G verifica (P_σ) y $O_{\sigma'}(G) = 1$.

Demostración: $O_{\sigma'}(G)$ es un π' -subgrupo normal de G , luego $O_{\sigma'}(G) \subseteq O_\pi(G)$, lo que nos dice que $O_{\sigma'}(G) = 1$.

Por otro lado: $O_\pi(G) \subseteq O_\sigma(G)$, y de ahí que:

$$Z_G(O_\sigma(G)) \subseteq Z_G(O_\pi(G))$$

mas como G verifica (P_π) se tiene

$$Z_G(O_\sigma(G)) \subseteq O_\sigma(G)$$

que es la propiedad (P_σ) c. q. d.

CAPITULO III

El propósito de este capítulo es el relacionar la propiedad (P) estudiada en el capítulo anterior con otras π -propiedades.

§ 1. Relación con la π -separabilidad

Teorema 1. — Un grupo finito es π -separable si y solo si todo grupo cociente del mismo verifica (P).

Demostración:

(a) Sea G π -separable entonces por el teorema 1 del capítulo I, todo grupo cociente del mismo es a su vez π -separable y por tanto según el teorema 2 del capítulo I, dicho grupo cociente verifica (P).

(b) Recíprocamente, sea G un grupo finito tal que todo grupo cociente del mismo verifica (P). Haremos la demostración por inducción sobre el orden de G y distinguiremos dos casos:

Caso 1.º: G es π -grupo o π' -grupo; entonces G es π -separable trivialmente.

Caso 2.º: G no es ni π -grupo ni π' -grupo; entonces, en virtud de la proposición 4 del capítulo II, G admite un π -subgrupo normal o un π' -subgrupo normal no trivial; sea G_1 este subgrupo. Evidentemente:

$$1 \subset G_1 \subset G.$$

Ahora bien, $|G/G_1| < |G|$ y por otro lado, todo subgrupo normal de G/G_1 es de la forma H/G_1 con H subgrupo normal de G ; por tanto

$$G/G_1/H/G_1 = G/H \text{ verifica (P).}$$

Por hipótesis inductiva G/G_1 es π -separable y por la definición de grupo π -separable lo es G . c. q. d.

Afinaremos este teorema en el siguiente; pero para ello necesitaremos los lemas que siguen.

Lema 1. — Si $H \subseteq K$ son subgrupos de G tales que $H \text{ car } G$ y $K/H \text{ car } G/H$; entonces $K \text{ car } G$.

La demostración es inmediata (cf. [2], pág. 16).

Lema 2. — Sea G un grupo finito que no es ni π -grupo ni π' -grupo y tal que no admite ni π -subgrupos característicos propios ni π' -subgrupos característicos propios; entonces G no verifica (P).

Demostración: Basta ver que entonces $O_\pi(G) = 1$ y que $O_\pi(\bar{G}) = O_\pi(G) = 1$. c.q.d.

Teorema 2. — Un grupo finito G es π -separable si y sólo si para todo subgrupo característico H de G , G/H verifica (P).

Demostración: Si G es π -separable y $H \text{ car } G$, se tiene $H \triangleleft G$ y G/H es π -separable, luego verifica (P).

Recíprocamente: sea G tal que G/H verifica (P) para todo $H \text{ car } G$. Entonces, si G es un π -grupo o un π' -grupo el teorema es trivial; supongamos que G no lo es y haremos la demostración por inducción sobre el orden de G . En estas condiciones, por el lema 2, existe un subgrupo característico propio G_1 de G que es π -grupo o π' -grupo:

$$1 \subset G_1 \subset G.$$

Además $|G/G_1| < |G|$, y si $K/G_1 \text{ car } G/G_1$, por el lema 1 se tiene: $K \text{ car } G$. Por otra parte,

$$G/G_1/K/G_1 = G/K$$

el cual verifica (P). Por tanto, por la hipótesis de inducción, G/G_1 es π -separable y de ahí que G lo es. c. q. d.

§ 2. Relación con la π -constricción

Lema. — Sea G un grupo finito que tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow y H un subgrupo normal de G . Entonces:

- 1.º $P \in \text{Syl}_\pi(G)$ implica $P \cap H \in \text{Syl}_\pi(H)$.
- 2.º Todos los π -subgrupos de Sylow de H tienen el mismo número de elementos.
- 3.º $O_\pi(H) \subseteq Q$ para todo $Q \in \text{Syl}_\pi(H)$.

Demostración:

1.º Sea $P \in \text{Syl}_\pi(G)$, entonces $Q = P \cap H$ es un π -subgrupo de H y por tanto está contenido en algún π -subgrupo de Sylow Q_1 de H ; a su vez, este Q_1 está contenido en un π -subgrupo de Sylow P_1 de G .

$$Q_1 \subseteq P_1 \in \text{Syl}_\pi(G)$$

De donde $Q_1 \subseteq P_1 \cap H$. Como $Q_1 \in \text{Syl}_\pi(G)$ y $P_1 \cap H$ es un π -subgrupo de H , se tiene: $Q_1 = P_1 \cap H$. Pero por hipótesis existe $t \in G$ tal que $P_1 = t P t^{-1}$, luego:

$$Q_1 = t P t^{-1} \cap t H t^{-1} = t (P \cap H) t^{-1} = t Q t^{-1}$$

y como $Q \subseteq Q_1$, se tiene: $Q = Q_1$.

2.º Si Q y Q' son π -subgrupos de Sylow de H , están contenidos en sendos π -subgrupos de Sylow de G ; sean estos P y P' . Se tiene:

$$Q = P \cap H \quad \text{y} \quad Q' = P' \cap H.$$

Entonces existe t de G tal que $P' = t P t^{-1}$; por lo que $t Q t^{-1} = Q$, luego $|Q| = |Q'|$.
 3.º $O_\pi(H)$ es un π -subgrupo; por tanto existe un Q de $Syl_\pi(H)$ tal que

$$O_\pi(H) \subseteq Q.$$

Ahora bien, por lo demostrado en el apartado anterior, dos π -subgrupos de Sylow cualesquiera Q y Q' de H son homólogos en un automorfismo de H . Como $O_\pi(H)$ car H , se tiene

$$O_\pi(H) \subseteq Q \text{ para todo } Q \in Syl_\pi(H). \quad \text{c. q. d.}$$

Teorema 3. — Sea G un grupo finito tal que

1.º Tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow.

2.º Verifica (P).

Entonces, si P es un π -subgrupo de Sylow de G y $Q = P \cap O_{\pi',\pi}(G)$, se tiene:

$$(3.1) \quad Z_G(Q) \subseteq O_{\pi',\pi}(G).$$

Demostración: En efecto, por el lema anterior Q pertenece a $Syl_\pi(O_{\pi',\pi}(G))$. Notemos que si $\varphi: G \rightarrow \bar{G}$ es el homomorfismo canónico con $\bar{G} = G/O_{\pi',\pi}(G)$, se tiene por definición:

$$O_{\pi',\pi}(G) = \varphi^{-1}(O_\pi(\bar{G})).$$

Por otro lado, $O_{\pi',\pi}(G)$ es extensión de $O_{\pi'}(G)$ que es un π' -grupo, por $O_\pi(\bar{G})$ que es un π -grupo, de donde, por el teorema de Schur-Zassenhaus, $O_{\pi',\pi}(G)$ posee un π -subgrupo de Hall; éste es de Sylow y como por el lema anterior, apartado 2.º, todos los π -subgrupos de Sylow tienen el mismo número de elementos, Q es un π -subgrupo de Hall; por consiguiente:

$$\varphi(Q) = O_\pi(\bar{G}).$$

Ahora bien, si $\varphi: G \rightarrow G'$ es un homomorfismo, y S es una parte no vacía de G , se tiene:

$$\varphi(Z_G(S)) \subseteq Z_{G'}(\varphi(S)).$$

Por tanto

$$\varphi(Z_G(Q)) \subseteq Z_{G'}(\varphi(Q)) = Z_{G'}(O_\pi(\bar{G})) \subseteq O_\pi(\bar{G}).$$

De donde

$$Z_G(Q) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(Z_G(Q))) \subseteq \varphi^{-1}(O_\pi(\bar{G})) = O_{\pi',\pi}(\bar{G}). \quad \text{c. q. d.}$$

Nota: Este teorema generaliza el teorema 3.3 de [2], pág. 228; dado allí para grupos p -resolubles.

Corolario: $Z_G(P) \subseteq O_{\pi',\pi}(G)$ para todo π -subgrupo P de Sylow de G , siempre que G verifique (P) y posea una sola clase de π -subgrupos de Sylow.

Demostración: Inmediata a partir del teorema anterior, sin más que tener en cuenta que

$$Z_G(P) \subseteq Z_G(Q).$$

En [2], pág. 268, se da la siguiente

Definición 1: Un grupo finito G se llama p -constricto si cuando Q es un p -subgrupo de Sylow de $O_{p',p}(G)$, se tiene:

$$Z_G(Q) \subseteq O_{p',p}(G).$$

Pues bien, queremos generalizar este resultado a un conjunto cualquiera π de números primos.

Para justificar nuestra nueva definición, debemos notar que $O_{\pi',\pi}(G)$ verifica la siguiente π -propiedad:

(D $_{\pi}$) " $O_{\pi',\pi}(G)$ contiene al menos un π -subgrupo de Hall; todos los π -subgrupos de Hall son conjugados y cada π -subgrupo está contenido en uno de Hall."

(Notación debida a P. Hall.)

Dicha propiedad la verifica $O_{\pi',\pi}(G)$ por ser π -separable. Véase [2] teoremas 3.5 y 3.6, páginas 229 y 230.

Definición 2: Se dice que un grupo finito G es π -constricto si existe un π -subgrupo Q de Sylow de $O_{\pi',\pi}(G)$ tal que $Z_G(Q) \subseteq O_{\pi',\pi}(G)$.

Notas:

1.^a Es importante notar que esta definición es consistente debido a (D $_{\pi}$), pues si Q' es otro π -subgrupo de Sylow cualquiera, se tiene: $Q' = t Q t^{-1}$ con $t \in O_{\pi',\pi}(G)$, y por lo tanto $Z_G(Q) = t^{-1} Z_G(Q') t$, de donde:

$$Z_G(Q') \subseteq O_{\pi',\pi}(G).$$

2.^a Si $O_{\pi'}(G) = 1$ los conceptos de grupo π -constricto y de grupo verificando la propiedad (P) coinciden.

3.^a Como consecuencia de la proposición 6 del capítulo II, se tiene: si un grupo es p -resoluble o p -constricto con $O_{p'}(G) = 1$, se sigue que G es π -constricto para todo conjunto de números primos π que contenga a p .

En [2], pág. 269, teorema 1.1., se demuestra en el apartado (ii) que todo grupo p -constricto verifica la propiedad (P), así que, en vista del teorema 3, y recordando los teoremas de Sylow, la propiedad (P) y la p -constricción son equivalentes ($\pi = \{p\}$).

Nos proponemos realizar una pequeña generalización de esta propiedad.

Lema: (Argumento de Frattini). Sea $H \triangleleft G$ tal que H tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow; entonces, si $P \in \text{Syl}_{\pi}(H)$, se sigue:

$$G = N_G(P) H$$

Demostración: Sea $x \in G$, entonces:

$$x P x^{-1} \subseteq x H x^{-1} = H.$$

Por la hipótesis hecha sobre los π -subgrupos de Sylow, $x P x^{-1}$ también es π -subgrupo de Sylow y es conjugado en H con P . Existe, pues, un $y \in H$ tal que

$$x P x^{-1} = y P y^{-1}$$

así pues: $(y^{-1} x) P (y^{-1} x)^{-1} = P$ lo que implica $y^{-1} x \in N_G(P)$, pero $x = y (y^{-1} x)$, luego: $x \in H \cdot N_G(P)$. c. q. d.

(cf. [2], pág. 12, teor. 3.7).

Teorema 4: Si G es un grupo π -constricto, G verifica (P).

Demostración: Sea Q un π -subgrupo de Sylow de $O_{\pi',\pi}(G)$ y sea $N = N_G(Q)$. Entonces,

$$G = O_{\pi',\pi}(G) \cdot N$$

por el lema anterior; pero por el lema de Schur-Zassenhaus, $O_{\pi'}(G)$ admite π -complemento K ; respecto de $O_{\pi',\pi}(G)$, pero todos los π -complementos son π -subgrupos de Hall y son conjugados; entonces:

$$O_{\pi',\pi}(G) = O_{\pi'}(G) K,$$

de modo que existe $t \in O_{\pi', \pi}(G)$ tal que $K = tQ t^{-1}$, y de ahí que:

$$O_{\pi', \pi}(G) = O_{\pi'}(G) Q$$

Por tanto

$$G = O_{\pi', \pi}(G) N = O_{\pi'}(G) QN = O_{\pi'}(G) N,$$

y por consiguiente, N se aplica sobre $\bar{G} = G/O_{\pi'}(G)$, en el homomorfismo canónico $\varphi : G \rightarrow \bar{G}$. Por ello existe un subgrupo C de N cuya imagen es $Z_{\bar{G}}(O_{\pi'}(G))$. Por otro lado, Q se aplica sobre $O_{\pi'}(G)$ y $Q \triangleleft N$; se sigue que

$$[C, Q] \subseteq [N, Q] \subseteq Q \tag{3.2}$$

$$\varphi [C, Q] = [\varphi C, \varphi Q] = [Z_{\bar{G}}(O_{\pi'}(\bar{G})), O_{\pi'}(\bar{G})] = 1$$

luego

$$[C, Q] = \subseteq O_{\pi'}(G) \tag{3.3}$$

De (3.2) y (3.3), se deduce:

$$[C, Q] = 1,$$

luego: $C \subseteq Z_{\bar{G}}(Q) \subseteq O_{\pi', \pi}(G)$, ya que G es π -constricto. Por tanto, aplicando φ a la inclusión: $C \subseteq O_{\pi', \pi}(G)$, se tiene:

$$Z_{\bar{G}}(O_{\pi'}(\bar{G})) \subseteq O_{\pi'}(\bar{G})$$

que es la propiedad (P). c.q.d.

(La demostración anterior es, en líneas generales, la dada en [2] para el teorema 1.1 (ii), pág. 269).

Los teoremas 3 y 4 nos demuestran que para grupos que tienen una sola clase de π -subgrupos de Sylow, las propiedades (P) y π -constricción son equivalentes.

En particular, si G es un grupo finito π -separable, es simultáneamente π -constricto y π' -constricto, ya que por los teoremas 3,5 y 3,6 de [2] (pág. 229 y 230) cumple (D_{π}) y $(D_{\pi'})$ y la propiedad (P) para los conjuntos π y π' .

Otra observación acerca de la π -constricción es la siguiente

Proposición 1. — Si G es un grupo π -constricto tal que $O_{\pi'}(G)$ está estrictamente contenido en G , entonces $O_{\pi', \pi}(G)$ está estrictamente contenido en $O_{\pi', \pi}(G)$. En particular, si G es un grupo finito π -constricto que no es π -grupo, y tal que $O_{\pi'}(G) \neq G$, entonces G no es simple.

Demostración: Es directa a partir de la definición de grupo π -constricto. c.q.d.

Como final de este párrafo recopilamos las cuatro π -propiedades aquí consideradas.

- (1) π -separabilidad.
- (2) Propiedad (P).
- (3) π -constricción.
- (4) Propiedad (D_{π}) .

y las relaciones que existen entre ellas

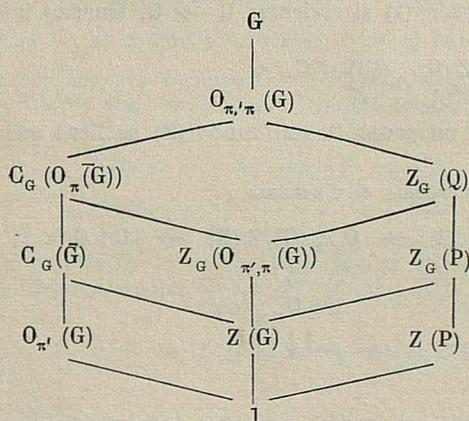
- (1) \Rightarrow (2) (ver [2] pág. 228, teor. 3.2).
- (1) \Rightarrow (4) (ver [2] pág. 229 y 230 teor. 3.5 y 3.6)
- (3) \Rightarrow (2) (teorema 4)
- (2) y (4) \Rightarrow (3) (teorema 3).

§ 3. Resumen y últimas consecuencias

En el capítulo II se ha estudiado una clase de grupos finitos definida por una cierta π -propiedad, que hemos llamado propiedad (P). En el capítulo III se está estudiando esta propiedad comparándola con otras π -propiedades, en especial con la π -constricción.

Durante el estudio realizado han aparecido una serie de subgrupos de G, demostrándose diversas inclusiones entre ellos; como resumen de lo hasta aquí expuesto vamos a describir un pequeño diagrama de los subgrupos de G que nos han aparecido en la teoría de los grupos verificando la propiedad (P). Supondremos además que en G se tiene una sola clase de π -subgrupos de Sylow.

Sea $P \in \text{Syl}_\pi(G)$ y $Q = P \cap O_{\pi',\pi}(G) (\in \text{Syl}_\pi(O_{\pi',\pi}(G)))$; entonces se tiene:



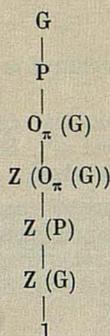
Demostremos a continuación los diversos contenidos.

- (1) $C_G(O_{\pi'}(\bar{G})) \subseteq O_{\pi',\pi}(G)$. Ver proposición 2, cap. II.
- (2) $O_{\pi'}(G) \subseteq C_G(\bar{G})$. Sea $n \in O_{\pi'}(G)$; entonces $p^n O_{\pi'}(G) = npn^{-1} O_{\pi'}(G) = npO_{\pi'}(G) = pO_{\pi'}(G)$ para todo $p \in P$, luego $n \in C_G(\bar{G})$.
- (3) $Z(G) \subseteq C_G(\bar{G})$. Sea $z \in Z(G)$; entonces $p^z = p$ para todo $p \in G$, y por tanto $z \in C_G(\bar{G})$ según la definición de este subgrupo.
- (4) $Z_G(O_{\pi',\pi}(G)) \subseteq C_G(O_{\pi'}(G))$. Ver corolario a la proposición 2, cap. II.
- (5) $Z_G(Q) \subseteq O_{\pi',\pi}(G)$. Definición de π -constricción, ver teorema 3.

Los restantes son triviales.

Observemos que salvo la inclusión (5) los demás permanecen válidos si suprimimos la hipótesis adicional de que existe una sola clase de π -subgrupos de Sylow de G.

Notas: 1.^a En el caso $O_{\pi'}(G) = 1$, diversos contenidos pasan a ser igualdades teniendo entonces:



2.^a Al pasar la inclusión (1) al cociente: $G \rightarrow \bar{G}$, tenemos la definición de la propiedad (P).

$$3.^a \quad Z_G(O_{\pi',\pi}(G)) = Z(O_{\pi',\pi}(G)) \triangleleft G.$$

$$4.^a \quad Z(O_{\pi',\pi}(G)) \supseteq Z(G).$$

Proposición 2. — En un grupo G verificando (P) se tiene que $\text{Int } G$ “envuelve” a $\text{Int } O_{\pi',\pi}(G)$.

Demostración: Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \rightarrow & O_{\pi',\pi}(G)/Z(G) & \rightarrow & \text{Int } G \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \text{Int } O_{\pi',\pi}(G) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 1 & &
 \end{array} \tag{3.4}$$

en que la fila y la columna son exactas en virtud de la serie normal

$$1 \triangleleft Z(G) \triangleleft Z(O_{\pi',\pi}(G)) \triangleleft O_{\pi',\pi}(G) \text{ car } G. \quad \text{c.q.d.}$$

Corolario. — Si G verifica (P), son equivalentes:

$$(a) \quad G = O_{\pi',\pi}(G).$$

$$(b) \quad \text{Int } G \cong \text{Int } O_{\pi',\pi}(G).$$

Demostración:

$$(a) \Rightarrow (b) \text{ Trivial.}$$

(b) \Rightarrow (a) En efecto: fijándonos en el diagrama (3.4) $O_{\pi',\pi}(G)/Z(G)$ es isomorfo a $\text{Int } G$ y por tanto $O_{\pi',\pi}(G) = G$. c.q.d.

A P E N D I C E

Tratamos de generalizar en lo posible el planteo de la propiedad (P) y el estudio hecho en el capítulo II al caso de grupos finitos con multioperadores.

Adoptamos la nomenclatura y notación clásicas que se puede encontrar en [5] o en [7], cap. III.

Sea G un Ω -grupo finito, es decir un grupo finito dotado de un sistema Ω de multioperadores.

Lema A1. — Sea π un conjunto de números primos cualquiera; entonces un Ω -grupo finito G admite un único ideal maximal cuyo orden es un π -número.

Demostración: Sean H_1 y H_2 ideales de G cuyo orden es un π -número. Como el ideal engendrado por estos dos ideales coincide con el subgrupo de G engendrado por los mismos (cf. [7], III-2-4); se tiene que H_1+H_2 es un ideal, y como ya es sabido su orden es un π -número. c.q.d.

Tiene, por tanto, sentido hablar del π -ideal máximo de G ; al que anotaremos $\Omega_\pi(G)$.

Lema A2. — $\Omega_\pi(G)$ es invariante por todo Ω -automorfismo y por todo automorfismo interno.

Demostración: $\Omega_\pi(G)$ es subgrupo normal de G , evidentemente. Además, por el teorema 3B de [5], $\Omega_\pi(G)$ es un ideal de G si θ es un Ω -automorfismo; como θ es biyectiva $|\theta(\Omega_\pi(G))| = |\Omega_\pi(G)|$ y por tanto:

$$\theta(\Omega_\pi(G)) = \Omega_\pi(G). \quad \text{c.q.d.}$$

Aplicando el lema A1 al conjunto aritmético π' y al Ω -grupo G , y después al conjunto aritmético π y al Ω -grupo cociente $\bar{G} = G/\Omega_\pi(G)$, tiene sentido considerar la clase de los Ω -grupos finitos que verifican la siguiente propiedad:

$$\boxed{(\Omega P) \quad \Omega_\pi(\bar{G}) \supseteq Z_{\bar{G}}(\Omega_\pi(\bar{G}))}$$

Que generaliza la propiedad (P) estudiada en el capítulo II.

Nótese que el centralizador lo es en el sentido de los grupos sin multioperadores. Con las mismas demostraciones y significado que en la proposición 2 del capítulo II se tiene

Proposición A1. — Si G es un Ω -grupo finito, entonces las dos propiedades siguientes son equivalentes:

(a) G verifica (ΩP) .

(b) $C_G(P/N) \subseteq P$.

Corolario. — $Z_G(P) \subseteq P$.

Asimismo son generalizables los siguientes resultados:

- 1) Proposición 4 del capítulo II.
- 3) Teorema 2 y el corolario 2 al mismo del capítulo II. (Usar los teoremas 3A y 3B de [5]).
- 4) Proposición 6 del capítulo II.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ENGUEHARD, M.: "Groupe de Fitting au-dessus de π et groupe de Frattini au-dessus de π dans un groupe fini". C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B. 268, 789-791, 1969.
- [2] GORENSTEIN, D.: "Finite Groups". Harper-Row, 1968.
- [3] HALL, M.: "The Theory of Groups". Macmillan, 1959.
- [4] HALL, P., HIGMAN, G.: "On p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem". Proc. London. Math. Soc. VI, 1-42, 1956.
- [5] HIGGINS, P. J.: "Groups with multiple operators". Proc. London, Math. Soc. VI, 366-416, 1956.
- [6] HUPPERT, B.: "Endliche Gruppen". Springer Verlag, 1968.
- [7] KUROSH, A. C.: "Lectures in General Algebra", Pergamon Press, 1965 (English translation).
- [8] REYNOLDS, W. F.: "Sections, Isometries and Generalized Group Characters". J. Algebra, 7, 394-405, 1967.
- [9] SCHENKMAN, E.: "Group Theory". Van Nostrand, 1965.

$$K' = h + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial H'} = h + \epsilon \left\{ -\frac{\mu^2 R^2 H'}{2 U'^5} \left[-\frac{U' p_r'}{\mu} \cos 2u + \left(\frac{2 U'^2}{\mu r} - \frac{1}{2} \right) \sin 2u \right] \right\} \quad (21-3)$$

$$p_r = p_r' + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial r} = p_r' - \epsilon \frac{2 \mu R^2 B_2}{3 U'^2 r^2} \sin 2u$$

$$U = U' + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial u} = U' + \epsilon \frac{2 \mu^2 R^2 B_2}{3 U'^3} \left\{ \frac{U' p_r'}{\mu} \sin 2u + \left(\frac{2 U'^2}{\mu r} - \frac{1}{2} \right) \cos 2u \right\}$$

$$H = H'$$

Después de efectuar la transformación canónica de función generatriz (21-1), el hamiltoniano en las nuevas variables puede ser escrito

$$F^* = F_0^* + \epsilon F_1^* + \epsilon^2 F_{2s}^* + \epsilon^2 F_{2p}^* \quad (21-4)$$

donde F_{2s}^* y F_{2p}^* representan, respectivamente, la parte independiente de u y la parte periódica, con respecto a u , de los términos de segundo orden del hamiltoniano. Con este convenio, resulta

$$F_0^* = \frac{1}{2} \left(p_r'^2 + \frac{U'^2}{r'^2} \right) - \frac{\mu}{r'}$$

$$F_1^* = -\frac{\mu R^2 B_0}{r'^3} = -\frac{a_0}{r'^3}$$

$$F_{2s}^* = \frac{a_1}{r'^2} + \frac{a_2}{r'^3} + \frac{a_3}{r'^4} + a_4 \frac{p_r'^2}{r'^2} + \Delta$$

siendo

$$a_1 = \frac{\mu^4 R^4 B_2^2}{36 U'^6} \quad a_2 = \frac{\mu^3 R^4 B_2}{U'^4} \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \frac{H'^2}{U'^2} \right)$$

$$a_3 = \frac{\mu^2 R^4 B_2}{U'^2} \left(\frac{17}{48} - \frac{65}{48} \frac{H'^2}{U'^2} \right) \quad a_4 = \frac{\mu^2 R^4 B_2^2}{9 U'^4} \quad (21-6)$$

$$\Delta = \sum_{n=3}^{\infty} \langle R_n \rangle_u \quad (21-7)$$

22. Contribución al segundo orden de un armónico cualquiera

Para estudiar con detalle el término Δ , que representa la parte secular de los armónicos de segundo orden con respecto a u , comencemos viendo la contribución de un R_n cualquiera. Dos casos pueden distinguirse:

a) n par. Entonces

$$P_n(\sin \beta) = \sum_{k=0}^{n/2} \alpha_{n,k} \sin^{n-2k} \beta \quad \alpha_{n,k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!}$$

además, para m par, tendremos

$$\operatorname{sen}^m x = \sum_{k=0}^{m/2} c_{m,2k} \cos 2kx$$

donde

$$c_{m,0} = \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad c_{m,2k} = 2(-1)^k \frac{m!(m-2k-1)!!}{(m-2k)!(m+2k)!!}$$

Por sustitución en la expresión anterior, será

$$P_n(\operatorname{sen} \beta) = \sum_{k=0}^{n/2} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2k)} \alpha_{n,k} c_{n-2k,i} \operatorname{sen}^{n-2k} I \cos 2iu + \sum_{k=0}^{n/2} \alpha_{n,k} c_{n-2k,0} \operatorname{sen}^{n-2k} I$$

y por tanto, para n par, resulta finalmente

$$\langle R_n \rangle = J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n \frac{\mu}{r} \langle P_n(\operatorname{sen} \beta) \rangle_u = J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n \frac{\mu}{r} \left\{ \sum_{k=0}^{n/2} \alpha_{n,k} c_{n-2k,0} \operatorname{sen}^{n-2k} I \right\}$$

b) n impar. En tal caso

$$P_n(\operatorname{sen} \beta) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \alpha_{n,k} \operatorname{sen}^{n-2k} \beta$$

y con m impar, se obtiene

$$\operatorname{sen}^m x = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} b_{m,2k+1} \operatorname{sen} (2k+1)x$$

siendo

$$b_{m,2k+1} = \frac{(-1)^k m!}{2^{m-1} \left(\frac{m+2k+1}{2} \right)! \left(\frac{m-2k-1}{2} \right)!}$$

y finalmente

$$P_n(\operatorname{sen} \beta) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2k-1)} \alpha_{n,k} b_{n-2k,2i+1} \operatorname{sen}^{n-2k} I \operatorname{sen} (2i+1)u$$

Evidentemente, se tiene

$$\langle P_n(\operatorname{sen} \beta) \rangle_u = 0$$

lo que implica, para n impar

$$\langle R_n \rangle = 0$$

resultado que nos indica que los armónicos zonales impares dan una contribución nula al término Δ .

En resumen, la contribución de los armónicos zonales impares es nula y la de los pares está dada por la suma

$$\Delta = \sum_{n=4}^{\infty} \langle R_n \rangle_u \quad (n \text{ par})$$

donde

$$\langle R_n \rangle_u = \frac{J_n}{\epsilon^2} \left(\frac{R}{r} \right)^n \frac{\mu}{r} \left\{ \sum_{k=0}^{n/2} \alpha_{n,k} c_{n-2k,0} \operatorname{sen}^{n-2k} I \right\}$$

23 Estudio del sistema monodimensional resultante

Después de la eliminación de la variable u , nos encontramos con un sistema canónico de función hamiltoniana (21-4). Si en este sistema se prescinde de F_{2p}^* , es decir de las fluctuaciones periódicas de segundo orden con valor medio nulo, tenemos un sistema cuya función de Hamilton depende de las variables (r', p_r', U', H') . Como u', h' , son coordenadas cíclicas, sus momentos conjugados U', H' , también lo son, y por consiguiente, el problema se centra en la resolución de un sistema de un grado de libertad, dado por las ecuaciones

$$\frac{dp_r'}{dt} = - \frac{\partial F^*}{\partial r'} \quad \frac{dr'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial p_r'} \tag{23-1}$$

y en el cálculo de dos cuadraturas, las necesarias para obtener u', h' , desde

$$\frac{du'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial U'} \quad \frac{dh'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial H'} \tag{23-2}$$

Seguidamente, se intentará la resolución de (23-1), prescindiendo por comodidad de notación, de colocar las primeras en todas las variables.

Usualmente, para obtener la solución de un sistema canónico conservativo de un grado de libertad, es utilizada la integral de la energía, siendo necesaria una sola cuadratura para llegar a la solución del problema. No obstante, en nuestro caso, la aparición de pequeños parámetros entorpece el procedimiento habitual y hemos preferido reducir previamente (23-1) a una ecuación de segundo orden.

Las ecuaciones (23-1) en forma explícita, son

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \left(1 + \epsilon^2 \frac{2 a_4}{r^2} \right) p_r \\ \frac{dp_r}{dt} &= \frac{U^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} - \epsilon \frac{3a_0}{r^4} + \epsilon^2 \left[\frac{2a_1}{r^3} + \frac{3a_2}{r^4} + \frac{4a_3}{r^5} + 2 a_4 \frac{p_r^2}{r^3} - \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

Derivando la primera y sustituyendo en ella la segunda, tendremos la ecuación de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{U^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} - \epsilon \frac{3a_0}{r^4} + \epsilon^2 \left\{ \frac{2a_1}{r^3} + \frac{3a_2}{r^4} + \frac{4a_3}{r^5} + 2a_4 \frac{p_r^2}{r^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2a_4 U^2}{r^5} - \frac{2a_4 \mu}{r^4} - \frac{4 a_4}{r^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right\} \end{aligned}$$

Por otra parte, de la primera ecuación se deduce

$$p_r = \frac{dr}{dt} \frac{1}{1 + \epsilon^2 \frac{2a_4}{r^2}} = \left(1 - \epsilon^2 \frac{2 a_4}{r^2} \right) \frac{dr}{dt}$$

con error menor que $\epsilon^4 \frac{4 a_4^2}{r^4}$.

Entonces, sustituyendo esta expresión de p_r en la ecuación de segundo orden relativa al radio vector, resulta

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{U^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} - \epsilon \frac{3a_0}{r^4} + \epsilon^2 \left\{ \frac{2a_1}{r^3} + \frac{3a_2 - 2a_4 \mu}{r^4} + \frac{4a_3 + 2a_4 U^2}{r^5} - \frac{2a_4}{r^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right\}$$

Es conveniente poner esta ecuación en forma apropiada para aplicar el método de Krylov-Bogoliubov. Para ello, introduciremos las variables z , φ , definidas por las relaciones

$$z = \frac{1}{r} \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = U \quad (U \neq 0) \quad (23-3)$$

Para $\epsilon = 0$, φ representa, salvo una constante, la anomalía verdadera en el problema de dos cuerpos y su derivada es la velocidad angular del radio vector alrededor del momento angular. Si $\epsilon \neq 0$ no tiene un significado geométrico tan sencillo, pero su derivada expresa aun la velocidad angular de rotación de r en el plano orbital instantáneo. En esencia, se trata de introducir una variable regularizadora local, a lo largo de toda solución de las ecuaciones del movimiento, por la relación

$$\varphi - \varphi_0 = \int_t^t \frac{U}{[r(t)]^2} dt$$

donde la constante φ_0 puede elegirse arbitrariamente, debido a que el sistema es autónomo.

Por derivación puede obtenerse fácilmente

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{U^2}{r^2} \frac{d^2 z}{d\varphi^2} \quad \frac{dr}{dt} = -U \frac{dz}{d\varphi}$$

y la ecuación diferencial relativa a la variable z llega a ser

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = \frac{\mu}{U^2} + \epsilon \frac{3a_0}{U^2} z^2 - \epsilon^2 \left\{ \frac{2a_1}{U^2} z^2 + \frac{3a_2 - 2a_4 \mu}{U^2} z^2 + \right. \\ \left. + \frac{4a_3 + 2a_4 U^2}{U^2} z^3 - 2a_4 z \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{z^2 U^2} \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right\} \end{aligned}$$

o bien

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = \frac{1}{p} + \epsilon b_0 z^2 - \epsilon^2 \left\{ b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 - 2a_4 z \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{z^2 U^2} \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right\} \quad (23-4)$$

cuando se introducen las notaciones

$$p = \frac{U^2}{\mu}, \quad b_0 = \frac{3a_0}{U^2}, \quad b_1 = \frac{2a_1}{U^2}, \quad b_2 = \frac{3a_2 - 2a_4 \mu}{U^2}, \quad b_3 = \frac{4a_3 + 2a_4 U^2}{U^2} \quad (23-5)$$

El problema, pues, ha quedado reducido al estudio de la ecuación diferencial de segundo orden (23-4), al que nos referiremos en los párrafos siguientes.

24. Método de Krylov-Bogoliubov

Este método, cuya detallada exposición figura en la obra de Bogoliubov-Mitroposky (1961), permite desarrollar aproximaciones asintóticas para oscilaciones definidas por una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z = \epsilon f \left(z, \frac{dz}{dt}; \epsilon \right) \tag{24-1}$$

donde ϵ es un pequeño parámetro positivo y f una función desarrollable en serie

$$f \left(z, \frac{dz}{dt}; \epsilon \right) = f^{(1)} \left(z, \frac{dz}{dt} \right) + \epsilon f^{(2)} \left(z, \frac{dz}{dt} \right) + \dots$$

Podemos llegar a la formulación correcta de este método partiendo de los conceptos físicos que definen el carácter del proceso oscilatorio.

Cuando no hay perturbaciones, es decir, cuando $\epsilon = 0$, la oscilación es armónica pura y puede expresarse en la forma

$$z = \delta \cos \psi$$

con amplitud constante y fase rotante uniforme

$$\frac{d\delta}{dt} = 0 \qquad \frac{d\psi}{dt} = 1$$

La existencia de perturbaciones no lineales, produce una cierta dependencia entre la frecuencia y la amplitud instantánea, y un crecimiento o decrecimiento sistemático de la amplitud de las oscilaciones, según que la energía aumente o disminuya a costa de las fuerzas perturbadoras. Por esta causa, buscaremos una solución de la forma

$$z = \delta \cos \psi + \epsilon u^{(1)}(\delta, \psi) + \epsilon^2 u^{(2)}(\delta, \psi) \dots \tag{24-2}$$

donde $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) son funciones periódicas del ángulo ψ , con período 2π , y δ, ψ , funciones del tiempo definidas por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \epsilon A^{(1)}(\delta) + \epsilon^2 A^{(2)}(\delta) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= 1 + \epsilon B^{(1)}(\delta) + \epsilon^2 B^{(2)}(\delta) + \dots \end{aligned} \tag{24-3}$$

Así, pues, es necesario elegir adecuadas funciones, de modo que la función z , dada por (24-2), donde δ, ψ , satisfacen al sistema (24-3), sea solución de (24-1).

Si es posible llevar a cabo este proceso, se habrá reducido el problema de integrar (24-1) al de integrar (24-3), que es de variables separadas y generalmente de integración más sencilla.

Como veremos más adelante, se presenta cierta arbitrariedad en la elección de las funciones de nuestro problema. Esta arbitrariedad nos permitirá elegir las funciones $u^{(i)}$ de modo que los armónicos de primer orden sean nulos, es decir que verifiquen las condiciones

$$\int_0^{2\pi} u^{(i)}(\delta, \psi) \cos \psi \, d\psi = 0, \int_0^{2\pi} u^{(i)}(\delta, \psi) \sin \psi \, d\psi = 0 \quad i = 1, 2, \dots \tag{24-4}$$

Desde un punto de vista físico, la imposición de estas condiciones equivale a seleccionar δ como amplitud completa del primer armónico fundamental de la oscilación.

25. Cálculo de coeficientes

Adoptando el convenio de que para las funciones $u^{(i)}$, los subíndices 1, 2, indican derivación respecto a las variables δ , ψ , es decir

$$u_1^{(i)} = \frac{du^{(i)}}{d\delta}, \quad u_2^{(i)} = \frac{du^{(i)}}{d\psi}, \quad u_{12} = \frac{d^2u^{(i)}}{d\delta d\psi}, \dots$$

entonces, al derivar (24-2), resulta

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{d\delta}{dt} [\cos \psi + \epsilon u_1^{(1)} + \epsilon^2 u_1^{(2)} + \dots] + \frac{d\psi}{dt} [-\delta \operatorname{sen} \psi + \epsilon u_2^{(1)} + \dots] \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2\delta}{dt^2} [\cos \psi + \epsilon u_1^{(1)} + \epsilon^2 u_1^{(2)} + \dots] + \frac{d^2\psi}{dt^2} [-\delta \operatorname{sen} \psi + \epsilon u_2^{(1)} + \epsilon^2 u_2^{(2)} + \dots] + \\ &\quad \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 [\epsilon u_{11}^{(1)} + \epsilon^2 u_{11}^{(2)} + \dots] + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 [-\delta \cos \psi + \epsilon u_{22}^{(1)} + \epsilon^2 u_{22}^{(2)} + \dots] + \\ &\quad + 2 \frac{d\delta}{dt} \frac{d\psi}{dt} [-\operatorname{sen} \psi + \epsilon u_{12}^{(1)} + \dots] \end{aligned}$$

Calculemos las distintas derivadas que aparecen como factores de los términos encerrados entre corchetes. Desde (24-3) se deducen los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} &= \epsilon^2 A^{(1)} \frac{dA^{(1)}}{d\delta} + \epsilon^3 \dots \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \epsilon^2 A^{(1)} \frac{dB^{(1)}}{d\delta} + \epsilon^3 \dots \\ \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 &= \epsilon^4 A^{(1)2} + \epsilon^3 \dots \\ \frac{d\delta}{dt} \frac{d\psi}{dt} &= \epsilon A^{(1)} + \epsilon^2 (A^{(2)} + A^{(1)} B^{(1)}) + \dots \\ \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 &= 1 + \epsilon 2 B^{(1)} + \epsilon^2 (B^{(1)2} + 2 B^{(2)}) + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo tales expresiones en las derivadas anteriores y reagrupando términos según las potencias de ϵ , tendremos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\delta \operatorname{sen} \psi + \epsilon [A^{(1)} \cos \psi - \delta B^{(1)} \operatorname{sen} \psi + u_2^{(1)}] + \\ &+ \epsilon^2 [A^{(2)} \cos \psi - \delta B^{(2)} \operatorname{sen} \psi + A^{(1)} u_1^{(1)} + B^{(1)} u_2^{(1)} + u_2^{(2)}] + \dots \end{aligned} \quad (25-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} = & -\delta \cos \psi + \epsilon [-2 A^{(1)} \operatorname{sen} \psi - 2 \delta B^{(1)} \cos \psi + u_{22}^{(1)}] + \\ & + \epsilon^2 \left[\left(A^{(1)} \frac{dA^{(1)}}{d\delta} - \delta B^{(1)2} - 2 \delta B^{(2)} \right) \cos \psi - \left(2 A^{(2)} + 2 A^{(1)} B^{(1)} + A^{(1)} \frac{dB^{(1)}}{d\delta} \delta \right) \operatorname{sen} \psi + \right. \\ & \left. + 2 A^{(1)} u_{12}^{(1)} + 2 B^{(1)} u_{22}^{(1)} + u_{22}^{(2)} \right] + \epsilon^3 \dots \end{aligned}$$

y el primer miembro de la ecuación (24-1) puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} + z = & \epsilon \{ -2 A^{(1)} \operatorname{sen} \psi - 2 a B^{(1)} \cos \psi + u_{22}^{(1)} + u^{(1)} \} + \\ & + \epsilon^2 \left\{ \left(A^{(1)} \frac{dA^{(1)}}{d\delta} - \delta B^{(1)2} - 2 \delta B^{(2)} \right) \cos \psi - \left(2 A^{(2)} + 2 A^{(1)} B^{(1)} + A^{(1)} \frac{dB^{(1)}}{d\delta} \delta \right) \operatorname{sen} \psi + \right. \\ & \left. + 2 A^{(1)} u_{12}^{(1)} + 2 B^{(1)} u_{22}^{(1)} + u_{22}^{(2)} + u^{(2)} \right\} + \epsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Por otra parte, el segundo miembro de (24-1), con ayuda de (24-2) y (25-1), es desarrollable en potencias de ϵ , obteniendo

$$\begin{aligned} \epsilon f \left(z, \frac{dz}{dt}; \epsilon \right) = & \epsilon f^{(1)} (\cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) + \epsilon^2 \{ u^{(1)} f_1^{(1)} (\delta \cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) + \\ & + (A^{(1)} \cos \psi - \delta B^{(1)} \operatorname{sen} \psi + u_2^{(1)}) f_2^{(1)} (\delta \cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) + \\ & + f^{(2)} (\delta \cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) \} + \epsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias respectivas, llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} u_{22}^{(1)} + u^{(1)} = & f_0 (\delta, \psi) + 2 A^{(1)} \operatorname{sen} \psi + 2 \delta B^{(1)} \cos \psi \\ u_{22}^{(2)} + u^{(2)} = & f_1 (\delta, \psi) + 2 A^{(2)} \operatorname{sen} \psi + 2 \delta B^{(2)} \cos \psi \end{aligned} \quad (25-2)$$

siendo

$$\begin{aligned} f_0 (\delta, \psi) = & f^{(1)} (\delta \cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) \\ f_1 (\delta, \psi) = & u^{(1)} f_1^{(1)} (\delta \cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) + (A^{(1)} \cos \psi - \delta B^{(1)} \operatorname{sen} \psi + u_2^{(1)}) \times \\ & \times f_2^{(1)} (\delta \cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) - 2 A^{(1)} u_{12}^{(1)} - 2 B^{(1)} u_{22}^{(1)} + f^{(2)} (\delta \cos \psi, -\delta \operatorname{sen} \psi) + \\ & + \left(\delta B^{(1)2} - A^{(1)} \frac{dA^{(1)}}{d\delta} \right) \cos \psi + \left(2 A^{(1)} B^{(1)} + A^{(1)} \frac{dB^{(1)}}{d\delta} \delta \right) \operatorname{sen} \psi \end{aligned} \quad (25-3)$$

No es difícil ver que $f_k (\delta, \psi)$, ($k = 0, 1, \dots$), es una función periódica de la variable ψ con período 2π y que depende de δ . Para determinar $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $u^{(1)}$, desde la primera ecuación (25-2), examinemos las series de Fourier de f_0 y $u^{(1)}$. Se tiene

$$\begin{aligned} f_0 (\delta, \psi) = & g_0 (\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ g_n (\delta) \cos n \psi + h_n (\delta) \operatorname{sen} n \psi \} \\ u^{(1)} (\delta, \psi) = & v_0 (\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ v_n (\delta) \cos n \psi + w_n (\delta) \operatorname{sen} n \psi \} \end{aligned} \quad (25-4)$$

y poniendo (25-4) en (25-2), obtenemos la igualdad

$$v_0(\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-n^2) \{v_n(\delta) \cos n\psi + w_n(\delta) \operatorname{sen} n\psi\} = g_0(\delta) + \{g_1(\delta) + 2\delta B^{(1)}\} \cos \psi + \\ + \{h_1(\delta) + 2A^{(1)}\} \operatorname{sen} \psi + \sum_{n=2}^{\infty} \{g_n(\delta) \cos n\psi + h_n(\delta) \operatorname{sen} n\psi\}$$

De esta forma tenemos unívocamente determinadas $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, así como las componentes armónicas de la función $u^{(1)}(\delta, \psi)$, excepto $v_1(\delta)$, $w_1(\delta)$; pero en virtud de las condiciones adicionales (24-4), estas funciones serán nulas, luego

$$g_1(\delta) + 2\delta B^{(1)} = 0 \quad h_1(\delta) + 2A^{(1)} = 0 \quad v_0(\delta) = g_0(\delta) \quad (25-5) \\ v_n(\delta) = \frac{g_n(\delta)}{1-n^2} \quad w_n(\delta) = \frac{h_n(\delta)}{1-n^2} \quad n = 2, 3,$$

lo que implica

$$u^{(1)}(\delta, \psi) = g_0(\delta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(\delta) \cos n\psi + h_n(\delta) \operatorname{sen} n\psi}{1-n^2} \quad (25-6)$$

De un modo completamente análogo, para el segundo orden, si ponemos

$$f_1(\delta, \psi) = g_0^{(1)}(\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n^{(1)}(\delta) \cos n\psi + h_n^{(1)}(\delta) \operatorname{sen} n\psi\}$$

obtenemos

$$g_1^{(1)}(\delta) + 2\delta B^{(2)} = 0 \quad h_1^{(1)}(\delta) + 2A^{(2)} = 0 \quad (25-8) \\ u^{(2)}(\delta, \psi) = g_0^{(1)}(\delta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n^{(1)}(\delta) \cos n\psi + h_n^{(1)}(\delta) \operatorname{sen} n\psi}{1-n^2}$$

26. Aplicación del método de Krylov-Bogoliubov al problema del satélite en las variables de Hill

Recordemos, en primer término, que Δ representa el valor medio, con respecto a u , de los armónicos de orden superior al primero y que, de acuerdo con el párrafo 22, la contribución de los armónicos impares es nula. De ahí que sólo tomaremos en consideración el cuarto armónico, en cuyo caso, es

$$\Delta = \frac{J_4}{e^2} \frac{R^4 \mu}{r^5} \left\{ \frac{3}{8} \left[\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \frac{H^2}{U^2} + \frac{35}{8} \frac{H^4}{U^4} \right] \right\} = \frac{\bar{\gamma}_4}{r^5} \frac{U^2}{5} \quad (26-1)$$

si ponemos

$$\bar{\gamma}_4 = \frac{J_4}{e^2} \frac{R^4 \mu}{U^2} \frac{15}{8} \left[\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \frac{H^2}{U^2} + \frac{35}{8} \frac{H^4}{U^4} \right] \quad (26-2)$$

Por tanto, la ecuación diferencial (23-4) adopta la forma

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z = \frac{1}{p} + \epsilon b_0 z^2 - \epsilon^2 [b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 - 2a_4 z \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 + \bar{\gamma}_4 z^4] \quad (26-3)$$

Desde luego, esta ecuación no tiene exactamente la misma forma de la (24-1) para la aplicación del método de Krylov-Bogoliubov, pero si efectuamos un cambio de variable, definido por

$$z = \frac{1}{p} + \bar{z} = \beta + \bar{z}$$

se transforma en

$$\frac{d^2 \bar{z}}{d\varphi^2} + \bar{z} = \epsilon b_0 (\beta + \bar{z})^2 - \epsilon^2 [b_1 (\bar{z} + \beta) + b_2 (\bar{z} + \beta)^2 + b_3 (\bar{z} + \beta)^3 - 2a_4 (\bar{z} + \beta) \left(\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + \right) + \bar{\gamma}_4 (\bar{z} + \beta)^4] \quad (26-4)$$

que ya resulta apropiada para dicha aplicación.

(i) Resultados de primer orden.

La función f_0 , en este caso, viene definida por la igualdad $f_0 = b_0 (\bar{z} + \beta)^2$, si bien hay que hacer en ella la sustitución de \bar{z} por la solución de la ecuación no perturbada, esto es

$$\bar{z} = \delta \cos \psi$$

Tenemos, pues,

$$f_0 = \frac{b_0}{2} [(2\beta^2 + \delta^2) + 4\beta\delta \cos \psi + \delta^2 \cos 2\psi]$$

y aplicando las fórmulas (25-), resulta

$$A^{(1)} = 0 \qquad B^{(1)} = -b_0 \beta \quad (26-5)$$

$$u^{(1)}(\delta, \psi) = \frac{b_0}{2} (2\beta^2 + \delta^2) - \frac{b_0 \delta^2}{6} \cos 2\psi$$

En conclusión, la solución de primer orden está dada por

$$z = \beta + \delta \cos \psi + \epsilon u^{(1)}(\delta, \psi) \quad (26-6)$$

donde δ, ψ , satisfacen al sistema

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = 0 \qquad \frac{d\psi}{d\varphi} = 1 - \epsilon b_0 \beta$$

Según esto, el problema queda resuelto inmediatamente, siendo su solución

$$\delta = \text{const.} \qquad \psi - \psi_0 = (1 - \epsilon b_0 \beta) (\varphi - \varphi_0)$$

donde φ_0 es el valor de φ correspondiente al instante inicial y ψ_0 una constante arbitraria introducida al integrar la ecuación diferencial anterior. Así, pues, la solución de primer orden de (24-3) está determinada por (26-6), con δ y ψ_0 constantes.

Para $\epsilon = 0$, (26-6) se reduce a la expresión

$$z = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \delta \cos \psi$$

que corresponde a una cónica, con ψ como anomalía verdadera, p como parámetro y el producto δp como excentricidad.

(ii) Resultados de segundo orden.

Teniendo en cuenta (25-3) y los resultados obtenidos para el primer orden, se deduce

$$\begin{aligned} f_1 &= u^{(1)} f_2^{(1)} (\delta \cos \psi) + \delta B^{(1)2} \cos \psi - 2 B^{(1)} u_{22}^{(1)} + f^{(2)} = \\ &= 2 b_0 (\delta \cos \psi + \beta) \left[\frac{b_0}{2} (2 \beta^2 + \delta^2) - \frac{b_0 \beta^2}{6} \cos 2 \psi \right] + \\ &+ \delta b_0^2 \beta^2 \cos \psi + 2 b_0 \beta \frac{2 b_0 \beta^2}{3} \cos 2 \psi + f^{(2)} \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene

$$-f^{(2)} = b_1 (\delta \cos \psi + \beta) + b_2 (\delta \cos \psi + \beta)^2 + b_3 (\delta \cos \psi + \beta)^3 - 2 a_4 (\delta \cos \psi + \beta) \delta^2 \operatorname{sen}^2 \psi + \bar{\gamma}_4 (\delta \cos \psi + \beta)^4$$

o bien, después de efectuar operaciones

$$-f^{(2)} = b_1 \beta + b_2 \beta^2 + b_3 \beta^3 - 2 a_4 \beta \delta^2 + \bar{\gamma}_4 \beta^4 + \cos \psi (b_1 \beta + 2 b_2 \delta \beta + 3 b_3 \beta^2 \delta - 2 a_4 \delta^3 + 4 \beta^3 \delta \bar{\gamma}_4) + \cos^2 \psi (b_2 \delta^2 + 3 b_3 \beta \delta^2 + 2 a_4 \beta \delta^2 + 6 \delta^2 \beta^2 \bar{\gamma}_4) + \cos^3 \psi (b_3 \delta^3 + 2 a_4 \delta^3 + 4 \bar{\gamma}_4 \beta \delta^3) + \cos^4 \psi \bar{\gamma}_4 \delta^4$$

Por consiguiente, si sustituimos todos estos valores en f_2 , resulta

$$\begin{aligned} -f_2 &= b_1 \beta + b_2 \beta^2 + b_3 \beta^3 + \bar{\gamma}_4 \beta^4 - 2 \beta^3 b_0^2 + \delta^2 \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{2} b_3 \beta - a_4 \beta + \right. \\ &\quad \left. + 3 \beta^2 \bar{\gamma}_4 - \beta b_0^2 \right) + \delta^4 \frac{3}{8} \bar{\gamma}_4 + \cos \psi \left[\delta (b_1 + 2 b_2 \beta + 3 b_3 \beta^2 + 4 \beta^3 \bar{\gamma}_4 \right. \\ &\quad \left. - 3 \beta^2 b_0^2) + \delta^3 \left(\frac{3}{4} b_3 - \frac{1}{2} a_4 + 3 \beta \bar{\gamma}_4 - \frac{5}{6} b_0^2 \right) \right] + \\ &+ \cos 2 \psi \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{2} b_3 \beta + a_4 \beta + 3 \beta^2 \bar{\gamma}_4 - b_0^2 \beta \right) + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_4 \delta^4 \right] + \\ &+ \cos 3 \psi \left[\delta^3 \left(\frac{1}{4} b_3 + \frac{1}{2} a_4 + \bar{\gamma}_4 \beta + \frac{b_0^2}{6} \right) \right] + \cos 4 \psi \frac{1}{8} \bar{\gamma}_4 \delta^4 \end{aligned}$$

y finalmente

$$f_2 = c_0 + c_1 \cos \psi + c_2 \cos 2 \psi + c_3 \cos 3 \psi + c_4 \cos 4 \psi \quad (26-7)$$

donde las nuevas constantes vienen definidas por las relaciones

$$\begin{aligned} c_0 &= - \left[b_1 \beta + b_2 \beta^2 + b_3 \beta^3 + \bar{\gamma}_4 \beta^4 - 2 \beta^3 b_0^2 + \delta^2 \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{2} b_3 \beta - a_4 \beta + 3 \beta^2 \bar{\gamma}_4 - \beta b_0^2 \right) + \delta^4 \frac{3}{8} \bar{\gamma}_4 \right] \\ c_1 &= - \left[\delta (b_1 + 2 b_2 \beta + 3 b_3 \beta^2 + 4 \beta^3 \bar{\gamma}_4 - 3 \beta^2 b_0^2) + \delta^3 \left(\frac{3}{4} b_3 - \frac{1}{2} a_4 + 3 \beta \bar{\gamma}_4 - \frac{5}{6} b_0^2 \right) \right] \\ c_2 &= - \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{3}{2} b_3 \beta - a_4 \beta + 3 \beta^2 \bar{\gamma}_4 - b_0^2 \beta \right) + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_4 \delta^4 \right] \end{aligned}$$

$$c_3 = -\delta^3 \left(\frac{1}{4} b_3 + \frac{1}{2} a_4 + \gamma_4 \beta + \frac{b_0^2}{6} \right)$$

$$c_4 = -\frac{1}{8} \gamma_4 \delta^4$$

Además, las fórmulas (25-8) nos dan

$$\begin{aligned} c_1 + 2 \delta B^{(2)} &= 0 \\ A^{(2)} &= 0 \end{aligned} \tag{26-8}$$

$$u^{(2)}(\delta, \psi) = c_0 - \frac{1}{3} c_2 \cos 2\psi - \frac{1}{8} c_3 \cos 3\psi - \frac{1}{15} c_4 \cos 4\psi$$

por lo cual, hasta el segundo orden, la solución puede ser escrita en la forma

$$z = \beta + \delta \cos \psi + \epsilon u^{(1)}(\delta, \psi) + \epsilon^2 u^{(2)}(\delta, \psi) \tag{26-9}$$

estando definidas las funciones $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, por las fórmulas (26-5), (26-8), respectivamente y verificando δ , ψ , las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\varphi} &= 0 & \frac{d\psi}{d\varphi} &= 1 + B^{(1)} + \epsilon^2 B^{(2)} \end{aligned}$$

donde

$$B^{(1)} = -b_0 \beta$$

$$B^{(2)} = \frac{1}{2} (b_1 + 2b_2\beta + 3b_3\beta^2 + 4\beta^3\gamma_4 - 3\beta^2 b_0^2) + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{3}{4} b_3 - \frac{1}{2} a_4 + 3\beta \gamma_4 - \frac{5}{6} b_0^2 \right)$$

Como $B^{(1)}$ y $B^{(2)}$ son constantes, la integración no ofrece dificultades, obteniéndose

$$\begin{aligned} \delta &= \text{constante} \\ \psi - \psi_0 &= (1 + \epsilon B^{(1)} + \epsilon^2 B^{(2)}) (\varphi - \varphi_0) = k (\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \tag{26-10}$$

donde k designa el valor constante $1 + \epsilon B^{(1)} + \epsilon^2 B^{(2)}$.

27. Cálculo de las restantes variables

En el párrafo anterior se ha determinado el radio vector en función de la variable auxiliar ψ . Se trata ahora de obtener las expresiones explícitas de las restantes variables, es decir p , u , h , puesto que U , H , son constantes, como ya quedó dicho.

1) Cálculo de la velocidad radial:

Derivando respecto al tiempo en (26-9), se obtiene

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\delta \operatorname{sen} \psi \frac{d\psi}{dt} + \epsilon u_2^{(1)} \frac{d\psi}{dt} + \epsilon^2 u_2^{(2)} \frac{d\psi}{dt}$$

pero

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = k \frac{U}{r^2}$$

luego

$$\frac{dr}{dt} = \delta k U \operatorname{sen} \psi - \epsilon k U u_2^{(1)} - \epsilon^2 k U u_2^{(2)} \quad (27-1)$$

donde las funciones $u_2^{(1)}$, $u_2^{(2)}$, satisfacen las relaciones

$$u_2^{(1)} = \frac{b_0 \delta^2}{3} \operatorname{sen} 2 \psi$$

$$u_2^{(2)} = \frac{2 c_2}{3} \operatorname{sen} 2 \psi + \frac{3 c_3}{8} \operatorname{sen} 3 \psi + \frac{4 c_4}{15} \operatorname{sen} 4 \psi \quad (27-2)$$

Finalmente, sustituyendo la expresión (27-1) de dr/dt , en la fórmula

$$p_r = \left(1 - \epsilon^2 \frac{2 a_4}{r^2} \right) \frac{dr}{dt}$$

la velocidad radial p_r queda perfectamente determinada en función de la variable ψ , dada por la fórmula (26-10).

Según (27-1) y (27-2), para $\psi = 0$, es $dr/dt = 0$, y se comprueba fácilmente que $d^2r/dt^2 > 0$. Por tanto, para $\psi = 0$, el radio vector alcanza el valor mínimo, y esto nos permite interpretar ψ como anomalía verdadera en la elipse perturbada.

2) Cálculo de la variable u :

La ecuación diferencial satisfecha por esta variable, es

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial U} = \frac{U}{r^2} - \epsilon \frac{\partial a_0}{\partial U} \frac{1}{r^3} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial a_1}{\partial U} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial a_2}{\partial U} \frac{1}{r^3} + \frac{\partial a_3}{\partial U} \frac{1}{r^4} + \frac{\partial a_4}{\partial U} \frac{p_r^2}{r^2} + \frac{\partial \gamma_4}{\partial U} \frac{1}{r^5} \right]$$

donde hemos puesto

$$\gamma_4 = \frac{\bar{\gamma}_4 U^2}{5} = \frac{J_4}{\epsilon^2} \frac{3 R^4 \mu}{8} \left[\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \frac{H^2}{U^2} + \frac{35}{8} \frac{H^4}{U^4} \right]$$

Para llevar a cabo su integración de modo explícito, es preferible expresar du/dt a través de ψ como variable independiente, o sea

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \frac{kU}{r^2} \frac{du}{d\psi}$$

De este modo, se obtiene

$$k \frac{du}{d\psi} = 1 - \frac{\epsilon}{U} \frac{\partial a_0}{\partial U} \frac{1}{r} + \frac{\epsilon^2}{U} \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial U} + \frac{\partial a_2}{\partial U} \frac{1}{r} + \frac{\partial a_3}{\partial U} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial a_4}{\partial U} p_r^2 + \frac{\partial \gamma_4}{\partial U} \frac{1}{r^3} \right\}$$

Sustituyendo $1/r$ por la expresión (26-9) y conservando hasta los términos de segundo orden en ϵ , queda

$$k \frac{du}{d\psi} = 1 - \frac{\epsilon}{U} \frac{\partial a_0}{\partial U} (\beta + \delta \cos \psi + \epsilon u^{(1)}) + \frac{\epsilon^2}{U} \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial U} + \frac{\partial a_2}{\partial U} (\beta + \delta \cos \psi) + \right. \\ \left. + \frac{\partial a_3}{\partial U} (\beta + \delta \cos \psi)^2 + \frac{\partial a_4}{\partial U} \delta^2 k^2 U^2 \operatorname{sen}^2 \psi + \frac{\partial \gamma_4}{\partial U} (\beta + \delta \cos \psi)^3 \right\}$$

No olvidemos que, por haber prescindido en la función hamiltoniana de los armónicos de segundo orden con valor medio cero, carece de sentido el conservarlos ahora. Así, podemos simplificar esta relación, escribiendo simplemente

$$k \frac{du}{d\psi} = 1 - \frac{\epsilon}{U} \frac{\partial a_0}{\partial U} (\beta + \delta \cos \psi) + \frac{\epsilon^2}{U} \left[\left(-\frac{\partial a_0}{\partial U} b_0 \beta^2 + \frac{\partial a_1}{\partial U} + \frac{\partial a_2}{\partial U} \beta + \frac{\partial a_3}{\partial U} \beta^2 + \beta^3 \frac{\partial \gamma_4}{\partial U} \right) + \delta^2 \left(-\frac{b_0}{2} \frac{\partial a_0}{\partial U} + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial a_3}{\partial U} + \frac{k^2 U^2}{2} \frac{\partial a_4}{\partial U} + \frac{3}{2} \beta \frac{\partial \gamma_4}{\partial U} \right) \right]$$

La introducción de p_0, p_1 , como nuevas constantes

$$U p_0 = -\frac{\partial a_0}{\partial U} b_0 \beta^2 + \frac{\partial a_1}{\partial U} + \frac{\partial a_2}{\partial U} \beta + \frac{\partial a_3}{\partial U} \beta^2 + \frac{\partial \gamma_4}{\partial U} \beta^3$$

$$U p_1 = -\frac{b_0}{2} \frac{\partial a_0}{\partial U} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial U} + \frac{k^2 U^2}{2} \frac{\partial a_4}{\partial U} + \frac{3}{2} \beta \frac{\partial \gamma_4}{\partial U}$$
(27-4)

nos permite llegar a la ecuación diferencial

$$k \frac{du}{d\psi} = 1 + \frac{\epsilon}{U} \frac{3 \mu R^2 H^2}{2 U^3} (\beta + \delta \cos \psi) + \epsilon^2 (p_0 + p_1 \delta^2)$$

que puede ser integrada en la forma

$$k (u - u_0) = \left[1 + \epsilon \frac{3 \mu^2 R^2 H^2}{2 U^6} + \epsilon^2 (p_0 + p_1 \delta^2) \right] \psi + \epsilon \frac{3 \mu R^2 H^2}{2 U^4} \delta \sin \psi$$

donde u_0 es una constante, que representa el valor de u para $\psi = 0$.

3) Cálculo del ángulo del nodo:

La ecuación que nos determina el ángulo del nodo, es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial H} = -\epsilon \frac{\partial a_0}{\partial H} \frac{1}{r^3} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial a_1}{\partial H} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial a_2}{\partial H} \frac{1}{r^3} + \frac{\partial a_3}{\partial H} \frac{1}{r^4} + \frac{\partial a_4}{\partial H} \frac{p_r^2}{r^2} + \frac{\partial \gamma_4}{\partial H} \frac{1}{r^5} \right]$$

e igual que en el caso de la variable u , encontramos preferible utilizar ψ como variable independiente, mediante la relación

$$\frac{dh}{dt} = \frac{kU}{r^2} \frac{dh}{d\psi}$$

Por tanto

$$k \frac{dh}{d\psi} = -\frac{\epsilon}{U} \frac{\partial a_0}{\partial H} \frac{1}{r} + \frac{\epsilon^2}{U} \left[\frac{\partial a_1}{\partial H} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_2}{\partial H} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial a_3}{\partial H} + p_r^2 \frac{\partial a_4}{\partial H} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \gamma_4}{\partial H} \right]$$

Sustituyendo $1/r$ por su expresión (26-9) y conservando los términos hasta el segundo orden en ϵ , resulta

$$k \frac{dh}{d\psi} = -\frac{\epsilon}{U} \frac{\partial a_0}{\partial H} \{ \beta + \delta \cos \psi + \epsilon u^{(1)} \} + \frac{\epsilon^2}{u} \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial H} + \frac{\partial a_2}{\partial H} (\beta + \delta \cos \psi) + \frac{\partial a_3}{\partial H} (\beta + \delta \cos \psi)^2 + \frac{\partial a_4}{\partial H} \delta^2 k^2 U^2 \sin^2 \psi + \frac{\partial \gamma_4}{\partial H} (\beta + \delta \cos \psi)^3 \right\}$$

Procediendo como en el caso anterior, es decir, prescindiendo de los armónicos de segundo orden con valor medio cero, tendremos

$$k \frac{dh}{d\psi} = -\frac{\epsilon}{U} \frac{\partial a_0}{\partial H} (\beta + \delta \cos \psi) + \frac{\epsilon^2}{U} \left[\left(-\frac{\partial a_0}{\partial H} b_0 \beta^2 + \frac{\partial a_1}{\partial H} + \frac{\partial a_2}{\partial H} \beta + \frac{\partial a_3}{\partial H} \beta^2 + \frac{\partial \gamma_4}{\partial H} \beta^3 \right) + \delta^2 \left(-\frac{b_0}{2} \frac{\partial a_0}{\partial H} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial H} + \frac{1}{2} k^2 U^2 \frac{\partial a_4}{\partial H} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{\partial H} \frac{\partial \gamma_4}{\partial H} \right) \right]$$

e introduciendo nuevas constantes q_0, q_1 , por las fórmulas

$$U q_0 = \frac{\partial a_0}{\partial H} b_0 \beta^2 + \frac{\partial a_1}{\partial H} + \frac{\partial a_2}{\partial H} \beta + \frac{\partial a_3}{\partial H} \beta^2 + \frac{\partial \gamma_4}{\partial H} \beta^3$$

$$U q_1 = -\frac{b_0}{2} \frac{\partial a_0}{\partial H} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial H} + \frac{1}{2} k^2 U^2 \frac{\partial a_4}{\partial H} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{\partial H} \frac{\partial \gamma_4}{\partial H}$$
(27-6)

se tiene finalmente la ecuación diferencial

$$k \frac{dh}{d\psi} = -\epsilon \frac{3 \mu R^2 H}{2 U^3} (\beta + \delta \cos \psi) + \epsilon^2 (q_0 + \delta^2 q_1)$$

de cuya integración se deduce

$$k (h - h_0) = \left[-\epsilon \frac{3 \mu^2 R^2 H}{2 U^5} + \epsilon^2 (q_0 + \delta^2 q_1) \right] \psi - \epsilon \frac{3 \mu R^2 H}{2 U^3} \delta \operatorname{sen} \psi$$
(27-7)

siendo h_0 el valor de h que corresponde a $\psi = 0$.

28. Principales características de la solución

Los cálculos efectuados anteriormente, para la integración del problema de movimiento de un satélite en las variables de Hill, se han desarrollado en dos pasos. Primero se han eliminado las fluctuaciones periódicas debidas a la variable angular u , con período 2π y valor medio cero; con ello se ha conseguido que U , módulo del momento angular, y su proyección H sobre el eje Oz , sean constantes o bien que, el movimiento del satélite tenga lugar en un plano que está solamente sometido a una precesión de velocidad dh/dt .

En el segundo paso, se introduce como variable independiente la velocidad instantánea de rotación en el plano orbital y como variable dependiente $z = 1/r$, lo que nos permite aplicar el método de Krylov-Bogoliubov y obtener así la solución.

Cuando se aplica este método, aparece una variable angular $\psi = k\varphi$ que juega el papel de anomalía verdadera, resultando expresado el radio vector en la forma

$$\frac{1}{r} = \beta + \delta \cos \psi + \epsilon u^{(1)}(\delta, \psi) + \epsilon^2 u^{(2)}(\delta, \psi)$$

donde $\beta = \mu/U^2$ es constante y δ un parámetro constante que es igual al producto $e\beta$, para $\epsilon = 0$.

Podemos apreciar que los términos $\epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)}$ representan la perturbación de $1/r$ respecto al problema de dos cuerpos, y recordando que $u^{(1)}, u^{(2)}$, son funciones pe-

riódicas respecto a ψ , con período 2π , esto significa que, si se prescindiese de la precesión del plano orbital y de las fluctuaciones debidas a la variable u , la trayectoria descrita por el satélite sería una curva plana geoméricamente cerrada.

Respecto a las características propiamente dichas de la solución, notemos que ésta es válida para todo tipo de órbitas y que carece de singularidades en excentricidad e inclinación, simplificándose considerablemente para excentricidades próximas a cero.

Señalemos finalmente que, de acuerdo con (27-7), en una teoría de primer orden, el plano orbital está sometido a un movimiento retrógrado de precesión, que es proporcional al coseno de la inclinación, por lo que dicha precesión desaparece por completo en órbitas polares.

Agradecimiento

Deseamos expresar aquí nuestro profundo agradecimiento al Dr. D. Rafael Cid Palacios, por habernos sugerido el tema de este trabajo y por la constante ayuda que nos ha prestado durante su realización.

BIBLIOGRAFIA

Obras generales:

- R. M. L. BAKER, JR: *Astrodynamics, Applications and Advanced Topics*, Academic Press, New York, 1967.
- BOGOLIUBOV Y MITROPOLSKY: *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Gordon and Breach, New Delhi, 1961.
- D. BROUWER Y G. M. CLEMENCE: *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York, 1961.
- J. CHAZY: *Mecanique Celeste*, Press. Universitaires de France, Paris, 1953.
- G. A. CHEBOTAREV: *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, Elsevier, New York, 1967.
- J. M. A. DANBY: *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Macmillan, New York, 1962.
- R. L. DUNCOMBE Y V. G. SZEBEHELY: *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics*, Progress in Astronautics and Aeronautics, v. 17, 1965.
- K. A. EHRLICHKE: *Space Flight*, vol. 1: Environment and Celestial Mechanics, vol. 2: Dynamics, Princeton, New Jersey, 1962.
- P. R. ESCOBAL: *Methods of Orbit Determination*, Wiley, New York, 1965.
- J. KOVALEVSKY (Ed.): *Trajectories of Artificial Celestial Bodies*, COSPAR-IAU-IUTAM (Symposium Paris, 1965), Springer-Verlag, Berlín, 1966.
- H. POINCARÉ: *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*, Dover Publications, New York, 1957.
- A. E. ROY: *The Foundations of Astrodynamics*, Macmillan Co, New York, 1968.
- M. ROY (Ed.): *Dynamics of Satellites*, IUTAM (Symposium Paris, 1962), Springer-Verlag, Berlín, 1963.
- C. L. SIEGEL: *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer-Verlag, Berlín, 1956.
- F. TISSERAND: *Traité de Mecanique Celeste*, Gauthier-Villars, París, 4 tomos, 1889-1896.
- A. WINTNER: *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press., New Jersey, 1941.

Artículos:

- H. A. ANTOSIEWICZ: *Proc. Int. Symp. on Nonlinear Oscillations*, vol. I, 55-58, 1963.
 S. AOKI: *Astron. Journ.* 65, 451, 1960.
 D. BROUWER: *Astron. Journ.* 64, 378, 1959.
 — *Astron. Journ.* 66, 193, 1961.
 R. CID: *Act. VIII Reun. Matem. Esp.*, Santiago de Compostela, 1967.
 R. CID Y J. F. LAHULLA: *Act. IX Reun. Matem. Esp.*, Granada, 1968.
 — *Act. X Reun. Matem. Esp.*, La Laguna, 1969.
 R. CID, J. F. LAHULLA Y M. CALVO: *Urania*, núms. 267-268, Tarragona 1968.
 B. GARFINKEL: *Astron. Journ.* 64 353, 1959.
 — *Astron. Journ.* 65, 624, 1960.
 — *Astron. Journ.* 69, 223, 1964.
 — *Astron. Journ.* 69, 453, 1964.
 — *Astron. Journ.* 71, 657, 1966.
 GEN ICHIRO-HORI: *Astron. Journ.* 65, 291, 1960.
 G. E. O. GIACAGLIA: Rep. X-547-64-161, Nasa, Goddard Space Flight Center Greenbelt, Md. 1964.
 C. W. HILL: *Astron. Journ.* 67, 171, 1913.
 I. G. IZSAK: *Astron. Journ.* 65, 355, 1960.
 — *Astron. Journ.* 66, 129, 1961.
 — *Astron. Journ.* 66, 226, 1961.
 — *Astron. Journ.* 68, 559, 1963.
 Y. KOZAI, *Astron. Journ.* 64, 367, 1959.
 — *Astron. Journ.* 66, 355, 1961.
 — *Astron. Journ.* 66, 132, 1961.
 — *Astron. Journ.* 67, 446, 1962.
 — Smithsonian Inst. Astroph. Obs. Special Report 200, 1966.
 W. T. KYNER: *Comm. Pure Appl. Math.*, 17, 227, 1964.
 — *Siam, J.*: 13, 136-171, 1965.
 — *Astron. Journ.* 71, 579, 1966.
 J. LORELL, J. D. ANDERSON y H. LASS: TR 32-482, *Jet Propulsion*, Lab. Pasadena, California, 1964.
 R. H. LYDDANE Y C. J. COHEN: *Astron. Journ.* 67, 176, 1962.
 R. H. LYDDANE: *Astron. Journ.*, 68, 555, 1963.
 CH. MARCHAL: Publ. ONERA, núm. 111, 1964.
 I. A. MITROPOLSKY: *Int. J. Non-linear Mechanics*, vol. 2, 69, 1967.
 J. A. MORRISON: *Siam J.* 13, 96-117, 1965.
 — *Siam J.* 16, 1024-1047, 1968.
 — *Quart. of App. Math.*, vol. XXIV, 4, 1967.
 — *Quart. of App. Math.*, vol. XXIV, 1, 1968.
 — *Progress in Astr.*, Acad. Press., vol. 17, 1966.
 — *J. Non Linear Mach.*, vol. 3, 65-81, 1968.
 — *J. of Math. Analysis and Appl.*, vol. 1, 80, 1968.
 J. P. VINTI: *Jorn. of the Nat. Bureau of Standards*, 63 B, 1959.
 — *Journ. of the Nat. Bureau of Standards*, 65 B, 1961.
 — *Journ. of the Nat. Bureau of Standards*, 67 B, 1963.
 — *Journ. of the Nat. Bureau of Standards*, 70 B, 1966.
 J. P. VINTI: *Astron. Journ.*, 66, 514, 1961.
 — *Astron. Journ.* 74, 25, 1969.
 V. M. VOLOSOV: *Soviet Math. Dokl.*, 2, 221, 1961.
 — *Soviet Math. Dokl.*, 2, 382, 1961.
 — *Russ. Math. Surveys*, vol. 17, N 6, 1962.
 H. VON ZEIPPEL: *Ark. Math. Astron. Fysik.*, 11, núm. 1, 7; 12, núm. 9; 13, núm. 3, 1916-1917.

APLICACION DE LOS METODOS DE PROMEDIOS AL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE SATELITES ARTIFICIALES

P O R

M. CALVO

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos.
Universidad de Zaragoza

Summary

In this paper the Method of Averaging is applied to describe the motion of an artificial satellite around an oblate planet. Formulating the problem in Delaunay variables, a first order solution is obtained very easily, with small divisors in eccentricity and inclination; incidentally we see that Brouwer solution can be obtained as a particular case of ours. After that we have paid special attention to solutions near the critical inclination.

Finally the problem is expressed in Hill variables and extending previous results given by Cid and Lahulla, the problem is completely integrated. The solution is free of small divisors and the results in Hill variables are considerably shorter than in Delaunay case. Because of this, Hill variables appear to be as the most natural ones for the satellite problem.

Introducción

En los comienzos del presente siglo, una de las cuestiones que más preocupan en el campo de la Mecánica Celeste, es el problema de n cuerpos, del que llegan a realizarse importantes estudios, tales como los de Poincaré, Sudman, Levi-Civita, Birkhoff, etc. y una acabada síntesis debida a Wintner (1941). En cambio, las teorías de perturbaciones, que llevan a la resolución práctica de los problemas de movimiento de cuerpos celestes, apenas sufren variaciones, remitiéndose una y otra vez a los formularios dados por Lagrange, Gauss, Hansen, Hill, etc.

Dos hechos nuevos modifican, sin embargo, estas líneas de investigación: la aparición de ordenadores electrónicos y el lanzamiento de satélites artificiales.

En efecto, las potentes máquinas de calcular diseñadas a partir de la II Guerra Mundial, han dado lugar a la investigación de métodos numéricos de cálculo, que permiten estudiar la evolución dinámica de sistemas de n cuerpos, con valores elevados de n , tanto en el campo de la Mecánica Celeste, como en la Física de Partículas, etc.

Por otra parte, el lanzamiento de satélites artificiales, ha planteado numerosos problemas concretos de cálculo de órbitas, perturbaciones, optimización de trayectorias, etc., y de la conjunción de ambos hechos han surgido nuevas técnicas de trabajo para la resolución de tales problemas.

Es bien sabido que las principales fuerzas que actúan sobre el movimiento de un satélite artificial, son debidas al campo gravitatorio terrestre, a las atracciones del Sol, la Luna y los otros planetas, a la atmósfera terrestre, al campo magnético terrestre y a la radiación solar. La magnitud de estas fuerzas, que originan perturbaciones al modelo de dos cuerpos (Tierra-Satélite), es muy diferente según la trayectoria estudiada, la forma del satélite, etc.; pero, sin duda, la perturbación más importante es la originada por la forma no esférica de la Tierra.

En este trabajo, tratamos de estudiar el movimiento del satélite bajo la exclusiva influencia del campo gravitatorio terrestre, prescindiendo, por tanto, de los restantes efectos.

Como el potencial terrestre puede ser separado en potencias de un pequeño parámetro (J_2), que aparece en su desarrollo, muchos autores (Brouwer, Garfinkel, Kozai, etc.) han obtenido soluciones asintóticas en potencias de dicho parámetro. No obstante, los métodos usados tienen solamente carácter formal, planteando serias dudas sobre la convergencia de las series obtenidas, la acotación de errores y la aparición de pequeños divisores.

Desde nuestro punto de vista, el problema de movimiento de un satélite artificial, es un problema de mecánica no lineal, del que se quiere obtener una solución aproximada. Una medida de la utilidad de la solución estará dada por los siguientes puntos:

1. Si proporciona una estimación de la diferencia de valores entre la solución exacta y la aproximada.
2. Si es válida cualesquiera que sean las condiciones iniciales.
3. Si los resultados obtenidos pueden ser expresados en forma útil para las aplicaciones.
4. Si no introduce pequeños divisores.

Entre los métodos de que se dispone para obtener soluciones de problemas de mecánica no lineal, el de promedios es el que tiene una fundamentación matemática más consistente, ya que para él se han establecido teoremas que permiten acotar la diferencia entre las soluciones verdadera y aproximada. Por esto, hemos dividido nuestro trabajo en los siguientes capítulos:

I. Se estudian en él los métodos de promedios desarrollados por Bogoliubov y sus colaboradores. Aun cuando nuestra labor es principalmente expositiva, se han efectuado algunas modificaciones, dando un énfasis especial al caso de sistemas canónicos, para poder enlazar los métodos de promedios con otros métodos como el de von Zeipel.

II. Aplicando los métodos anteriores, se ha obtenido, de modo muy simple y rápido una solución del problema de movimiento de un satélite artificial, en ausencia de singularidades, demostrando que la solución de Brouwer (en primer orden), resulta como caso particular de ésta.

III. Pasando a la eliminación de singularidades, se estudian las características del movimiento de un satélite en las proximidades de su inclinación crítica y la estabilidad de las soluciones obtenidas, llegando a resultados más generales que los dados por Garfinkel y Gen Ichiro-Hori.

IV. Haciendo uso de las variables canónicas de Hill y extendiendo los resultados dados por Cid y Lahulla para la eliminación de la variable u , se ha conseguido la integración total del problema en estas variables. Los resultados son fácilmente generalizables a órdenes superiores y a otros tipos de problemas, presentando la enorme ventaja de carecer de singularidades.

I. — Métodos de promedios

1. Introducción al método de promedios

Aun cuando hace tiempo que los métodos de promedios se han venido usando en Mecánica Celeste, el objeto de estos consistía en sustituir la función perturbadora por su valor medio, con respecto a alguna de las variables, y de este modo, conseguir ecuaciones diferenciales más fáciles de integrar. No obstante, el hecho de que estos métodos se hayan aplicado sin una rigurosa fundamentación matemática y que, en cada problema particular, se utilizasen procedimientos distintos, ha dado lugar a que tuvieran solamente éxito cuando sus resultados concordaban con los obtenidos en la práctica. Evidentemente, cuando se aplica el método de promedios, es necesario conocer la aproximación obtenida en los resultados y su rango de validez.

Fue Bogoliubov (1945, 1950) el que trató los fundamentos matemáticos del método, cuando se aplica a una amplia clase de ecuaciones diferenciales, dando un procedimiento para construir la solución con toda la aproximación deseada.

Bogoliubov consideró un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon X(t, x) \quad (1-1)$$

en donde:

ϵ es un pequeño parámetro positivo

x, X , puntos de un n -dimensional espacio euclídeo E_n

$X(t, x)$ una función periódica respecto a t , con período 2π .

Un sistema de la forma (1-1), con las condiciones anotadas, es llamado por Bogoliubov sistema tipo (Standard). La idea de Bogoliubov consiste en buscar un cambio de variable, de manera que se elimine el tiempo en los segundos miembros de (1-1). De un modo más preciso, se trata de buscar unas funciones periódicas F_1, F_2, \dots, F_m , de t , con período 2π , y tales que, si se aplica la transformación exacta

$$x = \xi + \epsilon F_1(t, \xi) + \dots + \epsilon^m F_m(t, \xi) \quad (1-2)$$

el sistema (1-1) se convierte en el siguiente

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon X_0(\xi) + \epsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \epsilon^m P_m(\xi) + \epsilon^{m+1} R(t, \xi) \quad (1-3)$$

Prescindiendo del término $\epsilon^{m+1} R(t, \xi)$, se obtiene la ecuación promediada de la m -ésima aproximación, esto es,

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon X_0(\xi) + \epsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \epsilon^m P_m(\xi) \quad (1-4)$$

Las funciones $F_i, X_0, P_2, \dots, P_m$ son obtenidas de un modo simple pudiendo llevarse el cálculo hasta el orden m . Por ejemplo, en primer orden, se tiene

$$X_0(\xi) = \langle X(t, \xi) \rangle_t \quad (1-5)$$

$$F_1(t, \xi) = X = \int [X - \langle X \rangle_t] dt$$

donde $\langle X \rangle_t$ representa el valor medio respecto a t para ξ constante.

Como ya hizo notar el mismo Bogoliubov, la hipótesis de que $X(t, x)$ fuese periódica respecto a t con período 2π , puede ser sustituida por la condición más general de existencia del límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x)$$

En realidad la aplicación del método de promedios ha reducido la integración del sistema (1-1) a la del sistema (1-3) que es autónomo y por tanto de más fácil solución que (1-1).

El método, tal como se acaba de describir brevemente, recibió una rigurosa fundamentación matemática, que puede encontrarse en la obra de Bogoliubov y Mitropolsky (1961).

Los autores han estudiado, de una parte, bajo qué condiciones la solución de (1-1) difiere de la solución de

$$\frac{d\xi}{dt} = \in X_0(\xi) \tag{1-6}$$

en una cantidad tan pequeña como se quiera, durante un intervalo de tiempo arbitrariamente grande; de otra, cómo relacionar para un intervalo infinito de tiempo, las propiedades de los sistemas (1-1) y (1-6).

Por su importancia enunciaremos el ya clásico teorema de Bogoliubov.

Si la función $X(t, x)$ satisface las condiciones:

a) Para una cierta región $D \subset E_n$ existen constantes positivas M y λ de modo que

$$\begin{aligned} |X(t, x)| &\leq M \\ |X(t, x') - X(t, x'')| &\leq \lambda |x' - x''| \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ y $x, x', x'' \in D$.

b) Uniformemente respecto a x en la región D , existe el límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x)$$

Entonces, dados ρ y η pequeños y L tan grande como se quiera, existe un $\epsilon_0(\rho, \eta, L)$ de modo que, si $\xi(t)$ es la solución de (1-6) con la condición $\xi(0) = x(0)$, y $\xi(t)$ junto con su ρ -entorno está contenida en D , para $0 \leq t \leq \infty$, se tiene

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta \quad 0 < t < L/\epsilon$$

siempre que $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Este teorema fundamental de Bogoliubov, ha sido generalizado posteriormente en varios aspectos. Mencionaremos sólo las principales contribuciones:

Gikhman (1952), parte de un sistema diferencial

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \lambda) \tag{1-7}$$

donde el parámetro λ toma valores en Λ y tiene λ_0 como punto límite.

Bajo condiciones totalmente análogas a las del teorema anterior demuestra: que si $y(t)$ es solución del sistema promediado correspondiente a (1-7), y siendo $x(0) = y(0)$, se verifica

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)| \rightarrow 0 \quad \lambda \rightarrow \lambda_0$$

El teorema de Gikhman permite obtener como corolario el teorema básico de Bogoliubov.

Demidovich (1954) generalizó el teorema de Bogoliubov para sistemas de la forma

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \epsilon)$$

probando bajo condiciones análogas, que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t, \epsilon) = \xi(t)$$

donde $\xi(t)$ es solución del sistema promediado

$$\frac{d\xi}{dt} = X_0(\xi) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi, \epsilon) dt$$

En esta dirección hay que destacar por último los trabajos de Kurzweil y Vorel (1957), y de Antosiewicz (1963).

Los trabajos de Bogoliubov han sido desarrollados en muchas direcciones; una de las generalizaciones del método de promedios es la desarrollada por Bogoliubov y Zubarev para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales, con una fase rápidamente rotante, de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= X_k(\alpha, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \lambda w(x_1, \dots, x_n) + A(\alpha, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1-8}$$

donde λ es un parámetro grande y X_k y A son funciones periódicas respecto a α con período T . En este caso los autores han probado, que es posible efectuar un cambio de variables, de modo que no figure α en los segundos miembros de las ecuaciones transformadas.

Por su importancia para nuestro trabajo será desarrollada en el párrafo siguiente una modificación de este esquema generalizado de promedios.

Sobre las directrices de Bogoliubov, Volosov (1962) ha construido un esquema más general de promedios; él considera un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \epsilon X(x, y, t; \epsilon) \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y, t; \epsilon) \end{aligned} \tag{1-9}$$

donde x, X son n -dimensional vectores.

y, Y son m -dimensional vectores.

Para $\epsilon = 0$ el sistema (1-9) se reduce al sistema no perturbado

$$\dot{y} = Y_0(x, y, t) \tag{1-10}$$

$$\dot{x} = 0$$

que no sólo se supone resoluble, sino que a lo largo de toda curva integral $y = y(x, t)$ existe el límite

$$\bar{X}_1(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, y(x, t), t, \theta) dt$$

En estas condiciones, se trata de buscar un cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \epsilon u_1(t, \bar{x}, \bar{y}) + \epsilon^2 u_2(t, \bar{x}, \bar{y}) + \dots \\ y &= \bar{y} + \epsilon v_1(t, \bar{x}, \bar{y}) + \epsilon^2 v_2(t, \bar{x}, \bar{y}) + \dots \end{aligned} \quad (1-11)$$

de manera que las ecuaciones transformadas de (1-9) tengan la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \epsilon \bar{X}_1(\bar{x}) + \epsilon^2 \bar{X}_2(\bar{x}) + \dots \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= Y_0(\bar{x}, \bar{y}, t) + \epsilon A_1(\bar{x}) + \dots \end{aligned} \quad (1-12)$$

Volosov ha dado métodos para obtener las funciones u_i, v_i , de modo que las ecuaciones promediadas sean del tipo (1-12) pudiendo llevarse el cálculo hasta el orden que se desee. También ha demostrado teoremas de tipo análogo a los enunciados por Bogoliubov, adecuándolos a su propio esquema de promedios, lo que le permite asegurar el carácter asintótico de las soluciones del sistema promediado (1-12) con las soluciones exactas del sistema (1-9).

En esta introducción sólo hemos mencionado los diferentes métodos de promedios que están relacionados con nuestro problema. Asimismo, debemos indicar que actualmente el método se aplica a una gran variedad de ecuaciones diferenciales: con segundo miembro discontinuo, con parámetros lentamente variables, con argumentos retardados, etc. y también a ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales. Una excelente bibliografía sobre el particular puede encontrarse en el documentado trabajo de Mitropolsky (1967).

2. *Método Generalizado de promedios. Primer caso.* — Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \epsilon f_i(x, \theta; \epsilon) \\ \frac{d\theta}{dt} &= w(x) + \epsilon u(x, \theta; \epsilon) \end{aligned} \quad (2-1)$$

donde se supone que ϵ es un pequeño parámetro y f_i, u , funciones periódicas respecto a θ , con período 2π , que pueden ser desarrolladas respecto al pequeño parámetro en la forma

$$\begin{aligned} f_i(x, \theta; \epsilon) &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^{j-1} f_i^{(j)}(x, \theta) \\ u(x, \theta; \epsilon) &= \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^{j-1} u^{(j)}(x, \theta) \end{aligned} \quad (2-2)$$

siendo $w(x) \neq 0$, en el dominio de consideración de la variable x , de componentes $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. También se supone que $w(x), f_i^{(j)}, u^{(j)}$, son regulares en los dominios de consideración de las variables x, θ .

El problema que se plantea es el de hallar soluciones aproximadas al sistema (2-1), sobre un intervalo de tiempo de amplitud $1/\epsilon$.

Cuando $\epsilon = 0$, las x_i son constantes y la θ función lineal del tiempo. Cuando ϵ es pequeño, pero finito, las x_i experimentan un lento crecimiento secular, sobre el cual van superpuestas fluctuaciones de pequeña amplitud. El lento crecimiento secular es debido fundamentalmente a la variable x y las fluctuaciones a la variable θ , ya que si no figurase la θ en las funciones $f_i(x, \theta, \epsilon)$ los segundos miembros de dx_i/dt serían sensiblemente constantes. Por otra parte, la rápida variación de la variable θ es la que ocasiona las fluctuaciones rápidas de pequeña amplitud, que van superpuestas a las seculares.

Nos proponemos mediante un cambio de variable separar las fluctuaciones rápidas del lento crecimiento secular. De un modo más preciso, se trata de buscar un cambio de variable de la forma

$$x_i = \bar{x}_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) + \dots + \epsilon^p \eta_i^{(p)}(\bar{x}, \bar{\theta}) \quad (2-3)$$

$$\theta = \bar{\theta} + \epsilon \varphi^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) + \dots + \epsilon^p \varphi^{(p)}(\bar{x}, \bar{\theta})$$

donde $\eta_i^{(j)}$, $\varphi^{(j)}$, sean periódicas respecto a θ con período 2π , de suerte que las ecuaciones diferenciales (2-1), en las nuevas variables \bar{x} , $\bar{\theta}$, adquieran la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i}{dt} &= \epsilon M_i^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \epsilon^p M_i^{(p)}(\bar{x}) + \epsilon^{p+1} M_i^{(p+1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= w(\bar{x}) + \epsilon \Omega^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \epsilon^p \Omega^{(p)}(\bar{x}) + \epsilon^{p+1} \Omega^{(p+1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (2-4)$$

Las ecuaciones que resultan de suprimir los términos de ϵ^{p+1} , se llaman ecuaciones promediadas de la p -ésima aproximación: dichas ecuaciones son

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i}{dt} &= \epsilon M_i^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \epsilon^p M_i^{(p)}(\bar{x}) \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= w(\bar{x}) + \epsilon \Omega^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \epsilon^p \Omega^{(p)}(\bar{x}) \end{aligned} \quad (2-5)$$

Evidentemente (2-5) no exhibe en sus segundos miembros las fluctuaciones rápidas de la variable θ que han quedado en (2-3).

Nótese que si se hace $\epsilon = 0$, la transformación (2-3) se reduce a la identidad; de aquí que en las ecuaciones promediadas, se haya elegido el término de orden cero en $\frac{d\bar{\theta}}{dt}$, de modo que sea justamente $w(x)$.

Derivando (2-3) y teniendo en cuenta (2-4) y (2-1), se obtienen desarrollos en potencias de ϵ . Igualando los coeficientes de las potencias respectivas hasta el segundo orden de ϵ resultan las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} M_i^{(1)}(\bar{x}) + w(\bar{x}) \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \bar{\theta}} &= f_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) \\ \Omega^{(1)}(\bar{x}) + w(\bar{x}) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \bar{\theta}} &= \eta_j^{(1)} \frac{\partial w(\bar{x})}{\partial \bar{x}_j} + u^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$\begin{aligned}
 M_i^{(2)}(\bar{x}) + M_j^{(1)}(\bar{x}) \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \bar{x}_j} + \Omega^{(1)}(\bar{x}) \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \bar{\theta}} + w(\bar{x}) \frac{\partial \eta_i^{(2)}}{\partial \bar{\theta}} = \\
 = f_i^{(2)}(\bar{x}, \bar{\theta}) + \eta_j^{(1)} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial \bar{x}_j} + \varphi^{(1)} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial \bar{\theta}}
 \end{aligned} \tag{2-8}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(2)}(\bar{x}) + M_j^{(1)}(\bar{x}) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \bar{x}_j} + \Omega^{(1)}(\bar{x}) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \bar{\theta}} + w(\bar{x}) \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \bar{\theta}} = u^{(2)}(\bar{x}, \bar{\theta}) + \\
 + \eta_j^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \bar{x}_j} + \varphi^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \bar{\theta}} + \eta_j^{(2)} \frac{\partial w(\bar{x})}{\partial \bar{x}_j} + \frac{1}{2} \eta_j^{(1)} \eta_k^{(1)} \frac{\partial^2 w(\bar{x})}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_k}
 \end{aligned} \tag{2-9}$$

Las fórmulas (2-6), (2-7), (2-8), (2-9) constituyen una secuencia de ecuaciones que relacionan las funciones indeterminadas. Cada una de estas ecuaciones es de la forma tipo

$$a(\bar{x}) + w(\bar{x}) \frac{\partial F(\bar{x}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} = A(\bar{x}, \bar{\theta})$$

donde $a(\bar{x})$ y $F(\bar{x}, \bar{\theta})$ son funciones a determinar, la primera de las cuales puede identificarse con $M_j^{(i)}(\bar{x})$ ó $\Omega^{(i)}(\bar{x})$, y la segunda con cualquiera de las funciones $\eta_j^{(i)}(\bar{x}, \bar{\theta})$, $\varphi^{(i)}(\bar{x}, \bar{\theta})$; finalmente $A(\bar{x}, \bar{\theta})$ es una función periódica de $\bar{\theta}$, que es conocida en términos de las soluciones de las ecuaciones precedentes. Esta ecuación diferencial en la que la variable \bar{x} se comporta como parámetro constante, puede ser escrita

$$w(\bar{x}) \frac{\partial F(\bar{x}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} = A(\bar{x}, \bar{\theta}) - a(\bar{x}) \tag{2-11}$$

Ahora bien, si sobre la función F no se hubiera hecho ninguna hipótesis suplementaria, tomando a \bar{x} arbitraria y efectuando la integración se obtendría la correspondiente función $F(\bar{x}, \bar{\theta})$, pero no podemos olvidar que $F(\bar{x}, \bar{\theta})$ ha de ser periódica y regular en el dominio de definición, por tanto, su derivada con respecto a $\bar{\theta}$ no debe contener el término constante del desarrollo en serie de Fourier, lo que hace necesario que se verifique la condición

$$\langle A(\bar{x}, \bar{\theta}) - a(\bar{x}) \rangle_{\bar{\theta}} = 0$$

donde $\langle \rangle_{\bar{\theta}}$ denota el valor medio de la diferencia $A(\bar{x}, \bar{\theta}) - a(\bar{x})$ respecto a $\bar{\theta}$.

Así, pues, $a(\bar{x})$ está unívocamente determinada por la igualdad

$$a(\bar{x}) = \langle A(\bar{x}, \bar{\theta}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\bar{x}, \bar{\theta}) d\bar{\theta}$$

Una vez calculada $a(\bar{x})$, la función F se obtendrá por integración del desarrollo en serie de Fourier de $[A(\bar{x}, \bar{\theta}) - a(\bar{x})]/w(\bar{x})$. Además, como dicho desarrollo carece de término de orden cero, la función F será evidentemente periódica respecto a $\bar{\theta}$ con período 2π .

Nótese que F está indeterminada salvo una función arbitraria de \bar{x} , que se comporta en (2-10) como constante y que no será otra cosa que el valor medio de F .

Después de esta discusión, operemos directamente en las ecuaciones (2-6) y (2-7), con el fin de obtener los resultados hasta el primer orden. Para (2-6), resulta

$$M_i^{(1)}(\bar{x}) = \langle f_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) \rangle_{\bar{\theta}} \quad (2-12)$$

$$w(\bar{x}) \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \bar{\theta}} = f_i^{(1)} - \langle f_i^{(1)} \rangle_{\bar{\theta}} \quad (2-13)$$

La integración de esta última nos proporciona las funciones en la forma

$$\eta_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) = \Phi_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) + \rho_i^{(1)}(\bar{x}) \quad (2-14)$$

siendo $\Phi_i^{(1)}$ la integral indefinida del segundo miembro de (2-13) y $\rho_i^{(1)}$ la función arbitraria de \bar{x} que se ha introducido en la integración de (2-13).

En segundo lugar, desde (2-7), tendremos

$$\Omega^{(1)} = \langle u^{(1)} \rangle_{\bar{\theta}} + \rho_j^{(1)} \frac{\partial w}{\partial \bar{x}_j} \quad (2-15)$$

$$w(\bar{x}) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \bar{\theta}} = u^{(1)} - \langle u^{(1)} \rangle_{\bar{\theta}} + \Phi_j^{(1)} \frac{\partial w}{\partial \bar{x}_j} \quad (2-16)$$

e integrando para (2-16), se llega a una expresión del tipo

$$\varphi^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) = \Psi^{(1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) + v^{(1)}(\bar{x}) \quad (2-17)$$

donde $\Psi^{(1)}$ representa la integral indefinida del segundo miembro de (2-16), dividido por $w(\bar{x})$ y $v^{(1)}(\bar{x})$ una función indeterminada introducida en esta última integración.

Hemos visto que, efectuando la transformación exacta (2-3) en las ecuaciones diferenciales (2-1), el sistema en las nuevas variables toma la forma (2-4). Por tanto, si se resuelve el sistema (2-4) y sus soluciones se sustituyen en (2-3), se tiene la solución exacta de (2-1). En estas condiciones, queremos estudiar brevemente la precisión de los resultados obtenidos, cuando en lugar de trabajar con las ecuaciones (2-4), lo hacemos con las ecuaciones (2-5) en una aproximación de orden p , durante un intervalo de tiempo de magnitud $1/\epsilon$.

Observemos que, en el sistema (2-5), sus n primeras ecuaciones son independientes de la $(n+1)$ -ésima; entonces, habrá que resolver este sistema de orden n , y con sus soluciones entrar en la ecuación de $d\bar{\theta}/dt$, obteniendo $\bar{\theta}$ por una cuadratura.

El problema puede ser formulado así: Dados los sistemas (en forma vectorial)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \epsilon M^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \epsilon^p M^{(p)}(\bar{x}) + \epsilon^{p+1} M^{(p+1)}(\bar{x}, \bar{\theta}) \quad (2-18)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon M^{(1)}(\xi) + \dots + \epsilon^p M^{(p)}(\xi) \quad (2-19)$$

y dos soluciones $\bar{x}(t)$, $\xi(t)$, con las condiciones iniciales $\bar{x}(0) = \xi(0)$, calcular el orden de la diferencia $|\bar{x}(t) - \xi(t)|$ en un intervalo de tiempo de magnitud $1/\epsilon$.

Para su solución utilizaremos un recurso clásico de ecuaciones diferenciales. Por sustracción de (2-18) y (2-19), tenemos

$$\frac{d(\bar{x} - \xi)}{dt} = \sum_{j=1}^p \epsilon^j [M^{(j)}(\bar{x}) - M^{(j)}(\xi)] + \epsilon^{p+1} M^{(p+1)}(\bar{x}, \bar{\theta})$$

y suponiendo que las funciones $M^{(j)}$ ($1 \leq j \leq p$) verifican la condición de Lipschitz, con constantes $\lambda^{(j)}$, resulta

$$\left| \frac{d(\bar{x} - \xi)}{dt} \right| \leq \left(\sum_{j=1}^p \lambda^{(j)} \epsilon^j \right) |\bar{x} - \xi| + |\epsilon^{p+1} M^{(p+1)}(\bar{x}, \bar{\theta})|$$

Como sabemos, un conocido teorema de acotación de ecuaciones diferenciales, nos permite escribir

$$|\bar{x}(t) - \xi(t)| \leq \int_0^t e^{\left(\sum_{j=1}^p \lambda^{(j)} \epsilon^j\right)(t-\tau)} |\epsilon^{p+1} M^{(p+1)}(\bar{x}, \bar{\theta})| d\tau$$

De esta acotación, para $t = 1/\epsilon$, se puede deducir la que sigue

$$|\bar{x}(t) - \xi(t)| \leq e^{\left(\sum_{j=1}^p \lambda^{(j)} \epsilon^{j-1}\right)} |\epsilon|^{p+1} \int_0^t |M^{(p+1)}| d\tau$$

y si además suponemos que M está acotada por una constante C , en el dominio de definición, se obtiene finalmente

$$|\bar{x}(t) - \xi(t)| \leq C |\epsilon|^p e^{\left(\sum_{j=1}^p \lambda^{(j)} \epsilon^{j-1}\right)}$$

Resulta, pues, que si denotamos por $\bar{x}^{(p)}$ la solución de la aproximación p -ésima, es

$$\bar{x} - \bar{x}^{(p)} = O(\epsilon^p)$$

Por tanto, al sustituir ésta en la ecuación

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = w(\bar{x}) + \dots + \epsilon^{p-1} \Omega^{(p-1)}(\bar{x}) + \epsilon^p \Omega^{(p)}(\bar{x})$$

no es necesario tener en cuenta el término de ϵ^p , y ahora un razonamiento análogo al anterior, nos asegura que la $\bar{\theta}$ es obtenida con una aproximación ϵ^{p-1} , lo que escribiremos

$$\bar{\theta} - \bar{\theta}^{(p-1)} = O(\epsilon^{p-1})$$

Resulta de aquí que, trabajando en un intervalo de tiempo de amplitud $1/\epsilon$, y conociendo la aproximación de orden p para \bar{x} , se obtiene en general la $(p-1)$ aproximación para $\bar{\theta}$, aunque hay ciertos casos particulares en los que se obtiene la p -ésima aproximación para $\bar{\theta}$, por ejemplo, si w es constante.

Así, una vez obtenidas $\bar{x}^{(p)}$ y $\bar{\theta}^{(p-1)}$, si las llevamos a las expresiones (2-3), obtenemos unas funciones $\bar{x}^{(p)}$ y $\bar{\theta}^{(p-1)}$, dadas por las fórmulas

$$\begin{aligned} x_i^{(p)} &= \bar{x}_i^{(p)} + \epsilon \eta_i^{(1)}(\bar{x}_i^{(p)}, \bar{\theta}^{(p-1)}) + \dots + \epsilon^{p-1} \eta_i^{(p-1)}(\bar{x}_i^{(p)}, \bar{\theta}^{(p-1)}) \\ \theta^{(p-1)} &= \bar{\theta}^{(p-1)} + \epsilon \varphi^{(1)}(\bar{x}^{(p)}, \bar{\theta}^{(p-1)}) + \dots + \epsilon^{p-2} \varphi^{(p-2)}(\bar{x}^{(p)}, \bar{\theta}^{(p-1)}) \end{aligned}$$

de modo que sus aproximaciones serán del orden

$$\begin{aligned} x_i - x_i &= O(\epsilon^p) \\ \theta - \theta^{(p-1)} &= O(\epsilon^{p-1}) \end{aligned}$$

3. Aplicación del método de promedios a sistemas canónicos

En este párrafo tratamos de aplicar el método generalizado de promedios al caso particular en el que las ecuaciones de partida tengan forma canónica. Analizando los resultados obtenidos se verá que, hasta segundo orden el método de Von Zeipel es un caso particular de nuestro esquema generalizado de promedios. Resultados análogos hasta primer orden, aunque en una forma ligeramente distinta han sido deducidos anteriormente por Morrison (1966).

Sea un sistema canónico de n grados de libertad y función hamiltoniana $F = F(p, q; \epsilon)$ con $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ verificando las condiciones siguientes:

a) ϵ es un pequeño parámetro.

b) $F(p, q; \epsilon)$ es desarrollable en términos del pequeño parámetro, en un cierto entorno de $\epsilon = 0$, en la forma

$$F(p, q; \epsilon) = F_0(q_1) + \epsilon F_1(p, q) + \epsilon^2 F_2(p, q) + \dots$$

c) Las funciones F_i son analíticas en un cierto dominio D del espacio fásico (p, q) , y periódicas respecto a p_1

d) En el citado dominio, se verifica $w(q_1) = -\frac{\partial F_0(q_1)}{\partial q_1} \neq 0$.

H. von Zeipel (1916), dio un método para eliminar fluctuaciones rápidas debidas a la variable p_1 , manteniendo la forma canónica de las ecuaciones. Desde un punto de vista analítico, se trata de encontrar una transformación, desde las variables (p, q) a las variables (\bar{p}, \bar{q}) , de modo que \bar{p}_1 no figure en el nuevo hamiltoniano. La manera más cómoda de realizarlo consiste en encontrar una adecuada función generatriz $S = S(p, \bar{q}; \epsilon)$.

Notemos que para $\epsilon = 0$, $F(p, q; 0) = F_0(p_1)$; por tanto, será suficiente elegir $S(p, \bar{q}; \epsilon)$ tal que, para $\epsilon = 0$, genere la transformación idéntica. Entonces la función generatriz tendrá la forma

$$S(p, \bar{q}; \epsilon) = p^j \bar{q}^j + \epsilon S_1(p^j, \bar{q}^j) + \dots \quad (3-1)$$

y las ecuaciones de transformación correspondientes a esta función generatriz, pueden ponerse

$$\begin{aligned} q_i &= \bar{q}_i + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial p_i} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial p_i} + \dots \\ \bar{p}_j &= p_j + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{q}_j} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \bar{q}_j} + \dots \end{aligned} \quad (3-2)$$

Como $\det(S_{p_i \bar{q}_j}) = 1 + \epsilon \dots$; para ϵ suficientemente pequeño es $\det(S_{p_i \bar{q}_j}) \neq 0$, las ecuaciones (3-2) definen, de un modo implícito, una transformación del dominio $D(p, q)$ en otro $\bar{D}(\bar{p}, \bar{q})$.

Veamos ahora que pueden calcularse las k primeras funciones S_1, S_2, \dots, S_k de manera que el nuevo hamiltoniano $F^* = F_0(\bar{q}_1) + \epsilon F_1^*(\bar{p}_\alpha; \bar{q}_j) + \dots$ no contenga la variable \bar{p}_1 hasta el orden $k + 1$, y además, las funciones S_i ($1 \leq i \leq k$) sean periódicas respecto a p_1 , con período 2π .

En efecto, por tratarse de una transformación canónica conservativa, el nuevo hamiltoniano F^* es igual al antiguo en virtud de las ecuaciones de transformación.

Identificando F y F^* en las variables (p, \bar{q}) , en órdenes sucesivos, resultan las siguientes ecuaciones:

Para el primer orden

$$F_0' \frac{\partial S_1}{\partial p_1} + F_1 = F_1^* \quad (3-3)$$

Para el segundo orden

$$F_0' \frac{\partial S_2}{\partial p_1} + \frac{1}{2} F_0'' \left(\frac{\partial S_1}{\partial p_1} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial S_1}{\partial p_i} + F_2 = F_2^* + \frac{\partial F_1^*}{\partial p_\alpha} \frac{\partial S_1}{\partial \bar{q}_\alpha} \quad (3-4)$$

(la utilización del índice latino repetido indica sumación desde 1 hasta n , mientras que para el índice griego la sumación va desde 2 hasta n).

La ecuación para un orden k cualquiera, tiene la siguiente forma

$$F_0' \frac{\partial S_k}{\partial p_1} + A(p, \bar{q}) + F_k(p, \bar{q}) = F_k^*(p, \bar{q})$$

siendo $A(p, \bar{q})$ periódica respecto a p_1 , con período 2π . Entonces se elige

$$F_k^* = \langle A(p, \bar{q}) + F_k(\bar{p}, \bar{q}) \rangle_{p_1}$$

y

$$F_0' \frac{\partial S_k}{\partial p_1} = - \{ A(p, \bar{q}) + F_k(p, \bar{q}) \}_{p_1}$$

con lo cual S_k es periódica respecto a p_1 , con período 2π .

Aplicando este razonamiento, en primer orden, y poniendo $F_1 = F_1^* + F_{1p}$, donde F_{1p} representa la parte periódica de F_1 , con respecto a p_1 , y F_1^* el promedio

$$F_1^* = \langle F_1(p, q) \rangle_{p_1} \quad (3-5)$$

resulta

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_1} = - \frac{1}{F_0'} F_{1p}$$

de donde por simple integración, se deduce

$$S_1 = - \frac{1}{F_0'} \int F_{1p} dp_1 = \tilde{F}_1 \quad (3-6)$$

Para el segundo orden, un cálculo análogo, nos da

$$F_2^* = \left\langle F_2 + \frac{1}{2} F_0'' \left(\frac{\partial S_1}{\partial p_1} \right)^2 + \frac{\partial F_{1p}}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial p_i} \right\rangle_{p_1} \quad (3-7)$$

$$F_0' \frac{\partial S_2}{\partial p_1} = - \left\{ F_2 + \frac{1}{2} F_0'' \left(\frac{\partial S_1}{\partial p_1} \right)^2 + \frac{\partial F_{1p}}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial p_i} \right\}_{p_1} + \frac{\partial F_1^*}{\partial p_\alpha} \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial S_1}{\partial p_i} \quad (3-8)$$

Aplicamos el método generalizado de promedios a un sistema hamiltoniano, en las condiciones citadas al principio de este párrafo.

Hasta el segundo orden, las ecuaciones de Hamilton, pueden ser escritas

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial p_i} + \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial p_i} + \dots \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} - \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} + \dots \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial F_0}{\partial q_1} - \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial q_1} - \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial q_1} - \dots \end{aligned} \quad (3-9)$$

advirtiendo que en este y en sucesivos sistemas, se convendrá en que los subíndices i, j, k , toman valores desde 1 hasta n , mientras que los subíndices α, β , lo hacen desde 2 hasta n ; asimismo, por comodidad, se usará la notación $w(q_1) = -\partial F_0(q_1)/\partial q_1$.

El método generalizado de promedios consistirá, en este caso especial, en buscar una transformación del tipo

$$\begin{aligned} q_i &= \bar{q}_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(\bar{p}, \bar{q}) + \epsilon^2 \eta_i^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}) \\ p_\alpha &= \bar{p}_\alpha + \epsilon \gamma_\alpha^{(1)}(\bar{p}, \bar{q}) + \epsilon^2 \gamma_\alpha^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}) \\ p_1 &= \bar{p}_1 + \epsilon \varphi^{(1)}(\bar{p}, \bar{q}) + \epsilon^2 \varphi^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}) \end{aligned} \quad (3-10)$$

donde las funciones de los segundos miembros de (3-10), son periódicas con período 2π , de tal modo que las ecuaciones en las variables (\bar{p}, \bar{q}) tengan la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_i}{dt} &= \epsilon Q_i^{(1)} + \epsilon^2 Q_i^{(2)} + \epsilon^3 Q_i^{(3)}(\bar{p}, \bar{q}; \epsilon) \\ \frac{d\bar{p}_\alpha}{dt} &= \epsilon P_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 P_\alpha^{(2)} + \epsilon^3 P_\alpha^{(3)}(\bar{p}, \bar{q}; \epsilon) \\ \frac{d\bar{p}_1}{dt} &= w(\bar{q}_1) + \epsilon \Omega^{(1)} + \epsilon^2 \Omega^{(2)} + \epsilon^3 \Omega^{(3)}(\bar{p}, \bar{q}; \epsilon) \end{aligned} \quad (3-11)$$

donde se supone que, para $j = 1, 2$, las funciones $Q_i^{(j)}, P_\alpha^{(j)}, \Omega^{(j)}$, no dependen del argumento p_1 .

Resultados de primer orden:

Las ecuaciones (2-6), (2-7), son en nuestro caso

$$\begin{aligned} Q_i^{(1)} + w(\bar{q}_1) \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \bar{p}_1} &= \frac{\partial F_1}{\partial \bar{p}_i} \\ P_\alpha^{(1)} + w(\bar{q}_1) \frac{\partial \gamma_\alpha^{(1)}}{\partial \bar{p}_1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_\alpha} \\ \Omega^{(1)} + w(\bar{q}_1) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \bar{p}_1} &= \eta_1^{(1)} \frac{\partial w(q_1)}{\partial \bar{q}_1} - \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_1} \end{aligned}$$

y denotando por F_1^* el valor medio de F_1 respecto a p_1 , se deducen los siguientes resultados

$$\begin{aligned} Q_i^{(1)} &= \frac{\partial F_1^*}{\partial p_i} & \eta_i^{(1)} &= \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial p_i} + c_i \\ P_\alpha^{(1)} &= -\frac{\partial F_1^*}{\partial q_\alpha} & \gamma_\alpha^{(1)} &= -\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial q_\alpha} + d_\alpha \\ \Omega^{(1)} &= c_1 w' - \frac{\partial F_1^*}{\partial q_1} & \varphi^{(1)} &= -\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial q_1} + e_1 \end{aligned} \quad (3-12)$$

siendo c_i ; d_α ; e_1 , funciones arbitrarias de todas las variables, excepto de p_1 . Evidentemente, si se hace $c_1 = 0$, las ecuaciones promediadas hasta primer orden tienen forma canónica y coinciden con las obtenidas por el método de von Zeipel.

Resultados de segundo orden:

Desde la ecuación (2-8) del epígrafe anterior, tomando la parte secular, se llega a los siguientes resultados

$$\begin{aligned} Q_i^{(2)} &= -Q_j^{(1)} \frac{\partial c_i}{\partial q_j} - P_\alpha^{(1)} \frac{\partial c_i}{\partial p_\alpha} + c_j \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial q_j \partial p_i} + d_\alpha \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial p_\alpha \partial p_i} + \frac{\partial S^*}{\partial p_i} \\ P_\beta^{(2)} &= -Q_j^{(1)} \frac{\partial d_\beta}{\partial q_j} - P_\alpha^{(1)} \frac{\partial d_\beta}{\partial p_\alpha} - c_j \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial q_j \partial q_\beta} - d_\alpha \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial p_\alpha \partial q_\beta} - \frac{\partial S^*}{\partial q_\beta} \end{aligned} \quad (3-13)$$

siendo S^* la parte secular de la función

$$S = F_2 + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial p_j} \frac{\partial F_{1p}}{\partial q_j} - \frac{w'}{2w^2} F_{1p}^2$$

y

$$\eta_i^{(2)} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ [\tilde{F}_1, F_1^*] + \tilde{S} + \tilde{F}_1 \frac{\partial F_1^*}{\partial q_1} \frac{1}{w} \right\} - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \tilde{F}_1}{\partial p_j \partial p_i} + c_\alpha \frac{\partial^2 \tilde{F}_1}{\partial q_\alpha \partial q_i} - d_\alpha \frac{\partial^2 \tilde{F}_1}{\partial p_\alpha \partial p_i} \quad (3-15)$$

$$\gamma_\beta^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial q_\beta} \left\{ [\tilde{F}_1, F_1^*] + \tilde{S} + \tilde{F}_1 \frac{\partial F_1^*}{\partial q_1} \frac{1}{w} \right\} + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \tilde{F}_1}{\partial p_j \partial q_\beta} - c_\alpha \frac{\partial^2 \tilde{F}_1}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} - d_\alpha \frac{\partial^2 \tilde{F}_1}{\partial p_\alpha \partial q_\beta}$$

En estas expresiones de $\eta_i^{(2)}$; $\gamma_\beta^{(2)}$; faltan las constantes introducidas en la integración respecto a p_1 , y podrán ser consideradas como funciones arbitrarias de todas las variables, excepto p_1 .

Finalmente, para $\Omega^{(2)}$ se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \Omega^{(2)} &= -Q_j^{(1)} \frac{\partial e_1}{\partial q_j} - P_\alpha^{(1)} \frac{\partial e_1}{\partial p_\alpha} - c_j^{(1)} \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial q_j \partial q_1} - d_\alpha^{(1)} \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial p_\alpha \partial q_1} - \frac{\partial S^*}{\partial q_1} \\ &+ \left\langle -\frac{w'}{w^2} \frac{\partial I(F_{1p})}{\partial p_\alpha} \frac{\partial F_{1p}}{\partial q_\alpha} - \frac{w'^2}{w^3} F_{1p}^2 - \frac{w'}{w^2} F_{1p} \frac{\partial F_{1p}}{\partial q_1} \right\rangle_{p_1} + c_1^{(2)} w' \end{aligned} \quad (3-16)$$

siendo $c_1^{(2)}$ la constante obtenida en la integración de $\eta_1^{(2)}$ e $I(F_{1p}) = \int F_{1p} dp_1$.

Comparando estos resultados con los obtenidos por el método de von Zeipel, se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1.º Si se eligen $c_i = d_\beta = 0$, se tendrá

$$Q_i^{(2)} = \frac{\partial S^*}{\partial \bar{p}_i} \qquad P_\beta^{(2)} = -\frac{\partial S^*}{\partial \bar{q}_\beta}$$

y las ecuaciones para las derivadas $d\bar{q}_i/dt$, $d\bar{p}_\beta/dt$ coinciden con las obtenidas por el método de von Zeipel.

2.º Por lo que respecta a la ecuación (3-16), eligiendo $e_1 = 0$, queda

$$\Omega^{(2)} = -\frac{\partial S^*}{\partial \bar{q}_1} + \left\langle -\frac{w'}{w^2} \frac{\partial I(F_{1p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial F_{1p}}{\partial \bar{q}_\alpha} - \frac{w'}{w^3} F_{1p}^2 - \frac{w'}{w^2} F_{1p} \frac{\partial F_{1p}}{\partial \bar{q}_1} \right\rangle_{p_1} + c_1^{(2)} w'$$

Entonces para lograr los resultados de von Zeipel, se hace necesario elegir

$$c_1^{(2)} = -\frac{1}{w'} \left\langle -\frac{w'}{w^2} \frac{\partial I(F_{1p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial F_{1p}}{\partial \bar{q}_\alpha} - \frac{w'}{w^3} F_{1p}^2 - \frac{w'}{w^2} F_{1p} \frac{\partial F_{1p}}{\partial \bar{q}_1} \right\rangle_{p_1}$$

con lo cual nos quedaría

$$\Omega^{(2)} = -\frac{\partial S^*}{\partial \bar{q}_1}$$

4. Método generalizado de promedios. Segundo caso

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \epsilon f_i^{(1)}(x, \theta) + \epsilon^2 f_i^{(2)}(x, \theta) + \dots \\ \frac{d\theta}{dt} &= w^{(0)}(x, \theta) + \epsilon w^{(1)}(x, \theta) + \dots \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \dots, r \qquad (4-1)$$

donde ϵ es un pequeño parámetro.

$f_i^{(j)}$, $w^{(j)}$, funciones periódicas respecto a θ con período 2π , regulares en los dominios de consideración de las variables x , θ .

Se trata, como vemos, de un sistema con una fase rápidamente rotante θ , pero a diferencia del primer caso, la razón de variación de esta $w^{(0)}(x, \theta)$, depende de θ .

Hay varios procedimientos para eliminar la fase rápidamente rotante en un sistema de este tipo. Un procedimiento podría ser el introducir θ como nueva variable independiente y aplicar el método ordinario de promedios. Un segundo camino podría ser la definición de un nuevo argumento variable ψ por la expresión

$$\psi = \int_0^\theta \Gamma(x, \varphi) \frac{d\varphi}{\gamma(x)} \qquad (4-2)$$

siendo

$$\Gamma(x, \varphi) = \frac{1}{w^{(0)}(x, \varphi)}, \quad \gamma(x) = \langle \Gamma(x, \varphi) \rangle_\varphi$$

Es fácil comprobar que, en este caso, las ecuaciones diferenciales tienen forma apropiada para aplicar el método generalizado de promedios en su primer caso. De todos modos, este segundo camino tiene el inconveniente de no permitir, en general, despejar θ en función de ψ , en la fórmula (4-2), y en estas condiciones el efectuar la transformación sobre (4-1), resultará lógicamente impracticable.

Tal dificultad puede ser soslayada utilizando la integral $\int_0^\chi [\Gamma(\bar{x}, \varphi) / \gamma(\bar{x})] d\varphi$ como nueva variable y promediando sobre χ . De un modo más preciso, vamos a buscar una transformación

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{x}_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(\bar{x}, \chi) + \dots + \epsilon^p \eta_i^{(p)}(\bar{x}, \chi) \\ \theta &= \chi + \epsilon u^{(1)}(\bar{x}, \chi) + \dots + \epsilon^p u^{(p)}(\bar{x}, \chi) \end{aligned} \quad (4-3)$$

con $\eta_i^{(j)}$, $u^{(j)}$, funciones periódicas respecto a χ , con período 2π , de modo que las derivadas de las nuevas variables \bar{x}_i , χ , puedan ser escritas en la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i}{dt} &= \epsilon T_i^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \epsilon^p T_i^{(p)}(\bar{x}) + \epsilon^{p+1} T_i^{(p+1)}(\bar{x}, \chi; \epsilon) \\ \frac{d}{dt} \left[\int_0^\chi \Gamma(\bar{x}, \varphi) \frac{d\varphi}{\gamma(\bar{x})} \right] &= \frac{1}{\gamma(\bar{x})} [1 + \epsilon W^{(1)}(\bar{x}) + \dots \\ &\dots + \epsilon^p W^{(p)}(\bar{x}) + \epsilon^{p+1} W^{(p+1)}(\bar{x}, \chi; \epsilon)] \end{aligned} \quad (4-4)$$

Antes de llevar a cabo este proceso, pongamos

$$\Omega_i(\bar{x}, \chi) = -\gamma(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[\int_0^\chi \Gamma(\bar{x}, \varphi) \frac{d\varphi}{\gamma(\bar{x})} \right] \quad (4-5)$$

Derivando la segunda de las ecuaciones (4-4) y teniendo en cuenta (4-5), se obtiene

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{\Gamma(\bar{x}, \chi)} \{1 + \epsilon [\Omega_j T_j^{(1)} + W^{(1)}] + \epsilon^2 [\Omega_j T_j^{(2)} + W^{(2)}] + \dots\} \quad (4-6)$$

Derivando (4-3) y sustituyendo por medio de (4-1), (4-4), (4-6), después de igualar los coeficientes de las respectivas potencias de ϵ , se obtienen, en primer orden, las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} T_i^{(1)}(\bar{x}) + \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \chi} \frac{1}{\Gamma(\bar{x}, \chi)} &= f_i^{(1)}(\bar{x}, \chi) \\ \frac{1}{\Gamma} (\Omega_j T_j^{(1)} + W^{(1)}) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \chi} \frac{1}{\Gamma} &= \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{x}_j} \eta_j^{(1)} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \chi} u^{(1)} + w^{(1)} \end{aligned}$$

que pueden ser escritas

$$\frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \chi} = \Gamma(\bar{x}, \chi) [f_i^{(1)}(\bar{x}, \chi) - T_i^{(1)}(\bar{x})] \quad (4-7)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \chi} - \Gamma \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \chi} u^{(1)} = \Gamma w^{(1)} - \Omega_j T_j^{(1)} - W^{(1)} \quad (4-8)$$

De forma análoga se llega a ver sin dificultad que las ecuaciones correspondientes de orden k tienen la forma

$$\frac{\partial \eta_i^{(k)}}{\partial \chi} = \Gamma(\bar{x}, \chi) [\Phi_i^{(k)}(\bar{x}, \chi) - T_i^{(k)}(\bar{x})] \quad (4-9)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial \chi} - \Gamma \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \chi} u^{(k)} = \Psi^{(k)} - W^{(k)} \quad (4-10)$$

con $\Phi_i^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$, funciones perfectamente definidas por las anteriores operaciones.

Veamos cómo pueden determinarse las funciones $\eta_i^{(k)}$, $u^{(k)}$, $T_i^{(k)}$, $W^{(k)}$, cumpliendo los requerimientos anteriores. Primeramente observemos que el segundo miembro de (4-9) debe tener valor medio cero respecto a χ , para que $\eta_i^{(k)}$ sea periódica con respecto a dicha variable. Por tanto, $T_i^{(k)}(\bar{x})$ estará dado por

$$\gamma(\bar{x}) T_i^{(k)}(\bar{x}) = \langle \Gamma(\bar{x}, \chi) \Phi_i^{(k)}(\bar{x}, \chi) \rangle_\chi$$

Elegido $T_i^{(k)}$ de este modo, $\eta_i^{(k)}$ se determina por una cuadratura. En cuanto a (4-10), la solución de la ecuación homogénea correspondiente, es $u^{(k)} = C w^{(0)}$ y la de la completa se obtiene sin dificultad por el método de variación de constantes, resultando

$$u^{(k)} = C w^{(0)} + w^{(0)} \int \Gamma(\bar{x}, \chi) [\Psi^{(k)} - W^{(k)}] d\chi$$

Para que $u^{(k)}$ sea periódica respecto a χ , será suficiente elegir $W^{(k)}$ de modo que sea

$$\langle \Gamma(\bar{x}, \chi) [\Psi^{(k)} - W^{(k)}] \rangle_\chi = 0$$

es decir

$$\gamma(\bar{x}) W^{(k)} = \langle \Gamma(\bar{x}, \chi) \Psi^{(k)} \rangle_\chi$$

Esta discusión aplicada a las ecuaciones de primer orden (4-7), (4-8), dan lugar a las siguientes

$$\gamma(\bar{x}) T_i^{(1)}(\bar{x}) = \langle \Gamma(\bar{x}, \chi) f_i^{(1)}(\bar{x}, \chi) \rangle_\chi \quad (4-11)$$

$$\frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial \chi} = \Gamma(\bar{x}, \chi) f_i^{(1)}(\bar{x}, \chi) - \langle \Gamma(\bar{x}, \chi) f_i^{(1)}(\bar{x}, \chi) \rangle_\chi$$

$$\gamma(\bar{x}) W^{(1)}(\bar{x}) = \langle \Gamma(\bar{x}, \chi) (\Gamma w^{(1)} - \Omega_j T_j^{(1)}) \rangle_\chi \quad (4-12)$$

$$u^{(1)} = w^{(0)} \int \left\{ \Gamma(\bar{x}, \chi) (\Gamma w^{(1)} - \Omega_j T_j^{(1)}) - \langle \Gamma(\bar{x}, \chi) (\Gamma w^{(1)} - \Omega_j T_j^{(1)}) \rangle_\chi \right\} d\chi$$

En esta última se ha elegido nula la constante de integración.

II.— Aplicación de los métodos de promedios al movimiento de un Satélite Artificial

5. Ecuaciones del movimiento de un satélite artificial

El potencial gravitatorio creado por la distribución de masa de la Tierra, en un punto exterior, puede escribirse, por medio de un desarrollo de Legendre, en la forma

$$U = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^n}{r^n} J_n P_n(\cos \varphi) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^n}{r^n} J_{nk} P_n^k(\cos \varphi) \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \right\}$$

siendo

$$\mu = GM = 398.580 \text{ km.}^3/\text{seg.}^2$$

$$R = \text{radio ecuatorial terrestre} = 6.378,160 \text{ kms.}$$

r = distancia al centro de masas de la Tierra.

φ = latitud geocéntrica.

λ = longitud terrestre (contada como positiva hacia el Este).

P_n, P_n^k , polinomios de Legendre y polinomios asociados de Legendre respectivamente.

$J_n, J_{nk}, \lambda_{nk}$, constantes que dependen de la distribución de masas de la Tierra.

Si se admite que la Tierra tiene simetría alrededor de su eje polar, el potencial será independiente de la longitud y se reducirá a la forma

$$U = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^n}{r^n} J_n P_n(\text{sen } \varphi) \right\} \quad (5-1)$$

En este caso, la función hamiltoniana que describe el movimiento de un satélite artificial bajo la acción exclusiva de efectos gravitatorios terrestres, es en coordenadas esféricas, la siguiente:

$$F = T + U = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U$$

De igual modo, cuando efectuamos una transformación canónica a las variables de Delaunay:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & l &= \text{anomalía media} \\ G &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)} & g &= \text{argumento del perigeo} \\ H &= G \cos I & h &= \text{long. del nodo ascendente} \end{aligned} \quad (5-2)$$

la función hamiltoniana llega a ser

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \frac{R^n}{r^n} P_n(\text{sen } \varphi) \quad (5-3)$$

donde r y φ han de suponerse expresadas en función de los elementos de Delaunay, por las fórmulas usuales del problema de dos cuerpos. Por otro lado L, G, H , funcionan como coordenadas y l, g, h , como momentos, de modo que ha habido una inversión de coordenadas y momentos, junto con un cambio de signo de la función hamiltoniana.

Poniendo $J_2 = \epsilon$, que será considerado en lo sucesivo como un pequeño parámetro, resulta

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu^2}{2L^2} + \epsilon \frac{\mu^4 R^2}{2L^6} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3H^2}{2G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3H^2}{2G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g+2f) \right] + \\ &+ \frac{\mu}{r} \sum_{n=3}^{\infty} J_n \frac{R^n}{r^n} P_n(\text{sen } \varphi) \end{aligned} \quad (5-4)$$

siendo los términos del sumatorio de orden igual o superior a ϵ^2 , es decir, que se admite un desarrollo de la función hamiltoniana, del tipo

$$F = F_0 + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots \quad (5-5)$$

donde los términos F_0, F_1 , son

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} \quad (5-6)$$

$$F_1 = \frac{\mu^4 R^2}{2L^6} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f) \right]$$

En resumen, hasta el segundo orden, las ecuaciones del movimiento del satélite, en las variables del Delaunay, son

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial l} + \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial l} \\ \frac{dG}{dt} &= \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial g} + \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial g} \\ \frac{dH}{dt} &= \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial h} + \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial h} \\ \frac{dg}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1}{\partial G} - \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial G} \\ \frac{dh}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1}{\partial H} - \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial H} \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F_0}{\partial L} - \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial L} - \epsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial L} \end{aligned} \quad (5-7)$$

Sobre ellas haremos las siguientes observaciones:

1.º Debido a la supuesta simetría rotacional del potencial terrestre, la variable angular h no figura en F , conservándose su momento conjugado H , que representa la proyección del momento angular sobre el eje polar.

2.º Las ecuaciones (5-7) son singulares para $e = 0$, en cuyo caso, las variables L y G verifican la igualdad $L = G$. De un modo más concreto, vemos que los segundos miembros de las derivadas dg/dt , dh/dt , contienen términos de la forma

$$\frac{\partial F_1}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G} \quad \frac{\partial F_1}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial L}$$

Por tanto, observando que

$$\frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{1}{e} \frac{G}{L^2} \quad \frac{\partial e}{\partial L} = \frac{1}{e} \frac{G^2}{L^3}$$

y que la derivada $\frac{\partial F_1}{\partial e}$ es regular, no nula para $e = 0$, se comprueba fácilmente la naturaleza de esta singularidad.

3.º Notemos finalmente que el sistema (5-7) está puesto en forma adecuada para que le sea aplicado el método generalizado de promedios, cuando las ecuaciones de par-

tida tienen forma canónica, siendo ahora $q_i = (L; G; H)$, $p_\alpha = (g; h)$ y $p_1 = 1$ la variable correspondiente a la fase rápidamente rotante. Es fácil comprobar que el sistema (5-7) satisface todas las condiciones impuestas en el capítulo anterior, en un dominio de las variables de Delaunay que excluya un cierto entorno de los valores $L = G$ ($e = 0$), $G = 0$ ($e = 1$).

6. Resultados de primer orden

De acuerdo con (2-12), e indicando con una raya superior las variables promediadas, se tienen los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{L}}{dt} &= \epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{l}} = \epsilon Q_1^{(1)} \\
 \frac{d\bar{G}}{dt} &= \epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial g} = \epsilon Q_2^{(1)} \\
 \frac{d\bar{H}}{dt} &= \epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial h} = \epsilon Q_3^{(1)} \\
 \frac{d\bar{g}}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{G}} = \epsilon P_2^{(1)} \\
 \frac{d\bar{h}}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{H}} = \epsilon P_3^{(1)} \\
 \frac{d\bar{l}}{dt} &= w(\bar{L}) + \epsilon \Omega^{(1)} = w(\bar{L}) - \epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{L}}
 \end{aligned} \tag{6-1}$$

donde se han elegido $c_1 = e_1 = C$, y se han completado las notaciones

$$\begin{aligned}
 w(\bar{L}) &= -\frac{\partial F_0(\bar{L})}{\partial \bar{L}} \\
 F_1^* &= \langle F_1 \rangle_l = \frac{\mu^4 R^3}{2 \bar{L}^3 \bar{G}^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right)
 \end{aligned} \tag{6-2}$$

Por consiguiente, se verifican las igualdades

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(1)} &= Q_2^{(1)} = Q_3^{(1)} = 0 \\
 P_2^{(1)} &= -\frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{G}} = -\frac{3 \mu^4 R^2}{4 \bar{L}^3 \bar{G}^4} \left(1 - 5 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \\
 \Omega^{(1)} &= -\frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{L}} = \frac{3 \mu^4 R^2}{2 \bar{L}^4 \bar{G}^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \\
 P_3^{(1)} &= -\frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{H}} = -\frac{3 \mu^4 R^2 \bar{H}}{2 \bar{L}^3 \bar{G}^5}
 \end{aligned} \tag{6-4}$$

Según esto, las ecuaciones de transformación, serán ahora

$$\begin{aligned}
 L &= \bar{L} + \epsilon \eta_1^{(1)} = \bar{L} + \epsilon \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial l} \\
 G &= \bar{G} + \epsilon \eta_2^{(1)} = \bar{G} + \epsilon \left(\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial g} + c_2 \right) \\
 H &= \bar{H} + \epsilon \eta_3^{(1)} = \bar{H} + \epsilon \left(\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial h} + c_3 \right) \\
 g &= \bar{g} + \epsilon \gamma_2^{(1)} = \bar{g} + \epsilon \left(-\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{G}} + d_2 \right) \\
 h &= \bar{h} + \epsilon \gamma_3^{(1)} = \bar{h} + \epsilon \left(-\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{H}} + d_3 \right) \\
 l &= \bar{l} + \epsilon \varphi^{(1)} = \bar{l} + \epsilon \left(-\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{L}} \right)
 \end{aligned} \tag{6-5}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_1 &= \frac{1}{w(\bar{L})} \int F_{1p} d\bar{l} = \frac{\mu^2 R^2}{2 \bar{G}^3} \left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) (t - \bar{l} + e \operatorname{sen} f) + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} (2\bar{g} + 2f) + \frac{e}{2} \operatorname{sen} (2\bar{g} + f) + \frac{e}{6} \operatorname{sen} (2\bar{g} + 3f) \right] \right\} \tag{6-6}
 \end{aligned}$$

7. Aproximación mejorada de primer orden

Consiste esta aproximación en tomar en las ecuaciones promediadas la parte secular del coeficiente de ϵ^2 .

Recordemos que, de acuerdo con las fórmulas (3-13), dichas partes seculares, son

$$\begin{aligned}
 Q_j^{(2)} &= -Q_j^{(1)} \frac{\partial c_i}{\partial \bar{q}_j} - P_\alpha^{(1)} \frac{\partial c_i}{\partial \bar{p}_\alpha} + c_j \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{q}_j \partial \bar{p}_i} + d_\alpha \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{p}_\alpha \partial \bar{p}_i} + \frac{\partial S^*}{\partial \bar{p}_i} \\
 P_\beta^{(2)} &= -Q_j^{(1)} \frac{\partial d_\beta}{\partial \bar{q}_j} - P_\alpha^{(1)} \frac{\partial d_\beta}{\partial \bar{p}_\alpha} - c_j \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{q}_j \partial \bar{q}_\beta} - d_\alpha \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{p}_\alpha \partial \bar{q}_\beta} - \frac{\partial S^*}{\partial \bar{q}_\beta}
 \end{aligned} \tag{7-1}$$

donde S^* representa la parte secular (promedio respecto a la variable l) de la función

$$S = F_2 + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{p}_j} \frac{\partial F_{1p}}{\partial \bar{q}_j} - \frac{w'}{2 w^2} F_{1p}^2 \tag{7-2}$$

En nuestro caso, esta función se reduce a los siguientes términos

$$S = F_2 + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial l} \frac{\partial F_{1p}}{\partial L} + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial g} \frac{\partial F_{1p}}{\partial G} + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial h} \frac{\partial F_{1p}}{\partial H} - \frac{w'}{2 w^2} F_{1p}^2 \quad (7-3)$$

y como $\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial h} = 0$, porque \tilde{F}_1 no contiene la variable \bar{h} , se tiene en definitiva

$$S^* = F_2^* + \left\langle \frac{1}{w} F_{1p} \frac{\partial F_{1p}}{\partial L} + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial g} \frac{\partial F_{1p}}{\partial G} - \frac{w'}{2 w^2} F_{1p}^2 \right\rangle = F_2^* + S_2^* \quad (7-4)$$

Los cálculos desarrollados por Brouwer (1959), nos permiten escribir el término S_2^* , en la forma

$$S_2^* = \frac{\mu^6 R^4}{4 \bar{L}^{10}} \left[\frac{15 \bar{L}^5}{32 \bar{G}^5} \left(1 - \frac{18 \bar{H}^2 \bar{H}^4}{5 \bar{G}^2 + \bar{G}^4} \right) + \frac{3 \bar{L}^6}{8 \bar{G}^6} \left(1 - 6 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + 9 \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{15 \bar{L}^7}{32 \bar{G}^7} \left(1 - 2 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} - 7 \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) + \frac{\mu^6 R^4}{4 \bar{L}^{10}} \left[-\frac{3}{16} \left(\frac{\bar{L}^5}{\bar{G}^5} - \frac{\bar{L}^7}{\bar{G}^7} \right) \left(1 - 16 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + 15 \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) \right] \cos 2g \right] \quad (7-5)$$

Ahora bien, para obtener las expresiones explícitas de las funciones $Q_i^{(2)}$; $P_\beta^{(2)}$, dadas por las fórmulas (7-1), debemos hacer notar las condiciones siguientes:

a) $Q_j^{(1)} = 0$, según (6-3).

b) Las funciones c_i ; d_α ; se elegirán independientes de h , siendo además $c_3 = 0$.

Con esto, es $\bar{H} = H$ y el valor constante de \bar{H} , en las ecuaciones promediadas es el mismo que en el sistema de partida.

c) $\partial F_1^* / \partial p_i = 0$, pues F_1^* es sólo función de las variables (L, G, H) , como hemos visto en (6-2).

Establecidas estas condiciones, el cálculo de las funciones $Q_i^{(2)}$, $P_\beta^{(2)}$, es inmediato, resultando

$$Q_1^{(2)} = 0 \\ Q_2^{(2)} = -P_2^{(1)} \frac{\partial c_2}{\partial g} + \frac{\partial S^*}{\partial g} \quad (7-6)$$

$$Q_3^{(2)} = 0 \\ P_2^{(2)} = -P_2^{(1)} \frac{\partial d_2}{\partial g} - c_2 \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial G^2} - \frac{\partial S^*}{\partial G} \quad (7-7)$$

$$P_3^{(2)} = -P_2^{(1)} \frac{\partial d_3}{\partial g} - c_2 \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial G \partial H} - \frac{\partial S^*}{\partial H}$$

8. Integración del problema en ausencia de singularidades

Vamos a ver que, la arbitrariedad que aún tenemos en la elección de las cantidades c_2 , d_2 , d_3 , nos va a permitir la obtención de ecuaciones promediadas, que resultan inmediatamente integrables para todo tipo de soluciones, salvo las de excentricidades 0 y 1, y las de inclinaciones 0° y 180° , o las que verifiquen la igualdad $1 - 5 \cos^2 I = 0$, que corresponde a la inclinación crítica.

En primer lugar, eligiendo adecuadamente c_2 puede hacerse nulo $Q_2^{(2)}$; en efecto, si llamamos S_p^* la parte periódica de S^* respecto a \bar{g} , tenemos

$$Q_2^{(2)} = -P_2^{(1)} \frac{\partial c_2}{\partial \bar{g}} + \frac{\partial S^*}{\partial \bar{g}} = -P_2^{(1)} \frac{\partial c_2}{\partial \bar{g}} + \frac{\partial S_p^*}{\partial \bar{g}} \quad (8-1)$$

y por tanto, será suficiente tomar

$$c_2 = \frac{S_p^*}{P_2^{(1)}} \quad (8-2)$$

para que resulte $Q_2^{(2)} = 0$. Por otra parte, si hacemos

$$d_2 = -\frac{1}{P_2^{(1)}} \int \left(\frac{\partial S^*}{\partial \bar{G}} + c_2 \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{G}^2} \right) \partial \bar{g} \quad (8-3)$$

$$d_3 = -\frac{1}{P_2^{(1)}} \int \left(\frac{\partial S^*}{\partial \bar{H}} + c_2 \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{G} \partial \bar{H}} \right) \partial \bar{g}$$

se consigue la anulación de $P_2^{(2)}$, $P_3^{(2)}$, y las ecuaciones de la aproximación mejorada de primer orden, serán

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}}{dt} &= 0 & \frac{d\bar{g}}{dt} &= -\epsilon \frac{3\mu^4 R^2}{4\bar{L}^3 \bar{G}^4} \left(1 - 5 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \\ \frac{d\bar{G}}{dt} &= 0 & \frac{d\bar{h}}{dt} &= -\epsilon \frac{3\mu^4 R^2 \bar{H}}{2\bar{L}^3 \bar{G}^5} \\ \frac{d\bar{H}}{dt} &= 0 & \frac{d\bar{l}}{dt} &= \frac{\mu^2}{\bar{L}^3} + \epsilon \frac{3\mu^4 R^2}{2\bar{L}^4 \bar{G}^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \end{aligned} \quad (3-4)$$

con integración inmediata en la forma

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{L}_0 \\ \bar{G} &= \bar{G}_0 \\ \bar{H} &= \bar{H}_0 \\ \bar{g} &= -\epsilon \frac{3\mu^4 R^2}{4\bar{L}_0^3 \bar{G}_0^4} \left(1 - 5 \frac{\bar{H}_0^2}{\bar{G}_0^2} \right) t + \bar{g}_0 \\ \bar{h} &= -\epsilon \frac{3\mu^4 R^2 \bar{H}_0}{2\bar{L}_0^3 \bar{G}_0^5} t + \bar{h}_0 \\ \bar{l} &= \left[\frac{\mu^2}{\bar{L}_0^3} + \epsilon \frac{3\mu^4 R^2}{2\bar{L}_0^4 \bar{G}_0^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\bar{H}_0^2}{\bar{G}_0^2} \right) \right] t + \bar{l}_0 \end{aligned} \quad (8-5)$$

En resumen, la solución aproximada del sistema (5-7), se obtendrá sustituyendo los valores (8-5) en los segundos miembros de las expresiones

$$\begin{aligned}
 L &= \bar{L} + \epsilon \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial l} & g &= \bar{g} + \epsilon \left(-\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{G}} + d_2 \right) \\
 G &= \bar{G} + \epsilon \left(\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{g}} + c_2 \right) & h &= \bar{h} + \epsilon \left(-\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{H}} + d_3 \right) \\
 H &= \bar{H} & l &= \bar{l} - \epsilon \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \bar{L}}
 \end{aligned} \tag{8-6}$$

siendo c_2, d_2, d_3 las funciones dadas por (8-2), (8-3), y la función \tilde{F}_1 la obtenida en (6-6).

Para comparar los resultados obtenidos con los dados por Brouwer, observemos que, si se eligen las constantes $c_i, d_i; e_i$, todas nulas, se llega a las fórmulas consignadas por éste en la eliminación de términos de corto período.

Por el contrario, si se eligen dichas constantes en la forma

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 0 \\
 c_2 &= \frac{S_p^*}{P_2^{(1)}} \\
 c_3 &= 0 \\
 d_2 &= -\int \frac{\partial c_2}{\partial \bar{G}} d\bar{g} = -\int \frac{\partial}{\partial \bar{G}} \left(\frac{S_p^*}{P_2^{(1)}} \right) d\bar{g} \\
 d_3 &= -\int \frac{\partial c_2}{\partial \bar{H}} d\bar{g} = -\int \frac{\partial}{\partial \bar{H}} \left(\frac{S_p^*}{P_2^{(1)}} \right) d\bar{g}
 \end{aligned}$$

se obtienen de manera simultánea las dos eliminaciones de corto y largo período de Brouwer, con idénticos resultados.

III. — Movimiento de un Satélite Artificial en las proximidades de su inclinación crítica

9. Planteamiento del problema

La solución del problema de movimiento de un satélite artificial en las variables de Delaunay, tal como se ha desarrollado en el capítulo precedente, o en la forma dada por Brouwer, Kozai, etc., para los distintos órdenes, presenta como divisores términos de los tipos: $e, \sin I, 1 - 5 \cos^2 I$.

Cuando estas cantidades son próximas a cero, los desarrollos obtenidos se hacen ilusorios y no pueden ser aplicados. Por ello, en este capítulo, tratamos de estudiar el comportamiento del sistema para soluciones próximas a la de inclinación crítica, es decir tales que $(1 - 5 \cos^2 I) \sim 0$, que como ya ha sido señalado por diversos autores, es una singularidad originada por la forma del potencial terrestre.

El procedimiento seguido consiste en eliminar las fluctuaciones de corto período, de acuerdo con el método del capítulo anterior, quedando el problema reducido a estudiar un sistema canónico de un grado de libertad en la variables \bar{G}, \bar{g} . Para ello, se comienza dando un método para determinar soluciones estacionarias en dicho sistema, estudiando su estabilidad y seguidamente se ve el comportamiento del sistema en soluciones

próxima a las estacionarias. Las variables de Delaunay \bar{G}, \bar{g} , en el entorno de la solución de equilibrio tienen un comportamiento analítico formalmente idéntico al de la amplitud y su momento conjugado en el péndulo simple, para soluciones de primer orden. La aproximación de segundo orden, en cambio, corresponde al movimiento de un péndulo bajo la acción de una fuerza exterior proporcional a la velocidad y al seno de la amplitud.

En el capítulo anterior hemos visto que, si en las ecuaciones del movimiento de un satélite artificial, efectuamos la transformación dada por (8-6), las ecuaciones en las nuevas variables $\bar{L}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{l}, \bar{g}, \bar{h}$, cuando se prescinde de los términos periódicos de segundo orden con valor medio y de los términos de órdenes superiores, llegan a ser

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\bar{G}}{dt} &= + \epsilon^2 \left(-P_2^{(1)} \frac{\partial c_2}{\partial \bar{g}} + \frac{\partial S^*}{\partial \bar{g}} \right) \\ \frac{d\bar{H}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\bar{g}}{dt} &= \epsilon P_2^{(1)} + \epsilon^2 \left(-P_2^{(1)} \frac{\partial d_2}{\partial \bar{g}} - \frac{\partial S^*}{\partial \bar{G}} - c_2 \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{G}^2} \right) \\ \frac{d\bar{h}}{dt} &= \epsilon P_3^{(1)} + \epsilon^2 \left(-P_2^{(1)} \frac{\partial d_3}{\partial \bar{g}} - \frac{\partial S^*}{\partial \bar{H}} - c_2 \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial \bar{G} \partial \bar{H}} \right) \\ \frac{d\bar{l}}{dt} &= w(\bar{L}) + \epsilon^2 \Omega^{(1)} \end{aligned} \tag{9-1}$$

Estas ecuaciones, aunque no fueron escritas antes de modo explícito, han sido llamadas ecuaciones de la primera aproximación mejorada, y las distintas funciones que aparecen están dadas por (6-2), (6-3), (6-4) y (7-4).

Para soluciones en las que es $P_2^{(1)} \neq 0$, elegidas las funciones arbitrarias c_2, d_2, d_3 , de modo que los paréntesis de los segundos miembros sean nulos, el sistema (9-1) adopta una forma especialmente simple y es inmediatamente integrable.

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento de soluciones en las que $P_2^{(1)}$ toma valores próximos a cero.

Primeramente, elegiremos las funciones arbitrarias todas nulas. Con esto, el sistema (9-1) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}}{dt} &= 0 & \frac{d\bar{g}}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{G}} - \epsilon^2 \frac{\partial S^*}{\partial \bar{G}} \\ \frac{d\bar{G}}{dt} &= \epsilon^2 \frac{\partial S^*}{\partial \bar{g}} & \frac{d\bar{h}}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{H}} - \epsilon^2 \frac{\partial S^*}{\partial \bar{H}} \\ \frac{d\bar{H}}{dt} &= 0 & \frac{d\bar{l}}{dt} &= w(\bar{L}) - \epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{L}} \end{aligned} \tag{9-2}$$

resultando \bar{L} y \bar{H} constantes, y las únicas variables que quedan en los segundos miembros de (9-2) son \bar{G} y \bar{g} , reduciéndose el problema a un solo grado de libertad, o sea a la resolución de un sistema de ecuaciones de primer orden del tipo

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{G}}{dt} &= \epsilon^2 \frac{\partial S^*}{\partial \bar{g}} \\ \frac{d\bar{g}}{dt} &= -\epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{G}} - \epsilon^2 \frac{\partial S^*}{\partial \bar{G}} \end{aligned} \quad (9-3)$$

Sustituyendo las soluciones de este sistema en los segundos miembros de las derivadas $d\bar{l}/dt$, $d\bar{h}/dt$, se obtendrán \bar{l} y \bar{h} por cuadraturas.

10 Soluciones estacionarias

Consideremos un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{G}}{dt} &= \epsilon A(G, g; \epsilon) \\ \frac{dg}{dt} &= B(G) + \epsilon C(G, g; \epsilon) \end{aligned} \quad (10-1)$$

sobre el cual se hacen las siguientes hipótesis:

a) Las funciones A y C son desarrollables en términos del pequeño parámetro, en un cierto entorno de $\epsilon = 0$, es decir

$$\begin{aligned} A(G, g; \epsilon) &= A^{(1)}(G, g) + \epsilon A^{(2)}(G, g) + \dots \\ C(G, g; \epsilon) &= C^{(1)}(G, g) + \epsilon C^{(2)}(G, g) + \dots \end{aligned} \quad (10-2)$$

b) Existe un valor G_0 , constante, tal que

$$B(G_0) = 0 \quad \left. \frac{\partial B(G)}{\partial G} \right|_{G=G_0} = B'(G_0) \neq 0 \quad (10-3)$$

c) Existe un valor g_0 , constantes, que verifica

$$A^{(1)}(G_0, g_0) = 0 \quad \frac{\partial A^{(1)}(G_0, g_0)}{\partial g} \neq 0 \quad (10-4)$$

En estas condiciones, veamos si es posible construir una solución de equilibrio (G^* , g^*) de la forma

$$\begin{aligned} G^* &= G_0 + \epsilon u^{(1)}(G_0, g_0) + \epsilon^2 u^{(2)}(G_0, g_0) + \dots \\ g^* &= g_0 + \epsilon v^{(1)}(G_0, g_0) + \epsilon^2 v^{(2)}(G_0, g_0) + \dots \end{aligned} \quad (10-5)$$

que verifique

$$\begin{aligned} A(G^*, g^*; \epsilon) &= 0 \\ B(G^*) + \epsilon C(G^*, g^*; \epsilon) &= 0 \end{aligned} \quad (10-6)$$

de tal modo que puedan determinarse explícitamente las funciones $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, hasta el orden que se desee.

En efecto, sustituyendo (10-5) en (10-6) y desarrollando en serie en el punto (G_0, g_0) , se tiene

$$A^{(1)}(G_0, g) + \epsilon \frac{\partial A^{(1)}}{\partial G}(G_0, g_0) u^{(1)} + \epsilon \frac{\partial A^{(1)}}{\partial g}(G_0, g_0) v^{(1)} + \epsilon A^{(2)}(G_0, g_0) + \epsilon^2 \dots = 0$$

$$B(G_0) + B'(G_0) \epsilon u^{(1)} + \epsilon C^{(1)}(G_0, g_0) + \epsilon^2 \dots = 0. \quad (10-7)$$

Estas ecuaciones en orden cero, se verifican idénticamente, en tanto que para el primer orden dan lugar a las relaciones

$$\frac{\partial A^{(1)}}{\partial G}(G_0, g_0) u^{(1)} + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial g}(G_0, g_0) v^{(1)} + A^{(2)}(G_0, g_0) = 0$$

$$B'(G_0) u^{(1)} + C^{(1)}(G_0, g_0) = 0 \quad (10-8)$$

Por tanto, la segunda nos permitirá determinar la función $u^{(1)}$, y la primera servirá para obtener $v^{(1)}$. Obsérvese que, según las condiciones (10-3), (10-4), tales funciones están perfectamente determinadas.

Por lo que respecta a órdenes superiores, es fácil comprobar que, para el orden n , las ecuaciones toman la forma

$$B'(G_0) u^{(n)} + \Phi^{(n)} = 0$$

$$\frac{\partial A^{(1)}}{\partial G}(G_0, g_0) u^{(n)} + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial g}(G_0, g_0) v^{(n)} + \Psi^{(n)} = 0 \quad (10-9)$$

siendo $\Phi^{(n)}$ y $\Psi^{(n)}$ funciones conocidas por el cálculo de los órdenes precedentes. Evidentemente, estas ecuaciones tienen la misma estructura que las (10-8) y son igualmente resolubles con respecto a las funciones $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, lo que nos demuestra que el cálculo de las funciones $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, puede ser llevado hasta el orden que se desee.

11. Soluciones estacionarias en el problema del satélite

Las ecuaciones (9-3), cuando se introduce una nueva variable $s = \epsilon t$ y una función $K = K_0 + \epsilon K_1$, donde

$$K_0 = F_1^* = -\frac{\mu^4 R^2}{2 \bar{L}^3 \bar{G}^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right)$$

$$K_1 = F_2^* + S_2^* \quad (11-1)$$

pueden ser escritas en la forma canónica

$$\frac{dG}{ds} = \frac{\partial K}{\partial g} \quad \frac{dg}{ds} = -\frac{\partial K}{\partial G} \quad (11-2)$$

Como F_2^* es la parte secular de los armónicos de segundo orden del potencial terrestre, habrá que precisar en primer lugar qué armónicos se toman de segundo orden.

Gen-Ichiro Hori (1960) y Garfinkel (1961), en trabajos que se refieren a este mismo problema, sólo tomaron en consideración el cuarto armónico; no obstante, valores más recientes de los coeficientes J_i muestran que la contribución del tercer armónico es com-

parable a la del cuarto. Por esto, en nuestro estudio, se tendrán en cuenta el tercero y cuarto armónicos.

Escribamos seguidamente la contribución de cada uno de ellos:

Para el cuarto armónico, tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle -J_4 \frac{\mu R^4}{r^5} P_4(\text{sen } \varphi) \right\rangle_i &= -\frac{3}{8} J_4 R^4 \frac{\mu^6}{L^{10}} \left(\frac{15}{16} \frac{\bar{L}^5}{\bar{G}^7} - \frac{q}{16} \frac{\bar{L}^5}{\bar{G}^5} \right) \left(1 - 10 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + \frac{35}{3} \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) \\ &+ J_4 R^4 \frac{15 \mu^6}{64 L^{10}} \left(\frac{\bar{L}^7}{\bar{G}^7} - \frac{\bar{L}^5}{\bar{G}^5} \right) \left(1 - 8 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + 7 \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) \cos 2\bar{g} \end{aligned} \quad (11-3)$$

y para el tercero

$$\left\langle -J_3 \frac{\mu R^3}{r^4} P_3(\text{sen } \varphi) \right\rangle_i = -J_3 R^3 \frac{\mu^5}{L^3 \bar{G}^5} e \text{sen } I \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{8} \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \text{sen } \bar{g} \quad (11-4)$$

Utilizando como nuevas constantes las cantidades

$$b = -\frac{3}{2} \frac{J_4}{J_2^2} = -\frac{3}{2} \frac{J_4}{\epsilon^2} \quad c = -\frac{J_3}{J_2^2} = -\frac{J_3}{\epsilon^2} \quad (11-5)$$

que en caso de la Tierra valen, aproximadamente

$$b \simeq 2,11027 \quad c \simeq 2,17213$$

y las funciones $P(\bar{G})$, $Q(\bar{G})$, $R(\bar{G})$, dadas por las expresiones.

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= \frac{\mu^6 R^4}{4 \bar{L}^5 \bar{G}^5} \left\{ \frac{15}{32} - \frac{9}{16} b - \left(\frac{27}{16} - \frac{45}{8} b \right) \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + \left(\frac{15}{32} - \frac{105}{16} b \right) \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} + \frac{3}{8} \frac{\bar{L}}{\bar{G}} \left(1 - 6 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + 9 \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{L^2}{\bar{G}^2} \left[\frac{15}{32} - \frac{15}{16} b - \left(\frac{15}{16} - \frac{75}{8} b \right) \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} - \left(\frac{105}{32} + \frac{175}{16} b \right) \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11-6)$$

$$Q(\bar{G}) = \frac{\mu^6 R^4}{4 \bar{L}^5 \bar{G}^5} \left(1 - \frac{\bar{L}^2}{\bar{G}^2} \right) \left[-\frac{3}{16} \left(1 - 16 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + 15 \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) + \frac{5}{8} b \left(1 - 8 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} + 7 \frac{\bar{H}^4}{\bar{G}^4} \right) \right]$$

$$R(\bar{G}) = c \frac{3 R^3 \mu^5}{8 \bar{L}^3 \bar{G}^5} e \text{sen } I \left(1 - 5 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right)$$

se tiene K_1 en la siguiente forma

$$K_1 = P(\bar{G}) + Q(\bar{G}) \cos 2\bar{g} + R(\bar{G}) \text{sen } \bar{g} \quad (11-7)$$

Es conveniente observar que $R(\bar{G})$ contiene como factor la expresión $(1 - 5 \bar{H}^2 / \bar{G}^2)$, en tanto que las funciones $P(\bar{G})$, $Q(\bar{G})$, solamente lo contienen cuando es $b = 3/2$. En este caso, que ya ha sido señalado por varios autores, es posible elegir c_2 , sin introducir el pequeño divisor de inclinación crítica, de manera que sea $d\bar{G}/dt = 0$. Asimismo, no es difícil comprobar que las ecuaciones de la primera aproximación mejorada pueden ser integradas sin pequeños divisores en inclinación crítica.

De acuerdo con las notaciones utilizadas en (10-1), (10-2), se tiene

$$\begin{aligned}
 A(\bar{G}, \bar{g}; \epsilon) &= A^{(1)}(\bar{G}, \bar{g}) = -2Q(\bar{G}) \operatorname{sen} 2\bar{g} + R(\bar{G}) \cos \bar{g} \\
 B(G) &= -\frac{\partial K_0}{\partial \bar{G}} = -\frac{3\mu^4 R^2}{2L^3 \bar{G}^4} \left(1 - 5\frac{H^2}{\bar{G}^2}\right) \\
 C(\bar{G}, \bar{g}; \epsilon) &= C^{(1)}(\bar{G}, \bar{g}) = -P'(\bar{G}) - Q'(\bar{G}) \cos 2\bar{g} - R'(\bar{G}) \operatorname{sen} \bar{g}
 \end{aligned}
 \tag{11-8}$$

Los valores de G_0 , tales que $B(G_0) = 0$, están dados por las soluciones de la ecuación

$$1 - 5\frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} = 0 \qquad \bar{G}_0 = \pm \sqrt{5} \bar{H}$$

El signo de G_0 se elige de manera que el módulo del momento angular sea positivo. Recordando el significado de las variables de Delaunay, este caso corresponde a

$$\cos I = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y, por tanto, cuando se toma el signo positivo, hay una solución I_c comprendida entre 0 y $\pi/2$, que es conocida en la literatura con el nombre de solución de inclinación crítica. La solución entre $\pi/2$ y π es suplementaria de la anterior.

Además

$$B'(\bar{G}_0) = -\frac{6\mu^4 R^2}{4L^3 \bar{G}_0^5} \neq 0$$

y se satisface otra de las hipótesis en nuestro planteamiento general.

Seguidamente buscaremos un valor de \bar{g}_0 que verifique la condición $A^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0) = 0$. Para ello, habrá que resolver la ecuación

$$-2Q(\bar{G}_0) \operatorname{sen} 2\bar{g} + R(\bar{G}_0) \cos \bar{g} = 0$$

o bien

$$-2Q(G_0) \operatorname{sen} 2\bar{g} = 0$$

puesto que es $R(\bar{G}_0) = 0$.

Por otra parte, se tiene

$$Q(\bar{G}_0) = \frac{\mu^6 R^4}{40L^5 \bar{G}_0^5} \left(1 - \frac{L^2}{\bar{G}_0^2}\right) (3 - 2b) \neq 0$$

luego las únicas soluciones posibles, son $g_0 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

De esta forma, las ecuaciones (10-8) se reducen a las siguientes:

$$[-2Q'(\bar{G}_0) \operatorname{sen} 2\bar{g}_0 + R'(\bar{G}_0) \cos \bar{g}_0] u^{(1)} + [-4Q(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0] v^{(1)} = 0 \tag{11-9}$$

$$B'(\bar{G}_0) u^{(1)} = P'(\bar{G}_0) + Q'(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0 + R'(\bar{G}_0) \operatorname{sen} \bar{g}_0$$

que pueden ser resueltos con respecto a $u^{(1)}, v^{(1)}$, resultando

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= \frac{P'(\bar{G}_0) + Q'(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0 + R'(\bar{G}_0) \operatorname{sen} \bar{g}_0}{B'(\bar{G}_0)} \\
 v^{(1)} &= \frac{R'(\bar{G}_0) \cos \bar{g}_0}{4Q(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0}
 \end{aligned}
 \tag{11-10}$$

Las expresiones explícitas que figuran en los segundos miembros se obtienen sin dificultades con el formulario que se adjunta

$$\begin{aligned}
 B'(G_0) &= -\frac{3\mu^4 R^2}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^5} \\
 R'(\bar{G}_0) &= -C \frac{3e_0}{2\sqrt{5}} \frac{R^3 \mu^5}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^6} \\
 Q(\bar{G}_0) &= \frac{1}{40} \frac{\mu^6 R^4}{\bar{L}^5 \bar{G}_0^5} \left(1 - \frac{\bar{L}^2}{\bar{G}_0^2} \right) \quad (3-2b) \\
 P'(\bar{G}_0) &= -\frac{\mu^6 R^4}{4\bar{L}^5 \bar{G}_0^6} \left\{ \frac{3}{20} + \frac{27}{10} b - \frac{\bar{L}^2}{\bar{G}_0^2} \left(\frac{3}{20} + \frac{11}{2} b \right) \right\} \\
 Q'(\bar{G}_0) &= -\frac{\mu^6 R^4}{4\bar{L}^5 \bar{G}_0^6} \left\{ \left(\frac{9}{4} - \frac{23}{10} b \right) - \frac{\bar{L}^2}{\bar{G}_0^2} \left(\frac{57}{20} - \frac{26}{5} b \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{11-11}$$

En los párrafos siguientes, al referirnos a las soluciones mencionadas, las consideraremos separadamente, en los tipos siguientes:

$$(i) \quad \bar{g}_0 = 0, \pi, \quad u^{(1)} = \frac{P'(\bar{G}_0) + Q'(\bar{G}_0)}{B'(\bar{G}_0)}, \quad v^{(1)} = \frac{R'(\bar{G}_0)}{4Q(\bar{G}_0)} u^{(1)} \tag{11-12}$$

$$(ii) \quad \bar{g}_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad u^{(1)} = \frac{P'(\bar{G}_0) - Q'(\bar{G}_0) \pm R'(\bar{G}_0)}{B'(\bar{G}_0)}, \quad v^{(1)} = 0 \tag{11-13}$$

Hasta aquí hemos visto un procedimiento para obtener soluciones estacionarias del sistema (9-3), llevando a cabo su determinación explícita hasta el primer orden. Estudie-mos ahora la naturaleza de estas soluciones en las variables de partida L, G, H, l, g, h .

Para dichas soluciones de equilibrio G^*, g^* , el sistema (9-2) es inmediatamente inte-grable y su solución, es

$$\begin{aligned}
 \bar{L} &= \bar{L}_0 & \bar{g} &= g^* \\
 \bar{G} &= G^* & \bar{h} &= \left(-\epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{H}} - \epsilon^2 \frac{\partial S^*}{\partial \bar{H}} \right) t + \bar{h}_0 \\
 \bar{H} &= \bar{H}_0 = H_0 & \bar{l} &= \left(w(\bar{L}) - \epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{L}} \right) t + \bar{l}_0
 \end{aligned} \tag{11-14}$$

siendo $\bar{L}_0, \bar{H}_0, \bar{l}_0, \bar{h}_0$, los valores constantes de $\bar{L}, \bar{H}, \bar{l}, \bar{h}$, para el instante inicial $t = 0$; el subíndice cero de las expresiones entre paréntesis significa que están calcu-ladas en $\bar{L}_0, \bar{H}_0, G^*, g^*$.

Mediante las fórmulas (8-6), en las que se pueden considerar nulas las cantidades c_2, d_2, d_3 , se obtienen las variables L, G, H, l, g, h . Nosotros no desarrollaremos aquí el cálculo de un modo explícito, sin embargo haremos algunas observaciones sobre el comportamiento cualitativo de estas soluciones particulares.

En primer término, como $\partial \tilde{F}_1 / \partial l, \partial \tilde{F}_1 / \partial g, \partial \tilde{F}_1 / \partial G$, son funciones periódicas, respec-to a l , con período 2π , las variables L, G, g , también lo serán. Además, según la ex-

presión de \bar{L} , dada en (11-14), podemos afirmar que dichas derivadas son periódicas respecto a t con período

$$t \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\left(\omega(\bar{L}) - \epsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial \bar{L}} \right)_0} \quad (11-15)$$

12. Estabilidad de las soluciones de equilibrio

Para estudiar el carácter estable o inestable de las soluciones de equilibrio (G^*, g^*) , haremos uso de un teorema de mecánica que asegura la existencia de soluciones de equilibrio estable, cuando éstas corresponden a mínimos relativos de la función hamiltoniana.

Por consiguiente, hay que estudiar el comportamiento de la función hamiltoniana $K(\bar{G}, \bar{g})$ en las soluciones de equilibrio (G^*, g^*) .

De acuerdo con los resultados que nos proporciona el Análisis, habrá que formar el hessiano

$$\text{Hess} = \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{G}^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{g}^2} - \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} \right)^2 \quad (12-1)$$

Entonces, si $\text{Hess} < 0$, en (G^*, g^*) , se puede asegurar que no hay extremo relativo, y si $\text{Hess} > 0$, en dicho punto habrá un extremo relativo estricto, que será

Máximo, para $\partial^2 K / \partial \bar{G}^2 < 0$

Mínimo, para $\partial^2 K / \partial \bar{G}^2 > 0$

En nuestro caso, por venir dada la función hamiltoniana K en la forma

$$K(\bar{G}, \bar{g}) = K_0(\bar{G}) + \epsilon K_1(\bar{G}, \bar{g}) \quad (12-2)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{G}^2} &= \frac{\partial^2 K_0}{\partial \bar{G}^2} + \epsilon \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G}^2} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{g}^2} &= \epsilon \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} &= \epsilon \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} \end{aligned} \quad (12-3)$$

y el hessiano, será

$$\text{Hess} = \epsilon \frac{\partial^2 K_0}{\partial \bar{G}^2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G}^2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} - \left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} \right)^2 \right] \quad (12-4)$$

Atendiendo solamente a los términos de primer orden del hessiano en los puntos (G_0, g_0) , y teniendo en cuenta las expresiones de K_0 y K_1 , dadas por (11-1), (11-7), resulta

$$\left. \frac{\partial^2 K_0}{\partial \bar{G}^2} \right|_0 = \frac{3 \mu^4 R^2}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^5} \quad \left. \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} \right|_0 = -4 Q(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0 \quad (12-5)$$

por lo cual

$$\frac{\partial^2 K_0}{\partial \bar{G}^2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} = -\frac{12 \mu^4 R^2}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^5} Q(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0 \quad (12-6)$$

Ahora bien, por ser $1 - L^2/G_0^2 = 1 - 1/(1 - e^2) = -e^2/(1 - e^2) < 0$ y $3 - 2b < 0$, se obtiene finalmente

$$Q(\bar{G}_0) = \frac{\mu^6 R^4}{40 \bar{L}^5 \bar{G}_0^5} \left(1 - \frac{L^2}{\bar{G}_0^2} \right) (3 - 2b) > 0 \quad (12-7)$$

Después de estas consideraciones, pueden distinguirse los casos siguientes:

a.1) Para $g_0 = 0, \pi$, los términos de primer orden del hessiano son negativos y valen

$$- \frac{12 \mu^4 R^2}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^5} Q(\bar{G}_0)$$

a.2) Para $g_0 = \pi/2, 3\pi/2$, los términos de primer orden del hessiano son positivos y valen

$$+ \frac{12 \mu^4 R^2}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^5} Q(\bar{G}_0)$$

Por ello, si se analiza la estabilidad solamente por los resultados de primer orden, pueden sacarse las siguientes conclusiones:

Para las soluciones $\bar{g}^* = \bar{g}_0 + \epsilon v^{(1)} + \dots$, con $\bar{g}_0 = 0, \pi$, es $\text{Hess} < 0$ y éstas son de equilibrio inestable.

Para $\bar{g}_0 = \pi/2, 3\pi/2$, es $\text{Hess} > 0$ y las soluciones son de equilibrio estable.

Si consideramos aparte los términos de segundo orden, tendremos

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G}^2} = P''(\bar{G}) + Q''(\bar{G}) \cos 2\bar{g} + R''(\bar{G}) \sin \bar{g}$$

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} = -4 Q(\bar{G}) \cos 2\bar{g} - R(\bar{G}) \sin \bar{g} \quad (12-8)$$

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} = -2 Q'(\bar{G}) \sin 2\bar{g} + R'(\bar{G}) \cos \bar{g}$$

y por tanto para ellos, resulta

$$\left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G}^2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} - \left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} \right)^2 \right]_0 = -4 Q(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0 [P''(\bar{G}_0) + Q''(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0 + R''(\bar{G}_0) \sin \bar{g}_0] \\ - [-2 Q'(\bar{G}_0) \sin 2\bar{g}_0 + R'(\bar{G}_0) \cos \bar{g}_0]^2$$

Igual que en el apartado anterior, se pueden distinguir dos casos:

b.1) $g_0 = 0, \pi$. En este caso, para la Tierra, es $Q(\bar{G}_0) > 0$, según (12-7). Además, se tiene

$$P''(\bar{G}_0) + Q''(\bar{G}_0) = \frac{\mu^6 R^4}{80 \bar{L}^5 \bar{G}_0^7} \left\{ 413 + 20b + 12 \frac{\bar{L}}{\bar{G}_0} - \frac{\bar{L}^2}{\bar{G}_0^2} (520 - 248b) \right\} > 0$$

de donde la contribución de los términos de segundo orden al hessiano

$$\left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G}^2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} - \left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} \right)^2 \right]_0 = -4 Q(\bar{G}_0) [P''(\bar{G}_0) + Q''(\bar{G}_0)] - [R'(\bar{G}_0)]^2$$

es negativa; entonces, no solamente los términos de primer orden son negativos, sino también los de segundo, luego, dentro de la aproximación con que estamos trabajando, estas soluciones son de equilibrio inestable.

b.2) $g_0 = \pi/2, 3\pi/2$. Ahora la contribución de los términos de segundo orden al hessiano, es

$$\left[\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G}^2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{g}^2} - \left(\frac{\partial^2 K_1}{\partial \bar{G} \partial \bar{g}} \right)^2 \right]_0 = 4 Q(\bar{G}_0) [P''(\bar{G}_0) - Q''(\bar{G}_0) - (-1)^j R''(\bar{G}_0)]$$

con $j = 1$, para $g_0 = \pi/2$ y $j = 2$, para $g_0 = 3\pi/2$.

El término entre corchetes, se puede escribir

$$\begin{aligned} & P''(\bar{G}_0) - Q''(\bar{G}_0) - (-1)^j R''(\bar{G}_0) = \\ & = \frac{\mu^6 R^4}{80 \bar{L}^5 \bar{G}_0^7} \left\{ -539 + 880 b + 36 \frac{\bar{L}}{\bar{G}_0} - \frac{\bar{L}^2}{\bar{G}_0^2} (-732 + 1808 b) \right\} \\ & \quad + (-1)^j \frac{3 c R^3 \mu^5}{2 \bar{L}^3 \bar{G}_0^7} \frac{4 + 27 e^2}{2 \sqrt{5} e} \end{aligned}$$

y su signo depende de los valores del semieje mayor y la excentricidad.

Estudiando conjuntamente los términos de primero y segundo orden, e introduciendo las funciones

$$\begin{aligned} f_1(e) &= \frac{1}{240} \left[-539 + 880 b + \frac{36}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{1}{1-e^2} (-732 + 1808 b) \right] \\ f_2(e) &= \frac{c}{2 \sqrt{1-e^2}} \frac{4 + 27 e^2}{2 \sqrt{5} e} \end{aligned}$$

queda

$$\text{Hess} = \frac{12 \mu^4 R^2}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^5} Q(\bar{G}_0) \left[1 + \epsilon \frac{R^2}{a^2 (1-e^2)} f_1(e) + \epsilon (-1)^j \frac{R}{a \sqrt{1-e^2}} f_2(e) \right]$$

Las funciones f_1, f_2 , que dependen solamente de la excentricidad, toman los siguientes valores:

| e | $f_1(e)$ | $f_2(e)$ |
|-----|-----------|----------|
| 0.1 | -7.33456 | 10.42187 |
| 0.2 | -7.73775 | 6.29554 |
| 0.3 | -8.46892 | 5.45637 |
| 0.4 | -9.63899 | 5.53129 |
| 0.5 | -11.46479 | 6.02903 |
| 0.6 | -14.39468 | 6.94136 |
| 0.7 | -19.48904 | 8.37033 |
| 0.8 | -29.94528 | 10.76640 |
| 0.9 | -61.78164 | 16.01431 |

Por eso, teniendo en cuenta la desigualdad $R/a\sqrt{1-e^2} > 1$, puede concluirse que, al menos para el intervalo [0.1, 0.9] de valores de la excentricidad, el hessiano es positivo y la correspondiente solución de equilibrio es estable.

13. Ecuaciones de la primera aproximación

Las ecuaciones que dan las desviaciones desde las soluciones de equilibrio estable ($g_0 = \pi/2, 3\pi/2$) son, en primera aproximación

$$\frac{d\tilde{G}}{d\tau} = -2 a_1 \text{sen } 2\tilde{g} \tag{13-1}$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tau} = a_3 \tilde{G}$$

y las correspondientes desde las soluciones ($g_0 = 0, \pi$) de equilibrio inestable

$$\frac{d\tilde{G}}{d\tau} = 2 a_1 \text{sen } 2\tilde{g} \tag{13-2}$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tau} = a_3 \tilde{G}$$

donde las constantes a_1, a_3 , son negativas, como se deduce fácilmente de las relaciones

$$a_1 = -\frac{1}{40} \frac{\mu^6 R^4}{\bar{L}^5 \bar{G}_0^5} \left(1 - \frac{\bar{L}^2}{\bar{G}_0^2} \right) (3 - 2b) = -\frac{\mu^6 R^4 e^2 (2b - 3)}{40 \bar{L}^5 \bar{G}_0^5 (1 - e^2)} \tag{13-3}$$

$$a_3 = -\frac{3 \mu^4 R^2}{\bar{L}^3 \bar{G}_0^5}$$

Recordemos, por otro lado, que la función de Hamilton, para el movimiento de un péndulo simple de longitud λ , sometido a un campo gravitatorio de aceleración a_g y formando un ángulo 2φ con la vertical es

$$H = \frac{p_\varphi^2}{8 \lambda^2} - a_g \lambda \cos 2\varphi \tag{13-4}$$

Haciendo una inversión temporal respecto al sentido que es usual en Mecánica, las ecuaciones de Hamilton, son

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 2 a_g \lambda \text{sen } 2\varphi \tag{13-5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = -\frac{1}{4 \lambda^2} p_\varphi$$

Comparando estas ecuaciones con (13-1) y (13-2), vemos que la primera puede ser identificada como la ecuación de un péndulo que efectúa oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio ($\varphi = 0$), en tanto que (13-2) consiste en oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio inestable ($2\varphi = \pi$).

En lo sucesivo sólo tomaremos en consideración (13-1). La comparación de (13-1) y (13-5) prueba, de acuerdo con (13-4),

$$a_3 = -\frac{1}{4\lambda^2} \quad \lambda = \frac{a^2(1-e^2)^{5/2}}{2\sqrt{6}R} \quad (13-6)$$

$$-2a_1 = 2a_g\lambda \quad a_g = \frac{\sqrt{6}R^5 e^2(2b-3)\mu}{20a^7(1-e^2)^{19/4}}$$

En los casos habituales, a_g es una cantidad muy pequeña frente a la longitud del péndulo equivalente. Así, por ejemplo, para un satélite con $a = 7.500$ kms., $e = 0.1$, la longitud del péndulo equivalente es del orden de 1.500 kms., mientras que a_g es menor que 1 km./seg.², lo que se traduce en un movimiento oscilatorio muy lento. Además, a la vista de los valores anteriores de a_g y λ , se podrá hacer todavía más lento si disminuye la excentricidad o aumenta el semieje mayor.

El sistema (13-1) puede reducirse a una ecuación de segundo orden en la variable \tilde{g} es decir

$$\frac{d^2\tilde{g}}{d\tau^2} = -2a_1a_3 \sin \tilde{g} = -2\beta_1^2 \sin 2\tilde{g} \quad (13-7)$$

donde se ha puesto $\beta_1^2 = a_1a_3$, para abreviar.

Esta ecuación admite la integral

$$\left(\frac{d\tilde{g}}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} [h + 4\beta_1^2 \cos 2\tilde{g}] \quad (13-8)$$

siendo h una constante que representa la energía del péndulo equivalente y que está dada, en este caso, por la expresión

$$h = \left(-\frac{1}{2}a_3\tilde{G}^2 + a_1 \cos 2\tilde{g}\right) (-4a_3) \quad (13-9)$$

Discutiremos ahora la ecuación (13-8), según los distintos valores de h :

1.° Para $h = 4\beta_1^2$, se tiene

$$\left(\frac{d\tilde{g}}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} [4\beta_1^2 + 4\beta_1^2 \cos 2\tilde{g}] = 4\beta_1^2 \cos^2 \tilde{g} \quad (13-10)$$

e integrando

$$\pm 2\beta_1\tau = \ln \operatorname{tag} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{g}}{2}\right) \quad (13-11)$$

Se trata, pues, de una solución que, en el instante inicial está en $\tilde{g} = 0$ y se dirige a $\tilde{g} = \pi/2$ ($0 - \pi/2$ cuando se toma el signo negativo) tardando un tiempo infinito en llegar a este punto. Es, por consiguiente, una solución asintótica para $g \rightarrow \pi/2$, o $g \rightarrow -\pi/2$.

Teniendo en cuenta que $\tau = \epsilon^{3/2} t$, la solución se puede escribir

$$\tilde{g} = 2 \left(-\frac{\pi}{4} + \text{arc tag } e^{\pm 2\beta_1 \epsilon^{3/2} t} \right) \quad (13-12)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{a_3} \frac{d\tilde{g}}{d\tau} = \frac{1}{a_3} \cdot (\pm) 2 \beta_1 \cos \tilde{g}$$

2.º Para $|h| < 4 \beta_1^2$, después de introducir una nueva constante α , por la igualdad $h = -4 \beta_1^2 \cos 2\alpha$ se tiene

$$\left(\frac{d\tilde{g}}{d\tau} \right)^2 = 2 \beta_1^2 [\cos 2\tilde{g} - \cos 2\alpha] = 4 \beta_1^2 (\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \tilde{g}) \quad (13-13)$$

o bien

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tau} = 2 \beta_1 (\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \tilde{g})^{1/2} \quad (13-14)$$

y haciendo $k = \text{sen } \alpha$, $ku = \text{sen } \tilde{g}$, se puede integrar inmediatamente, quedando

$$u = \text{sen am } 2 \beta_1 \tau = \text{sn } 2 \beta_1 \tau \quad (13-15)$$

donde \tilde{g} y \tilde{G} están dados por

$$\text{sen } \tilde{g} = k \text{ sn } 2 \beta_1 \tau = k \text{ sn } 2 \beta_1 \epsilon^{3/2} t \quad (13-16)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{a_3} \frac{d\tilde{g}}{d\tau} = \frac{2 \beta_1 k}{a_3} \text{cn } 2 \beta_1 \tau = \frac{2 \beta_1 k}{a_3} \text{cn } 2 \beta_1 \epsilon^{3/2} t$$

El movimiento es periódico, con período $\mathcal{H}/2 \beta_1$, siendo \mathcal{H} la integral elíptica completa de primera especie, de módulo k , definido por

$$k^2 = \frac{h + 4 \beta_1^2}{8 \beta_1^2}$$

en cuyo caso, la variable g efectúa oscilaciones entre las amplitudes $(-\alpha, \alpha)$.

3.º Cuando $h > 4 \beta_1^2$, se tiene

$$\left(\frac{d\tilde{g}}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} [h + 4 \beta_1 \cos 2\tilde{g}] = \frac{1}{2} [h + 4 \beta_1^2 - 8 \beta_1^2 \text{sen}^2 \tilde{g}] \quad (13-17)$$

e introduciendo el módulo k , por la expresión

$$k^2 = \frac{8 \beta_1^2}{h + 4 \beta_1^2}$$

se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{d\tilde{g}}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \tilde{g}}} = \sqrt{2(h + 4 \beta_1^2)} d\tau \quad (13-18)$$

que puede ser integrada entre $(0, \tilde{g})$, resultando

$$\tilde{g} = am \sqrt{2(h+4\beta_1^2)} \tau = am \sqrt{2(h+4\beta_1^2)} \epsilon^{3/2} t \quad (13-19)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{a_3} \frac{d\tilde{g}}{d\tau} = \frac{1}{a_3} \sqrt{2(h+4\beta_1^2)} \frac{dn}{dn} \sqrt{2(h+4\beta_1^2)} \epsilon^{3/2} t$$

En este caso, \tilde{g} es función periódica de la variable τ , con período $\mathcal{H}/\sqrt{2(h+4\beta_1^2)}$, siendo \mathcal{H} la integral elíptica completa de primera especie de módulo k . Ahora \tilde{g} es una función monótona creciente y esta situación se presenta cuando la energía es suficiente para producir revoluciones completas. Aunque todas las integraciones se han efectuado considerando que en el instante inicial $t = 0$, es $\tilde{G} = 0$, $\tilde{g} = 0$, se advierte que si los valores iniciales fuesen \tilde{G}_0 , \tilde{g}_0 , bastaría sustituir en las fórmulas (13-12), (13-16), (13-19) las variables \tilde{g} , \tilde{G} , de los primeros miembros por $\tilde{g} - \tilde{g}_0$, y $\tilde{G} - \tilde{G}_0$, respectivamente. Por otro lado, como $\tau = \epsilon^{3/2} t$, en un intervalo de tiempo de amplitud $1/\epsilon$, \tilde{G} es obtenida con una aproximación de orden $O(\epsilon^{3/2})$ y \tilde{g} con una aproximación $O(\epsilon)$, pudiendo decirse lo mismo de \bar{G} , \bar{g} .

14. Estudio de soluciones próximas a las estacionarias

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{G}}{ds} &= A^{(1)}(\bar{G}, \bar{g}) \\ \frac{d\bar{g}}{ds} &= B(\bar{G}) + C^{(1)}(\bar{G}, \bar{g}) \end{aligned} \quad (14-1)$$

del cual son conocidas soluciones estacionarias de la forma

$$\begin{aligned} G^* &= \bar{G}_0 + \epsilon u^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0) + \\ g^* &= \bar{g}_0 + \epsilon v^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0) + \end{aligned} \quad (14-2)$$

Para estudiar el comportamiento del sistema en soluciones próximas a una estacionaria (G^*, g^*) , pasamos de las variables (\bar{G}, \bar{g}) a unas nuevas (\tilde{G}, \tilde{g}) mediante la transformación

$$\bar{G} = G^* + \nu \tilde{G} \quad \bar{g} = g^* + \tilde{g} \quad (14-3)$$

donde se ha puesto $\nu = \epsilon^{1/2}$, $\tau = \nu s$.

Efectuando la transformación (14-3) en el sistema (14-1), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tau} &= A^{(1)}(G^* + \nu \tilde{G}, g^* + \tilde{g}) \\ \frac{d\tilde{g}}{d\tau} &= \frac{1}{\nu} \{ B(G^* + \nu \tilde{G}) + \nu^2 C^{(1)}(G^* + \nu \tilde{G}, g^* + \tilde{g}) \} \end{aligned} \quad (14-4)$$

y si se desarrollan en serie estos segundos miembros, en términos del parámetro ν y se prescinde de los de órdenes superiores al primero, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tau} &= A^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0 + \tilde{g}) + \nu \left[G \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \bar{G}}(\bar{G}_0, \bar{g}_0 + \tilde{g}) \right] \\ \frac{d\tilde{g}}{d\tau} &= B'(\bar{G}_0) \tilde{G} + \nu \left[\frac{1}{2} B''(\bar{G}_0) \tilde{G}^2 + C^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0 + \tilde{g}) - B'(\bar{G}_0) u^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (14-5)$$

Finalmente, si se tiene en cuenta que, según la segunda igualdad (10-8), es $B'(\bar{G}_0) u^{(1)} = -C^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0)$, el sistema anterior puede reducirse a la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tau} &= A^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0 + \tilde{g}) + \nu \left[G \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \bar{G}}(\bar{G}_0, \bar{g}_0 + \tilde{g}) \right] \\ \frac{d\tilde{g}}{d\tau} &= B'(\bar{G}_0) \tilde{G} + \nu \left[\frac{1}{2} B''(\bar{G}_0) \tilde{G}^2 + C^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}_0 + \tilde{g}) - C^{(1)}(\bar{G}_0, \bar{g}) \right] \end{aligned} \quad (14-6)$$

Nota: Si el sistema (14-1) tuviese forma canónica

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{G}}{ds} &= \frac{\partial K}{\partial \bar{g}} \\ \frac{d\bar{g}}{ds} &= -\frac{\partial K}{\partial \bar{G}} \end{aligned} \quad K = K_0(\bar{G}) + \epsilon K_1(\bar{G}, \bar{g}) \quad (14-7)$$

vamos a ver que la reducción (14-3) podría ser llevada a cabo manteniendo la misma forma canónica de las ecuaciones. En efecto, la transformación (14-3) es canónica con multiplicador ν , pues por ser conservativa, la condición para que sea canónica es que exista una constante π (multiplicador), de suerte que la forma pfaffiana

$$w_+ = \pi (g^* + \tilde{g}) \nu d\tilde{G} + \tilde{G} d\tilde{g}$$

sea diferencial exacta. Es evidente que esto se consigue sin más que elegir la constante π en la forma $\pi = 1/\nu$. Por otra parte, el nuevo hamiltoniano está relacionado con el anterior por las igualdades

$$\tilde{K} = \pi K = \frac{1}{\nu} K$$

con lo cual, el sistema (14-1), después de la transformación anterior, se ha convertido en el siguiente

$$\frac{d\tilde{G}}{ds} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{g}} \quad \frac{d\tilde{g}}{ds} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{G}}$$

Si ahora se introduce la variable temporal $\tau = \nu s$, el sistema que acabamos de escribir es equivalente al que sigue

$$\frac{d\tilde{G}}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{K}^*}{\partial \tilde{g}} \quad \frac{d\tilde{g}}{d\tau} = -\frac{\partial \tilde{K}^*}{\partial \tilde{G}}$$

con

$$\tilde{K}^* = \frac{K}{v^2} = \frac{K(G^* + \tilde{G}_v, g^* + \tilde{g})}{v^2}$$

que demuestra, no sólo el carácter canónico de las nuevas ecuaciones, sino que su forma coincide con (14-6) hasta el segundo orden. Veamos, pues, la aplicación de estas consideraciones generales al caso de movimiento de un satélite.

15. Aplicación al caso de un satélite artificial

Las ecuaciones que describen la variación de las variables (\bar{G}, \bar{g}) en el caso del satélite tienen exactamente la misma forma (14-1), siendo

$$A^{(1)}(\bar{G}, \bar{g}) = -2 Q(\bar{G}) \operatorname{sen} 2\bar{g}$$

$$B(\bar{G}) = -\frac{3 \mu^4 R^2}{2 L^3 \bar{G}^4} \left(1 - 5 \frac{\bar{H}^2}{\bar{G}^2} \right) \quad (15-1)$$

$$C^{(1)}(\bar{G}, \bar{g}) = -P'(\bar{G}) - Q'(\bar{G}) \cos 2\bar{g} - R'(\bar{G}) \operatorname{sen} \bar{g}$$

Con estos valores, efectuando la transformación (14-3), las ecuaciones (14-6), serán ahora

$$\frac{d\tilde{G}}{d\tau} = [-2 Q(\bar{G}_0) \operatorname{sen} 2(\bar{g}_0 + \tilde{g}) + R(\bar{G}_0) \cos(\bar{g}_0 + \tilde{g})] +$$

$$v \tilde{G} [-2 Q'(\bar{G}_0) \operatorname{sen} 2(\bar{g}_0 + \tilde{g}) + R'(\bar{G}_0) \cos(\bar{g}_0 + \tilde{g})] + \quad (15-2)$$

$$\frac{d\tilde{g}}{dt} = B'(\bar{G}_0) \tilde{G} + v \left[\frac{1}{2} B''(\bar{G}_0) \tilde{G}^2 - Q'(\bar{G}_0) \cos 2(\bar{g}_0 + \tilde{g}) - \right.$$

$$\left. - R'(\bar{G}_0) \operatorname{sen}(\bar{g}_0 + \tilde{g}) + Q'(\bar{G}_0) \cos 2\bar{g}_0 + R'(\bar{G}_0) \operatorname{sen} \bar{g}_0 \right]$$

y de acuerdo con los casos señalados en el párrafo 12, tendremos:

1.º Para $\bar{g}_0 = \pi/2, 3\pi/2$

$$\operatorname{sen} 2(\bar{g}_0 + \tilde{g}) = -\operatorname{sen} 2\tilde{g}$$

$$\cos 2(\bar{g}_0 + \tilde{g}) = -\cos 2\tilde{g}$$

$$\cos(\bar{g}_0 + \tilde{g}) = (-1)^j \operatorname{sen} \tilde{g}$$

$$\operatorname{sen}(\bar{g}_0 + \tilde{g}) = -(-1)^j \operatorname{sen} \tilde{g}$$

$$\left. \begin{array}{l} j = 1 \quad \text{para} \quad \bar{g}_0 = \frac{\pi}{2} \\ j = 2 \quad \text{''} \quad \bar{g}_0 = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \quad (15-3)$$

y el sistema (15-2), teniendo presente la condición $R(\bar{G}_0) = 0$, queda

$$\frac{d\tilde{G}}{d\tau} = 2 Q(\bar{G}_0) \operatorname{sen} 2\tilde{g} + v \tilde{G} [2 Q'(\bar{G}_0) \operatorname{sen} 2\tilde{g} + R'(\bar{G}_0) (-1)^j \operatorname{sen} \tilde{g}] \quad (15-4)$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tau} = B'(\bar{G}_0) \tilde{G} + v \left[\frac{1}{2} B''(\bar{G}_0) \tilde{G}^2 + Q'(\bar{G}_0) \cos 2\tilde{g} + R'(\bar{G}_0) (-1)^j \cos \tilde{g} - Q'(\bar{G}_0) - (-1)^j R'(\bar{G}_0) \right]$$

Por comodidad para el cálculo, se introducirán en lo sucesivo los valores constantes

$$\begin{aligned} a_1 &= -Q(\bar{G}_0) & a_3 &= B'(\bar{G}_0) & a_5 &= R'(\bar{G}_0) \\ a_2 &= -Q'(\bar{G}_0) & a_4 &= B''(\bar{G}_0) \end{aligned}$$

de donde, finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tau} &= -2 a_1 \operatorname{sen} 2\tilde{g} + \nu \tilde{G} [-2 a_2 \operatorname{sen} 2\tilde{g} + a_5 (-1)^j \operatorname{sen} \tilde{g}] \\ \frac{d\tilde{g}}{d\tau} &= a_3 \tilde{G} + \nu \left[\frac{1}{2} a_4 \tilde{G}^2 - a_2 \cos 2\tilde{g} + a_5 (-1)^j \cos \tilde{g} - (-1)^j a_5 \right] \end{aligned} \quad (15-5)$$

2.º Para $\bar{g}_0 = 0, \pi$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2(\bar{g}_0 + \tilde{g}) &= \operatorname{sen} 2\tilde{g} \\ \cos 2(\bar{g}_0 + \tilde{g}) &= \cos 2\tilde{g} \\ \operatorname{sen}(\bar{g}_0 + \tilde{g}) &= -(-1)^j \operatorname{sen} \tilde{g} \\ \cos(\bar{g}_0 + \tilde{g}) &= -(-1)^j \cos \tilde{g} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 1 \text{ para } \bar{g}_0 = 0 \\ j = 2 \text{ " } \bar{g}_0 = \pi \end{array} \right.$$

y las ecuaciones (15-2) se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{d\tau} &= 2 a_1 \operatorname{sen} 2\tilde{g} + \nu \tilde{G} [2 a_2 \operatorname{sen} 2\tilde{g} - a_5 (-1)^j \cos \tilde{g}] \\ \frac{d\tilde{g}}{d\tau} &= a_3 \tilde{G} + \nu \left[\frac{1}{2} a_4 \tilde{G}^2 + a_2 \cos 2\tilde{g} + a_5 (-1)^j \operatorname{sen} \tilde{g} - a_2 \right] \end{aligned}$$

El sistema (15-5), que corresponde a soluciones próximas a las de equilibrio estable, es el que tiene mayor interés para nosotros. Dicho sistema, por eliminación de la variable \tilde{G} , se puede reducir a una ecuación de segundo orden con respecto a la variable \tilde{g} , tal como

$$\frac{d^2\tilde{g}}{d\tau^2} = -2 a_1 a_3 \operatorname{sen} 2\tilde{g} - \nu \frac{2 a_1 a_4}{a_3} \operatorname{sen} 2\tilde{g} \frac{d\tilde{g}}{d\tau} \quad (15-7)$$

Si en esta ecuación hacemos $\nu = 0$, se tiene la primera aproximación que ya fue estudiada anteriormente; no obstante, si queremos estudiar la ecuación más general (15-7), que en realidad constituye una mejora de la primera aproximación, pondremos

$$2 \beta_2 = - \frac{2 a_1 a_4}{a_3} \quad (15-8)$$

de donde

$$\frac{d^2\tilde{g}}{d\tau^2} = -2 \beta_1^2 \operatorname{sen} 2\tilde{g} + \nu 2 \beta_2 \operatorname{sen} 2\tilde{g} \frac{d\tilde{g}}{d\tau} \quad (15-9)$$

Esta es la ecuación del movimiento de un péndulo bajo la acción de una fuerza exterior proporcional a la velocidad y al seno de la amplitud, en la que pueden considerarse dos importantes casos: a) Oscilaciones perturbadas y b) Rotaciones perturbadas.

16. Oscilaciones perturbadas

Cuando el movimiento de la primera aproximación alrededor de la posición de equilibrio consiste en oscilaciones, haremos los siguientes cambios de variables

$$\text{sen } \tilde{g} = \delta \text{ sen } \psi \quad 0 < \delta < 1 \quad (16-1)$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tau} = 2 \beta_1 \delta \text{ cos } \psi$$

Es fácil comprobar, en este caso, que la ecuación (15-7) se convierte en el sistema

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \nu 4 \beta_2 \text{ sen } \psi \text{ cos}^2 \psi \delta^2 \sqrt{1 - \delta^2 \text{ sen}^2 \psi} \quad (16-2)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = 2 \beta_1 \sqrt{1 - \delta^2 \text{ sen}^2 \psi} - \nu 4 \beta_2 \delta \text{ sen}^2 \psi \text{ cos } \psi \sqrt{1 - \delta^2 \text{ sen}^2 \psi}$$

al que puede aplicársele el método generalizado de promedios en su segundo caso. Concretamente, haremos una transformación

$$\delta = \bar{\delta} + \nu \eta^{(1)}(\bar{\delta}, \bar{\psi}) \quad (16-3)$$

$$\psi = \bar{\psi} + \nu u^{(1)}(\bar{\delta}, \bar{\psi})$$

para que las ecuaciones en $\bar{\delta}$, $\bar{\psi}$, lleguen a ser (prescindiendo de los términos de orden igual o superior a ν^2), del tipo

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\tau} = \nu T^{(1)}(\bar{\delta}) \quad (16-4)$$

con

$$\frac{d}{d\tau} \left[\int_0^\psi \Gamma(\bar{\delta}, \varphi) \frac{d\varphi}{\gamma(\bar{\delta})} \right] = \frac{1}{\gamma(\bar{\delta})} [1 + \nu W^{(1)}(\bar{\delta})]$$

$$\Gamma(\bar{\delta}, \psi) = \frac{1}{2 \beta_1 \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \text{ sen}^2 \psi}}$$

y

$$\gamma(\bar{\delta}) = \langle \Gamma(\bar{\delta}, \psi) \rangle_\psi = \frac{1}{2 \beta_1} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \text{ sen}^2 \psi}} = \frac{1}{\pi \beta_1} \mathcal{H}(\bar{\delta})$$

siendo $\mathcal{H}(\bar{\delta})$ la integral elíptica completa de primera especie de módulo $\bar{\delta}$.

Según (4-11), tendremos

$$T^{(1)}(\bar{\delta}) = \frac{1}{\gamma(\bar{\delta})} \langle \Gamma f^{(1)} \rangle_\psi = \frac{1}{\gamma(\bar{\delta})} \left\langle \frac{1}{2 \beta_1 \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \text{ sen}^2 \psi}} 4 \beta_2 \text{ sen } \psi \text{ cos}^2 \psi \bar{\delta}^2 \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \text{ sen}^2 \psi} \right\rangle_\psi = 0$$

y

$$\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \psi} = \Gamma(\bar{\delta}, \bar{\psi}) f^{(1)} = 2 \frac{\beta_2}{\beta_1} \bar{\delta}^2 \sin \bar{\psi} \cos^2 \bar{\psi}$$

y por tanto

$$\eta^{(1)} = -\frac{2}{3} \frac{\beta_2}{\beta_1} \bar{\delta}^2 \cos^3 \bar{\psi}$$

habiéndose tomado nula la constante que aparece en la integración de $\eta^{(1)}$, con lo cual es nulo su valor medio respecto a ψ . Asimismo (4-10') nos da

$$W^{(1)} = \frac{1}{\gamma(\bar{\delta})} \left\langle \frac{1}{2 \beta_1 \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \sin^2 \psi}} (-4 \beta_2) \bar{\delta} \sin^2 \psi \cos \psi \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \sin^2 \psi} \right\rangle = 0$$

y de (4-12), se deduce

$$u^{(1)} = 2 \beta_1 \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \sin^2 \bar{\psi}} \int \left(-\frac{4 \beta_2}{2 \beta_1} \right) \bar{\delta} \sin^2 \bar{\psi} \cos \bar{\psi} d\bar{\psi} = -4 \beta_2 \bar{\delta} \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \sin^2 \bar{\psi}} \frac{\sin^3 \bar{\psi}}{3}$$

En definitiva (16-3) y (16-4), en nuestro problema, serán

$$\bar{\delta} = \bar{\delta} + v \left(-\frac{2}{3} \frac{\beta_2}{\beta_1} \bar{\delta}^2 \cos^3 \bar{\psi} \right) \quad (16-5)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi} + v \left(-\frac{4}{3} \beta_2 \bar{\delta} \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \sin^2 \bar{\psi}} \sin^3 \bar{\psi} \right)$$

y

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\int_0^{\bar{\psi}} \Gamma(\bar{\delta}, \varphi) \frac{d\varphi}{\gamma(\bar{\delta})} \right] = \frac{1}{\gamma(\bar{\delta})} \quad (16-6)$$

Pero este sistema puede ser resuelto fácilmente, pues la primera ecuación nos indica que $\bar{\delta}$ es constante, y en tal caso, la segunda se reduce a la igualdad

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \int_0^{\bar{\psi}} \Gamma(\bar{\delta}, \varphi) d\varphi \right\} = 1$$

o bien

$$\int_0^{\bar{\psi}} \Gamma(\bar{\delta}, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2 \beta_1} \int_0^{\bar{\psi}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \sin^2 \varphi}} = \tau - \tau_0$$

de donde

$$\bar{\psi} = \arcsin 2 \beta_1 (\tau - \tau_0) \quad (16-7)$$

Mediante (16-5) tenemos la solución en las variables δ , ψ , en la forma

$$\delta = \bar{\delta} - v \frac{2}{3} \frac{\beta_2}{\beta_1} \bar{\delta}^2 \operatorname{cn}^3 2\beta_1 (\tau - \tau_0) \quad (16-8)$$

$$\psi = \bar{\psi} - v \frac{4}{3} \beta_2 \bar{\delta} \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \operatorname{sn}^2 2\beta_1 (\tau - \tau_0)} \operatorname{sn}^3 2\beta_1 (\tau - \tau_0)$$

Por último, y de conformidad con (16-1), escribiremos la expresión para \tilde{g} , hasta el primer orden incluido

$$\begin{aligned} \text{sen } \tilde{g} = & \left[\bar{\delta} - v \frac{2}{3} \frac{\beta_2}{\beta_1} \bar{\delta}^2 \operatorname{cn}^3 2\beta_1 (\tau - \tau_0) \right] \cdot \\ & \text{sen} \left(am 2\beta_1 (\tau - \tau_0) - v \frac{4}{3} \beta_2 \bar{\delta} \sqrt{1 - \bar{\delta}^2 \operatorname{sn}^2 2\beta_1 (\tau - \tau_0)} \operatorname{sn}^3 2\beta_1 (\tau - \tau_0) \right) \end{aligned}$$

Para \tilde{G} , desde (15-5), resulta hasta el primer orden incluido

$$a_3 \tilde{G} = 2\beta_1 \delta \cos \psi - v \left[\frac{2 a_4 \beta_1^2}{a_3^2} \bar{\delta}^2 \cos^2 \bar{\psi} - a_2 (1 - 2\bar{\delta}^2 \operatorname{sn}^2 \bar{\psi}) + a_5 (-1)^j \bar{\delta} \operatorname{sen} \bar{\psi} + a_2 - (-1)^j a_5 \right]$$

o bien

$$\tilde{G} = \frac{1}{a_3} \{ 2\beta_1 \delta \cos \psi - v [-2\beta_2 \bar{\delta}^2 \cos^2 \bar{\psi} - 2a_2 \bar{\delta}^2 \operatorname{sn}^2 \bar{\psi} + a_5 (-1)^j \bar{\delta} \operatorname{sen} \bar{\psi} - (-1)^j a_5] \}$$

Esta última igualdad, en la que se suponen sustituidos δ y ψ por sus valores (16-8) y ψ por (16-7), nos proporciona la expresión explícita para la variable G . Finalmente, si se desea volver a las variables de partida \bar{G} , \bar{g} , no hay más que sustituir \tilde{G} , \tilde{g} , en la transformación (14-3).

17. Rotaciones perturbadas

En este caso, introduciremos una nueva variable λ , por

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tau} = (\lambda - 4\beta_1^2 \operatorname{sen}^2 \tilde{g})^{1/2} \quad (17-1)$$

siendo $\lambda > 4\beta_1^2$.

Las ecuaciones relativas a las variables \tilde{g} y λ , son

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} = & 2v [2\beta_2 \operatorname{sen} 2\tilde{g} (\lambda - 4\beta_1^2 \operatorname{sen}^2 \tilde{g})] \\ \frac{d\tilde{g}}{d\tau} = & (\lambda - 4\beta_1^2 \operatorname{sen}^2 \tilde{g})^{1/2} \end{aligned} \quad (17-2)$$

y a ellas puede ser aplicado el método de promedios en su segundo caso. De manera más precisa, efectuaremos una transformación

$$\tilde{g} = \varphi + \nu u^{(1)}(\bar{\lambda}, \varphi) \quad (17-3)$$

$$\lambda = \bar{\lambda} + \nu \eta^{(1)}(\bar{\lambda}, \varphi)$$

eligiendo $\eta^{(1)}$, $u^{(1)}$, con valor medio nulo respecto a φ , de modo que las ecuaciones en las nuevas variables $\bar{\lambda}$, φ , serán, hasta el segundo orden

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} = \nu T^{(1)}(\bar{\lambda}) \quad (17-4)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\int_0^\varphi \Gamma(\bar{\lambda}, \tilde{g}) \frac{d\tilde{g}}{\gamma(\tilde{\lambda})} \right] = \frac{1}{\gamma(\tilde{\lambda})} [1 + \nu W^{(1)}(\bar{\lambda})]$$

$$\Gamma = (\bar{\lambda} - 4\beta_1^2 \text{sen}^2 \tilde{g})^{-\frac{1}{2}} \quad (17-5)$$

$$\gamma(\bar{\lambda}) = \langle \Gamma \rangle_\sigma = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\tilde{g}}{\sqrt{\bar{\lambda} - 4\beta_1^2 \text{sen}^2 \tilde{g}}} = \frac{2}{\pi \sqrt{\bar{\lambda}}} \mathcal{K} \left(\frac{2\beta_1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} \right)$$

Las funciones $T^{(1)}$, $W^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, $u^{(1)}$, pueden ser calculadas desde las ecuaciones de partida. Sus expresiones explícitas, obtenidas de forma análoga a la que acabamos de ver, son

$$T^{(1)}(\bar{\lambda}) = 0$$

$$W^{(1)}(\bar{\lambda}) = \frac{\beta_2}{3\beta_1^2 \gamma(\bar{\lambda})}$$

$$\eta^{(1)} = -\frac{\beta_2}{\beta_1^2} \frac{2}{3} (\bar{\lambda} - 4\beta_1^2 \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}$$

$$u^{(1)} = (\bar{\lambda} - 4\beta_1^2 \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} \left\{ -\frac{\beta_2}{3\beta_1^2} \varphi + \frac{\beta_2}{3\beta_1^2 \gamma(\bar{\lambda})} \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} \mathcal{K} \left(\frac{2\beta_1}{\sqrt{\bar{\lambda}}}, \varphi \right) \right\}$$

siendo $\mathcal{K} \left(\frac{2\beta_1}{\sqrt{\bar{\lambda}}}, \varphi \right)$ el valor de la integral elíptica incompleta, de argumento φ y módulo $\frac{2\beta_1}{\sqrt{\bar{\lambda}}}$. Las ecuaciones relativas a las variables $\bar{\lambda}$, φ , quedan en la forma

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\int_0^\varphi \Gamma(\bar{\lambda}, \tilde{g}) \frac{d\tilde{g}}{\gamma(\tilde{\lambda})} \right] = \frac{1}{\gamma(\tilde{\lambda})} [1 + \nu W^{(1)}(\bar{\lambda})]$$

La primera nos da $\bar{\lambda} = \text{const.}$, y la segunda, después de ser integrada, se puede escribir

$$\int_0^\varphi \frac{d\tilde{g}}{\left(1 - \frac{4\beta_1^2}{\lambda} \text{sen}^2 \tilde{g}\right)^{1/2}} = \sqrt{\bar{\lambda}} (1 + \nu W^{(1)}) (\tau - \tau_0)$$

de donde

$$\varphi = am \sqrt{\bar{\lambda}} (1 + \nu W^{(1)}) (\tau - \tau_0)$$

Así, pues, la solución del sistema adopta la forma

$$\lambda = \bar{\lambda} - \nu \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \frac{2}{3} (\bar{\lambda} - 4\beta_1^2 \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}$$

$$\tilde{g} = \varphi + \nu (\bar{\lambda} - 4\beta_1^2 \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} \left\{ -\frac{\beta_2}{3\beta_1^2} \varphi + \frac{\beta_2}{3\beta_1^2 \gamma(\bar{\lambda})} \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} \mathcal{H} \left(\frac{2\beta_1}{\sqrt{\bar{\lambda}}}, \varphi \right) \right\}$$

Para el cálculo de \tilde{G} se procedería de manera totalmente análoga a la del caso anterior.

18. Comparación con otros resultados

Garfinkel (1960) estudió las soluciones próximas a las de inclinación crítica, eliminando primeramente los términos de corto período del hamiltoniano, por medio del método de von Zeipel; a continuación, desarrollo en serie la integral de la energía en el entorno de un punto fijo (G' , g'), reteniendo términos hasta el segundo orden. En su trabajo, llega a ver que el movimiento es formalmente idéntico al de un péndulo simple. Nuestros resultados generalizan los suyos en algunos aspectos. De una parte, las soluciones de equilibrio están calculadas de modo explícito hasta el segundo orden, dando un método válido para obtenerlas hasta el orden que se desee, mientras que Garfinkel trabaja con soluciones de equilibrio de primer orden. Por otra parte, las oscilaciones en el entorno de la solución de equilibrio, las hemos calculado con un orden de aproximación superior al suyo.

Gen-Ichiro Hori (1960), trató también el problema de inclinación crítica, partiendo de las ecuaciones del movimiento en las que se han eliminado los términos de corto período según Brouwer. Entonces, para eliminar los términos de largo período, aplica de nuevo el método de von Zeipel, utilizando una función generatriz $S = S_0 + S_{\frac{1}{2}}$, desarrollada en términos de la raíz cuadrada del pequeño parámetro, en lugar de éste como se hace usualmente. De esta forma, Gen-Ichiro Hori dio una solución válida hasta la raíz cuadrada del pequeño parámetro y sus resultados coinciden hasta el orden $J_2^{1/2}$ con los de Garfinkel y los nuestros. Los principales inconvenientes de su método residen en la artificiosidad para buscar $S_{\frac{1}{2}}$ y en que sus resultados no pueden ser extendidos a órdenes superiores.

IV.— Estudio del movimiento de un Satélite Artificial en función de las Variables Canónicas de Hill

19. Introducción

Los métodos de perturbaciones que se emplean en Mecánica Celeste, están orientados fundamentalmente desde dos puntos de vista. Mientras unos tratan de obtener las perturbaciones en las coordenadas del cuerpo considerado, otros calculan las perturbaciones en los elementos orbitales y posteriormente, desde éstas, las de las coordenadas.

En los capítulos precedentes, siguiendo esta segunda directriz, se han usado las técnicas de promedios para calcular las perturbaciones de un satélite debidas al achataamiento terrestre, en las variables de Delaunay.

Nuestros resultados, igual que los de Brouwer, presentan pequeños divisores para las excentricidades 0 y 1, y las inclinaciones 0° , 180° , I_c . Evidentemente, la existencia de dichas singularidades limita el rango de aplicación de estas soluciones, por lo cual se han buscado, con insistencia, procedimientos que eviten la aparición de aquéllas.

Recordemos que, la singularidad de inclinación crítica, está producida por la forma del potencial terrestre y es de distinta naturaleza que las otras, debidas a la elección particular de los parámetros o elementos orbitales. Parece, por tanto, natural el buscar la eliminación de estas últimas singularidades utilizando un conveniente sistema de parámetros, siendo preferible que sean canónicos, para que mantengan la forma de las ecuaciones.

Entre los sistemas de parámetros utilizados para este fin, el de Poincaré es el que tiene fundamento teórico más consistente, ya que como la función perturbadora en dichas variables es analítica respecto a sus argumentos, puede demostrarse sin dificultad que las ecuaciones promediadas y sus soluciones no pueden presentar singularidades. De todos modos, la complejidad de estas variables las hace casi inservibles para propósitos prácticos.

Hay otros sistemas de variables, no canónicos, en los que tampoco se presentan dichas singularidades; pero la no canonicidad de estas variables hace variar la forma de las ecuaciones, resultando más difícil su solución.

A la vista de estos resultados, hemos pensado que evitaríamos completamente tales problemas siguiendo el camino apuntado en primer lugar, que es el de obtener directamente las perturbaciones en un sistema de variables dinámicas.

Izsak (1963) guiado por las experiencias sobre el movimiento de satélites artificiales, hizo notar que las perturbaciones del plano orbital son de diferente naturaleza que las que tienen lugar en el plano orbital. En general, las primeras son mucho más pequeñas y tienen expresiones más simples que estas últimas. Entonces observó que, el sistema de variables de Hill:

r = radio vector

$u = f + g$ = ángulo del nodo con el radio vector

h = ángulo del nodo

$p_r = dr/dt$ = velocidad radial

$U = G$ = momento angular

H = proyección del momento angular sobre el eje Oz .

debe ser especialmente adecuado para describir el problema del satélite. Con estas observaciones previas, efectuaremos la integración del problema de movimiento de un satélite en las variables de Hill, analizando los resultados obtenidos.

20. Formulación del problema de movimiento de un satélite en las variables de Hill

Comencemos recordando que, las coordenadas cartesianas y velocidades, están relacionadas con las variables de Hill por las fórmulas

$$x = r (\cos u \cos h - (H/U) \operatorname{sen} u \operatorname{sen} h)$$

$$y = r (\cos u \operatorname{sen} h + (H/U) \operatorname{sen} u \cos h)$$

$$z = r \frac{\sqrt{U^2 - H^2}}{U} \operatorname{sen} u$$

$$x \dot{y} - y \dot{x} = H$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = p_r^2 + \frac{U^2}{r^2}$$

$$x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z} = r p_r$$

La función hamiltoniana, que describe el problema del movimiento de un satélite artificial, sometido a un potencial V , en un sistema de coordenadas cartesianas con el plano Oxy coincidente con el ecuatorial y Oz con el eje polar, es

$$F = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V$$

Y el potencial creado por la distribución de masas de la Tierra, suponiendo que tiene simetría rotacional, puede ser escrito en la forma de Vinti

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n (\operatorname{sen} \beta) \right]$$

como ya hemos visto en el párrafo 5, aunque ahora hemos utilizado la letra β para designar la latitud.

Puesto que la transformación del sistema de coordenadas $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)$ a las variables de Hill (r, u, h, p_r, U, H) es canónica conservativa de multiplicador 1, la función de Hamilton, que describe el problema en las variables de Hill, es

$$F = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{U^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n (\operatorname{sen} \beta) \quad (20-2)$$

siendo

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} I \operatorname{sen} u \quad \operatorname{sen} I = \sqrt{1 - \frac{H^2}{U^2}}$$

ya que la inclinación sólo toma valores entre 0° y 180° .

La contribución más importante del potencial perturbador es la debida al segundo armónico; ésta es del orden de $J_2 = \epsilon$, que será tomado como pequeño parámetro. En-

tonces, el resto de los armónicos, son al menos de orden ϵ^2 y F puede escribirse en la forma

$$F = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{U^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} - \epsilon \frac{\mu R^2}{r^3} (B_0 + B_2 \cos 2u) + \sum_{n=3}^{\infty} R_n \quad (20-3)$$

donde

$$B_0 = -\frac{1}{4} \left(1 - 3 \frac{H^2}{U^2} \right) \quad B_2 = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{H^2}{U^2} \right) \quad (20-4)$$

y

$$R_n = J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n \frac{\mu}{r} P_n(\cos u) \quad (20-5)$$

Como sabemos, la variable h o ángulo del nodo, no figura explícitamente en F , lo que corresponde a la supuesta simetría rotacional del potencial terrestre y, por tanto, su momento conjugado H es constante.

21. Eliminación de la variable u

En principio se trata de efectuar una transformación canónica, de modo que la variable angular u no figure de un modo explícito en la función hamiltoniana.

R. Cid y F. Lahulla (1969), han probado que el método de von Zeipel puede ser aplicado sin dificultad para llevar a cabo dicha eliminación. En síntesis efectúan una transformación canónica

$$(r, u, h, p_r, U, H) \quad (r', u', h', p_r', U', H')$$

mediante una función generatriz $S(r, u, h, p_r', U', H')$ del tipo

$$S = S_0 + \epsilon S_1 = p_r' r + U' u + H' h + \epsilon S_1 \quad (21-1)$$

buscando S_1 de modo que, en la función hamiltoniana, se eliminen las fluctuaciones periódicas de la variable angular u con valor medio cero; dicha función S_1 resulta ser

$$S_1 = \frac{\mu^2 R^2 B_2'}{3 U'^3} \left[-\frac{U' p_r'}{\mu} \cos 2u + \left(\frac{2 U'}{\mu r} - \frac{1}{2} \right) \sin 2u \right] \quad (21-2)$$

con

$$B_2' = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{H'^2}{U'^2} \right)$$

De aquí se deduce que las ecuaciones de transformación correspondientes, son

$$\begin{aligned} r' &= r + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial p_r'} = r - \epsilon \frac{\mu R^2 B_2}{3 U^2} \cos 2u \\ u' &= u + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial U'} = u + \epsilon \left\{ \frac{\mu R^2 p_r'}{2 U'^3} \left(1 - 2 \frac{H'^2}{U'^2} \right) \cos 2u + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\mu R^2}{U'^2 r} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H'^2}{U'^2} \right) - \frac{\mu^2 R^2}{2 U'^4} \left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{4} \frac{H'^2}{U'^2} \right) \right] \sin 2u \right\} \end{aligned} \quad (21-3)$$

LA TOPOLOGIA DEBIL DEL CONJUNTO DE LOS RAYOS DEL ESPACIO DE HILBERT, DEFINIDA MEDIANTE HIPERPLANOS

Algunos resultados sobre los sistemas topológicamente libres*

P O R

ANTONIO PLANS

Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Zaragoza

Summary

1. Let H be a separable, real Hilbert space, and $P(H)$ the set of its rays, τ_d and τ_r the weak and strong topologies, respectively, for the latter set.

Given a set of hyperplanes $\{\pi_i \mid i \in I\}$, $\cup \pi_i \subset H$, we consider in H the following equivalence relation: $x \sim y \Leftrightarrow y = \lambda_i x + z_i$, $z_i \in \pi_i$, $\lambda_i > 0$ ($i \in I$). We consider then the family of the sets of hyperplanes $A = \{\pi_i \mid i \in I\}$ such that the sets of orthogonal rays $A^\perp = \{r_i \mid r_i \perp \pi_i, i \in I\}$ be τ_r -compact. We obtain thus a base for τ_d .

2. a) We consider $b \in H$ as dependent of the set $A \subset H$, if $b \in [A]$ (linear, closed hull of A). We suppose then that $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ is a given free set such that every b_i ($i = 1, \dots, m$) depends on the given set A . Then arises the following question: under which conditions is it possible to substitute m vectors of A , a_{i_1}, \dots, a_{i_m} , by m vectors of B , verifying $[A - \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}, B] = [A]^?$

A complete discussion of this problem is given.

b) Let $S = \{a_n \mid n \in N\} \subset H$, and let it be $M(S)$ the intersection of all the kernels of the partial sequences $P = \{a_{p_n} \mid n \in N\}$. Let $C = \bigcup_{P \subset S} M(P)$. We have then $S \cap C = \emptyset$

as a necessary and sufficient condition for S to admit, hereditarily, a partition in topologically free systems.

H designa el espacio de Hilbert separable real, $P(H)$ el conjunto de sus rayos, τ_d la topología débil en $P(H)$ y τ_r la topología fuerte.

1. En mi comunicación a la Reunión Anual de Matemáticos españoles de 1969, titulada "Definición de una topología en el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert", di la construcción de una topología en $P(H)$ que, a continuación, voy a resumir.

Se dan los hiperplanos π_1, \dots, π_n . En el conjunto $H - (\pi_1 \cup \dots \cup \pi_n)$ tenemos la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ sí y sólo si $y = \lambda_i x + z_i$, $z_i \in \pi_i$, $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Si asociamos los pares de vectores opuestos, entonces todo conjunto finito de hiper-

* Conferencia pronunciada por el autor en Aquisgrán y Tubinga, los días 13 y 15 de julio de 1971, bajo el título «Die schwache Topologie der Strahlenmenge des Hilbertraumes, definiert mit Hilfe der Hyperebenen. Einige Ergebnisse über die topologisch freien Systeme».

planos $F = \{\pi_i \mid i = 1, \dots, n\}$ determina una partición del conjunto $P(H) = \bigcup_1^n P(\pi_i)$ en subconjuntos. Designemos por \mathcal{F} la familia así definida de conjuntos, donde F varía. \mathcal{F} viene a ser base de una topología τ en $P(H)$.

Se demuestran los siguientes resultados:

a) Dados los hiperplanos π_1, \dots, π_n , el hiperplano α , independiente de ellos, y el τ -entorno básico $U(r_0)$ definido mediante π_1, \dots, π_n , entonces $\alpha \cap U(r_0) \neq \emptyset$.

b) $r_n \xrightarrow{\tau} r \Leftrightarrow r_n \xrightarrow{\tau_d} r$.

Por consiguiente

$$\tau \subset \tau_d.$$

Vamos a ver, con un ejemplo, que el contenido es estricto.

Sea la sucesión de hiperplanos $\{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $r_n \perp \pi_n$, $r_n \xrightarrow{\tau} r$. Podemos admitir que los hiperplanos π_n ($n = 1, 2, \dots$) son linealmente independientes. Sea $r \perp \pi$. Consideremos ahora el conjunto $C = P(\pi) \cup \left(\bigcup_1^\infty P(\pi_n)\right) \subset P(H)$. Entonces C es τ_d -cerrado. En efecto, supongamos, por ejemplo, que la sucesión de rayos $s_n \rightarrow s$ (τ_d) $\wedge s_n \in P(\pi_n)$ (lo mismo haríamos para $s_{p_n} \in P(\pi_{p_n})$). Resulta entonces fácilmente $s \perp r \Rightarrow s \in C \Rightarrow C$ es τ_d -cerrado. Pero C no es τ -abierto, pues si tomamos un rayo $r_0 \in C$ y un entorno básico $U(r_0)$ de r_0 , de acuerdo con a), existe un hiperplano $\pi_v \in \{\pi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \ni \pi_v \cap U(r_0) \neq \emptyset$. Es decir, $U(r_0) \cap C \neq \emptyset$, con lo cual C no puede contener ningún τ -entorno de r_0 .

2. Quedó claro entonces que, para definir τ_d , se necesitaban conjuntos de hiperplanos más "ricos" que los finitos.

Podemos considerar nuestro problema desde el siguiente punto de vista: si tomamos $F^+ = \{r_i \mid r_i \perp \pi_i, i = 1, \dots, n\}$, trivialmente F^+ es τ_r -compacto. Esto nos lleva a la siguiente generalización: considerar conjuntos de hiperplanos $A = \{\pi_i \mid i \in I\}$ tales que $A^+ = \{r_i \mid r_i \perp \pi_i, i \in I\} \subset P(H)$ sean τ_r -compactos. Entonces obtenemos efectivamente una base de τ_d . (v. mi comunicación a la R. A. M. E. de 1970: "Una base de la topología débil en el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert definida mediante hiperplanos").

En lo que sigue, trataré de exponer resumidamente los resultados más importantes de esta comunicación.

Designemos por D el conjunto de los rayos que admiten representantes congruentes (mod $\pi_i, i \in I$). Se demuestra que $D \in \tau_d$. Sea \mathcal{D} la familia descrita por tales D , al variar A . \mathcal{D} es base de una topología τ' en $P(H)$.

Resulta fácilmente

$$r_n \xrightarrow{\tau'} r \Leftrightarrow r_n \xrightarrow{\tau_d} r,$$

con lo que, como más arriba,

$$\tau' \subset \tau_d.$$

(Es inmediato que $\tau \subset \tau'$).

Existe el siguiente resultado:

La condición necesaria y suficiente para que

$$(E, \theta) = \{r \mid \alpha(r, E) < \theta\} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

sea τ_d -abierto, es que la codimensión de E sea finita.

(v. "Sobre el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert", Víctor M. Onieva, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, núm. 13, 1971).

Entonces resulta el siguiente teorema, de especial importancia:

Teorema. Sea $r_1 \subset \pi_1$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Entonces existe un τ' -entorno básico D de r_1 , contenido en (π_1, θ) .

Este resultado se extiende con facilidad al caso general (E, θ) , $\text{codim } E = p > 1$, $r \subset E \subset (E, \theta)$. Por consiguiente, también (E, θ) , es τ' -entorno de r .

Teorema. Si r_0 es τ' -rayo de acumulación del conjunto $C \subset P(H)$, existe entonces una sucesión de rayos, contenida en $C - r_0$, que converge débilmente a r_0 .

De aquí se sigue

$$\tau' = \tau_d.$$

Basta tomar sólo aquellos conjuntos de rayos A^\pm , τ_d -compactos, de la siguiente forma:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (\overline{E_{p_i}}, \varepsilon_i), E_{p_i} \subset E_{p_{i+1}}, \varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i \rightarrow 0, p_i = 1.$$

(todo conjunto $\subset P(H)$, τ_d -compacto, está contenido en uno de ellos).

Se puede construir fácilmente un cono (r, θ) por congruencia respecto de los hiperplanos, cuyos rayos ortogonales describen un cono (\overline{r}, θ') . Estos conos cerrados son precisamente los conjuntos τ_d -compactos más simples de $P(H)$: $(\overline{E_p}, \theta')$ para $p = 1$. Y todo conjunto de rayos τ_d -compacto está contenido en alguno de estos conjuntos.

(v. "Nota sobre compacidad en el espacio de los rayos del espacio de Hilbert", 9.^a R. A. M. E., 1968).

3. Voy a exponer ahora algunos resultados, que hacen referencia a los sistemas vectoriales topológicamente libres.

a) (v. Víctor M. Onieva, "El problema del cambio en el espacio de Hilbert, respecto de una dependencia extensión de la lineal", X^a R. A. M. E., 1969).

Se considera $b \in H$ como "dependiente" del conjunto $A \subset H$ si $b \in [A]$ (con $[]$ designamos la envoltura lineal cerrada). Nos planteamos entonces el siguiente problema:

Suponiendo dado el sistema libre finito $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, de modo que cada b_i ($i = 1, \dots, m$) dependa de un conjunto dado A , ¿cuándo se pueden sustituir m vectores a_1, \dots, a_m de A por los m vectores de B de forma tal que

$$[A - \{a_1, \dots, a_m\}, B] = [A]?$$

Podemos admitir $A \cap B = \emptyset$.

Comencemos por el problema del cambio de un vector b . Si A es topológicamente libre, entonces en particular es numerable, $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y el cambio es sólo posible cuando b no pertenece al núcleo de A .

Pasemos al problema de m ($m > 1$) vectores, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Admitamos $A \cap B = \emptyset$, B libre y $B \subset [A]$. Designemos por K el núcleo de A . Se presentan los siguientes casos:

1. A topológicamente libre.

Hay entonces dos subcasos:

1') $[B] \cap K \neq \{0\}$.

El cambio no es posible.

1'') $[B] \cap K = \{0\}$.

El cambio es posible.

2. Supongamos ahora que A no es topológicamente libre. Si existen m vectores a_1, \dots, a_m de A que dependen del resto $A_m = A - \{a_1, \dots, a_m\}$, entonces resulta $[A] = [B, A - A_m]$. El cambio ha sido posible.

Supongamos, pues, que el máximo cardinal p de un subconjunto $S \subset A$, cuyos vectores dependan de $A - S$, verifique $1 \leq p < m$. Entonces A debe ser numerable, $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Podemos admitir que $S = \{a_1, \dots, a_p\}$. Consideremos ahora los subespacios lineales $[B_{m-p}]$, determinados por $m-p$ vectores de B . — Se presentan dos subcasos:

2') Existe un B_{m-p} tal que

$$[B_{m-p}] \cap K = \{0\}.$$

El cambio es posible.

2'') Para todo B_{m-p} se verifica

$$[B_{m-p}] \cap K \neq \{0\}.$$

Si ahora admitimos la existencia de cambio, llegamos a un absurdo.

b) (v. Víctor M. Onieva, "Sobre la partición de una sucesión vectorial en sistemas topológicamente libres", IX R. A. M. E., 1970).

Se da una sucesión vectorial $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Designamos por $M(S)$ la intersección de los núcleos de todas las sucesiones parciales contenidas en S . Asociamos a cada una de tales sucesiones $P = \{a_{p_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ su correspondiente $M(P)$. Sea $C = \bigcup_{P \subset S} M(P)$.

Entonces resulta:

"La condición necesaria y suficiente para que, hereditariamente, S admita una partición en sistemas topológicamente libres, es

$$S \cap C = \emptyset.'$$

De aquí se sigue el siguiente resultado:

"Para una sucesión vectorial dada $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $0 < k' < \|a_n\| < k'' < \infty$, se verifica

$$a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow C = \{0\}."$$

O, equivalentemente,

$$M(P) = \{0\}, \forall P \subset S.$$

ESTUDIO DE PROTEINAS EN VINOS DE ARAGON

P O R

D. REVUELTA

Dpto. de Química Técnica. Universidad de Zaragoza

Summary

Several methods for the analytical estimation of proteinic substances are applied to Aragon's wine. The methods include a elemental resolution, determination of the nitrogen distribution, chromatographic and electrophoretical analysis.

I. — Introducción

Los mostos de uva, antes de la fermentación, contienen siempre en mayor o menor proporción, sustancias nitrogenadas de naturaleza protéica.

Durante la fermentación alcohólica, la acción preteolítica de ciertas levaduras, hace desaparecer parte de dichas sustancias. Al mismo tiempo, los taninos existentes en los vinos en diferentes concentraciones, coagulan otra fracción pero de una manera casi general y particularmente los vinos blancos jóvenes, conservan cantidades importantes.

Estos compuestos nitrogenados juegan un papel importante en la limpieza de los vinos blancos y su presencia puede provocar la llamada precipitación protéica, "Casse protéique" o quiebra protéica, turbidez que al aparecer después del embotellado puede alterar la presentación de los vinos con las consiguientes consecuencias económicas.

El estudio de sustancias protéicas en vinos ha sido llevado a cabo en Alemania por KIELHOFER (1, 2, 3, 4, 5) y KOCH (6, 7) sobre muestras de procedencia Rhin, en Argelia por MARCILLE (8) y en Francia por BOHRINGER y DOLLE (9) pero en la bibliografía consultada no aparece ninguna referencia a su realización en vinos españoles.

Con estos antecedentes se ha llevado a cabo un trabajo experimental que abarca las siguientes partes:

1. Distribución de la frecuencia con que aparecen en vinos originarios de las distintas zonas productoras de la región aragonesa, turbideces más o menos intensas por calentamiento o adición de tanino.

2. Estudio de los precipitados a que se refiere el apartado anterior, comprendiendo el análisis elemental, la determinación de fracciones nitrogenadas en hidrolizados y el examen cromatográfico y electroforético de los mismos.

II. — Frecuencia en la distribución de proteínas en vinos de Aragón

II. 1. Material.

Se han utilizado vinos blancos procedentes de las principales zonas productoras de la provincia de Zaragoza y fundamentalmente del llamado Campo de Cariñena, como más característico de la región.

En cuanto a las fechas de elaboración han oscilado entre los años 1961 y 1968.

II. 2. Métodos.

Precipitación por el calor. — Las muestras se someten en condiciones adecuadas a temperaturas de 30°, 45°, 60° y 90° observándose la posible aparición de enturbiamiento.

Precipitación por adición de tanino. — Se han utilizado dos concentraciones distintas: 0,25 y 2,50 g./l. para comparar los resultados.

Reconocimiento de precipitados. — Se realiza en todos los casos con las pruebas preconizadas por RIBEREAU y PEYNAUD (10) para comprobar la naturaleza protéica de los mismos.

Determinación cuantitativa de precipitados. — Se lleva a cabo gravimétricamente.

II. 3. Resultados

Vienen expresados en la tabla núm. 1

| Procedencia (Núm. orden) | Año | Temperatura | | | | Tanino | | |
|-----------------------------|-------------|-------------|-----|-----|-----|------------|-----------|----|
| | | 30° | 45° | 60° | 90° | 0,25 g./l. | 2,5 g./l. | |
| Cariñena (1) | 1967 | — | — | + | + | + | ++ | |
| | (2) | 1968 | — | — | — | — | + | + |
| | (3) | 1968 | + | + | + | + | + | ++ |
| | (4) | 1968 | — | — | — | — | + | + |
| | (5) | 1968 | — | — | — | — | + | + |
| | (6) | 1968 | — | — | — | — | — | — |
| | (7) | 1968 | — | — | — | + | — | + |
| | (8) | 1968 | — | — | — | + | + | + |
| | (9) | 1968 | — | — | — | — | + | + |
| | (10) | 1968 | + | + | + | + | + | ++ |
| | (11) | 1968 | — | — | + | + | + | + |
| | (12) | 1962 | — | — | — | — | — | — |
| Paniza (1) | 1968 | — | + | + | + | + | ++ | |
| | (2) | 1965 | — | — | — | — | — | — |
| Aguarón (1) | 1967 | — | — | — | — | — | + | |
| | (2) | 1965 | — | — | — | — | + | |
| | (3) | 1967 | — | — | — | + | + | |
| Longares (1) | 1968 | + | + | + | + | + | ++ | |
| | (2) | 1968 | — | — | — | + | + | |
| Cosuenda (1) | 1968 | — | — | — | — | — | — | |

Tabla núm. 1. — Distribución de proteínas por precipitación en vinos procedentes de la zona de Cariñena.

La aplicación de los procedimientos expuestos a una serie de muestras de edad superior a un año nos ha conducido a los siguientes valores (tabla núm. 2):

ESTUDIO DE LAS PROTEINAS EN VINOS DE ARAGON

| Procedencia (Núm. orden) | Año | Temperatura | | | | Tanino | |
|-----------------------------|------|-------------|-----|-----|-----|------------|-----------|
| | | 30° | 45° | 60° | 90° | 0,25 g./l. | 2,5 g./l. |
| Magallón (1) | 1961 | — | — | — | — | — | — |
| (2) | 1961 | — | — | — | — | — | — |
| Cariñena (12) | 1962 | — | — | — | — | — | — |
| Lécera (1) | 1963 | — | — | — | — | — | — |
| Paniza (2) | 1965 | — | — | — | — | — | — |
| Aguarón (2) | 1965 | — | — | — | — | — | + |
| Mequinenza (1) | 1966 | — | — | — | — | + | + |
| Cariñena (1) | 1967 | — | — | + | + | + | ++ |
| Aguarón (1) | 1967 | — | — | — | — | — | + |
| (3) | 1967 | — | — | — | + | + | + |

Tabla núm. 2. — Distribución de precipitados protéicos en vinos de edad superior a un año.

Por lo que se refiere a la determinación cuantitativa, las cantidades precipitadas vienen expuestas en la tabla núm. 3 que a continuación se relaciona:

| Procedencia (Núm. orden) | mg./l. a 90°C | mg./l. por tanino (2,5) |
|--------------------------|---------------|-------------------------|
| Cariñena (1) | 12 | 23 |
| (3) | 20 | 23 |
| (10) | 17 | 19 |
| Paniza (1) | 21 | 26 |
| Longares (1) | 18 | 21 |

Tabla núm. 3. — Cantidades por litro de sustancias protéicas precipitadas.

III. — Estudio de precipitados protéicos

III. 1. Análisis previo elemental.

Cualitativo. — La aplicación de los métodos usuales de análisis cualitativo en las cenizas nítricas de los precipitados obtenidos por las acciones anteriormente citadas indica la existencia en los mismos de los siguientes elementos: Carbono, hidrógeno, azufre, nitrógeno, fósforo, hierro y calcio.

Cuantitativo. — *Determinación de carbono e hidrógeno.* — Se utiliza un método de combustión basado en el microanalítico de ZIMMERMANN (11).

Determinación de azufre. — Se realiza de acuerdo con el método de ESCHKA (12).

Determinación de calcio. — Se lleva a cabo colorimétricamente midiendo a 575 milimicras la absorción que presenta la solución problema adicionada a Reactivo Colorante RNF de la casa Clinton.

Determinación de fósforo. — Se utiliza el método colorimétrico por adición de una mezcla de molibdato amónico, ácido tricloroacético y ácido aminonaftolsulfónico a la solución problema.

Determinación de hierro. — Por medio de una solución de sulfocianuro potásico se produce una coloración roja que se mide colorimétricamente. Para evitar la interferencia debida a la presencia de iones fosfato en la muestra problema se ha utilizado la modificación de PETERSON y ELVEHJEM (13) antes de realizar las medidas.

Resultados. — La proporción de elementos determinados oscila entre los límites que se citan :

| | | | |
|---------------------------------------|-------|---|---------|
| Carbono | 24,30 | — | 29,16 % |
| Hidrógeno | 3,52 | — | 3,94 % |
| Azufre | 0,44 | — | 1,11 % |
| Cenizas | 12,40 | — | 19,20 % |
| OCa | 32,02 | — | 43,04 % |
| P ₂ O ₅ | 26,26 | — | 32,41 % |
| Fe ₂ O ₃ | 5,77 | — | 6,92 % |

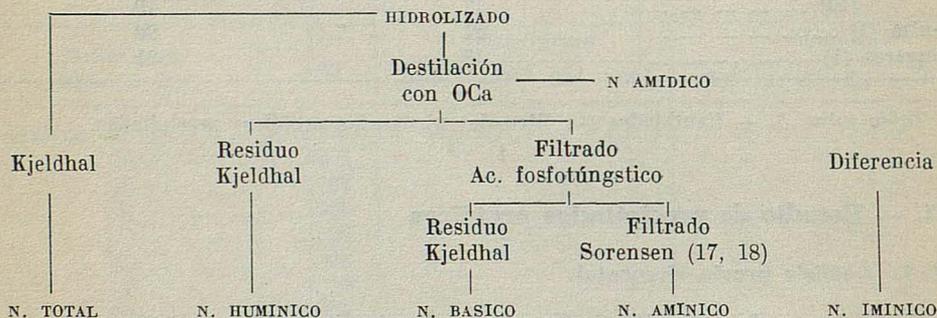
Tabla núm. 4. — Campo de variabilidad de elementos en precipitados.

III. 2. Estudio de fracciones nitrogenadas.

Hidrólisis ácida. — Tiene lugar en matraz provisto de refrigerante de reflujo en las siguientes condiciones :

Agente hidrolizante: Acido clorhídrico redestilado
 Concentración: 6 normal
 Temperatura: ebullición
 Tiempo: 24 horas.

Distribución de nitrógeno protéico. — El método seguido viene indicado en el esquema adjunto y responde a las indicaciones de HAUSSMAN, OSBORNE y HARRIS (14), modificadas por VAN SLYKE (15, 16) :



Resultados. — De los valores hallados para las distintas fracciones nitrogenadas puede establecerse como límites inferior y superior respectivamente en cada caso los valores que se acompañan utilizando el coeficiente 6,25 para la estimación del contenido en proteínas de los precipitados

| | | | |
|-------------------|-------|---|-------|
| N Total | 6 | — | 12 % |
| Proteínas | 38,25 | — | 75 % |
| N Amídico | 0,25 | — | 1 % |
| N Humínico | 0,85 | — | 2,3 % |
| N Básico | 0,95 | — | 4 % |
| N Amínico | 1,75 | — | 4,15% |
| N Imínico | 0,85 | — | 3,25% |

Tabla núm. 5. — Intervalos de variación de las fracciones nitrogenadas respecto al precipitado total.

Estos resultados corresponden a doce muestras de vinos de las procedencias indicadas anteriormente.

III. 3. Estudio cromatográfico de precipitados.

Para este objeto se han realizado cromatogramas en capa fina de los hidrolizados de sustancias protéicas precipitadas en orden al reconocimiento cualitativo de los aminoácidos constituyentes y posteriormente el análisis cuantitativo por cromatografía en columna.

Cromatogramas en capa fina. — Se emplean dos tipos de soportes como son Silicagel G Merck (19, 20) y Celulosa MN 300 G (21). Todos los cromatogramas se hicieron sobre placas de vidrio de dimensiones 20×20 cm. El grosor en todos los casos era de 250 micras.

Con objeto de comparar los resultados obtenidos se realizaron previamente una serie de experiencias con los soportes y sistemas de solventes más corrientemente citados en la bibliografía consultada con vistas a la selección de los que producen las mejores resoluciones. Al mismo tiempo se construyeron cromatogramas con 17 aminoácidos patrones Merck en todas las técnicas seguidas.

Todos los cromatogramas se realizan sin previa saturación de la cámara. Las placas se colocan en el tanque formando un ángulo de 70° con la horizontal.

Como revelador se utiliza en todos los casos una solución de ninhidrina al 0,2 % en etanol. Se alcanzan recorridos del frente del solvente de unos 15 cm. aproximadamente.

En cuanto al secado de las placas se realizaba o bien al aire durante 24 horas o en estufa a 110°C durante 10 minutos conservando las condiciones en cada serie de experiencias.

En total se realizaron 22 cromatogramas distintos sobre tres muestras de procedencias Cariñena y Paniza.

Tras ensayo de los principales sistemas de solventes citados se encontraron como más convenientes y fueron utilizados los siguientes:

En una dimensión:

Sobre Silicagel G Merck (22, 23):

- 1.° Cloroformo-Metanol-Amoníaco 17 % (20:20:9).
- 2.° Fenol-Agua (75:25).

Sobre Celulosa MN 300 G (24):

- 1.° n-Butanol-Acetona-Dietilamina-Agua (10:10:2:5).
- 2.° Isopropanol-Acido fórmico-Agua (40:2:10).
- 3.° sec-Butanol-Metiletilcetona-Diciclohexilamina-Agua (10:10:2:5).
- 4.° Fenol-Agua (75:25).

En dos dimensiones:

Sobre Silicagel G Merck:

- 1.° Cloroformo-Metanol-Amoníaco 17 % (20:20:9). Fenol-Agua (75-25).

Sobre Celulosa MN 300 G:

- 1.° n-Butanol-Acetona-Dietilamina-Agua (10:10:2:5). Isopropanol-Acido fórmico-Agua (40:2:10).
- 2.° n-Butanol-Acetona-Dietilamina-Agua (10:10:2:5). sec-Butanol-Metiletilcetona-Diciclohexilamina-Agua (10:10:2:5).
- 3.° n-Butanol-Acetona-Dietilamina-Agua (10:10:2:5). Fenol-Agua (75:25).

Los tres sistemas de solventes elegidos para cromatografías bidimensionales sobre Celulosa MN-300 G, corresponden a la técnica multidimensional de VON ARX y NEHER (24).

Cromatografía en columna. — Se realiza mediante ella la determinación cuantitativa de aminoácidos. Los productos de hidrólisis se analizan por el método de la ninhidrina en Analizador Automático de aminoácidos.

Para ello antes de la realización de la hidrólisis de precipitados se dializa la muestra frente a agua destilada para eliminación de sales minerales, aminoácidos libres y pequeñas moléculas posiblemente existentes. Posteriormente se procede a liofilización separada de las fracciones insolubles y sobrenadante y el producto que no se ha disuelto en agua se hidroliza en condiciones adecuadas.

Resultados. — Todos los cromatogramas en capa fina presentan sin lugar a dudas la existencia de fenilalanina, leucina, lisina, ácido aspártico y ácido glutámico.

Con frecuencia superior al 50 % de los casos aparecen metionina, valina y prolina y con frecuencia igual o menor del 50 %, serina, alanina, histidina, arginina e hidroxiprolina.

En total se detectan trece aminoácidos constituyentes distintos. Por lo que respecta a la determinación cuantitativa se han obtenido los resultados indicados en la tabla número 6.

| Aminoácidos | microg./mg. proteína | microM/mg. proteína |
|------------------|----------------------|---------------------|
| Asp | 155,72 | 1,17 |
| Thr | 90,53 | 0,76 |
| Ser | 50,44 | 0,48 |
| Glu | 138,30 | 0,94 |
| Pro | Trazas | — |
| Gly | 60,05 | 0,80 |
| Ala | 89,98 | 1,01 |
| Val | 110,12 | 0,94 |
| Cys | Trazas | — |
| Met | 29,84 | 0,20 |
| Ileu | 87,89 | 0,67 |
| Leu | 87,89 | 0,67 |
| Nor | 62,96 | 0,48 |
| Tyr | 59,75 | 0,33 |
| Phe | 74,29 | 0,45 |
| H ₃ N | 20,57 | 1,21 |
| Lys | 92,49 | 0,62 |
| His | 32,82 | 0,28 |
| Arg | 85,33 | 0,55 |

Tabla núm. 6. — Determinación cuantitativa de aminoácidos.

Se detectaron 18 aminoácidos distintos de los cuales prolina y cistina no pudieron evaluarse cuantitativamente por su pequeña concentración.

Del análisis cuantitativo se deduce un contenido en proteínas que va de un 40 a un 53 % según las fracciones consideradas y que viene a corresponder con el encontrado en el estudio de fracciones nitrogenadas en hidrolizados

III. 4. Estudio electroforérico de muestras.

Condiciones. — Se realizó con dos técnicas distintas en orden al colorante utilizado :

Voltaje : 200 voltios
 Tiempo : 75 minutos

| | <i>Técnica núm. 1</i> | <i>Técnica núm. 2</i> |
|-----------------|-----------------------|---|
| Tampón | | Veronal sódico 0,04 m. |
| Colorante | Rojo Ponceau S | Negro amido B 12 . |
| Decolorante | Ac. acético 5 % | Metanol 475 Ac. acético 50 Agua 475 |
| Deshidratante | | Metanol anhidro |
| Transparentador | | Metanol 87 Ac. Acético 12 Glicerina 1 |

Resultados. — Se llevan a cabo una docena de experiencias encontrándose en la mayoría de los casos la existencia de dos manchas correspondientes a otras tantas fracciones protéicas.

Solamente en dos casos aparece una sola mancha tras desarrollo y revelado de las tiras.

Para la evaluación cuantitativa de ambas fracciones se utilizó un fotodensitómetro Elphor obteniéndose los siguientes resultados :

| | |
|--------------------|-----------------|
| Fracción I | 60,96 — 65,71 % |
| Fracción II | 34,29 — 39,04 % |

IV. — Conclusiones

Primera. — La existencia de sustancias nitrogenadas de naturaleza protéica es muy frecuente en los vinos procedentes de la región aragonesa. Consecuencia de ello, el riesgo de enturbiamiento conocido como quiebra protéica, no es despreciable. Hasta un 50 % de las muestras tratadas lo experimentan por efecto de la temperatura, mientras por adición de tanino llegan a un 80 %.

Segunda. — La proporción de muestras en las cuales detectamos sustancias protéicas por precipitación disminuye de una manera apreciable con la edad de los vinos hasta llegar a desaparecer de lo cual se infiere que dichas sustancias se van transformando en otras más sencillas no susceptibles de precipitar por adición de tanino o por el calor, presumiblemente aminoácidos. El riesgo de enturbiamiento protéico decrece con el tiempo.

Tercera. — El análisis cualitativo de los precipitados indica la existencia de los siguientes elementos: carbono, hidrógeno, nitrógeno, azufre, fósforo, calcio y hierro. Cuantitativamente, carbono e hidrógeno se encuentran en muy similares proporciones en todas las muestras ensayadas. El contenido en azufre es muy bajo del orden de un 1 %. Calcio, fósforo y hierro se presentan en las cenizas en proporciones decrecientes en el orden indicado.

Cuarta. — El estudio de fracciones nitrogenadas en hidrolizados procedentes de precipitados demuestra la existencia de un contenido en nitrógeno total que oscila entre 6 y 12 % correspondiendo a un tanto por ciento en proteínas variable entre 38 y 75 %.

Por lo que respecta a la distribución de nitrógeno destacan los valores ciertamente altos de nitrógenos humínico e imínico respecto al total.

Quinta. — El examen cromatográfico de hidrolizados se ha realizado con las técnicas usuales en capa fina para la detección de aminoácidos procedentes de moléculas protéicas y fundamentalmente con la técnica de Von Arx y Neher. Por este procedimiento se han dilucidado en total trece aminoácidos distintos constituyentes.

Sexta. — Por medio del análisis cuantitativo cromatográfico de aminoácidos se deduce un contenido en proteínas de un 40 a un 53 %. Los aminoácidos más abundantes son ácidos aspártico y glutámico, valina, lisina y leucina.

Séptima. — Mediante el empleo de técnicas electroforéticas se deduce que las muestras objeto de estudio pueden contener una o dos fracciones protéicas distintas siendo este último el caso más general. La evaluación fotométrica indica que una de las fracciones viene a encontrarse en proporción doble que la otra.

BIBLIOGRAFIA

- (1) E. KIELHOFER, Bull. inter. Vin., 152, 7, 1942.
- (2) E. KIELHOFER, Der Weinbau., 2, 233, 1948.
- (3) E. KIELHOFER, Der Weinbau., 3, 10-33, 1949.
- (4) E. KIELHOFER, Zeits. Lebensm. Unters. Forsch., 92, 1, 1951.
- (5) E. KIELHOFER, Weinberg n. Keller., 1, 292, 1954.
- (6) J. KOLH, E. GEISS, Zeits. Lebensm. Unters. Forsch., 100, 115, 1955.
- (7) J. KOLH, E. G177, Zeits. Lebensm. Unters. Forsch., 99, 188, 1954.
- (8) R. MARCILLE, Ann. Falsif. Fraudes, 24, 267, 1931.
- (9) P. BOHRINGER, H. DOLLE, Zeits. Lebensm. Unters. Forsch., 111, 121, 1959.
- (10) J. RIBEREAU-GAYON, E. PEYNAUD, "Traité d'oenologie", Tomme II, Beranger, París, 1961.
- (11) W. ZIMMERMANN, Mikrochem., 31, 149, 1943.
- (12) VILLAVECCHIA, "Química Analítica Aplicada", Tomo I, G. Gili, Barcelona, 1949.
- (13) M. PETERSON, J. ELVEHJEM, J. Biol. Chem., 78, 215, 1928.
- (14) W. HAUSSMAN, T. B. OSBORNE, J. HARRIS, J. Am. Chem. Soc., 25, 323, 1903.
- (15) D. D. VAN SLYKE, J. Biol. Chem., 10, 15, 1911-12.
- (16) D. D. VAN SLYKE, J. Biol. Chem., 22, 281, 1915.
- (17) S. SORENSEN, Biochem. Z., 7, 45, 1907.
- (18) S. SORENSEN, Z. Physiol. Chem., 64, 120, 1909.
- (19) E. MUTSCHLER, H. ROCHELMMEYER, Arch. Pharmaz. 292/64, 449, 1959.
- (20) K. TEICHERT, E. MUTSCHLER, H. ROCHELMMEYER, Dtsch. Apotheker-Ztg. 100, 293, 1960.
- (21) M. BRENNER, A. NIEDERWIESER, Experientia (Basel), 16, 378, 1960.
- (22) A. R. FAHMY, A. NIEDERWIESER, G. PATAKI, M. BRENNER, Helv. Chim. Acta, 44, 2022, 1961.
- (23) E. VON ARK, R. NEHER, J. Chromatogr., 12, 329, 1963.

MATERIAS CELULOSICAS SECUNDARIAS; SU ENNOBLECIMIENTO

P O R

L. HERRERO SÁNCHEZ

Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza.
Departamento de Química Técnica

Summary

Here is performed study of the prehydrolytic treatments, boiling and bleaching of the weach straw and it is established in figures the possibilities of obtaining first-classe cellulose. These results are satisfactory.

Introducción

En los procedimientos convencionales para obtención de pastas celulósicas destinadas a la fabricación de papel interesa, sobre todo, la eliminación de lignina. Durante el proceso de fabricación una parte de las hemicelulosas queda retenida por la pasta mientras que las menos resistentes se separan y sus productos de degradación se encuentran en los líquidos residuales.

Las hemicelulosas tienen una influencia favorable sobre la facilidad de refino y sobre la resistencia del papel. Al disminuir el contenido en hemicelulosas se debe aumentar el tiempo de refino, resultando un papel menos resistente.

Por el contrario en las pastas dedicadas a la fabricación de rayón, celofán, éter y esteres de celulosa la presencia de hemicelulosa es indeseable. En la fabricación de viscosa la presencia de hemicelulosa produce un mayor consumo de hidróxido sódico en la mercerización y dificultan la filtración de la viscosa. Las hemicelulosas no pueden dar soluciones de xantogenato por lo que permanecen inalterables en el transcurso de la fabricación de viscosa, sólo experimentarán degradación dando a la fibra terminada una solubilidad en álcali elevada y menos resistencia a la acción de los ácidos. Durante la acetilación el xilano forma un diacetato insoluble en acetona que produce dificultades en la filtración. En la nitración de la celulosa el xilano forma nitrato de xilano insoluble en acetona y acetato de butilo por lo que es perjudicial en la nitrocelulosa empleada en la fabricación de lacas y barnices.

La paja de trigo tiene un elevado contenido en hemicelulosas, preferentemente pentosas, por lo que resulta inadecuada su utilización como materia prima para la fabricación de celulosa apta para usos químicos. Para estas aplicaciones será necesario su ennoblecimiento. Este ennoblecimiento lo hemos efectuado mediante una prehidrólisis de la paja con ácido sulfúrico diluido antes de someterla a los procesos de cocción y blanqueo. Este proceso está basado en que las hemicelulosas se hidrolizan con más facilidad que la celulosa.

Como durante la prehidrólisis también se puede atacar la celulosa habrá que estudiar las condiciones más favorables que permitan lograr la máxima eliminación de pentosanas con un mínimo ataque a la celulosa.

La paja prehidrolizada en los diversos ensayos ha sido sometida a cocción y blanqueo, estudiando las variables de ambos procesos para obtener celulosa en las mejores condiciones de rendimiento y calidad.

1. Composición de la paja de trigo

Realizado el análisis de la paja de trigo empleada en el trabajo se hallan los siguientes resultados:

| | |
|---|--------|
| Humedad | 7,1 % |
| Cenizas | 3,11 % |
| Extracto metanol-benceno | 5,9 % |
| Furfural | 16,7 % |
| Pentosanas | 28,3 % |
| Lignina | 22,2 % |
| Celulosa Norman-Jenkins | 50,2 % |
| Cenizas en celulosa N-J | 1,1 % |
| Furfural en celulosa N-J | 15,4 % |
| Pentosanas en celulosa N-J | 26,2 % |
| α -celulosa en celulosa N-J | 71,2 % |
| Hemicelulosa en celulosa N-J | 27,3 % |

Teniendo en cuenta el tanto por ciento de celulosa Norman-Jenkins y su contenido en α -celulosa resulta que la paja contendrá 35,7 % de α -celulosa.

De los tantos por ciento de celulosa y de pentosanas en celulosa Norman-Jenkins resulta que del 28,3 % de pentosanas que contiene la paja, el 13,1 % pertenecen a los celulosanos, es decir, que quedan unidas a la celulosa Norman-Jenkins, mientras que el 15,2 restantes son pentosanas libres que se solubilizan durante la separación de la celulosa.

La composición de las cenizas determinada por los procedimientos normales de análisis es la siguiente:

| | |
|--------------------------------|--------|
| SiO_2 | 70,7 % |
| Fe_2O_3 | 9,9 % |
| CaO | 8,4 % |
| MgO | 4,8 % |
| SO_3 | 3,4 % |

2. Prehidrolisis

Según Schulze (1) se llaman hemicelulosas a los polisacáridos que acompañan a la celulosa y son solubles en álcali diluidos y fácilmente hidrolizables por ácidos minerales diluidos.

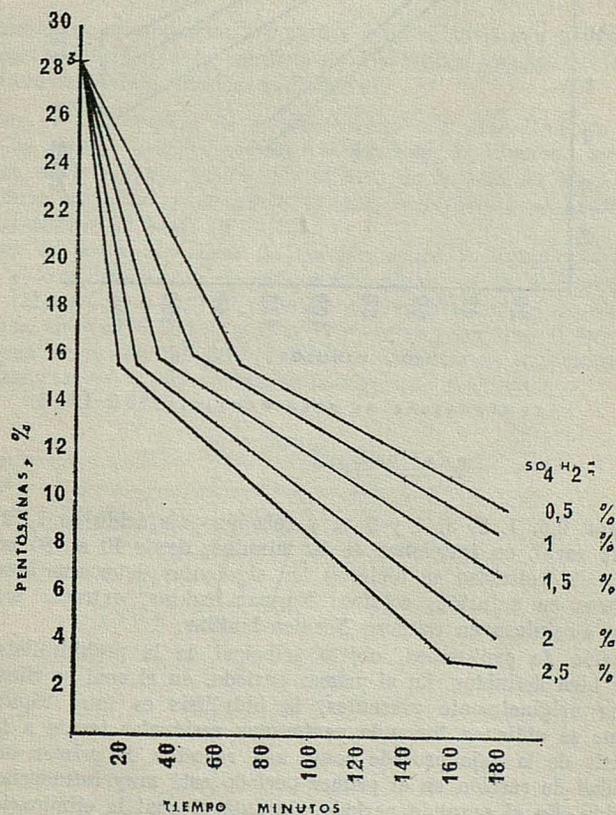
Esta definición no es completamente correcta pues Pringsheim (2) ha demostrado que alguno de estos polisacáridos no son atacados por los ácidos con más facilidad que la celulosa. Además, es imposible separar totalmente las hemicelulosas de la celulosa sin causar una importante degradación de esta última (3). Respecto a su solubilidad en álcalis hay que tener en cuenta que también es característico de los productos de degradación de la celulosa que se encuentran en las llamadas β y γ -celulosa.

MATERIAS CELULOSICAS SECUNDARIAS: SU ENNOBLECIMIENTO

Hawley y Norman (4) sugieren dividir las hemicelulosas en dos grupos que se pueden separar al obtener la celulosa por el método Cross y Bevan. El primer grupo está constituido por las sustancias que contienen ácidos urónicos y quedan en disolución al obtener la celulosa, recibiendo el nombre de poliuronidos. El segundo grupo lo constituyen las sustancias que por estar íntimamente unidas a la celulosa quedan retenidas por ésta y reciben el nombre de celulosano.

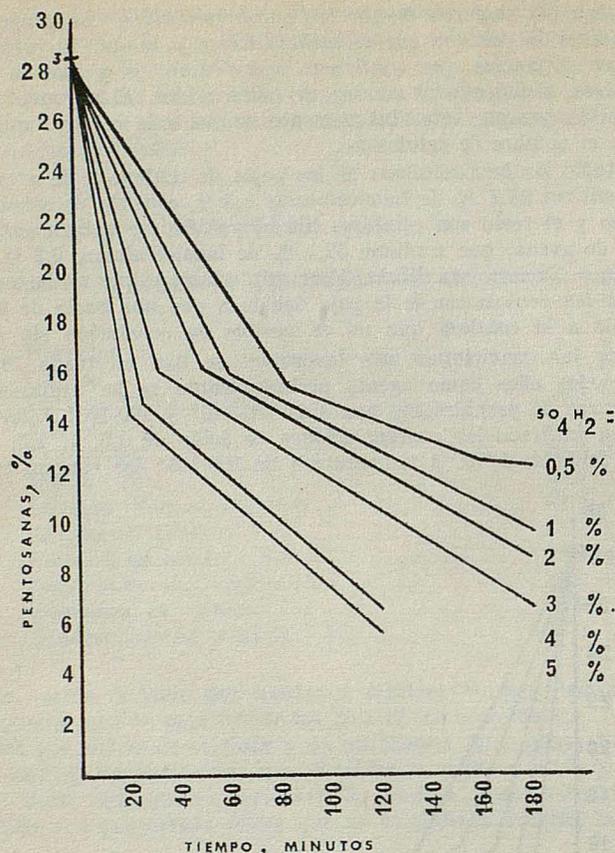
Norman (5) estudió las hemicelulosas de las pajas de centeno y de avena. En la paja de centeno, que contiene 41,7 % de hemicelulosas 8,3 % consiste de xilano íntimamente unido a la celulosa y el resto son celulosas libres, pudiéndose extraer en frío con álcali de 4 %. En la de avena, que contiene 32,1 % de hemicelulosas, 9,3 % están asociadas con la celulosa y 22,8 % son libres. Dorr (6) establece que no se puede lograr la separación total de las pentosanas de la paja debido a que una parte de ellas están tan íntimamente unidas a la celulosa que no es posible su separación sin atacar a ésta.

Para determinar las condiciones más favorables se han efectuado 186 ensayos de prehidrólisis. En todos ellos como agente prehidrolizante se ha utilizado ácido sulfúrico. Las temperaturas de prehidrólisis han sido 130-140° y 100-105°. A las temperaturas de 130-140° se han utilizado las concentraciones de ácido de 0,5, 1, 1,5, 2 y 2,5 % y una relación paja/ácido de 1/10. A temperatura de 100-105° las concentraciones de áci-



TEMPERATURA DE PREHIDROLISIS: 130-140°

GRAFICA 1



TEMPERATURA DE PREHIDROLISIS: 100-105°

GRAFICA 2

do ensayadas fueron 0,5, 1, 2, 3, 4 y 5 % y relación paja/ácido de 1/12. En todos los casos el tiempo se varió, en fracciones de 10 minutos, desde 10 a 180 minutos.

En las pajas prehidrolizadas se hicieron las siguientes determinaciones: furfural y pentosanas, azúcares en solución, celulosa Norman-Jenkins, extracto metanol-benceno, cenizas, lignina y α -celulosa en celulosa Norman-Jenkins.

En la eliminación de pentosanas, objeto principal de la prehidrólisis, se observan dos períodos muy bien definidos. En el primer período, en el cual se elimina el 43-47 % de las pentosanas originalmente presentes, la hidrólisis es muy rápida. El examen de las gráficas que se obtienen tomando pentosanas residuales frente a tiempo muestra que la prehidrólisis de la paja procede como una reacción de primer orden. (Gráficas 1 y 2). La velocidad de reacción en el primer período está muy influenciada por la concentración del ácido. En el segundo período, durante el cual la eliminación de pentosanas es mucho más lenta, la concentración del ácido tiene mucha menos influencia sobre la velocidad de hidrólisis.

La pérdida de azúcares totales, deducida de los valores hallados para azúcares en solución, inicialmente aumenta con gran rapidez y posteriormente se hace más lenta.

En la celulosa Norman-Jenkins se observa una pérdida progresiva que se hace más sensible para las concentraciones mayores de ácido y largo tiempo de prehidrólisis, debido a que en estas condiciones no sólo hay pérdidas de hemicelulosas, sino que también se produce degradación de la celulosa.

Las pérdidas de cenizas y productos extraíbles por la mezcla metanol-benceno son como máximo del 20 y 64 %, respectivamente. El contenido en lignina desciende desde el valor original de 22,2 % a 16,8 % en las condiciones más energéticas de prehidrólisis. Esta eliminación de lignina por tratamiento con ácidos diluidos fue observada por Cohen y Harris (7) en la madera de arce y por Norman y Jenkins (8) en la paja de lino.

El contenido en α -celulosa en celulosa Norman-Jenkins aumenta con el tiempo de prehidrólisis, alcanza un máximo y luego disminuye.

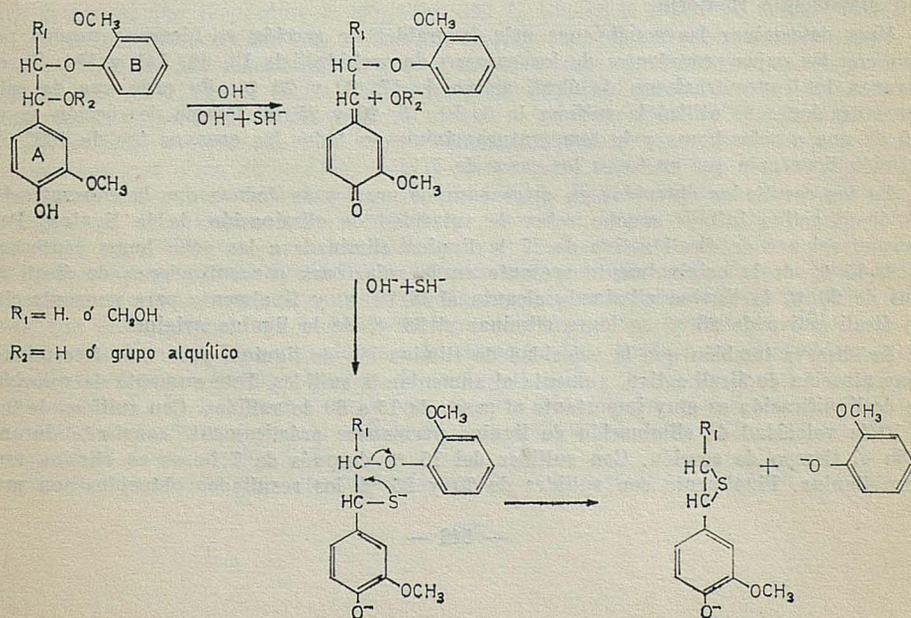
Los mayores rendimientos en α -celulosa se obtienen en los ensayos 32 (SO_4H_2 1 %, 130-140°, 140 minutos) y 124 (SO_4H_2 1 %, 100-105°, 160 minutos). En ambos casos se han eliminado en la prehidrólisis el 61-63 % de las pentosanas presentes en la paja original.

3. Obtención de pastas celulósicas.

Los procedimientos de obtención de pastas celulósicas tienen por objeto eliminar los componentes que acompañan a la celulosa en los tejidos vegetales. Se realiza mediante dos procesos fundamentales: cocción y blanqueo.

3.1. Cocción. — La cocción se puede realizar por procedimiento ácido o alcalino. La utilización de uno u otro procedimiento depende de diversos factores, sobre todo de la naturaleza de la materia prima. En el caso de la paja de trigo, por su alto contenido en materia extraíble y en sílice es más conveniente el procedimiento alcalino al sulfato o procedimiento kraft (9), (10).

Para conocer la acción del licor de cocción sobre la lignina varios investigadores han estudiado el comportamiento de compuestos sintéticos de naturaleza semejante a la lignina. Adler (11) y Gierer (12) al estudiar el comportamiento de los éteres β -arílicos en la cocción con hidróxido sódico 2 N a 170° encuentran que el enlace éter se rompe pero sólo en una extensión del 30 %. Por el contrario en presencia de ión bisulfuro la rotura es casi completa, produciéndose la siguiente reacción:



Gierer y colaboradores (13), (14) también han estudiado el comportamiento posterior, frente al álcali, del sulfuro formado. A 100° se forman estructuras cíclicas con azufre en el anillo (p-ditianos) y posteriormente éstos se degradan eliminándose el 70 % del azufre. Esto explica el bajo contenido en azufre de la lignina al sulfato.

Aunque la lignina es el componente más profundamente afectado por la cocción alcalina, todos los carbohidratos, incluso la celulosa, se atacan por el licor de cocción. Hamilton (15) ha estudiado el comportamiento de los diferentes carbohidratos. De la celulosa se pierde aproximadamente el 20 %. De las hemicelulosas la más resistente es la xilosa y los que se atacan más fácilmente mannososa y arabinosa. Axelsson (16) ha determinado la cantidad de xilano que hay disuelto en el licor negro en diferentes etapas de la cocción. La concentración de xilano alcanza un máximo a las dos horas, después la concentración desciende rápidamente debido a la degradación por el álcali caliente. Los productos finales que se forman en la degradación de los carbohidratos son los ácidos β , γ -dihidroxi-bútfirico, glicólico, láctico, acético y fórmico.

La velocidad de reacción de los componentes de la materia prima con el licor de cocción aumenta al aumentar la concentración de éste. Esto origina que el tiempo necesario para alcanzar una determinada deslignificación sea más corto. Sin embargo, cuando la concentración de licor sobrepasa cierto valor, que depende de la naturaleza del material cocido, aumenta el ataque sobre la α -celulosa.

Legg y Hart (17) estudian el efecto de la sulfidez en la cocción de varias maderas y llegan a la conclusión que la velocidad óptima de deslignificación y el mayor rendimiento en carbohidratos se obtienen con sulfidez de 25 ó 30 %.

Hägglund (18), (19) al realizar la cocción de madera de abeto por los procedimientos a la sosa o kraft encuentra que la cantidad de carbohidratos disueltos es aproximadamente la misma en los dos procedimientos. La disolución de la lignina en el procedimiento kraft tiene lugar a velocidad casi constante. Por el contrario, en el procedimiento a la sosa, primero la lignina se disuelve rápidamente, pero una vez que se ha disuelto la tercera parte, la velocidad decrece rápidamente. El efecto favorable de la sulfidez se debe sobre todo a la disminución del tiempo de cocción, pues la resistencia de la fibra es tanto mayor cuanto menor es este tiempo.

Se han realizado pruebas de cocción con las pajas procedentes de los ensayos de prehidrólisis que han dado una celulosa Norman-Jenkins con un contenido en α -celulosa superior al 89 %.

Estas pruebas se realizaron por el método al sulfato empleando un digestor esférico con movimiento rotatorio.

Para determinar las condiciones más favorables de cocción se hicieron ensayos previos con las pajas procedentes de los ensayos de prehidrólisis 13, 46, 141 y 184. Se ensayaron las concentraciones de álcali activo de 17, 20 y 23 %. En cada una de estas concentraciones se utilizó la sulfidez 0, 5, 10, 15, 20 y 25. El tiempo de cocción se varió de una a ocho horas y la temperatura máxima en todos los ensayos fue de 160°. La relación licor/paja que en todos los casos de 5/1.

De los resultados obtenidos en estos ensayos previos se deduce que la concentración de álcali activo influye mucho sobre la velocidad de eliminación de la lignina. Para concentraciones de álcali activo de 17 la lignina eliminada a las ocho horas representa el 83-85 % de la originalmente presente en la paja, para concentraciones de álcali activo de 20 % la lignina eliminada alcanza al 90-92 % y finalmente para concentración de álcali activo de 23 % se logra eliminar el 96 % de la lignina original.

Se observa también que la velocidad de eliminación de lignina, para una determinada concentración de álcali activo, aumenta al aumentar la sulfidez. Este aumento de velocidad de deslignificación es muy importante al pasar de 15 a 20 de sulfidez. Con sulfidez de 0, 5 y 10 la velocidad de eliminación de lignina permanece prácticamente constante durante todo el tiempo de cocción. Con sulfidez del 15 % después de 7 horas se elimina muy poca lignina. Finalmente con sulfidez de 20 y 25 % los resultados obtenidos son muy

parecidos entre sí y la velocidad de deslignificación disminuye a las cuatro horas y a partir de las seis horas la cantidad de lignina eliminada es muy pequeña.

Para concentración de álcali activo de 17 % la relación carbohidratos/lignina en la pasta es siempre baja. Utilizando concentraciones de álcali activo de 20 y 23 % esta relación aumenta considerablemente al emplear un licor de cocción con sulfidez de 20 y 25 %.

Las pastas obtenidas en estos ensayos previos con un contenido en lignina inferior al 11 % se sometieron al proceso de blanqueo, determinándose en las pastas blanqueadas el contenido en α -celulosa. Los mejores rendimientos en α -celulosa se obtienen empleando concentración de álcali activo de 20 %, sulfidez 20 % y tiempo de cocción de seis horas. Las pastas cocidas en estas condiciones tienen un contenido en lignina de 3,9-4,3 %.

Cuando por aumento del tiempo de cocción o de la concentración de álcali activo se tienen pastas con un contenido en lignina inferior a estos valores, el rendimiento en α -celulosa desciende debido a que se ha producido la degradación de la celulosa.

Por lo tanto, los procesos de cocción de la totalidad de las pajas prehidrolizadas se han realizado en las siguientes condiciones:

Relación licor de cocción/paja: 5/1
 Alkali activo: 20 %
 Sulfidez: 20 %
 Temperatura: 160°
 Tiempo: 6 horas.

3.2. BLANQUEO. — Las pastas obtenidas industrialmente por los procedimientos ácido o alcalino contienen todavía lignina residual. El objeto del blanqueo es separar las sustancias incrustantes que producen la coloración de la pasta.

La tendencia que ha prevalecido en el desarrollo de las técnicas de blanqueo consiste en realizarlo en una serie de etapas que pueden ser las siguientes: 1) Tratamiento con cloro en medio ácido. 2) Extracción alcalina. 3) Tratamiento con hipoclorito y 4) Tratamiento con dióxido de azufre.

Samuelsen (20) ha establecido que durante el proceso de blanqueo se producen las siguientes reacciones: 1) Disolución de incrustantes. 2) Destrucción de materia colorante. 3) Degradación oxidante de los incrustantes una vez que se encuentran en disolución y 4) Ataque por oxidación de la celulosa. Las dos primeras reacciones son las que interesan que se produzcan, mientras que la tercera y cuarta se deben evitar.

El estudio cinético (21) (22) indica que durante la etapa de cloración en medio ácido se producen dos reacciones, una de sustitución que es rápida y otra de oxidación que es más lenta. Según Giertz (23) es imposible eliminar totalmente la lignina en una sola cloración, pues aún utilizando un exceso de cloro la reacción con la lignina cesa antes de haber reaccionado totalmente. Después de extraer con álcali, la pasta vuelve a reaccionar con cloro en una segunda cloración, esta reacción también es rápida pero igualmente cesa antes de haber reaccionado toda la lignina residual. En las etapas de cloración se debe emplear una cantidad de cloro que, según diferentes autores, varía del 55 al 90 % del cloro total necesario para el blanqueo (24), (25), (26). La velocidad de cloración aumenta al aumentar la temperatura, pero por encima de la temperatura ambiente, el efecto sobre la cantidad de lignina que se separa es muy pequeño, mientras que la degradación de carbohidratos puede llegar a ser importante (27).

Las cloroligninas formadas durante la cloración son solubles en disoluciones alcalinas. Para eliminar las cloroligninas de pastas al sulfato es necesario 1,5-2,5 % de su peso de álcali. El tiempo necesario para la disolución de las cloroligninas depende de la temperatura. Para pastas al sulfato se considera como temperatura óptima 60° durante 60-90 minutos (28), (29).

En el tratamiento con hipoclorito la velocidad es grande al principio y luego dis-

minuye (30). Los productos obtenidos en la reacción son solubles en álcali por lo que se separan de manera continua.

Desde el punto de vista práctico tiene gran interés el ataque de la celulosa durante esta etapa. Al comenzar el tratamiento con hipoclorito se debe tener un pH de 9, pero al formarse ClH , CO_2 y otros ácidos disminuye el pH. En estas condiciones se favorece el blanqueo pero se ataca más la celulosa.

Al final de la etapa de tratamiento con hipoclorito se hace un tratamiento con un agente reductor (por ejemplo, dióxido de azufre) que actúa como "anticloro" y estabilizador del color.

El blanqueo de las pastas obtenidas en los 53 ensayos de cocción se ha realizado en las cuatro etapas citadas anteriormente. El cloro total necesario para el blanqueo se deduce del valor del índice de Johnsen-Noll. En las etapas de cloración se ha empleado al 65 % del cloro total necesario, trabajando con una densidad de pasta de 4 % a la temperatura ambiente y durante una hora. Las etapas de extracción alcalina se realizaron en disolución de NaOH, densidad de pasta 15 %, proporción de álcali 2 % respecto a pasta, temperatura de 60° y tiempo de una hora. El blanqueo con hipoclorito se efectuó durante 4 horas, densidad de pasta 10 %, temperatura de 30° y manteniendo el pH entre 9 y 10. En esta etapa se emplea el 35 % del cloro total necesario. Finalmente se hace el tratamiento con SO_2 .

En las pastas blanqueadas se determinaron: α -celulosa, hemicelulosas, extracto metanol-benceno, cenizas, solubilidad en agua, solubilidad en álcali, furfural, pentosanas e índice de cobre. Los mejores resultados se obtuvieron con las pajas procedentes de los ensayos de prehidrólisis que se indican en las conclusiones.

4. Conclusiones.

1.^a En las prehidrólisis realizadas con concentraciones bajas de SO_4H_2 el rendimiento de la operación desciende rápidamente hasta los 70 minutos. Utilizando concentraciones de ácido más altas el descenso rápido del rendimiento termina a los 20-30 minutos.

2.^a En la eliminación de pentosanas durante la prehidrólisis se observan dos períodos. En el primer período, en el cual la hidrólisis es muy rápida, se elimina el 43-47 % de las pentosanas. La velocidad de hidrólisis en este primer período está muy influenciada por la concentración del ácido. En el segundo período las pentosanas se eliminan más lentamente y la velocidad de hidrólisis está poco influenciada por la concentración del ácido. Para una misma concentración de ácido la velocidad de hidrólisis de las pentosanas aumenta al aumentar la temperatura.

3.^a Los valores de las pérdidas de azúcares totales, coinciden con bastante aproximación con las pérdidas de pentosanas; sólo en los tratamientos con los ácidos de mayor concentración durante largo tiempo hay una mayor pérdida de azúcares totales que de pentosanas debido a que se ha degradado la celulosa y ha pasado a la solución.

4.^a Durante la prehidrólisis se produce una disminución del contenido en celulosa Norman-Jenkins, debido a que esta celulosa retiene una parte de las hemicelulosas. Esta pérdida es mayor en las condiciones más energéticas de concentración de ácido, temperatura y tiempo.

5.^a La prehidrólisis también produce la eliminación de parte de la lignina, cenizas y materias extraíbles por la mezcla metanol-benceno.

6.^a El contenido en α -celulosa en celulosa Norman-Jenkins aumenta con el tiempo de prehidrólisis, alcanza un máximo y luego disminuye. El tiempo en que se alcanza el máximo depende de la concentración del ácido y de la temperatura. La máxima cantidad de α -celulosa se logra cuando se ha eliminado al 61-63 % de las pentosanas presentes en la paja original.

7.^a En las pruebas de cocción, realizadas para encontrar las condiciones más favorables de esta operación, y que se llevaron a cabo a temperatura máxima de 160° y empleando una relación licor de cocción/paja de 5/1, se observa que la velocidad de eliminación de lignina aumenta al aumentar la concentración de álcali activo. Para una determinada concentración de álcali activo, la velocidad de deslignificación aumenta al aumentar la sulfidez. Este aumento es más sensible al pasar de sulfidez 20 a 25. En la relación carbohidratos/lignina también se observa un aumento con licores de cocción de 20 y 25 % de sulfidez.

8.^a Las pastas obtenidas en estas pruebas previas de cocción, con un contenido en lignina inferior al 11 %, se sometieron al proceso de blanqueo. En las pastas blanqueadas se determinó la α -celulosa. Se encontró que el máximo rendimiento en α -celulosa se obtuvo en las pastas cocidas con concentraciones de álcali activo de 20 %, sulfidez de 20 % y tiempo de seis horas. Estas condiciones fueron las que se emplearon en la cocción de pajas prehidrolizadas en las que el contenido en α -celulosa en celulosa Norman-Jenkins es superior al 89 %.

9.^a El blanqueo de las pastas se hizo en cuatro etapas: tratamiento con cloro en medio ácido, extracción alcalina, tratamiento con hipoclorito y tratamiento con dióxido de azufre. El contenido más alto en α -celulosa se logra en las cocciones 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 31, 32 y 33. De aquí se deduce que las condiciones de prehidrólisis más favorables son con ácido sulfúrico de 0,5 %, a 130-140° durante 140, 150, 160 y 170 minutos y con ácido del 1,5 %, a igual temperatura, durante 100, 110 y 120 minutos. A temperatura de 100-105° el mayor contenido en α -celulosa se logra con ácido sulfúrico del 1 % durante 150, 160 y 170 minutos.

BIBLIOGRAFIA

1. E. SCHULZE. — Zeit. Physiol. Chem. 16, 387 (1892).
2. H. PRINGSHEIM, K. WEINREB y E. KARSTEN. — Ber. 61, 2025 (1928).
3. C. G. SCHWALBE — Z. Angew. Chem. 31, 53 (1918).
4. L. F. HAWLEY y A. G. NORMAN. — Ind. Eng. Chem. 24, 1190 (1932)
5. A. G. NORMAN. — Biochem. 23, 1353 (1929).
6. R. E. DORR. — Papier Fab. 39, 273 (1941).
7. W. E. COHEN y E. HARRIS. — Ind. Eng. Chem. Anal. 9,234 (1937) :
8. A. G. NORMAN y S. JENKINS. — Biochem. J. 28, 2155 (1934).
9. C. F. DAHL. — U. S. Pat. 294, 935 (1884).
10. L. REGNFORS y L. STOKMAN. — Svensk. Papperstidn. 59, 509 (1956).
11. E. ADLER, I. FALKEHAG, J. MARTON y HALVARSSEN. — Acta. Chem. Scand. 18, 1313 (1964).
12. J. GIERER, B. LENZ y N. H. WALLIN. — Acta Chem. Scand. 18, 1464 (1964).
13. J. GIERER y N. H. WALLIN. — Acta Chem. Scand. 19, 1502 (1965).
14. J. GIERER y L. A. SMEDMAN. — Acta Chem. Scand. 20, 1769 (1966).
15. J. K. HAMILTON. — Pure Apl. Chem. 5, 197 (1962).
16. S. AXELSSON, I. CROON y B. ENSTRÖM. — Svensk. Papperstidn. 65, 693 (1962.)
17. J. W. LEGG y J. S. HART. — TAPPI, 43, 471 (1960).
18. E. HAGGLUND. — TAPPI, 32, 241 (1949).
19. E. HAGGLUND. — Svensk. Papperstidn. 48, 195 (1945).
20. S. SAMUELSEN. — World Paper Trade Rev. 106, 1284 (1936).
21. W. R. CARMODY y J. S. MEARS. — Paper Trade J. 106, 38 (1938).
22. SCHMIDT-NIELSEN. — Papir J. 26, 83 (1938).
23. H. W. GIERTZ. — Svensk. Papperstidn. 46, 152 (1943).
24. H. HEIWINKEL y E. HAGGLUND. — Svensk. Papperstidn. 43, 391 (1940).
25. F. KRAFT. — Papier Fabr. 36, 429 (1938).

26. E. HAGGLUND. — Svensk. Papperstidn. 41, 519 (1938).
27. I. ERIKSSON y L. STOKMAN. — Svensk. Papperstidn. 59, 663 (1956).
28. E. HAGGLUND, H. W. GIERTZ y B. NELSON. — Svensk. Papperstidn. 47, 226 (1944).
29. F. HEDBORG. — Svensk. Papperstidn. 46, 381 (1943).
30. J. L. PARSONS y D. T. JACKSON. — Paper Trade J. 107, 37 (1938).

SEGUNDOS COEFICIENTES DEL VIRIAL DEL SISTEMA NITROGENO-PROPANO, POR MEDIDAS DE COMPRESIBILIDAD

P O R

J. S. URIETA NAVARRO y C. GUTIÉRREZ LOSA

Departamento de Química Física. Universidad de Zaragoza

Summary

In a previous communication was described the experimental method of determination of second virial coefficients (SVC) of gases and studied those of pure nitrogen and propane. In the present work the SVC's of mixtures of both gases are considered. It was carried out the experimental determination of compressibility for six mixtures at temperatures between 20 and 50°C, covering the whole range of compositions, and from these, the mixed SVC's, B_{12} , at those temperatures were calculated.

The application of the various combinations rules was considered for calculating the mixed molecular parameters corresponding to LJ (12-6) and modified exp-6 potentials. The so found values for the SVC at the working temperatures were compared with the experimental ones. In order to reach more general conclusions, the data obtained by other workers were also used.

For the LJ (12-6) model, the rules for calculating ϵ_{12} , that give better accordance with the experimental data, are the expressed by the geometric mean and the formel

$\frac{1}{\sigma_{12}^3} (\epsilon_{11} \sigma_{11}^3 \epsilon_{22} \sigma_{22}^3)^{1/2}$. In the case of the exp-6 potential, the more satisfactory concordance is obtained with the rule series $\gamma_{12} = (\gamma_{11} + \gamma_{22})/2$; $(r_m)_{12} = [(r_m)_{11} + (r_m)_{22}]/2$; $\epsilon_{12} = (\epsilon_{11} \epsilon_{22})^{1/2}$ and that proposed by Srivastava and Srivastava.

Introducción

Como es sabido, para una mezcla de gases, el segundo coeficiente del virial depende no solamente de la naturaleza de los gases puros y de la temperatura, sino también de la composición. En el caso de una mezcla binaria, aquél, viene dado por la conocida fórmula, que puede deducirse mediante argumentos estadísticos:

$$B_m = x_1^2 B_{11} + 2 x_1 x_2 B_{12} + x_2^2 B_{22} \quad (1)$$

donde x_1 y x_2 indican las fracciones molares de los componentes 1 y 2, B_{11} y B_{22} los respectivos coeficientes del virial de las sustancias puras; B_{12} es el segundo coeficiente del virial "mixto" que describe las interacciones entre una molécula de la clase 1 y una molécula de la clase 2. En general, B_{12} no puede deducirse sencillamente de los valores

B_{11} y B_{22} . La regla de Lewis Randall¹⁾ según la cual: $B_{12} = (B_{11} + B_{22})/2$, sólo puede ser utilizada cuando los dos gases son especies muy parecidas. Se han propuesto otras fórmulas aproximadas como la de Amdur-Mason²⁾, según la cual:

$$B_{12} = (1/8) (B_{11}^{1/3} + B_{22}^{1/3})^3$$

y la de Woolley³⁾:

$$B_{12} = (B_{11} B_{22})^{1/2}$$

pero tanto una como otra dan resultados aceptables sólo a temperaturas suficientemente altas a las que las fuerzas atractivas tienen un efecto relativamente pequeño.

Para un modelo de potencial central como el de Mie (n, 6), el cálculo de B_{12} es exactamente el mismo que el de B_{11} y B_{22} sin más que efectuar un simple cambio de escala en los parámetros moleculares σ y ϵ . Los valores de σ_{12} y ϵ_{12} pueden obtenerse a partir de medidas experimentales sobre mezclas, pero ocurre que, existen muy pocas determinaciones con la precisión suficiente para determinar adecuadamente esos parámetros, por lo que normalmente hay que acudir a alguna predicción de sus valores a partir de los correspondientes a los de los gases puros. Las fórmulas aplicadas, que reciben el nombre de "reglas (o relaciones) de combinación", aunque presentan algún fundamento teórico, implican simplificaciones tan drásticas que deben considerarse como semiempíricas y justificarse, en última instancia, mediante comparación con los resultados experimentales.

Los segundos coeficientes del virial (SCV) de nitrógeno y propano han sido objeto de minuciosos estudios experimentales en un amplio intervalo de temperaturas^{4,5)}. No sucede, en cambio, lo mismo con la mezcla de ambos gases, ya que, aparte de nuestro trabajo, sólo hemos encontrado otros dos en la bibliografía examinada.

En el uno de ellos llevado a cabo por Watson et al.⁶⁾, se hallan los factores de compresibilidad a diferentes presiones para tres mezclas a las temperaturas de 399,32 y 422,05° K. Desgraciadamente, las medidas efectuadas pertenecen a la región de las altas presiones, por lo que los SCV obtenidos a partir de ellas adolecerán de una gran imprecisión (las determinaciones adecuadas de los CV requieren medidas por debajo de 1 ó 2 atm, y se puede afirmar que por encima de 10 atm la incertidumbre es de un orden de magnitud mayor que la de la propia consistencia interna). Para el cálculo de los SCV a partir de dichas medidas, hemos ajustado los datos de compresibilidad mediante el polinomio:

$$z = a + bp + cp^2 + dp^3 + \dots \quad (2)$$

cortando sucesivamente el desarrollo en los términos en p^2 , p^3 , p^4 , etc., a fin de buscar el que reproduzca mejor los resultados experimentales. Las mejores representaciones parecen obtenerse con el polinomio de tercer grado para las medidas a 399,32 y con el de cuarto para las de 422,05 K (esta diferencia puede atribuirse al hecho de que estas últimas fueron realizadas en época posterior y con mayor precisión, como señalan los autores). El SCV se obtiene multiplicando b por $RT/0,068045$, ya que las presiones vienen expresadas en lb/pulgadas² abs. Los resultados calculados son los recogidos en la Tabla I.

T A B L A I

| $T = 399,32^\circ K$ | | $T = 422,05^\circ K$ | |
|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| x_{N_2} | β_m | x_{N_2} | β_m |
| 0,211 | - 118 | 0,166 | - 122 |
| 0,484 | - 59 | 0,287 | - 87 |
| 0,556 | - 47 | 0,681 | - 33 |
| 0,999 | 13 | | |

SEGUNDOS COEFICIENTES DEL VIRIAL DEL SISTEMA NITROGENO-PROPANO

Para los gases puros, se tomaron los valores de las curvas medias obtenidas a partir de los datos recogidos en la bibliografía^{4,5}, a saber:

TABLA II

| T = 399,32° K | | T = 422,05° K | |
|---------------|---------|---------------|---------|
| x_{N_2} | β | x_{N_2} | β |
| 0 | -209 | 0 | -186 |
| 1 | 8,5 | 1 | 11 |

Con todos estos resultados, se ha ajustado la parábola:

$$\beta_m = a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \quad (3)$$

dando a los valores relativos a los gases puros un peso arbitrario de 100 frente a los de las mezclas por las causas ya dichas.

$$a_0 = \beta_{22}, \quad a_1 = 2(\beta_{12} - \beta_{22}) \quad \text{y} \quad a_2 = \beta_{11} - 2\beta_{12} + \beta_{22} \quad (4)$$

con lo que, determinados a_0 , a_1 y a_2 en la forma indicada, se halló:

$$T = 399,32^\circ \text{ K}: \quad \beta_{12} = -5 \text{ ml/mol}$$

$$T = 422,05^\circ \text{ K}: \quad \beta_{12} = -9 \text{ ml/mol}$$

En cuanto al otro trabajo, realizado por Mason y Eakin⁷), resulta también algo difícil determinar el mejor valor de β_{12} a partir de los datos por ellos consignados, que son los siguientes para los gases puros, a la temperatura de 288,71° K:

| x_{N_2} | $a_b = 1 - z$ (1 atm) | referencia |
|-----------|-----------------------|------------|
| 0 | 0,161 | 8) |
| 1 | 0.00027 | 9) |

Haciendo uso de la ecuación por ellos propuesta para hidrocarburos y sus mezclas:

$$pV/(pV)_0 = z = 1 + \beta' p + \gamma' p^2 \quad (5)$$

(siendo γ' tal que $\gamma'/\beta' \simeq \beta'/2$), y si para el nitrógeno suponemos $\gamma' = 0$, resultan para los SCV de los gases puros ($\beta_{11} = -6,4$ para el nitrógeno y $\beta_{22} = -385$ para el propano) unos valores que podemos comparar con los deducidos, para la misma temperatura, a partir de los datos bibliográficos^{4,5}):

$$\text{Nitrógeno (288,71° K)} \quad \beta_{11} = -2 \text{ ml/mol}$$

$$\text{Propano} \quad \beta_{22} = -424 \text{ ml/mol}$$

Utilizando la ecuación (5), y a partir de los datos de Mason y Eakin para b_m a 1 atm, así como los últimamente citados para los gases puros, hemos obtenido los siguientes valores del SCV para las dos mezclas estudiadas:

| x_{N_2} | β_m |
|-----------|-----------|
| 0,4822 | -159,53 |
| 0,4917 | -147,35 |

a partir de los cuales, y mediante ajuste de la ecuación (3), se calcula:

$$\beta_{12} (288,71^\circ \text{ K}) = -80 \text{ ml/mol}$$

con una imprecisión de ± 5 , aproximadamente.

Parte experimental

En nuestro trabajo experimental se han determinado los SCV de 6 mezclas de nitrógeno + propano a las temperaturas de 20, 30, 40 y 50° C.

El dispositivo experimental, así como el método operatorio seguido han sido descritos en un trabajo previo⁵⁾, donde también se consignan los resultados obtenidos para los gases puros. La única variante que cabe señalar es que para determinar la composición del sistema, se introduce en el aparato uno de los dos gases, y una vez determinada la cantidad del mismo (haciendo para ello uso de la ecuación del virial), se introduce el otro y se determina el número total de moles (y, por tanto, la composición de la mezcla), a la vez que los segundos coeficientes del virial.

En las tablas siguientes (Tabla III a Tabla VIII) se indican todas las medidas llevadas a cabo por nosotros, así como los valores calculados para los SCV para las mezclas preparadas, y a las distintas temperaturas de trabajo.

En una fila se consignan sucesivamente: temperatura de la escala catetométrica, temperatura del recinto manométrico, altura del índice en la rama corta del manómetro, altura del menisco superior, altura del menisco inferior, presión corregida (para la escala catetométrica, densidad del mercurio y gravedad standard), volumen de las ampollas hasta el último enrase y por último el producto pV en at. ml.

SEGUNDOS COEFICIENTES DEL VIRIAL DEL SISTEMA NITROGENO-PROPANO

T A B L A I I I

1.ª mezcla nitrógeno-propano

| t_{0st} | t_{man} | L_{ind} | L_{sup} | L_{inf} | p (atm) | v_{amp} (ml) | pV | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|---------|---------------------|-------------------------|
| 18,25 | 20,07 | 89,70 | 197,19 | 89,50 | 0,14113 | 243,7746 | 34,8792 | $t = 20,00^\circ C$ | |
| 18,35 | 20,78 | 89,72 | 209,90 | 89,24 | 0,15811 | 217,2253 | 34,8830 | | |
| 18,35 | 21,30 | 89,71 | 228,00 | 89,50 | 0,18147 | 188,7059 | 34,8521 | | |
| 18,52 | 20,78 | 89,70 | 252,97 | 89,40 | 0,21434 | 159,1978 | 34,8441 | | |
| 18,30 | 21,15 | 89,71 | 286,80 | 89,50 | 0,25353 | 131,3346 | 34,8181 | | |
| 18,20 | 20,60 | 89,70 | 322,41 | 89,51 | 0,30520 | 110,6859 | 34,8033 | | |
| 18,25 | 21,15 | 89,70 | 372,37 | 89,47 | 0,37069 | 90,4829 | 34,7817 | | |
| 17,90 | 20,65 | 89,70 | 458,89 | 89,49 | 0,48408 | 68,3976 | 34,7307 | | |
| 17,65 | 20,80 | 89,71 | 651,09 | 89,45 | 0,73598 | 43,6701 | 34,6089 | | |
| | | | | | | | | | $\beta = - 309$ mls/mol |
| 18,35 | 30,58 | 89,64 | 201,13 | 89,49 | 0,14603 | 243,7964 | 36,0911 | $t = 30,00^\circ C$ | |
| 18,75 | 30,15 | 89,65 | 214,41 | 89,42 | 0,16351 | 217,2447 | 36,0715 | | |
| 18,61 | 30,20 | 89,62 | 232,81 | 89,29 | 0,18775 | 188,7228 | 36,0666 | | |
| 18,58 | 30,65 | 89,60 | 258,87 | 89,35 | 0,22174 | 159,2120 | 36,0490 | | |
| 19,00 | 30,41 | 89,60 | 294,02 | 89,50 | 0,26754 | 131,3463 | 36,0329 | | |
| 19,10 | 30,30 | 89,56 | 330,87 | 89,43 | 0,31584 | 110,6953 | 36,0179 | | |
| 19,18 | 30,35 | 89,56 | 382,41 | 89,30 | 0,38344 | 90,4910 | 35,9862 | | |
| 19,35 | 29,98 | 89,56 | 472,12 | 89,34 | 0,50077 | 68,4037 | 35,9365 | | |
| 19,42 | 30,07 | 89,55 | 671,65 | 89,30 | 0,76185 | 43,6740 | 35,8343 | | |
| | | | | | | | | | $\beta = - 280$ mls/mol |
| 19,43 | 38,89 | 89,53 | 204,70 | 89,21 | 0,15084 | 243,8183 | 37,2905 | $t = 40,00^\circ C$ | |
| 19,25 | 38,80 | 89,53 | 218,68 | 89,37 | 0,16890 | 217,2642 | 37,2641 | | |
| 19,79 | 39,58 | 89,53 | 237,87 | 89,35 | 0,19396 | 188,7397 | 37,2604 | | |
| 19,88 | 39,37 | 89,53 | 264,85 | 89,40 | 0,22914 | 159,2263 | 37,2540 | | |
| 20,02 | 38,76 | 89,53 | 300,63 | 89,17 | 0,27621 | 131,3581 | 37,2198 | | |
| 19,92 | 38,84 | 89,50 | 338,87 | 89,16 | 0,32616 | 110,7057 | 37,2142 | | |
| 20,80 | 38,50 | 89,50 | 392,32 | 89,10 | 0,39609 | 90,4991 | 37,1938 | | |
| 20,40 | 37,75 | 89,50 | 485,28 | 89,32 | 0,51730 | 68,4098 | 37,1348 | | |
| 20,17 | 39,15 | 89,50 | 692,38 | 89,41 | 0,78754 | 43,6779 | 37,0335 | | |
| | | | | | | | | | $\beta = - 266$ mls/mol |
| 26,41 | 38,66 | 89,48 | 222,41 | 89,12 | 0,17412 | 217,2838 | 38,4437 | $t = 50,00^\circ C$ | |
| 26,45 | 38,53 | 89,48 | 242,40 | 89,28 | 0,20003 | 188,7567 | 38,4528 | | |
| 26,32 | 38,60 | 89,48 | 269,99 | 89,24 | 0,23612 | 159,2406 | 38,4229 | | |
| 26,51 | 38,71 | 89,48 | 307,11 | 89,15 | 0,28472 | 131,3699 | 38,4005 | | |
| 26,63 | 38,80 | 89,48 | 346,71 | 89,31 | 0,33624 | 110,7157 | 38,3943 | | |
| 26,50 | 38,75 | 89,48 | 401,72 | 89,23 | 0,40820 | 90,5072 | 38,3685 | | |
| 26,70 | 38,91 | 89,48 | 497,20 | 89,18 | 0,53298 | 68,4160 | 38,3261 | | |
| 26,12 | 38,86 | 89,48 | 709,60 | 89,26 | 0,81033 | 43,6818 | 38,2173 | | |
| | | | | | | | | | $\beta = - 248$ mls/mol |

Moles de propano: 0,001221₅

$$x_{N_2} = 0,159_0$$

Número total de moles en la mezcla: 0,001452₅

TABLA IV

 2.^a mezcla nitrógeno-propano

| t_{cat} | t_{man} | L_{ind} | L_{sup} | L_{inf} | p (atm) | v_{amp} (ml) | pV | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|---------|-------------------------|
| 17,32 | 17,30 | 89,00 | 222,21 | 88,75 | 0,17499 | 243,7746 | 43,2539 | $t = 20,00^\circ C$ |
| 17,12 | 17,22 | 89,00 | 238,43 | 88,88 | 0,19609 | 217,2253 | 43,2590 | |
| 16,85 | 17,17 | 89,00 | 260,56 | 88,89 | 0,22510 | 188,7059 | 43,2376 | |
| 16,85 | 16,82 | 89,95 | 291,52 | 88,82 | 0,26581 | 159,1978 | 43,2147 | n_t (moles) = |
| 16,65 | 16,93 | 88,95 | 333,05 | 88,62 | 0,32052 | 131,3343 | 43,1894 | 0,001801 ₂ |
| 16,76 | 17,10 | 88,95 | 377,27 | 88,67 | 0,37843 | 110,6859 | 43,1744 | |
| 16,86 | 17,10 | 88,95 | 439,31 | 88,84 | 0,45956 | 90,4829 | 43,1328 | |
| 16,84 | 17,01 | 88,95 | 546,39 | 88,78 | 0,60006 | 68,3976 | 43,0736 | $\beta = - 243$ mls/mol |
| 24,60 | 25,27 | 89,03 | 227,07 | 88,83 | 0,18102 | 243,7964 | 44,7490 | $t = 30,00^\circ C$ |
| 24,25 | 25,30 | 89,03 | 243,73 | 88,93 | 0,20270 | 217,2447 | 44,7236 | |
| 24,31 | 25,24 | 89,05 | 266,56 | 88,85 | 0,23270 | 188,7228 | 44,7099 | |
| 24,43 | 25,07 | 89,05 | 298,78 | 88,84 | 0,27491 | 159,2120 | 44,7083 | n_t (moles) = |
| 24,49 | 25,03 | 89,05 | 342,00 | 88,79 | 0,33158 | 131,3463 | 44,6865 | 0,001801 ₂ |
| 24,68 | 25,13 | 89,05 | 387,96 | 89,00 | 0,39148 | 110,6958 | 44,6612 | |
| 25,00 | 25,17 | 89,05 | 451,43 | 88,65 | 0,47505 | 90,4910 | 44,6237 | |
| 24,03 | 25,17 | 89,05 | 562,63 | 88,82 | 0,62044 | 68,4037 | 44,5591 | $\beta = - 225$ mls/mol |
| 25,40 | 25,83 | 88,96 | 231,25 | 88,56 | 0,18683 | 243,8183 | 46,2156 | $t = 40,00^\circ C$ |
| 25,50 | 25,83 | 88,96 | 248,41 | 88,63 | 0,20920 | 217,2642 | 46,1931 | |
| 25,47 | 25,83 | 88,96 | 272,10 | 88,67 | 0,24017 | 188,7397 | 46,1780 | |
| 25,58 | 25,85 | 88,96 | 305,18 | 88,50 | 0,28370 | 159,2263 | 46,1835 | n_t (moles) = |
| 25,70 | 26,86 | 88,96 | 349,89 | 88,60 | 0,34211 | 131,3581 | 46,1517 | 0,001800 ₆ |
| 26,00 | 25,90 | 88,96 | 397,29 | 88,82 | 0,40388 | 110,7057 | 46,1274 | |
| 25,94 | 25,97 | 88,96 | 463,23 | 88,75 | 0,49031 | 90,4991 | 46,0968 | |
| 25,60 | 25,63 | 88,97 | 577,63 | 88,78 | 0,64009 | 68,4098 | 46,0404 | $\beta = - 205$ mls/mol |
| 25,46 | 25,80 | 88,91 | 235,70 | 88,52 | 0,19271 | 243,8402 | 47,6960 | $t = 50,00^\circ C$ |
| 25,66 | 25,73 | 88,93 | 253,74 | 88,80 | 0,21596 | 217,2838 | 47,7073 | |
| 25,50 | 25,30 | 88,93 | 278,11 | 88,80 | 0,24789 | 188,7567 | 47,6898 | |
| 24,82 | 24,87 | 88,93 | 312,38 | 88,88 | 0,29268 | 159,2406 | 47,6652 | n_t (moles) = |
| 26,68 | 27,06 | 88,93 | 358,42 | 88,75 | 0,35301 | 131,3699 | 47,6502 | 0,001801 ₂ |
| 27,09 | 26,70 | 88,98 | 407,00 | 88,80 | 0,41657 | 110,7157 | 47,6272 | |
| 26,45 | 26,06 | 88,98 | 474,94 | 88,76 | 0,50562 | 90,5072 | 47,5984 | |
| 25,52 | 25,74 | 88,98 | 592,72 | 88,77 | 0,65985 | 68,4160 | 47,5421 | $\beta = - 193$ mls/mol |

 Moles de nitrógeno : 0,000564₄

$$x_{N_2} = 0,313_4$$

 Número total de moles en la mezcla : 0,001801₀

T A B L A V

3.^a mezcla nitrógeno-propano

| t_{cat} | t_{man} | L_{ind} | L_{sup} | L_{inf} | p (atm) | v_{amp} (ml) | pV | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|---------|-------------------------|
| 17,26 | 17,45 | 89,34 | 219,92 | 89,31 | 0,17125 | 243,7746 | 42,3226 | $t = 20,00^\circ C$ |
| 16,96 | 17,44 | 89,35 | 235,31 | 89,08 | 0,19173 | 217,2253 | 42,3011 | |
| 16,65 | 17,23 | 89,34 | 257,14 | 89,15 | 0,22027 | 188,7059 | 42,3129 | |
| 16,63 | 17,10 | 89,35 | 287,60 | 89,22 | 0,26013 | 159,1978 | 42,2905 | n_t (moles) = |
| 16,60 | 16,95 | 89,35 | 323,29 | 89,03 | 0,31374 | 131,3346 | 42,2750 | 0,001761 ₂ |
| 16,42 | 17,16 | 89,33 | 371,71 | 89,22 | 0,37041 | 110,6859 | 42,2491 | |
| 16,60 | 17,42 | 89,33 | 432,13 | 89,09 | 0,44979 | 90,4829 | 42,2236 | |
| 16,88 | 17,80 | 89,33 | 537,18 | 89,00 | 0,58761 | 68,3976 | 42,1897 | $\beta = - 182$ mls/mol |
| 22,21 | 23,55 | 89,32 | 224,20 | 89,09 | 0,17697 | 243,7964 | 43,7525 | $t = 30,00^\circ C$ |
| 22,25 | 23,62 | 89,32 | 240,56 | 89,17 | 0,19829 | 217,2447 | 43,7560 | |
| 22,20 | 23,65 | 89,32 | 262,88 | 89,08 | 0,22764 | 188,7228 | 43,7433 | |
| 22,48 | 23,47 | 89,31 | 294,31 | 89,04 | 0,26887 | 159,2120 | 43,7330 | n_t (moles) = |
| 22,72 | 23,48 | 89,31 | 336,55 | 89,05 | 0,32419 | 131,3463 | 43,6958 | 0,001760 ₈ |
| 22,20 | 23,48 | 89,31 | 381,56 | 89,17 | 0,38298 | 110,6958 | 43,7043 | |
| 22,55 | 23,48 | 89,31 | 444,00 | 89,06 | 0,46492 | 90,4910 | 43,6689 | |
| 22,75 | 23,48 | 89,31 | 552,90 | 89,17 | 0,60742 | 68,4037 | 43,6264 | $\beta = - 172$ mls/mol |
| 30,55 | 42,31 | 89,21 | 229,18 | 89,04 | 0,18295 | 243,8183 | 45,2168 | $t = 40,00^\circ C$ |
| 29,90 | 42,50 | 89,20 | 245,94 | 88,91 | 0,20499 | 217,2642 | 45,2243 | |
| 29,85 | 42,91 | 89,20 | 269,50 | 89,13 | 0,23545 | 188,7397 | 45,2167 | |
| 29,70 | 42,86 | 89,20 | 301,93 | 88,98 | 0,27798 | 159,2263 | 45,1872 | n_t (moles) = |
| 29,65 | 42,92 | 89,20 | 345,96 | 89,02 | 0,33540 | 131,3581 | 45,1716 | 0,001761 ₅ |
| 29,65 | 42,83 | 89,20 | 392,19 | 88,91 | 0,39590 | 110,7057 | 45,1503 | |
| 29,55 | 42,73 | 89,20 | 457,71 | 89,10 | 0,48119 | 90,4991 | 45,1397 | |
| 29,65 | 42,64 | 89,20 | 570,84 | 89,11 | 0,63385 | 68,4098 | 45,1015 | $\beta = - 159$ mls/mol |
| 29,25 | 42,75 | 89,20 | 233,50 | 88,94 | 0,18871 | 243,8402 | 46,6647 | $t = 50,00^\circ C$ |
| 29,13 | 42,95 | 89,21 | 251,01 | 89,10 | 0,21135 | 217,2838 | 46,6449 | |
| 29,18 | 42,92 | 89,21 | 274,76 | 88,88 | 0,24264 | 188,7567 | 46,6379 | |
| 29,08 | 43,01 | 89,21 | 308,76 | 89,13 | 0,28669 | 159,2406 | 46,6307 | n_t (moles) = |
| 29,01 | 43,25 | 89,20 | 353,86 | 88,93 | 0,34581 | 131,3699 | 46,6181 | 0,001760 ₉ |
| 28,90 | 43,45 | 89,21 | 401,79 | 89,01 | 0,40825 | 110,7157 | 46,5982 | |
| 28,90 | 43,85 | 89,21 | 469,21 | 89,09 | 0,49611 | 90,5072 | 46,5922 | |
| 28,40 | 41,68 | 89,21 | 585,07 | 89,03 | 0,64765 | 68,4160 | 46,5388 | $\beta = - 139$ mls/mol |

Moles de nitrógeno: 0,000722₂

$$x_{N_2} = 0,410_1$$

Número total de moles en la mezcla: 0,001761₁

TABLA VI

 4.^a mezcla nitrógeno-propano

| t_{cat} | t_{man} | L_{ind} | L_{sup} | L_{inf} | p (atm) | v_{amp} (ml) | pV | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|---------|-------------------------|
| 20,62 | 20,32 | 89,27 | 201,12 | 89,13 | 0,14677 | 217,2253 | 32,3727 | $t = 20,00^\circ C$ |
| 21,20 | 20,22 | 89,27 | 217,90 | 89,20 | 0,16867 | 188,7058 | 32,3918 | |
| 21,00 | 20,20 | 89,27 | 241,17 | 89,18 | 0,19920 | 159,1978 | 32,3762 | |
| 20,85 | 20,13 | 89,27 | 272,49 | 89,15 | 0,24029 | 131,3346 | 32,3608 | n_t (moles) = |
| 20,12 | 20,13 | 89,27 | 305,61 | 89,12 | 0,28373 | 110,6859 | 32,3543 | 0,001347 ₄ |
| 20,90 | 20,10 | 89,26 | 352,03 | 89,02 | 0,34471 | 90,4829 | 32,3482 | |
| 20,50 | 20,00 | 89,27 | 432,68 | 89,03 | 0,45040 | 68,3976 | 32,3201 | |
| 20,46 | 20,66 | 89,26 | 612,57 | 89,03 | 0,68609 | 43,6701 | 32,2610 | $\beta = - 167$ mls/mol |
| 27,35 | 27,08 | 89,30 | 204,84 | 88,88 | 0,15180 | 217,2447 | 33,4976 | $t = 30,00^\circ C$ |
| 27,07 | 27,10 | 89,30 | 222,31 | 89,09 | 0,17439 | 188,7228 | 33,5031 | |
| 27,40 | 27,02 | 89,30 | 246,21 | 88,90 | 0,20593 | 159,2120 | 33,4915 | |
| 26,02 | 26,76 | 89,30 | 278,95 | 89,10 | 0,24853 | 131,3463 | 33,4874 | n_t (moles) = |
| 26,10 | 26,49 | 29,30 | 313,28 | 89,14 | 0,29344 | 110,6958 | 33,4769 | 0,001347 ₉ |
| 26,05 | 26,21 | 89,30 | 361,21 | 89,00 | 0,35639 | 90,4910 | 33,4670 | |
| 26,60 | 26,14 | 89,30 | 444,83 | 89,16 | 0,46567 | 68,4037 | 33,4316 | |
| 26,78 | 26,16 | 89,30 | 630,83 | 89,10 | 0,70928 | 43,6740 | 33,3870 | $\beta = - 157$ mls/mol |
| 27,45 | 27,38 | 89,09 | 208,67 | 88,95 | 0,15671 | 217,2642 | 34,5947 | $t = 40,00^\circ C$ |
| 27,80 | 27,73 | 89,09 | 226,37 | 88,88 | 0,17996 | 188,7397 | 34,5953 | |
| 28,05 | 27,60 | 89,09 | 251,19 | 88,88 | 0,21245 | 159,2263 | 34,5715 | |
| 26,85 | 27,50 | 89,11 | 284,64 | 88,79 | 0,25636 | 131,3581 | 34,5763 | n_t (moles) = |
| 27,17 | 27,40 | 89,11 | 320,19 | 88,90 | 0,30275 | 110,7057 | 34,5760 | 0,001347 ₂ |
| 27,20 | 27,23 | 89,14 | 369,83 | 89,00 | 0,36761 | 90,4991 | 34,5512 | |
| 27,35 | 27,15 | 89,14 | 455,74 | 88,90 | 0,48021 | 68,4098 | 34,5352 | |
| 28,05 | 26,94 | 89,14 | 647,13 | 88,91 | 0,73078 | 43,6779 | 34,4822 | $\beta = - 143$ mls/mol |
| 27,20 | 26,83 | 89,10 | 212,01 | 88,58 | 0,16158 | 217,2838 | 35,7032 | $t = 50,00^\circ C$ |
| 27,20 | 26,70 | 89,10 | 230,37 | 88,64 | 0,18554 | 188,7567 | 35,7028 | |
| 26,54 | 26,62 | 89,10 | 256,19 | 88,78 | 0,21916 | 159,2406 | 35,6980 | n_t (moles) = |
| 26,15 | 26,55 | 89,10 | 290,59 | 88,74 | 0,26425 | 131,3699 | 35,6792 | 0,001347 ₃ |
| 26,55 | 26,43 | 89,10 | 327,36 | 89,02 | 0,31204 | 110,7157 | 35,6706 | |
| 26,54 | 26,33 | 89,10 | 378,15 | 88,84 | 0,37877 | 90,5072 | 35,6578 | |
| 26,10 | 26,30 | 89,10 | 466,76 | 88,84 | 0,49479 | 68,4160 | 35,6490 | $\beta = - 133$ mls/mol |
| 25,96 | 25,83 | 89,10 | 663,73 | 88,96 | 0,75257 | 43,6818 | 35,5975 | |

 Moles de nitrógeno : 0,000623₂

$$x_{N_2} = 0,462_5$$

 Número total de moles en la mezcla : 0,001347₅

SEGUNDOS COEFICIENTES DEL VIRIAL DEL SISTEMA NITROGENO-PROPANO

TABLA VII

5.^a mezcla nitrógeno-propano

| t_{cat} | t_{man} | L_{ind} | L_{sup} | L_{inf} | $p(\text{atm})$ | $v_{amp}(\text{ml})$ | pV | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------|----------------------|---------|--------------------------------|
| 20,40 | 20,52 | 88,99 | 200,81 | 88,91 | 0,14664 | 188,7059 | 28,1614 | $t = 20,00^\circ C$ |
| 20,03 | 19,70 | 88,98 | 221,11 | 88,90 | 0,17328 | 159,1978 | 28,1657 | |
| 19,40 | 19,30 | 88,99 | 248,37 | 88,90 | 0,20903 | 131,3346 | 28,1524 | |
| 19,68 | 19,00 | 89,00 | 277,19 | 88,97 | 0,24673 | 110,6859 | 28,1333 | |
| 19,40 | 19,26 | 89,00 | 317,50 | 88,80 | 0,29978 | 90,4829 | 28,1331 | |
| 19,18 | 19,13 | 89,00 | 387,87 | 88,85 | 0,39197 | 68,3976 | 28,1253 | |
| 19,30 | 18,86 | 89,00 | 544,73 | 88,81 | 0,59766 | 43,6701 | 28,1114 | $\beta = - 99 \text{ mls/mol}$ |
| 26,35 | 25,82 | 89,00 | 204,46 | 88,72 | 0,15154 | 188,7228 | 29,1175 | $t = 30,00^\circ C$ |
| 26,85 | 25,80 | 88,99 | 225,68 | 88,92 | 0,17907 | 159,2120 | 29,1154 | |
| 26,92 | 26,10 | 88,99 | 253,63 | 88,72 | 0,21591 | 131,3463 | 29,0961 | |
| 27,08 | 26,20 | 88,99 | 283,50 | 88,69 | 0,25506 | 110,6958 | 29,1048 | |
| 26,76 | 26,17 | 88,95 | 325,34 | 88,66 | 0,30988 | 90,4910 | 29,0988 | |
| 27,20 | 26,30 | 88,96 | 398,45 | 88,93 | 0,40524 | 68,4037 | 29,0849 | |
| 27,05 | 26,39 | 88,97 | 560,14 | 88,65 | 0,61729 | 43,6740 | 29,0674 | $\beta = - 88 \text{ mls/mol}$ |
| 29,10 | 28,23 | 89,00 | 208,11 | 88,52 | 0,15652 | 188,7397 | 30,0951 | $t = 40,00^\circ C$ |
| 29,11 | 28,15 | 89,00 | 230,06 | 88,77 | 0,18492 | 159,2263 | 30,0911 | |
| 28,63 | 28,30 | 98,00 | 259,06 | 88,65 | 0,22303 | 131,3581 | 30,0802 | |
| 28,93 | 28,41 | 89,00 | 289,99 | 88,70 | 0,26344 | 110,7057 | 30,0871 | |
| 29,07 | 28,35 | 89,01 | 333,20 | 88,72 | 0,31997 | 90,4991 | 30,0773 | |
| 28,72 | 28,33 | 89,01 | 408,16 | 88,67 | 0,41815 | 68,4098 | 30,0724 | |
| 28,61 | 27,72 | 89,01 | 575,68 | 88,91 | 0,63715 | 43,6779 | 30,0436 | $\beta = - 85 \text{ mls/mol}$ |
| 28,66 | 28,07 | 89,05 | 212,01 | 88,70 | 0,16139 | 188,7567 | 31,0497 | $t = 50,00^\circ C$ |
| 28,60 | 28,06 | 89,05 | 234,38 | 88,78 | 0,19057 | 159,2406 | 31,0348 | |
| 29,10 | 28,55 | 89,05 | 264,20 | 88,56 | 0,22987 | 131,3699 | 31,0356 | |
| 28,60 | 28,50 | 89,05 | 296,14 | 88,77 | 0,27139 | 110,7157 | 31,0272 | |
| 28,90 | 28,55 | 89,03 | 340,72 | 88,79 | 0,32971 | 90,5072 | 31,0281 | |
| 29,13 | 28,53 | 89,05 | 417,85 | 88,76 | 0,43070 | 68,4160 | 31,0215 | |
| 29,20 | 28,12 | 89,05 | 589,36 | 88,72 | 0,65527 | 43,6818 | 30,9966 | $\beta = - 78 \text{ mls/mol}$ |

Moles de nitrógeno: 0,000737₃

$$x_{N_2} = 0,629_6$$

Número total de moles en la mezcla: 0,001171₁

T A B L A V I I I

6.ª mezcla nitrógeno-propano

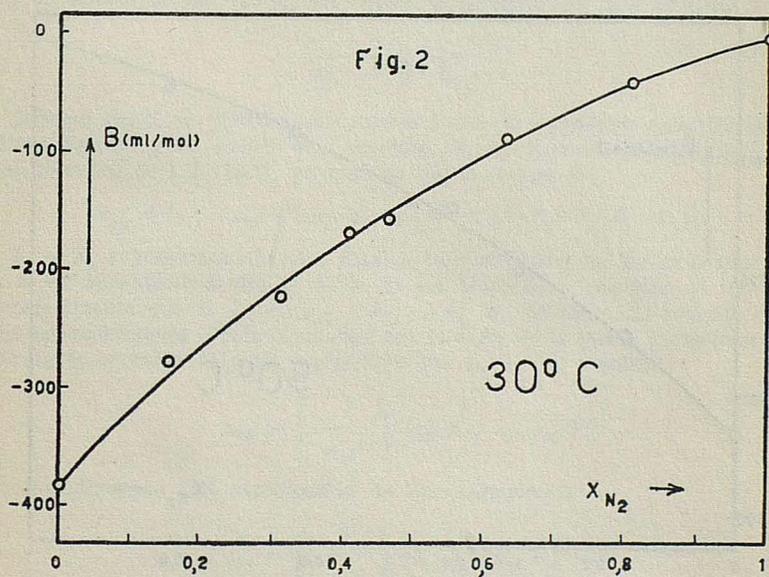
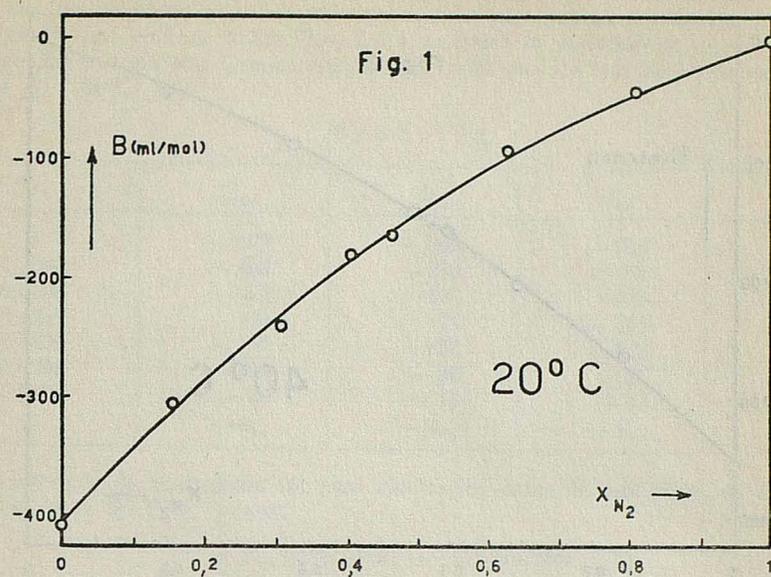
| t_{cat} | t_{man} | L_{ind} | L_{sup} | L_{inf} | p (atm) | v_{amp} (ml) | pV | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|---------|------------------------|
| 18,67 | 18,06 | 88,93 | 193,67 | 88,89 | 0,13737 | 217,2253 | 30,3016 | $t = 20,00^\circ C$ |
| 18,25 | 17,90 | 88,91 | 209,18 | 88,79 | 0,15784 | 188,7059 | 30,3174 | |
| 18,23 | 17,78 | 88,90 | 230,93 | 88,79 | 0,18636 | 159,1978 | 30,2960 | |
| 18,16 | 17,93 | 88,90 | 260,33 | 88,78 | 0,22492 | 131,3346 | 30,2965 | n_t (moles) = |
| 18,12 | 17,93 | 88,90 | 291,24 | 88,59 | 0,26569 | 110,6859 | 30,3109 | 0,001260 ₁ |
| 18,08 | 18,09 | 88,90 | 334,76 | 88,58 | 0,32275 | 90,4829 | 30,3000 | |
| 18,03 | 17,84 | 88,90 | 410,59 | 88,70 | 0,42203 | 68,3976 | 30,2923 | |
| 18,12 | 17,78 | 88,90 | 579,38 | 88,67 | 0,64339 | 43,6701 | 30,2743 | $\beta = - 49$ mls/mol |
| 23,24 | 22,67 | 89,30 | 197,25 | 88,89 | 0,14195 | 217,2447 | 31,3325 | $t = 30,00^\circ C$ |
| 23,83 | 22,62 | 89,31 | 213,30 | 88,85 | 0,16303 | 188,7228 | 31,3368 | |
| 23,62 | 22,76 | 89,30 | 236,00 | 89,02 | 0,19255 | 159,2120 | 31,3205 | |
| 23,35 | 22,87 | 89,30 | 266,37 | 88,95 | 0,23242 | 131,3463 | 31,3320 | n_t (moles) = |
| 23,86 | 23,15 | 89,30 | 298,45 | 88,97 | 0,27441 | 110,6958 | 31,3236 | 0,001259 ₆ |
| 23,30 | 23,02 | 89,30 | 343,40 | 88,90 | 0,33339 | 90,4910 | 31,3244 | |
| 23,51 | 22,88 | 89,30 | 421,69 | 89,03 | 0,43579 | 68,4037 | 31,3115 | |
| 23,72 | 22,80 | 89,30 | 595,67 | 88,86 | 0,66394 | 43,6740 | 31,3046 | $\beta = - 45$ mls/mol |
| 23,22 | 23,13 | 89,02 | 188,88 | 88,94 | 0,13091 | 243,8183 | 32,3813 | $t = 40,00^\circ C$ |
| 24,26 | 23,36 | 89,00 | 200,56 | 88,67 | 0,14656 | 217,2642 | 32,3660 | |
| 24,15 | 23,33 | 89,00 | 217,08 | 88,58 | 0,16832 | 188,7397 | 32,3722 | |
| 24,35 | 23,43 | 88,95 | 240,38 | 88,55 | 0,19888 | 159,2263 | 32,3784 | n_t (moles) = |
| 24,12 | 23,50 | 88,95 | 271,49 | 88,43 | 0,23978 | 131,3581 | 32,3600 | 0,001259 ₉ |
| 24,38 | 23,50 | 88,95 | 304,78 | 88,62 | 0,28314 | 110,7057 | 32,3545 | |
| 24,60 | 23,67 | 88,93 | 351,57 | 88,81 | 0,34417 | 90,4991 | 32,3608 | |
| 24,75 | 24,00 | 88,93 | 431,94 | 88,66 | 0,44961 | 68,4098 | 32,3530 | |
| 24,75 | 23,70 | 88,91 | 611,54 | 88,65 | 0,68490 | 43,6779 | 32,3458 | $\beta = - 44$ mls/mol |
| 25,95 | 24,62 | 89,00 | 191,87 | 88,82 | 0,13495 | 243,8402 | 33,3991 | $t = 50,00^\circ C$ |
| 26,08 | 24,95 | 89,00 | 204,06 | 88,63 | 0,15116 | 217,2838 | 33,3994 | |
| 26,01 | 24,88 | 89,01 | 221,22 | 88,70 | 0,17354 | 188,7567 | 33,3924 | |
| 25,73 | 25,10 | 89,00 | 245,28 | 88,76 | 0,20496 | 159,2406 | 33,3854 | n_t (moles) = |
| 25,94 | 25,34 | 89,00 | 277,62 | 88,79 | 0,24726 | 131,3699 | 33,3818 | 0,001259 ₃ |
| 25,72 | 25,46 | 89,00 | 311,42 | 88,60 | 0,29176 | 110,7157 | 33,3727 | |
| 25,82 | 25,55 | 89,00 | 359,51 | 88,75 | 0,35453 | 90,5072 | 33,3780 | |
| 26,62 | 25,58 | 89,00 | 442,64 | 88,80 | 0,46332 | 68,4160 | 33,3802 | |
| 25,85 | 25,21 | 89,00 | 627,09 | 88,73 | 0,70498 | 43,6818 | 33,3650 | $\beta = - 42$ mls/mol |

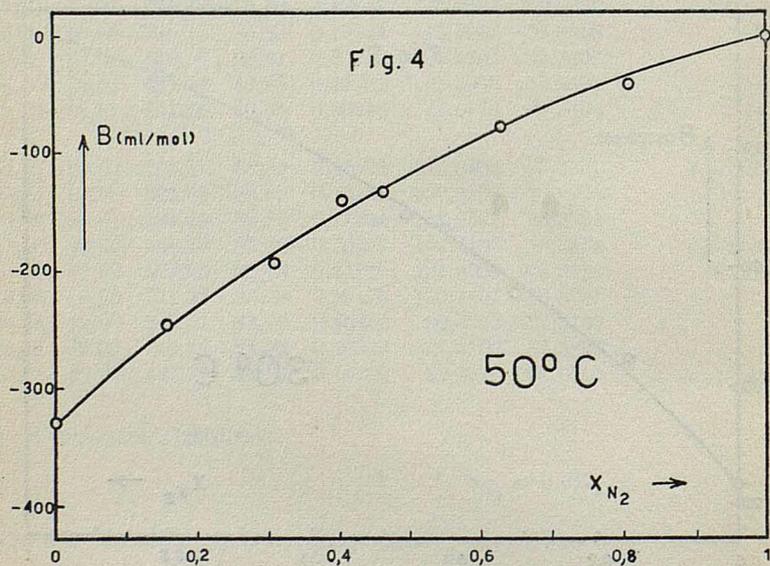
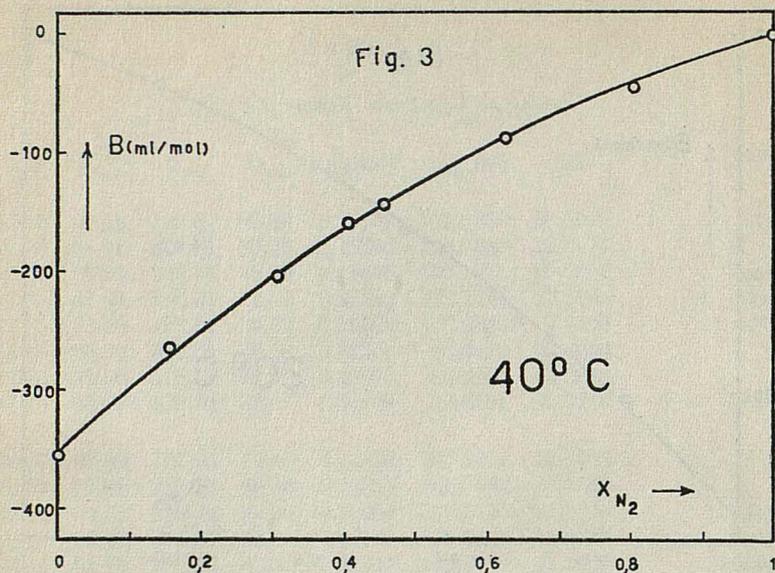
Moles de nitrógeno: 0,001020₉

$$x_{N_2} = 0,810_4$$

Número total de moles en la mezcla: 0,001259₇

SEGUNDOS COEFICIENTES DEL VIRIAL DEL SISTEMA NITROGENO-PROPANO





SEGUNDOS COEFICIENTES DEL VIRIAL DEL SISTEMA NITROGENO-PROPANO

Los resultados obtenidos para los SCV aparecen consignados en la tabla IX, juntamente con los obtenidos para los gases puros, sobre las curvas medias en nuestro trabajo anterior⁵⁾. Las gráficas de las Figs. 1 a 4 muestran la variación de los coeficientes del virial de las mezclas con la composición para cada una de las temperaturas estudiadas (20, 30, 40 y 50°C).

TABLA IX

| x_{N_2} | β_{20} | β_{30} | β_{40} | β_{50} |
|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | -409 | -382 | -355 | -329 |
| 0,1590 | -309 | -280 | -266 | -248 |
| 0,3134 | -243 | -225 | -205 | -193 |
| 0,4101 | -182 | -172 | -159 | -139 |
| 0,4625 | -167 | -157 | -143 | -133 |
| 0,6296 | -99 | -88 | -85 | -78 |
| 0,8104 | -49 | -45 | -44 | -42 |
| 1 | -6,0 | -4,1 | -2,3 | -0,6 |

Haciendo uso de la ecuación (3) para ajustar los datos de esta tabla, se obtienen, en definitiva, para los SCV "mixtos":

$$\beta_{1,2} (293,16^\circ \text{K}) = -92 \text{ ml/mol}$$

$$\beta_{1,2} (303,16^\circ \text{K}) = -84 \text{ ml/mol}$$

$$\beta_{1,2} (313,16^\circ \text{K}) = -78 \text{ ml/mol}$$

$$\beta_{1,2} (323,16^\circ \text{K}) = -72 \text{ ml/mol}$$

Reglas de combinación

Para el modelo de L-J (12-6), las reglas de combinación más sencillas son:

$$\sigma_{12} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 \quad (6, a)$$

$$\epsilon_{12} = (\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22})^{1/2} \quad (6, b)$$

La primera regla se justifica por analogía con la expresión aplicable al modelo de las esferas rígidas; y en cuanto a la segunda, (6, b), tiene su base en el término atractivo del potencial de L-J (12-6), ya que, en efecto, según él:

$$\epsilon_{1,2} = (\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22})^{1/2} (\sigma_{11} \sigma_{22} / \sigma_{12}^2)^3 [2 (E_1 E_2)^{1/2} / (E_1 + E_2)] \quad (7)$$

donde E_1 y E_2 representan energías medias características de las moléculas 1 y 2, que vienen a ser aproximadamente el doble de las respectivas energías de ionización, y se ve inmediatamente que si $\sigma_{11} \simeq \sigma_{22}$ y $E_1 \simeq E_2$ la expresión (7) revierte en la (6, b).

Otras aproximaciones —más completas que la regla de la media geométrica— se fundan también en la ecuación (7); así suponiendo que $E_1 \simeq E_2$, resulta:

$$\epsilon_{12} = \left(\frac{1}{\sigma_{12}^6} \right) (\epsilon_{11} \sigma_{11}^6 \epsilon_{22} \sigma_{22}^6)^{1/2} \quad (8)$$

o bien, introduciendo una modificación de tipo empírico¹⁰⁾:

$$\epsilon_{12} = \left(\frac{1}{\sigma_{12}^3} \right) (\epsilon_{11} \sigma_{11}^3 \epsilon_{22} \sigma_{22}^3)^{1/2} \quad (9)$$

Si se hace uso de la ecuación de Kirkwood-Muller para el coeficiente del término en r^{-6} de las fuerzas de dispersión, se tiene¹¹⁾ para el modelo de L-J (12-6):

$$\epsilon_{12} = \left(\frac{2 \epsilon_{11} \epsilon_{22}}{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}} \right) \left(\frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{12}^2} \right) \left[\frac{(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \sigma_{12}^6 / \chi_1 \chi_2}{(\epsilon_{11} \sigma_{11}^6 / \chi_1^2) + (\epsilon_{22} \sigma_{22}^6 / \chi_2^2)} \right] \quad (10)$$

donde χ es la susceptibilidad magnética, y si suponemos, como antes, que $\sigma_{11} \simeq \sigma_{22}$ y, además, que $\chi_1 \simeq \chi_2$, resulta la nueva regla de combinación:

$$\epsilon_{12} = 2 \epsilon_{11} \epsilon_{22} / (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (11)$$

Debe hacerse observar, sin embargo, que las fórmulas más completas para ϵ_{12} pueden no conducir siempre a los mejores resultados sobre todo cuando se combinan con la regla de la media aritmética para σ_{12} . Además, puede haber en muchos casos compensación de errores.

Para el modelo exp-6, se han propuesto también reglas parecidas. Las más sencillas son:

$$\gamma_{12} = (\gamma_{11} + \gamma_{22}) / 2 \quad (12, a)$$

$$(r_m)_{12} = [(r_m)_{12} + (r_m)_{22}] / 2 \quad (12, b)$$

$$\dot{\epsilon}_{12} = (\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22})^{1/2} \quad (12, c)$$

que se corresponden con las (6, a) y (6, b) del modelo de L-J. Otras reglas más completas se basan en combinaciones correspondientes a los términos de atracción y repulsión del potencial molecular; así según Mason¹²⁾:

$$(GH) (r_m)_{12}^7 = \exp [(G) (r_m)_{12}] \quad (13, a)$$

con

$$G = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_{11}}{(r_m)_{11}} + \frac{\gamma_{22}}{(r_m)_{22}} \right], \quad y \quad H = (\gamma_{11} \gamma_{22})^{-1/2} [(r_m)_{11} (r_m)_{22}]^{-3} \exp [(\gamma_{11} + \gamma_{22}) / 2]$$

$$\gamma_{12} = (G) (r_m)_{12} \quad (13, b)$$

y

$$\dot{\epsilon}_{12} = (\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22})^{1/2} \left[\frac{(\gamma_{12} - 6)^2}{(\gamma_{11} - 6)(\gamma_{22} - 6)} \right]^{1/2} \exp \left(\frac{\gamma_{11} + \gamma_{22} - 2 \gamma_{12}}{2} \right) \quad (13, c)$$

Otra serie de reglas de combinación es la propuesta por Srivastava y Srivastava¹³⁾, si bien, al igual que las anteriores debe considerarse como semiempírica:

$$\frac{\gamma_{12}}{(r_m)_{12}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_{11}}{(r_m)_{11}} + \frac{\gamma_{22}}{(r_m)_{22}} \right] \quad (14, a)$$

$$\dot{\epsilon}_{12} = (\epsilon_{11} \epsilon_{22})^{1/2} \quad (14, b)$$

$$\frac{\epsilon_{12} (r_m)_{12}^6}{1 - 6/\gamma_{12}} = \frac{[\epsilon_{11} (r_m)_{11}^6 \epsilon_{22} (r_m)_{22}^6]^{1/2}}{[(1 - 6/\gamma_{11})(1 - 6/\gamma_{22})]^{1/2}} \quad (14, c)$$

A continuación se consignan los valores hallados para los parámetros "mixtos" mediante las distintas reglas de combinación antes indicadas, juntamente con las correspondientes a los componentes puros:

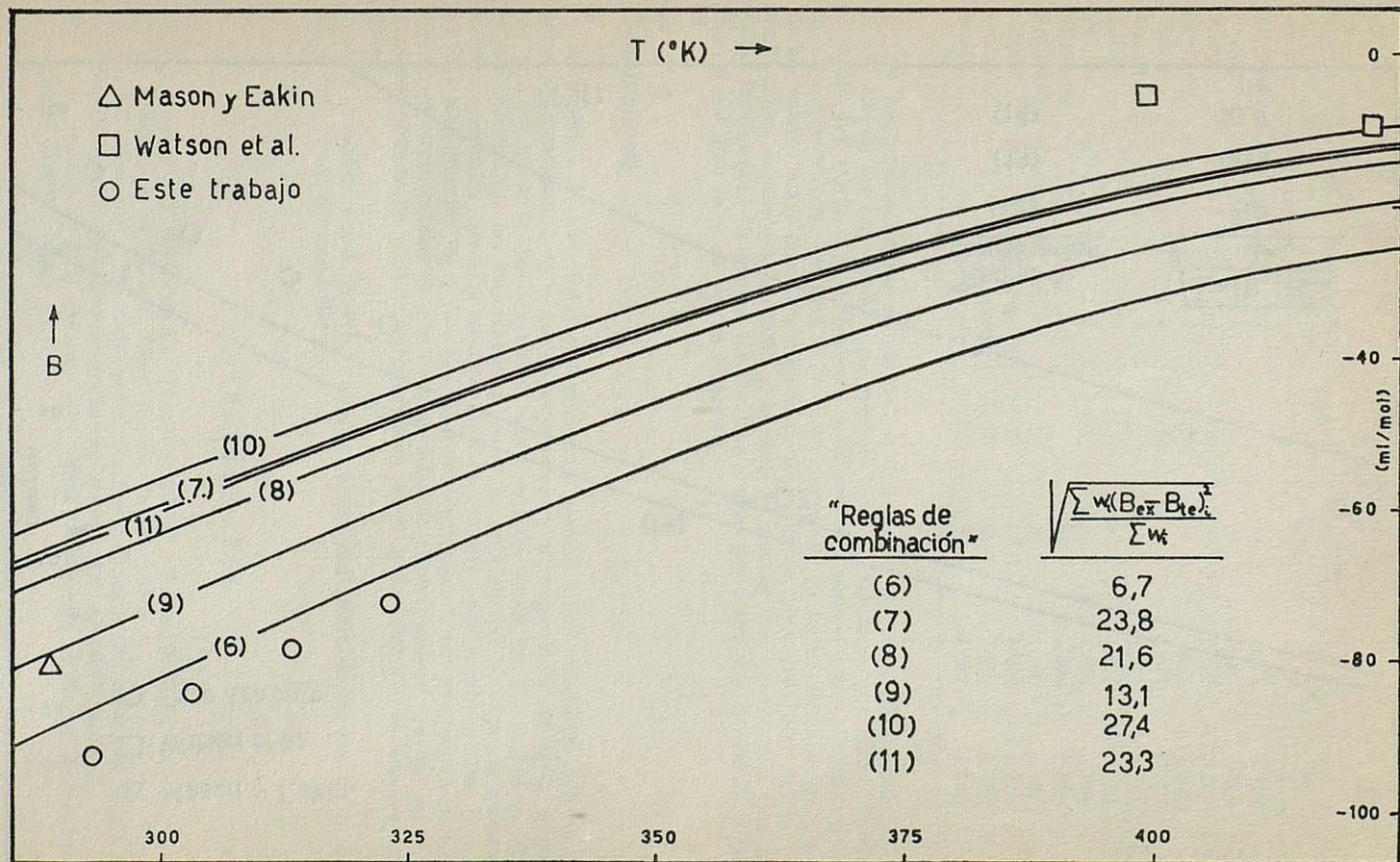


Fig. 5

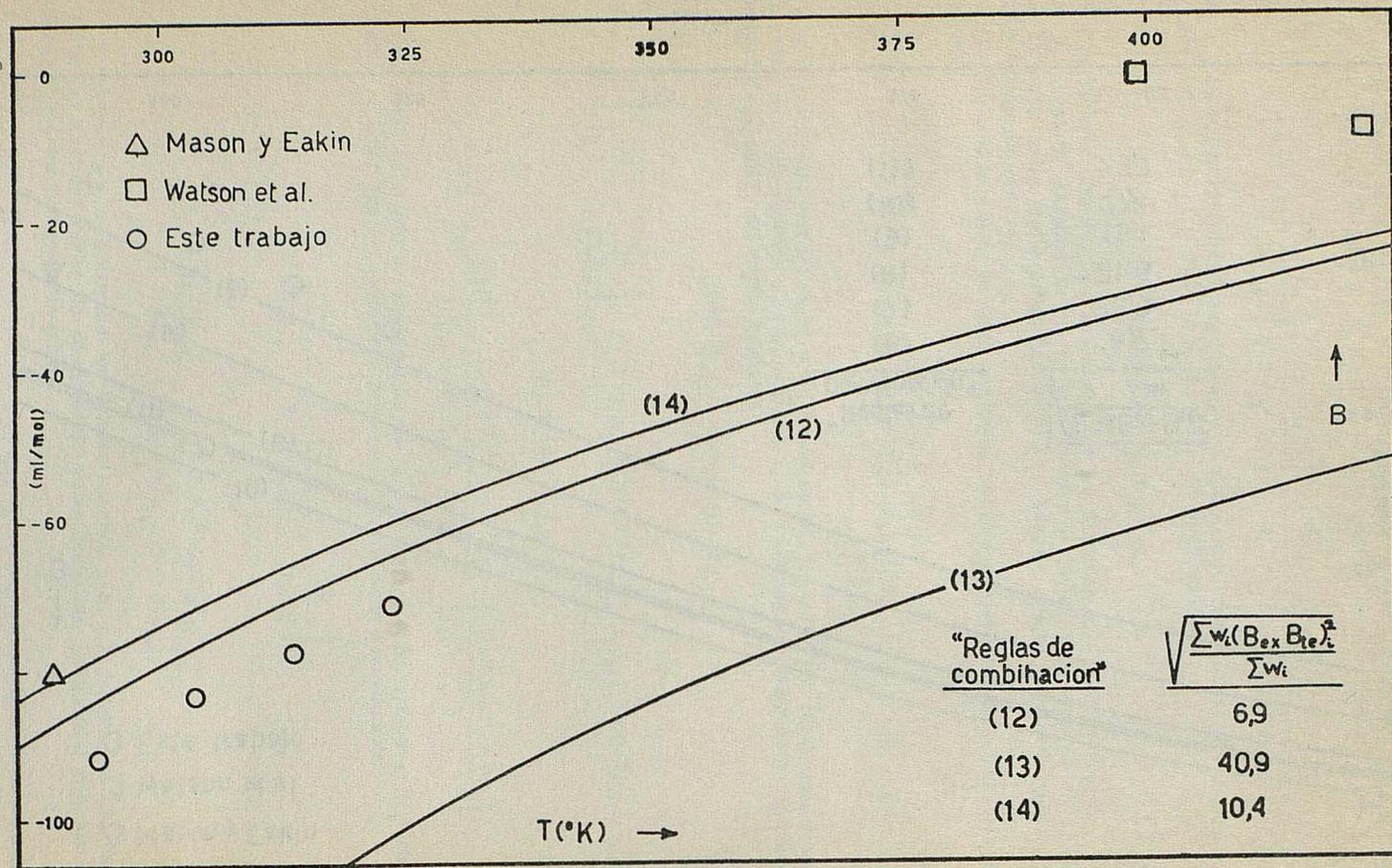


Fig. 6

TABLA X

| Gas | Modelo | Regla | γ | σ | r_m | ε/k |
|------------------|--------|-------|----------|----------|-------|-----------------|
| Nitrógeno | L-J | | — | 3,739 | 4,197 | 95,4 |
| Propano | L-J | | — | 5,403 | 6,065 | 249,5 |
| Mezcla | L-J | (6) | — | 4,571 | 5,131 | 154,3 |
| Mezcla | L-J | (7) | — | 4,571 | 5,131 | 137,5 |
| Mezcla | L-J | (8) | — | 4,571 | 5,131 | 139,5 |
| Mezcla | L-J | (9) | — | 4,571 | 5,131 | 146,7 |
| Mezcla | L-J | (10) | — | 4,571 | 5,131 | 134,6 |
| Mezcla | L-J | (11) | — | 4,571 | 5,131 | 138,1 |
| Nitrógeno | exp-6 | | 30,0 | 3,426 | 3,675 | 161,0 |
| Propano | exp-6 | | 24,0 | 4,760 | 5,163 | 411,4 |
| Mezcla | exp-6 | (12) | 27,0 | 4,099 | 4,419 | 257,4 |
| Mezcla | exp-6 | (13) | 26,7 | 3,870 | 4,174 | 332,1 |
| Mezcla | exp-6 | (14) | 28,0 | 4,057 | 4,366 | 257,4 |

Con los parámetros así calculados, se han determinado las curvas teóricas B-T haciendo uso de los correspondientes valores reducidos tabulados por Bird y Spotz¹⁴⁾ para el modelo L-J (12-6), y por Sherwood y Prausnitz¹⁵⁾ para el exp-6. Dichas curvas aparecen representadas en las Figs. 5 y 6, en las cuales se indica también las desviaciones de los valores experimentales respecto a los teóricos, para cada una de las reglas de combinación, habiéndose estimado, a la hora de asignar los "pesos" (w_i), que la imprecisión experimental de B para las medidas a altas presiones (las de 399,32 y 42205° K) viene a ser diez veces la de los restantes.

Conclusiones

En ausencia de más datos experimentales resulta difícil establecer cuál de las relaciones de combinación es la que mejor reproduce el comportamiento de la mezcla. Aunque pudiera pensarse que las reglas más completas como las (7) y (10) en el modelo de L-J deberían ser las más correctas, ya se ha indicado que no siempre conducen a los mejores resultados; en este caso parecen dar valores poco negativos. Por el contrario, las más simplificadas (6) y (9), son las que más ajustan a los puntos experimentales, si bien no es cierto extraer de ello consecuencias de alcance general, ya que no lo permite el escaso número de puntos experimentales, ni el corto intervalo de temperaturas estudiado.

Para el modelo exp-6, la Fig. 6 demuestra que cualquiera de las dos series de reglas (12) ó (14) puede ser aceptable.

BIBLIOGRAFIA

- 1) G. N. LEWIS y M. RANDALL, "Thermodynamik", Viena (1937).
- 2) I. AMDUR y E. A. MASON, *Phys. Fluids*, 1, 370 (1958).
- 3) H. W. WOOLLEY, "The Calculation of Thermodynamic Properties of Gases at High Temperatures" Technical Documentary Report No. AFSWCTDR-62-21.
- 4) J. H. DYMOND y E. B. SMITH, "The Virial Coefficients of Gases" Clarendon Press, Oxford (1969).

- 5) J. S. URIETA y C. GUTIÉRREZ LOSA, *Rev. Real Acad. Cienc. Madrid*, LXV, C 3º, 581 (1971).
- 6) G. M. WATSON et al., *Industr. Engng. Chem.*, 46, 362 (1954).
- 7) D. MCA. MASON y B. E. EAKIN, *J. Chem. Eng. Data*, Vol. 6, núm. 4, 499 (1961).
- 8) Am. Petrol. Inst. "Selected Values of Properties of Hydrocarbons and Related Compounds", API Research Project, 44, Carnegie Inst. Tech., Pittsburg, Pa. (Loose leaf data sheets, extant 1960).
- 9) J. Hilsenrath et al., "Tables of Thermal Properties of Gases". Natl. Bur. Standards (U. S.) *Circ. 564* (1955).
- 10) R. C. REID y T. W. LELAND, Jr., *A. I. Ch. J.* 11, 228 (1965).
- 11) E. A. MASON et al., *Phys. Fluids*, 7, 1011 (1964).
- 12) E. A. MASON, *J. Chem. Phys.*, 23, 49 (1955).
- 13) B. N. SRIVASTAVA y K. P. SRIVASTAVA, *J. Chem. Phys.*, 28, 543 (1958).
- 14) R. B. BIRD y E. L. SPORTZ, University of Wisconsin, CM-599 (1950).
- 15) A. E. SHERWOOD y J. M. PRAUSNITZ y *J. Chem. Phys.*, 41, 437 (1964).

ESTUDIO DE ALGUNOS OXINATOS COMPLEJOS DE IONES DE LOS METALES DE TRANSICION

II.—Comportamiento espectroscópico en las zonas del visible y ultravioleta de algunos «óxinatos» de Ni^{2+} y Co^{2+} *

P O R

F. GÓMEZ BELTRÁN, A. ROY, L. A. ORO y F. PALACIO

Departamento de Química Inorgánica. Cátedra de Química Inorgánica Estructural.
Centro Coordinado con el C. S. I. C. Facultad de Ciencias. Zaragoza

Summary

In order to explain the magnetochemical behaviours observed in the series of nickel (II) and cobalt (II) "oxinates" studied by Gómez-Beltrán, Oro y Pisa (2), spectral measurements in the visible and ultraviolet ranges have been carried out.

The collected data permit us to conclude that the complexes reflectance visible spectra (d-d transitions) and ultraviolet "oxinate" charge transfer bands do not support the chemical and magnetic evidence found in (2).

From the calculated values of $10 Dq$ and μ (dipole moment) information about the complexing capacity of the "oxinate" ion is obtained.

Introducción

En 1966, Morpurgo L. y Williams R. J. P. (1) publican un trabajo en el que estudian los espectros, en las zonas del visible y ultravioleta, de una serie de complejos formados por Ni^{2+} y Cu^{2+} con derivados de la 8-hidroxiquinoleína. El propósito de su estudio era "descubrir si hay algún paralelo entre los desplazamientos de bandas y cambios de intensidad de las transiciones y si existe alguna relación entre cambios en el espectro de los ligandos, $\pi \rightarrow \pi^*$, y el de los iones metálicos, espectro d-d. En particular este estudio podría indicar la fuerza de la interacción π entre los orbitales d con el sistema de electrones π de un ligando".

En un trabajo anterior, algunos de nosotros (2) hemos estudiado los comportamientos magnetoquímicos de una serie de complejos de Ni^{2+} y Co^{2+} con distintos derivados de la 8-hidroxiquinoleína y de los resultados obtenidos se deduce que los sustituyentes en el grupo fundamental de la oxina modifican sustancialmente la interacción "orbitales del ión central—sistema de electrones π del ligando" pues, en el caso del níquel se producen complejos para— o diamagnéticos según cual sea la "oxina" empleada y en el de los de Co^{2+} existe una variación del valor del momento del ión cobalto que puede atribuirse a la misma causa. A la vista de estos hechos parece pues interesante comparar las conclusiones de Morpurgo y Williams con nuestros resultados.

* En este trabajo se recogen partes de las Tesis Doctorales de L. A. Oro y A. Roy.

Estos autores (M. y W.) estudian en su trabajo los espectros V-UV de catorce "oxinas" distintas. Utilizan para los ligandos puros distintos disolventes, Cl_3CH , KOH 0,1 N y ClO_4H 1 N. También estudian dieciséis "oxinatos" de Cu^{2+} disueltos en piridina, catorce "oxinatos" de Cu^{2+} disueltos en dioxano y cloroformo, trece "oxinatos" de níquel divalente disueltos en piridina y doce "oxinatos" de Ni^{2+} disueltos en benceno. Del análisis de las bandas aparecidas en cada caso deducen una serie de conclusiones interesantes sobre la disposición espacial de los ligandos alrededor del ión central y, sobre todo, determinan un grado variable de interacción π entre el catión y el anillo de quinoleína, interacción que les permite colocar los ligandos en orden. Tal orden debe de coincidir con la "tendencia" de cada "oxina" a formar complejos planocuadrados diamagnéticos con el Ni^{2+} . Sin embargo, esta coincidencia no existe, al menos en el grado que podría esperarse. Por ello, hemos repetido en parte algunas de las medidas experimentales hechas por estos autores y hemos realizado otras nuevas con el fin de ver si era posible hallar las razones de esta falta de acuerdo toda vez que los hechos magnetoquímicos descritos en (2) parecen indiscutibles.

Parte experimental

Los complejos de Ni^{2+} y Co^{2+} empleados son los que se obtuvieron para realizar medidas de susceptibilidades magnéticas. Su preparación y análisis se describen en (2).

Espectros en las regiones del visible y ultravioleta

a) ESPECTROS DE LOS COMPLEJOS EN ESTADO SÓLIDO

Se llevaron a cabo en un espectrofotómetro Beckman DU provisto de cabezal de opacos, por el método de reflectancia difusa. Como patrón de reflectancia elegimos el CO_3Mg , pues si bien el MgO es el cuerpo que se recomienda como sustancia más idónea, presenta el inconveniente, que no tiene el carbonato de magnesio, de perder rápidamente las propiedades difusoras de su superficie.

El carbonato de magnesio tiene, frente al óxido de magnesio, un poder difusor del 98 % pero, dado que la realización práctica de un espectro requiere unas tres horas, preferimos perder un poco en poder difusor del blanco a fin de estar seguros de la estabilidad temporal de la superficie de referencia. Como, de cualquier modo, los valores de reflectancia, sea cual sea el blanco empleado, son relativos, el elegir un patrón u otro no disminuye la información que puede obtenerse de un espectro por reflexión y que se circunscribe, únicamente, a la posición de los máximos de absorción del compuesto.

Tanto el óxido, como el carbonato de magnesio actúan como blancos de reflexión en la zona de 9000 a 27000 cm^{-1} pues, hacia 27000 cm^{-1} estas sustancias comienzan a presentar absorciones muy apreciables, fenómeno que determina la imposibilidad de ajustar a cero el instrumento aún con la máxima abertura de su rendija de entrada. Así pues, los espectros realizados lo fueron en la zona de 9000 a 27000 cm^{-1} . Esta situación parece irremediable toda vez que no hemos encontrado en la bibliografía a nuestro alcance mención alguna respecto a patrones de reflexión en el ultravioleta.

Aunque en esta zona del espectro encontramos algunos de los datos necesarios para el estudio que nos proponemos hacer, la circunstancia de que las bandas de transferencia de carga existentes en los complejos estudiados aparecen desde 20000 cm^{-1} hacia frecuencias mayores, nos llevó a obtener los espectros en disolución.

b) ESPECTROS EN DISOLUCIÓN

Los "oxinatos" preparados son insolubles en todo tipo de disolventes polares y no polares, y en aquellos pocos en los que se disuelven en cantidades adecuadas para que se pongan de manifiesto sus bandas de intensidad más débil (bandas d-d del complejo cuyos ϵ máximo ≈ 5) es a costa de sustituir las dos moléculas de agua existentes en los complejos octaédricos por dos moléculas del disolvente (piridina p. ej.). Sin embargo, encontramos un disolvente, el alcohol isopropílico, en el que los "oxinatos" de níquel y cobalto se disuelven lo suficiente para poder llevar a cabo los espectros en la zona del ultravioleta próximo y hallar las posiciones de sus intensas ($\epsilon \approx 10^4$) bandas de transferencia de carga. Dado que, presumiblemente, las capacidades complejantes del agua y del alcohol serán muy parecidas, los espectros de transferencia de carga obtenidos presentarán las bandas en longitudes de onda que se puede aceptar que son las correspondientes a los complejos formados por dos "oxinatos" y dos moléculas de agua. Por ello, creimos interesante obtener estos espectros, con el fin de comparar la secuencia de enlace π creciente que de ellos puede deducirse con la correspondiente obtenida de los espectros de los "oxinatos" complejos que contienen dos grupos piridina en su molécula.

Resultados obtenidos

La tabla I recoge las posiciones de los máximos de absorción correspondientes a las bandas que aparecen en los complejos sólidos octaédricos y paramagnéticos de níquel (II) de fórmula Ni ["oxinato"]₂·2H₂O. Se han dividido en dos grupos según que las "oxinas" empleadas como quelante fuesen de tipo a) o b) (2).

TABLA I

Posiciones de los máximos de absorción de "oxinatos" complejos de Ni (II), octaédricos y paramagnéticos, en estado sólido.

| Tipo de "oxina" | Ligando | Longitudes de onda en cm. ⁻¹ | | | |
|-----------------|------------------------------------|---|-------|-------|---------------|
| a) | 5SO ₃ ⁻ , 7I | 9250 | 10520 | 15380 | (26600) |
| | 5SO ₃ ⁻ | 9090 | 12050 | 17550 | — |
| | 5NH-CO-CH ₃ | 9090 | 12500 | 16530 | (25000) |
| | 5F | 8890 | 11760 | 17100 | (26600) |
| | 5Cl | 8890 | 11430 | 16950 | (25000) |
| | 5Br* | — | — | 16670 | (25000) |
| | 5CH ₃ | 9620 | 10750 | 17390 | (26000) |
| | 5H | 9090 | — | 16130 | (25000) |
| b) | 5,7Cl ₂ | 9090 | 10810 | 16130 | 20620 (26000) |
| | 5Cl, 7Br | — | 10810 | 16950 | 20400 (26000) |
| | 5,7 Br ₂ | — | 10810 | 16670 | 20400 (26000) |
| | 5Cl, 7I | 9300 | — | 16400 | 20400 (26000) |

* El espectro del complejo de fórmula Ni [5 bromo 8-hidroxiquinoleinato]₂·2H₂O no permite asignar las bandas de 9000 y 11000 cm.⁻¹.

La tabla II resume las posiciones de las bandas de absorción de los complejos de cobalto (II) octaédricos de fórmula general Co ["oxinato"]₂·2H₂O. En este caso como se dijo en (2) todas las oxinas son de tipo a) frente a este ión.

TABLA II

Posiciones de los máximos de absorción de "oxinatos" complejos de Co (II) octaédricos y con momento magnético comprendido entre 4 y 5 magnetones de Bohr, en estado sólido.

| Ligando | Longitudes de onda en cm^{-1} | | |
|--|--|-------|---------|
| | | | |
| Oxina | 9346 | 20619 | (26000) |
| 5Cl oxina | 9091 | 19802 | (26000) |
| 5Br oxina | — | — | — |
| 5CH ₃ oxina | 9434 | 20203 | (26000) |
| 5SO ₃ ⁻ oxina | 9434 | 20833 | (26000) |
| 5SO ₃ ⁻ , 7I oxina | 9259 | 20408 | (26000) |
| 5,7Cl ₂ oxina | 9390 | 19609 | (26000) |
| 5Cl, 7Br oxina | 9091 | 20000 | (26000) |
| 5,7Br ₂ oxina | 9091 | 19802 | (26000) |
| 5Cl, 7I oxina | 9009 | 19608 | (26000) |
| 5,7 I ₂ oxina | 9009 | 19608 | (26000) |

La forma que presentan estos espectros se ve en la fig. 1, en la que se dibujan las curvas, % reflectancia contra longitud de onda en cm^{-1} para los complejos Co [5-cloro 8-hidroxiquinoleinato]₂.2H₂O y Ni [5-cloro 8-hidroxiquinoleinato]₂.2H₂O.

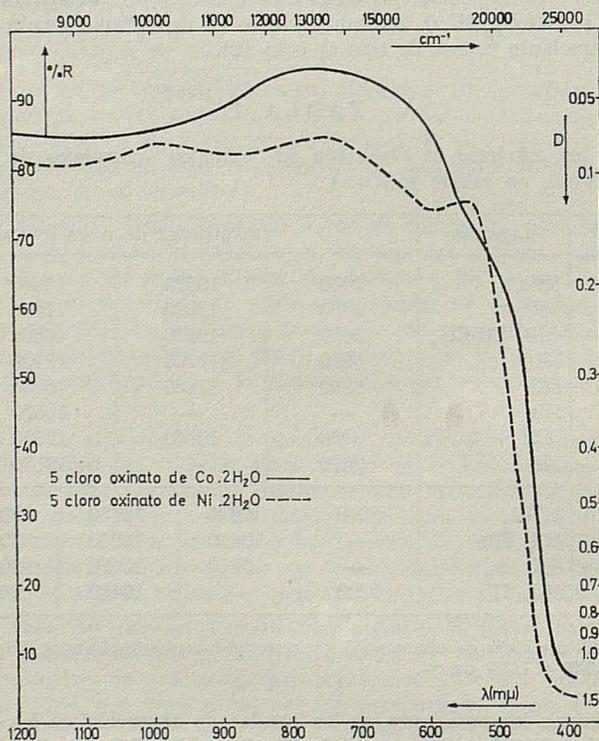


FIG. 1

Tanto en los complejos reseñados en la tabla I como en los recogidos en la tabla II la asignación de las frecuencias de las bandas de 9000 cm^{-1} es bastante imprecisa, debido a que son muy anchas y de muy baja intensidad.

Por otro lado, las frecuencias de las bandas que aparecen en la zona de 26000 cm^{-1} son todavía más inexactas, pues no puede obtenerse a partir de los datos experimentales la localización precisa de sus máximos de absorción. El hecho de que el aparato de medida resulte inútil por encima de 27000 cm^{-1} y la circunstancia de que la banda de 26000 cm^{-1} es muy intensa, contribuyen a este resultado. Por ello, los valores dados sirven únicamente para indicar que en dicha zona existe una banda de absorción muy fuerte.

En la tabla III, se recogen las posiciones de las bandas que aparecen en los espectros de los complejos diamagnéticos de Ni^{2+} obtenidos por reflectancia difusa.

TABLA III

Bandas de absorción de "oxinatos" complejos de Ni^{2+} diamagnéticos en estado sólido.

| Ligando | $\bar{\nu}\text{ cm}^{-1}$ | | |
|-------------------------|----------------------------|-------|---------|
| 5,7 Cl_2 oxina | 16670 | 20830 | — |
| 5 Cl, 7Br oxina | 16670 | 20830 | — |
| 5,7 Br_2 oxina | 17090 | 20830 | — |
| 5 Cl, 7I oxina | 16810 | 20620 | (25000) |
| 5,7 I_2 oxina | 17090 | 20400 | — |

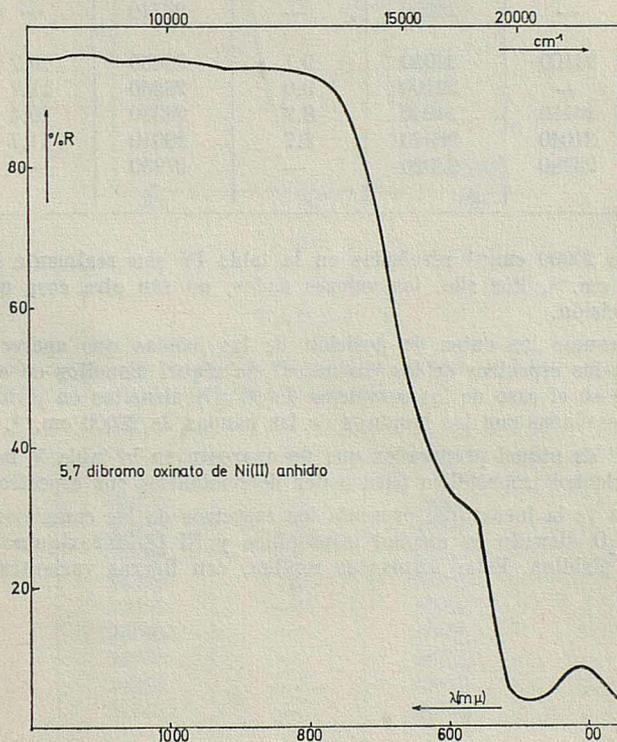


FIG. 2

De las bandas de baja frecuencia reseñadas en la tabla III, la de 17000 cm^{-1} aparece como un hombro de la de 21000 cm^{-1} . La figura 2 muestra la forma general de los espectros por reflexión de los complejos diamagnéticos de Ni^{2+} obtenidos.

En la tabla IV se recogen los espectros, en la zona de 20000 a 33000 cm^{-1} , de los complejos de níquel (II) disueltos en piridina. Estos espectros, se llevaron a cabo a pesar de que, como ya hemos indicado, en el trabajo de Morpurgo y Williams (1) se recogen los mismos espectros para algunos de nuestros "oxinatos" de níquel. Sin embargo, a fin de disponer de datos en forma comparable en todos los casos, los repetimos, aunque sólo en la zona del ultravioleta. En la primera columna de la tabla IV se incluyen también las frecuencias de las bandas de 24000 cm^{-1} tomadas de (1). Comparando ambos datos puede verse el grado de reproducibilidad de los resultados experimentales.

TABLA IV

Espectros de absorción de "oxinatos" complejos de níquel disueltos en piridina.

| Sustituyente | $\bar{\nu}$ cm^{-1} | $\bar{\nu}$ cm^{-1} | $\epsilon \cdot 10^{-3}$ | $\bar{\nu}$ cm^{-1} | $\epsilon \cdot 10^{-3}$ | $\bar{\nu}$ cm^{-1} |
|------------------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| H | 24570 | 24390 | — | 28900 | — | (29850) |
| 5F | 23530 | 23530 | 7.8 | 28010 | 11.0 | (28990) |
| 5Cl | — | 23590 | 9.7 | 28250 | 9.5 | (29410) |
| 5Br | 23700 | 23750 | 9.8 | 28330 | 9.7 | (29410) |
| 5CH ₃ | 23580 | 23470 | 7.3 | 28090 | 9.7 | (29410) |
| 5NH-CO-CH ₃ | — | 23700 | 8.4 | 28410 | 7.9 | (29590) |
| 5SO ₃ ⁻ , 7I | — | 24690 | — | 28740 | — | (29940) |
| 5,7Cl ₂ | 24100 | 24040 | 9.1 | 28330 | 10.7 | (29410) |
| 5Cl,7Br | — | 24100 | 9.0 | 28250 | 11.7 | (29150) |
| 5,7Br ₂ | 24150 | 24040 | 8.9 | 28330 | 10.4 | (29410) |
| 5Cl,7I | 24040 | 23920 | 8.7 | 28010 | 11.7 | (29070) |
| 5,7I ₂ | 23980 | 23920 | — | 27930 | — | (28900) |

Las bandas de 29000 cm^{-1} reseñadas en la tabla IV son realmente hombros de las bandas de 28000 cm^{-1} . Por ello, los valores dados, no son otra cosa que estimaciones y carecen de precisión.

La tabla V resume los datos de posición de las bandas que aparecen entre 20000 y 33000 cm^{-1} en los espectros de los "oxinatos" de níquel disueltos en alcohol isopropílico. Al igual que en el caso de los complejos de Ni (II) disueltos en piridina, las bandas de 30000 cm^{-1} reseñadas son los hombros de las bandas de 28000 cm^{-1} .

Los "oxinatos" de níquel preparados que no aparecen en la tabla V no se disolvieron lo suficiente en alcohol isopropílico para poder determinarles sus espectros de absorción.

En la fig. 3 se ve la forma que presenta los espectros de los complejos Ni [8-hidroxi-quinoleinato]₂·2H₂O disuelto en alcohol isopropílico y Ni [8-hidroxi-quinoleinato]₂·2 piridina disuelto en piridina. Estas formas se repiten, con ligeras variantes, en los demás casos.

ESTUDIO DE ALGUNOS OXINATOS COMPLEJOS DE IONES DE LOS METALES DE TRANSICION

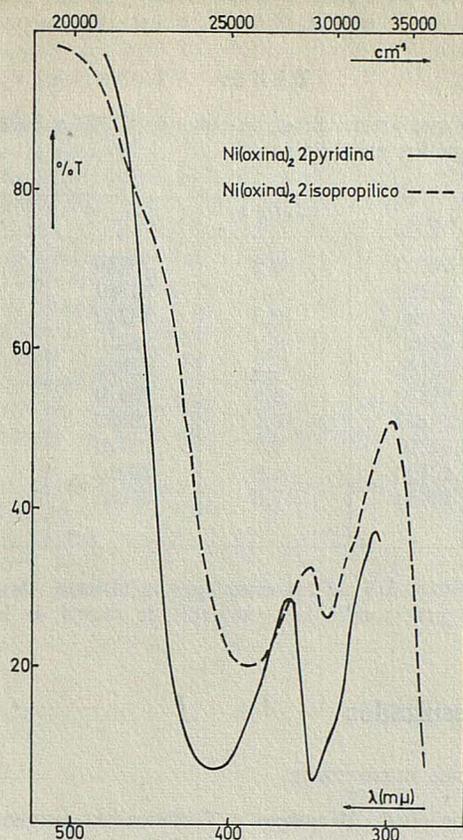


FIG. 3

TABLA V

Bandas de absorción que presenta en la zona 20000 a 33000 cm^{-1} los "oxinatos" octaédricos de Ni^{2+} disueltos en alcohol isopropílico.

| Sustituyente | $\bar{\nu} \text{ cm}^{-1}$ | $\epsilon \cdot 10^{-3}$ | $\bar{\nu} \text{ cm}^{-1}$ | $\epsilon \cdot 10^{-3}$ | $\bar{\nu} \text{ cm}^{-1}$ |
|--------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 5H | 26670 | 4.5 | 29590 | 3.8 | (31250) |
| 5F | 24810 | 5.3 | 28900 | 4.9 | (30030) |
| 5Cl | 24690 | 7.0 | 28900 | 4.9 | (30030) |
| 5Br | 24690 | 7.0 | 28900 | 5.1 | (30030) |
| 5CH ₃ | 24450 | 4.4 | 28990 | 4.6 | (29940) |
| 5,7Cl ₂ | 24880 | 6.2 | 28820 | 6.1 | (30300) |
| 5Cl, 7Br | 24880 | — | 28740 | — | (29940) |
| 5,7Br | 24880 | 3.3 | 28820 | 3.3 | (29850) |
| 5Cl, 7I | 24750 | — | 28410 | — | (29940) |

La tabla VI recoge las posiciones de los máximos de absorción en la zona 20000 a 33000 cm^{-1} de los "oxinatos" complejos de Co^{2+} disueltos en piridina.

TABLA VI

Bandas de absorción que presentan en la zona de 20000 a 33000 cm^{-1} los "oxinatos" octaédricos de Co^{2+} disueltos en piridina.

| Sustituyente | $\bar{\nu} \text{ cm}^{-1}$ | $\epsilon \cdot 10^{-3}$ | $\bar{\nu} \text{ cm}^{-1}$ | $\epsilon \cdot 10^{-3}$ | $\bar{\nu} \text{ cm}^{-1}$ |
|------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 5H | 24690 | 8.2 | 29150 | 8.8 | (30300) |
| 5Cl | 23920 | — | 28740 | — | (29850) |
| 5Br | 23920 | 12.0 | 28740 | 11.7 | (29850) |
| 5 CH_3 | 23580 | 8.2 | 28410 | 8.5 | — |
| 5 SO_3^- , 7I | 25130 | — | 28990 | — | (29670) |
| 5,7Cl ₂ | 24210 | 8.9 | 28410 | 9.7 | (28990) |
| 5Cl, 7Br | 24150 | 9.4 | 28330 | 10.9 | (29240) |
| 5,7Br ₂ | 24210 | 9.7 | 28410 | 10.4 | (29330) |
| 5Cl, 7I | 24100 | 8.8 | 28010 | 10.7 | (28540) |
| 5,7 I ₂ | 23980 | 7.6 | 28250 | 9.7 | (28990) |

La forma de los espectros UV de los complejos de fórmula $\text{Co} [\text{"oxinato"}]_2 \cdot 2$ piridina es análoga a la de los correspondientes complejos de níquel de la fig. 3.

Discusión de los resultados

a) BANDAS EN LA ZONA DEL ULTRAVIOLETA

En el trabajo ya indicado de Morpurgo y Williams (1) se pueden separar dos partes que, aunque conducentes al mismo fin, presentan características distintas. La primera se refiere a la identificación de las bandas de alta intensidad ($\epsilon \approx 6000-7000$) que aparecen en los espectros de los "oxinatos" metálicos y la segunda a la utilización de sus posiciones e intensidades para la determinación de "un orden creciente de interacción π " entre los ligandos y el ión central.

Para la identificación de las dos bandas que aparecen en el espectro de los complejos de Ni^{2+} en la zona de 20000 a 35000 cm^{-1} (ver fig. 3) estos autores hacen uso de la asignación hecha por Perkampus y Körtum (3) de las bandas existentes en esta misma zona en el anión 8-hidroxiquinoleinato.

Según Perkampus y Körtum, las bandas de aproximadamente 31000 cm^{-1} que aparecen en la 8-hidroxiquinoleína neutra corresponden a las dos transiciones 1L_a y 1L_b , situadas en 31000 y 31500 cm^{-1} respectivamente. La banda 1L_b aparece como un máximo de absorción un poco más débil, cuya posición "es muy difícil de colegir con los medios normales de trabajo".

Todas las 8-hidroxiquinoleínas empleadas en nuestro estudio presentan, según Morpurgo y Williams (1), el mismo tipo de espectro que el de la propia 8-hidroxiquinoleína y, así, en disolución en cloroformo, la tabla 3 del trabajo de estos autores recoge las posiciones de los máximos 1L_a y 1L_b . Curiosamente sin embargo, sólo en el caso de la propia oxina dan las frecuencias correspondientes a dos máximos de absorción mientras que, en las oxinas sustituidas, sólo reseñan uno. Da la impresión, como indican Perkampus y Körtum, que ambas bandas están tan próximas en estos compuestos que no es posible separarlas con la técnica y aparato empleados.

La transición 1L_a identificada por Perkampus y Körtum es la de mayor longitud de onda, mientras que la 1L_b aparece, por lo general, como un hombro de la anterior en la zona de las altas frecuencias. Así sucede p. ej. en algunas oxinas sustituidas cuyos espectros hemos hecho empleando distintos disolventes (alcohol etílico, cloroformo y piridina). Estas dos bandas parecen corresponder a tránsitos $\pi \rightarrow \pi^*$ (1) y presentan coeficientes de extinción de 2500-3000.

Al disolver la 8-hidroxiquinoleína en KOH 0.1 N el espectro del anión 8-hidroxiquinoleinato presenta, según estos autores, las mismas bandas 1L_a y 1L_b , pero su posición sufre un desplazamiento batocrómico de 3100 cm.^{-1} para la primera y de 1600 cm.^{-1} para la segunda. De forma algo parecida, al disolver la oxina en ClO_4H 1 N, el catión 8-hidroxiquinoleína presenta también dos bandas, las ya citadas 1L_a y 1L_b , cuyas posiciones han sufrido un desplazamiento batocrómico de 1600 cm.^{-1} en la banda 1L_a y otro prácticamente nulo ($\approx 100 \text{ cm.}^{-1}$) en la 1L_b .

El comportamiento es comparable en el caso de las oxinas sustituidas y, así, del trabajo de Morpurgo y Williams (1), tablas 1 y 2, se deduce que la banda 1L_a sufre un desplazamiento batocrómico promedio de unos 3400 cm.^{-1} al pasar éstas de la forma neutra a la aniónica, mientras que la banda 1L_b se desplaza en el mismo sentido 1300 cm.^{-1} . Por su parte, en el paso OxH a OxH_2^+ , la banda 1L_a sufre, en promedio, un desplazamiento batocrómico de 3500 cm.^{-1} , mientras que la 1L_b prácticamente no se mueve**.

Cuando las "oxinas" forman complejos con iones metálicos, de transición o no, la estructura del espectro en la zona de 20000 a 35000 cm.^{-1} no cambia de aspecto respecto a la que tiene en el caso de los "oxinatos" de los metales alcalinos. Así, en el caso de los complejos de Mn^{2+} , Co^{2+} , Ni^{2+} , Cu^{2+} y Zn^{2+} aparecen tres bandas cuyas posiciones se dan en la tabla VII para los compuestos octaédricos de fórmula $\text{Me} [\text{8-hidroxiquinoleinato}]_2 \cdot 2 \text{ piridina}$.

TABLA VII

Espectro UV de algunos oxinatos complejos de fórmula $\text{Me} [\text{8-hidroxiquinoleinato}]_2 \cdot 2 \text{ piridina}$.

| Complejo | BANDAS cm.^{-1} | | |
|------------------|--------------------------|-------|--------|
| | 1 | 2 | Hombro |
| Mn^{2+} | 24570 | 28820 | — |
| Co^{2+} | 24690 | 29150 | 30300 |
| Ni^{2+} | 24390 | 28900 | 29850 |
| Cu^{2+} | 24450 | 29410 | — |
| Zn^{2+} | 24870 | 29240 | 30490 |

Morpurgo y Williams identifican la banda 1 con la 1L_a y la 2 con la 1L_b y no dicen nada sobre el hombro de altas frecuencias de esta banda 1L_b .

De acuerdo con estas identificaciones, la formación de los complejos anteriores ha desplazado batocrómicamente la banda 1L_a 7660 cm.^{-1} en promedio sobre la frecuencia que presenta esta misma banda en la 8-hidroxiquinoleína neutra disuelta en piridina.

Un comportamiento comparable manifiestan los complejos de Ni^{2+} y Co^{2+} octaédricos formados por los distintos derivados de la oxina estudiados en este trabajo pues, como

** Para hallar estos desplazamientos promedio hemos tomado las frecuencias que dan Morpurgo y Williams para las 5 metil, 5 halogen y 5.7 dihalogen 8-hidroxiquinoleínas y como promedio de la banda 1L_b en las «oxinas» neutras hemos tomado la frecuencia promedio de las bandas 1L_a . El hecho de que estos autores no den valores para la transición L_b en las «oxinas» neutras parece que permite esta aproximación.

puede verse en las tablas IV, V y VI, aparecen las tres bandas citadas en todos los casos.

En principio podría pensarse que los espectros de los "oxinatos" complejos de iones metálicos son distintos que los de las sales potásicas de las "oxinas" toda vez que, los autores citados (1), no nombran el hombro de altas frecuencias que aparece en la banda 1L_b . Sin embargo, observando los espectros que dan Perkampus y Körtum en su trabajo (3) se halla que, tanto en disolución ácida como en alcalina, la banda que denominan 1L_b en la 8-hidroxiquinoleína presenta un hombro en la zona de las altas frecuencias. Este hombro, de intensidad siempre un poco menor que la de la banda principal, está desplazado unos 500 a 1000 cm^{-1} , valor muy parecido al que separa entre sí las frecuencias de las bandas 1L_a y 1L_b asignadas para la 8-hidroquinoleína en estado neutro.

A la vista de este hecho se podría pensar que tanto en las "oxinas" en las formas C_x^- y $\text{O}_x \text{H}_2^+$ como en las "oxinas" en los complejos $\text{O}_x \text{Me}$ (en cierto sentido, mezcla de "oxina" catiónica y aniónica) la asignación de la banda intensa de menor frecuencia al tránsito 1L_a pudiera no ser totalmente correcta, ya que se desplaza demasiado para ser un tránsito $\pi \rightarrow \pi^*$. Se podría establecer la hipótesis de que la banda 1L_b , asignada por todos estos autores en los espectros UV de los cationes y aniones de las "oxinas", pudiera ser más bien una suma (banda principal y hombro) que contendría las dos bandas $\pi \rightarrow \pi^*$, 1L_a y 1L_b , y que la banda de mayor longitud de onda, asignada como 1L_a , sería una nueva transición de transferencia de carga, $n \rightarrow \pi^*$, desde el oxígeno fenólico disociado al anillo heterocíclico o desde el oxígeno del grupo $-\text{OH}$ al anillo protonado. Si esto fuera así, se podría decir que, tanto la banda 1L_a como la 1L_b (ambas $\pi \rightarrow \pi^*$) se mueven poco como consecuencia de la disociación de las "oxinas". Esta hipótesis parece bastante razonable en principio, pues a quien afectará fundamentalmente la disociación ácida será al grupo $-\text{OH}$ y la básica lo hará al N del heterociclo.

Esta propuesta está ya prevista en el trabajo de Morpurgo y Williams pues afirman: "que se puede demostrar empíricamente que la transición llamada 1L_a en el "oxinato" posee un fuerte carácter de transferencia de carga del $-\text{O}^-$ al anillo heterocíclico" pues "el efecto del pH demuestra esto".

Discriminar si la banda de largas longitudes de onda que aparece en el anión O_x^- es la 1L_a con fuerte carácter $n \rightarrow \pi^*$ o si es una nueva banda $n \rightarrow \pi^*$ pura, parece muy difícil en principio, pero la propuesta de que sólo se debe a un tránsito fenolato-anillo tiene ciertas ventajas a priori, ya que una transición mezcla de $\pi \rightarrow \pi^*$ y $n \rightarrow \pi^*$ debe de ser más difícil de relacionar con el grado de enlace π oxígeno-ión metálico que si es una transición $n \rightarrow \pi^*$ pura.

En los complejos que forman las "oxinas" con Ni^{2+} y dos moléculas de agua o de alcohol (tabla V de este trabajo) el aspecto general de los espectros ultravioleta en la zona de 24000 a 30000 cm^{-1} es análogo al discutido hasta ahora, apareciendo una banda intensa hacia 25000 cm^{-1} que puede asignarse al tránsito $n \rightarrow \pi^*$ (1L_a con fuerte componente de transferencia de carga) y dos bandas muy próximas, tránsitos $\pi \rightarrow \pi^*$ (banda 1L_b). Esta forma general corrobora todo lo discutido.

Cuando algunas "oxinas" forman con el Ni^{2+} complejos diamagnéticos planocuadrados Morpurgo y Williams (1) parece que indican que la banda intensa que aparece en sus espectros en disolución en benceno hacia 20000 cm^{-1} , es la misma transición 1L_a que se ha desplazado hacia frecuencias menores como consecuencia de la fuerte interacción π existente en estos complejos entre los ligandos y el ión central. Sin embargo, tal asignación tampoco es absolutamente indiscutible.

De los espectros en estado sólido (tabla III de este trabajo) de los "oxinatos" complejos de Ni^{2+} diamagnéticos, se deduce la existencia de una banda de absorción muy intensa en 20000 cm^{-1} , banda que, sin duda, es la que asignan Morpurgo y Williams en las disoluciones bencénicas. Ahora bien, dada la pequeña solubilidad en benceno de los complejos diamagnéticos de Ni^{2+} que hemos preparado, nos ha sido imposible establecer la forma general del espectro ultravioleta de estos compuestos en este disolvente y, por ello, constatar que no existe en ellos otra transición en 25000 cm^{-1} , así como determinar su intensidad a fin de comprobar que es análoga a la de la banda $n \rightarrow \pi^*$ que aparece

en los complejos octaédricos del mismo catión. En este sentido, decir que es la misma banda 1L_a desplazada hacia frecuencias menores, como hacen Morpurgo y Williams, es sólo una hipótesis.

Resumiendo todos los hechos apuntados y aceptando la hipótesis de Morpurgo y Williams acerca de la asignación de la banda 1L_a en complejos diamagnéticos de Ni^{2+} , resultan para estos tránsitos el conjunto de frecuencias que se resume en la tabla VIII.

TABLA VIII

Transiciones de alta intensidad para "oxinas" y "oxinatos" metálicos en la zona de 20000 a 35000 cm^{-1} .

| Compuesto | Transiciones cm^{-1} | | |
|---|--------------------------------|----------------------------------|----------|
| | ${}^1L_a(n \rightarrow \pi^*)$ | ${}^1L_b(\pi \rightarrow \pi^*)$ | Δ |
| ** "Oxinas" neutras | 30570 | 31500 | 1500 |
| ** "Oxinatos" alcalinos de fórmula K ["oxinato"] | 27220 | 29260 | 2030 |
| ** Cationes OxH_2^+ | 26980 | 31310 | 4330 |
| *** "Oxinatos" octaédricos de Ni^{2+} de fórmula Ni ["oxinato"] ₂ .2 alcohol | 24970 | 28900 | 3930 |
| *** "Oxinatos" octaédricos de Ni^{2+} de fórmula Ni ["oxinato"] ₂ .2 piridina | 23930 | 28300 | 4370 |
| # "Oxinatos" octaédricos de Co^{2+} de fórmula Co ["oxinato"] ₂ .2 piridina | 24220 | 28580 | 4360 |
| # "Oxinatos" octaédricos de Cu^{2+} de fórmula Cu ["oxinato"] ₂ .2 piridina | 23830 | 28880 | 5050 |
| # "Oxinatos" planocuadrados de Ni^{2+} de fórmula Ni ["oxinato"] ₂ | 20960 | 28910 | 7450 |
| "Oxinatos" octaédricos de Zn^{2+} y Mn^{2+} de fórmula general | 24870 | 29240 | 4370 |
| Me [8 - hidroxiquinoleinato] ₂ . | | | |
| 2 piridina | 24570 | 28820 | 4250 |

** Se dan los $\bar{\nu}$ promedios para las «oxinas» estudiadas en este trabajo tomando los valores de frecuencias existentes en las tablas 1, 2 y 3 de (1).

*** Se dan las $\bar{\nu}$ promedio de los complejos formados por todas las «oxinas» reseñadas en las tablas IV, V y VI de este trabajo.

Se dan las $\bar{\nu}$ promedio para los complejos formados por 8-hidroxiquinoleína, 5 metil, 5 halogen y 5,7 dihalogen 8-hidroxiquinoleína.

Se dan las $\bar{\nu}$ promedio para los complejos de Ni^{2+} formados por 5,7 dihalogen «oxinas». (Tabla 7 del trabajo de Morpurgo y Williams (1)).

De las frecuencias reseñadas en la tabla VIII y de todas las hipótesis discutidas anteriormente se deducen los hechos siguientes:

"La banda 1L_a se desplaza hacia frecuencias menores según la siguiente secuencia:

"Oxinas" neutras \rightarrow anión "oxinato" \rightarrow catión "oxinio" \rightarrow "Oxinatos" octaédricos de fórmula Ni ["oxinato"]₂.2 alcohol \rightarrow "oxinatos" octaédricos de Co^{2+} , Ni^{2+} , Zn^{2+} , Mn^{2+} y Cu^{2+} de fórmula Me ["oxinato"]₂.2 piridina \rightarrow "Oxinatos" de Ni^{2+} planocuadrados.

La banda 1L_b se desplaza también hacia frecuencias menores, pero mucho menos que la 1L_a .

Con ellos, y teniendo en cuenta que la creciente interacción π ligando-metal conduce a complejos planocuadrados en el caso de los "oxinatos" de Ni^{2+} , resulta claro el criterio de Morpurgo y Williams (1) de que "podemos usar las separaciones entre las transiciones 1L_a y 1L_b de (tales) complejos como medidas groseras del enlace π entre cationes y el anillo". Así, resulta que en el caso de complejos de Co^{2+} , Ni^{2+} y Cu^{2+} de fórmula $\text{Me} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina la secuencia de creciente enlace π metal-ligando será:

$\text{Co} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina \simeq $\text{Ni} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina \ll $\text{Cu} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina.

Secuencia que está de acuerdo sólo en parte con los hechos empíricos, pues el ión cobre forma fácilmente complejos planocuadrados con casi todas las oxinas estudiadas*, el níquel divalente lo hace fácilmente con algunas y el cobalto (II) no lo hace con ninguna de ellas.

Los datos de la tabla VIII ponen de manifiesto sin embargo un hecho que está aún más en desacuerdo con esta interpretación. En los complejos de Ni (II) de fórmula $\text{Ni} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ isopropílico, la separación $\Delta ({}^1L_b - {}^1L_a)$ indica que, en ellos, la interacción π ligando-ión metálico debe de ser menor que en los de fórmula $\text{Ni} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina. Ahora bien, la idea de Gray (4) sobre formación de complejos planocuadrados con Ni^{2+} está en contra de ello, pues debido al menor poder donador del alcohol isopropílico como ligando si se le compara con la piridina, el catión $\text{Ni} [\text{piridina}]_2^{2+}$ debe de tener menos disponible al orbital $4p_z$ del Ni^{2+} para formar un "sistema π en anillo" con las dos moléculas de "oxinato" colocadas en un plano que el catión $\text{Ni} [\text{isopropílico}]_2^{2+}$. Ello significa que la $\Delta ({}^1L_b - {}^1L_a)$ en los complejos $\text{Ni} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ isopropílico debiera de ser mayor que la correspondiente de los $\text{Ni} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina.

Si a pesar de estos desacuerdos se pretende llevar este criterio a sus últimas consecuencias dentro de una serie de complejos metálicos octaédricos como la de los compuestos de fórmula $\text{Ni} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina, con el fin de ordenar las "oxinas" en un orden creciente de enlaces π ión metálico-ligando, se encuentra que falla totalmente.

Dentro de las oxinas estudiadas hemos hecho en (2) una clasificación:

"oxinas" que nunca forman complejos planocuadrados con Ni^{2+} ; tipo a)

"oxinas" que forman complejos planocuadrados con Ni^{2+} ; tipos b) y c)

De acuerdo con el criterio antes enunciado los "oxinatos" complejos de Ni^{2+} formados por las "oxinas" tipos b) y c) debieran presentar un $\Delta ({}^1L_b - {}^1L_a)$ mayor que el de los correspondientes complejos formados por las oxinas tipo a). Sin embargo, sucede totalmente al revés.

Si se observan los valores de las frecuencias de las bandas 1L_a y 1L_b que aparecen en la tabla IV se encuentra que los complejos formados por 5 halogen, 5 metil y 5 acetamido 8-hidroxiquinoleína, presentan un $\Delta ({}^1L_b - {}^1L_a)$ del orden de 4610 cm^{-1} , el de la 8-hidroxiquinoleína lo presenta de 4510 cm^{-1} y los de las 5,7-dihalogen oxinas lo presentan de 4170 cm^{-1} es decir, según estos valores, las monohalogen oxinas debieran de ser mejores formadores de complejos planocuadrados de níquel que las 5,7-dihalogen oxinas.

En el caso de los complejos de Cu^{2+} de fórmula $\text{Cu} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina, los datos de la tabla 4 del trabajo de Morpurgo y Williams (1) conducen a un resultado análogo. La Δ promedio para los complejos formados por 5 halogen y 5 metil oxina es de 5220 cm^{-1} (entre 5120 y 5380 cm^{-1}), para el formado por la 8-hidroxiquinoleína es de 4900 cm^{-1} y para los complejos de las 5,7-dihalogen oxinas es de 4640 cm^{-1} en promedio (entre 4420 y 4780 cm^{-1}).

Un hecho análogo se produce en los complejos de Co^{2+} , pues allí (tabla VI) la $\Delta ({}^1L_b - {}^1L_a)$ es de 4930 cm^{-1} para los compuestos de fórmula $\text{Co} [{}^{\text{oxinato}}]_2 \cdot 2$ piridina formados por 5-halogen oxinas, de 4460 cm^{-1} para el formado por la 8-hidroxiquinoleína y de 4150 cm^{-1} para los formados por 5,7-dihalogen 8-hidroxiquinoleínas.

* Resultados a publicar próximamente.

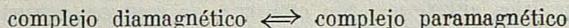
Estos resultados, que son significativos ya que la imprecisión en la determinación de las posiciones de los máximos de las bandas 1L_b y 1L_a es de 150 cm.^{-1} , invalidan seriamente la utilidad de las Δ (${}^1L_b - {}^1L_a$) en los complejos como criterio clasificador del grado de enlace π "oxina"-ión metálico.

Sea a causa del carácter mezclado (tránsito $\pi \rightarrow \pi^*$ y $n \rightarrow \pi^*$) de la banda de 24000 cm.^{-1} , sea que esta transición refleje alguna interacción todavía no conocida entre el ión central y los ligandos o sea por que la banda de 20000 cm.^{-1} que aparece en los complejos planocuadrados de Ni^{2+} no corresponde a un tránsito 1L_a con mezcla de $n \rightarrow \pi^*$, sino que se deba a una transferencia de carga $M \rightarrow \pi^*$, en cuyo caso la hipótesis del efecto batocrómico de la interacción π ligando-ión metálico tendría menos validez, lo cierto es que las inconsecuencias entre resultados experimentales e hipótesis de trabajo revelan la poca utilidad de los espectros ultravioletas de los "oxinatos" complejos de cationes de transición para juzgar sobre la tendencia que presentan cada una de las "oxinas" aquí empleadas para formar complejos planocuadrados con el ión Ni^{2+} .

En el trabajo de Morpurgo y Williams que comentamos se utiliza también otro criterio para juzgar sobre la tendencia de las "oxinas" hacia la formación de complejos planocuadrados con Ni^{2+} .

En los espectros de los "oxinatos" de níquel disueltos en benceno se encuentra, en algunos de ellos, que existe, además de una banda hacia 20000 cm.^{-1} ($480 \text{ m}\mu$) un hombro en 25000 cm.^{-1} . Los autores opinan que estas bandas corresponden a las dos transiciones 1L_a de las dos formas: planocuada y octaédrica que pueden presentar los complejos y, con base en esta hipótesis, juzgan el "grado de tendencia hacia el complejo planocuaadrado" en función del valor del cociente entre las densidades ópticas de ambas bandas, según los datos que presentan en la tabla 7 de su trabajo.

En principio, suponiendo que en benceno existe una especie de equilibrio

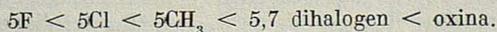


el criterio apuntado parece correcto si se acepta que las dos bandas comparadas tienen coeficientes de extinción de igual valor sin embargo, dada la pequeña solubilidad en benceno de los "oxinatos" de níquel, no nos ha sido posible comprobar esta hipótesis.

Antes de seguir parece conveniente hacer una precisión.

Curiosamente, observando la tabla 7 del trabajo de Morpurgo y Williams (1), se encuentra que en los complejos formados por dihalogen derivados de la oxina no aparecen bandas 1L_a correspondientes a la forma paramagnética, lo que está de acuerdo con su carácter de fáciles formadores de complejos diamagnéticos mientras que, en los otros casos, aparecen las dos transiciones de transferencia de carga (20000 y 25000 cm.^{-1}), indicando la presencia de ambos tipos de compuesto (diamagnético y paramagnético) en el medio benecénico. Ahora bien, también hay que decir que no hemos sido capaces por ebullición con benceno de obtener complejos diamagnéticos de los "oxinatos" de níquel formados por oxinas de la clase a), lo que nos lleva a dudar de que, verdaderamente, el tránsito 1L_a de unos 20000 cm.^{-1} observado en estos casos, pudiera deberse a una forma diamagnética del compuesto. En estado sólido, los "oxinatos" anhidros de los ligandos de la clase a) son paramagnéticos y presumiblemente polímeros (5) lo que determina su casi nula solubilidad en benceno y nos lleva a ser cautos en la asignación de esta transición.

A pesar de estas inconsecuencias de base, utilizando el criterio de Morpurgo y Williams últimamente descrito, aparece para alguna de las "oxinas" que hemos estudiado la siguiente secuencia de "facilidad con que las diferentes oxinas sustituidas inducen un cambio a un estado de bajo spin en el catión Ni (II)":



En esta secuencia, si bien es cierto que las monohalogen y dihalogen oxinas están en el orden adecuado, también es cierto que la 8-hidroxiquinoleína está totalmente fuera de lugar, pues no es posible obtener un complejo diamagnético de fórmula Ni [8-hidroxiqui-

noleinato]₂. Al menos no es posible obtenerlo ni por deshidratación térmica ni por ebullición con benceno del complejo Ni [8-hidroxiquinoleinato]₂.2H₂O, por lo que es muy dudoso que pueda producirse. Resulta pues patente que la oxina, cuyo poder formador de complejos planocuatros con el Ni (II) es, según la secuencia anterior, mucho mayor que el de la 5,7 dióxido 8-hidroxiquinoleína, no presenta en la práctica esta tendencia. No queda pues otro remedio que aceptar que, en forma análoga a lo que sucede con la banda ¹L_a de los "oxinatos" complejos octaédricos, la razón de intensidades propuesta por Morpurgo y Williams y ahora citada, tampoco guarda una relación directa con el grado de enlace π ligando-metal en los complejos de Ni (II) y, por tanto, concluir que, sea cual sea la causa, no es posible utilizar las bandas que presentan los oxinatos complejos de Ni²⁺ y Co²⁺ en la zona del ultravioleta para deducir el grado de enlace π presente entre el ligando y el ión central.

b) TRÁNSITOS d-d E INTENSIDAD DEL CAMPO DE LOS LIGANDOS DE LAS "OXINAS"

Todos los espectros que hemos obtenido pueden darnos cierta información, al menos global, del campo de los ligandos que produce la agrupación quelante de la "oxina".

Los complejos que hemos preparado y observado en estado sólido son pseudooctaédricos, pues la capacidad complejante de los oxígenos y nitrógenos de las "oxinas" es distinta que la de los oxígenos de las moléculas de agua. Por ello, los espectros d-d de estos compuestos no pueden responder al esquema clásico de las tres bandas simétricas que presentan los complejos verdaderamente octaédricos de Ni²⁺ y Co²⁺.

No existe ninguna determinación estructural por rayos X del Ni [8-hidroxiquinoleinato]₂.2H₂O ni del Co [8-hidroxiquinoleinato]₂.2H₂O por lo que, con seguridad, no es posible decir la disposición que adoptarán alrededor de los iones metálicos los seis ligandos que forman los complejos anteriores. Sin embargo, se conocen estructuras de los compuestos Zn [8-hidroxiquinoleinato]₂.2H₂O (6) y Cu [8-hidroxiquinoleinato]₂ (7) en los que las dos moléculas de oxina en posición trans ocupan prácticamente un plano alrededor de los iones metálicos, y, en el caso del oxinato hidratado de cinc, las dos moléculas de agua completan los seis vértices del octaedro, igualmente en posición trans entre sí. En el caso de los complejos de Ni²⁺ y Co²⁺ que hemos estudiado, la simetría es pues D_{2h} en el plano de las "oxinas" y las dos moléculas de agua en las posiciones apicales del octaedro.

Es posible sentar la hipótesis de que los complejos de Ni²⁺ y Co²⁺ tienen la misma simetría que el de Zn²⁺ y Merritt (8) indica a este respecto que estos complejos son isomorfos.

De las distancias Zn²⁺-ligandos (6) se deduce que el octaedro que forman las dos oxinas y las dos moléculas de agua alrededor del ión central es en realidad una bipirámide de base rectangular. En el caso del ión Ni²⁺, dado que, además del enlace σ en el plano entre las oxinas y el ión Ni²⁺ existirá un cierto enlace π, es de esperar que la bipirámide rectangular sea todavía más deformada que en el caso del oxinato de cinc, por lo que la octaedricidad de su complejo aún será más pequeña.

El único tratamiento teórico para el Ni²⁺ en complejos de simetría D_{2h} perturbada en el eje Z es el que hace G. Maki (9) mediante la aplicación de la teoría del campo cristalino, suponiendo parejas de momentos dipolares diferentes en los vértices de la bipirámide. El esquema de niveles que corresponde a su tratamiento permite cinco transiciones triplete-triplete.

Observando los espectros en estado sólido de los "oxinatos" de níquel se encuentran dos bandas perfectamente diferenciadas en 9090 y aproximadamente 11500 cm.⁻¹, que corresponderían a los tránsitos ³B_{3g} → ³A_g y ³B_{3g} → ³B_{1g} del diagrama 39 de Maki (9). La banda de 17000 cm.⁻¹ debiera corresponder al tránsito ³B_{3g} → ³B_{2g} y dado que en 24000 cm.⁻¹ aparece la banda ¹L_a de gran intensidad ya no es posible determinar las posiciones de las dos restantes transiciones d-d que, según el esquema de niveles teórico, debieran estar hacia 24000 cm.⁻¹. Así pues, los datos experimentales responden cualita-

tativamente a los tránsitos d-d esperados sin embargo, no es posible con los valores de las frecuencias halladas para los oxinatos de níquel preparados determinar el valor de los momentos dipolares responsables del campo cristalino en cada caso ya que, dadas las aproximaciones de la teoría, las diferencias observadas en las posiciones de las transiciones análogas no son significativas.

Hay además otra circunstancia que colabora a hacer poco útiles los espectros d-d de los complejos que nos ocupan para determinar con fines comparativos los valores de los momentos dipolares correspondientes a las "oxinas". Esta circunstancia es el hecho de que los espectros los hemos tenido que obtener en estado sólido y, como es bien sabido, en este caso, los campos que ven los iones centrales pueden estar fuertemente modificados por fuerzas reticulares y hasta, en este caso particular, por puentes de hidrógeno entre las moléculas de agua y los oxígenos fenólicos. En este sentido, la separación entre los tránsitos de 9000 y 12000 cm^{-1} , que de corresponder a bandas aparecidas en espectros en disolución, nos permitirían juzgar mejor la simetría de los complejos, no es de mucho valor en los complejos en estado sólido. Lo cierto es que, aún en disolución, el valor del campo cristalino es una propiedad promedio y, como tal, muy poco fina para diferenciar entre sí complejos formados por moléculas muy semejantes como son las de los compuestos con níquel de los derivados de la 8-hidroxiquinoleína.

Una aproximación más grosera que la de Maki es la de suponer que el campo cristalino es de simetría octaédrica deformada en la dirección del eje Z y aplicarle a los tránsitos obtenidos el esquema teórico de Ballhausen (10).

Existe cierto apoyo para esta última interpretación si se considera que en el Zn [8-hidroxiquinoleinato] $_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ las distancias: oxígeno del oxinato \leftrightarrow níquel y nitrógeno quinoleínico \leftrightarrow níquel son prácticamente iguales.

Con esta aproximación, dado que los momentos dipolares en el plano serán mayores que en la dirección del eje Z, la transición d-d que nos refleja el valor del momento dipolar que ve el ión Ni^{2+} en el plano XY es la de 11500 cm^{-1} *. Tomando los valores medios de las tres transiciones d-d existentes en los complejos exacoordinados tipo a) de la tabla I resulta, para $R = 2.00 \text{ \AA}$, un μ en el plano de 2.08 unidades atómicas valor que coincide, en su orden de magnitud, con el del stien (2.26 u.a.), compuesto que con Ni^{2+} forma complejos octaédricos o planocuadrados según el anión (11).

Una aproximación aún más grosera que la anterior sería suponer que los complejos de níquel de fórmula $\text{Ni} [\text{"oxinato"}]_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ son octaédricos y simétricos y aplicar los diagramas de Tanabe y Sugano al cálculo de los valores de $10 Dq$ y B .

En el caso de los complejos de Ni^{2+} citados, suponiendo la primera transición d-d (${}^3T_{1g}(\text{F}) \leftarrow {}^3A_{2g}(\text{F})$) en 9130 cm^{-1} y la segunda (${}^3T_{2g}(\text{F}) \leftarrow {}^3A_{2g}(\text{F})$) en 16700 cm^{-1} , resultan

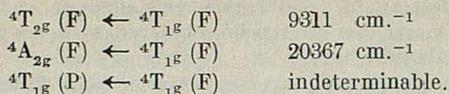
$$10 Dq = 9100 \text{ cm}^{-1} \quad \text{y} \quad B = 1230 \text{ cm}^{-1}$$

Sin embargo, el valor de B obtenido, revela que la suposición hecha de que el complejo es octaédrico no corresponde a la realidad, pues es bien sabido (12) que la formación de un complejo rebaja normalmente el valor del parámetro B de Racah respecto al que posee en el ión libre ($B = 1040 \text{ cm}^{-1}$). Como esto no sucede en este caso se puede sospechar con certeza que el esquema no es válido por falta de simetría octaédrica en los complejos tratados.

En el caso de los complejos de Co^{2+} (Tabla VI) la aplicación de los diagramas de Tanabe y Sugano conduce a $Dq/B=1.06$, con lo que $10 Dq=10580 \text{ cm}^{-1}$ y $B=998 \text{ cm}^{-1}$. Este último valor es menor que el de $B = 1120 \text{ cm}^{-1}$ correspondiente al Co^{2+} libre, y revela que la aproximación octaédrica es más permisible en el caso de los "oxinatos" de Co^{2+} que en el caso de los de Ni^{2+} . Ello parece correcto si se piensa que el Co^{2+} no forma complejos planocuadrados con ninguna de las "oxinas" empleadas. Para el cálculo de $10 Dq$ y B en el caso de los "oxinatos" de Co^{2+} de fórmula $\text{Co} [\text{"oxinato"}]_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ se han

* Los motivos para esta asignación se describen en la Tesis Doctoral de L. Pueyo. — Universidad de Zaragoza.

empleado los promedios de los tránsitos d-d que se recogen en la Tabla II y que se han asignado en la forma.



En los complejos de fórmula Ni ["oxinato"]₂.2 piridina, cuyos espectros se pueden obtener en disolución, hemos llevado a cabo medidas de transferencia en disoluciones concentradas (7000 γ/cm.³) con el fin de comprobar si el esquema de bandas que aparece responde al caso de un complejo de gran simetría octaédrica o de baja simetría octaédrica. La fig. 4 muestra el espectro del complejo Ni [8-hidroxiquinoleinato]₂.2 piridina, en el que la forma simétrica de las bandas de 10750 cm.⁻¹ y 17760 cm.⁻¹, así como el hecho de que sólo aparezcan estos tránsitos, indica que el complejo es octaédrico y simétrico.

Aplicando a este espectro el esquema de Ballhausen (10) resulta un momento dipolar para uno cualquiera de los seis ligandos de 2,15 unidades atómicas. Como es de esperar que el momento dipolar del oxinato (de su nitrógeno quinoleínico y de su oxígeno fenolato) no varíe mucho al formar parte de la molécula Ni [8-hidroxiquinoleinato]₂.2H₂O, este resultado confirma la asignación hecha antes en el caso de los espectros por reflexión, asignación que revela que la banda que pone más de manifiesto la de los ligandos en el plano XY es la de 11500 cm.⁻¹.

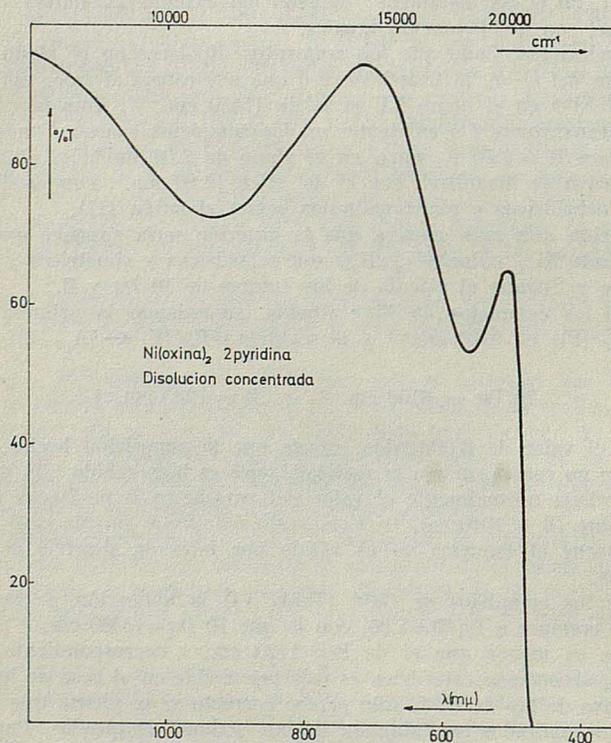


FIG. 4

El método de cálculo de Ballhausen, que proporciona valores de momentos dipolares de los ligandos, tiene el inconveniente de que no suministra información encuadrable en un esquema tan simple como el de los valores de $10 Dq$ obtenidos de los diagramas de Tanabe y Sugano, sin embargo está más cercano a la estructura real de nuestros complejos ya que el parámetro $10 Dq$ es sólo válido si los compuestos son de simetría muy octaédrica, cosa que no sucede en los oxinatos hidratados aquí estudiados.

Aplicando el esquema de Tanabe y Sugano a los complejos de fórmula Ni ["oxinato"]₂.2 piridina, cuyos tránsitos d-d se dan en la tabla 6 del trabajo de Morpurgo y Williams (1), resulta para ${}^3T_{2g}(F) \leftarrow {}^3A_{2g}(F) = 11080 \text{ cm}^{-1}$ y ${}^3T_{1g}(F) \leftarrow {}^3A_{2g}(F) = 18040 \text{ cm}^{-1}$ un $10 Dq = 11090 \text{ cm}^{-1}$ y un B de 842 cm^{-1} , valores de acuerdo con lo esperado respecto a la reducción en el complejo del parámetro B de Racah. Este hecho confirma las suposiciones anteriores sobre la asignación de los tránsitos d-d en los complejos de níquel formados por "oxinas" tipo a) y su falta de simetría octaédrica. La tercera transición ${}^3T_{1g}(P) \leftarrow {}^3A_{2g}(F)$ debiera aparecer en 30040 cm^{-1} , o sea en una zona enmascarada por las transiciones $\pi \rightarrow \pi^*$ de las oxinas.

Los complejos octaédricos de Ni (II) formados con "oxinas" tipo b) presentan un espectro por reflexión cuya forma y tipo de bandas no responde a ningún esquema conocido. El hecho de ser complejos paramagnéticos con mayor campo cristalino en el plano XY y más débil perturbación axial en el eje Z debe de producir ese tipo de espectro. Posiblemente, el mejor esquema teórico sería de el Ballhausen y Liehr (13) correspondiente a complejos de Ni (II) débilmente tetragonales. Ahora bien, como los propios autores indican, "su tratamiento simplificado no predecirá correctamente los espectros de absorción de (estos) complejos" por lo que poca información puede obtenerse de la aplicación de las conclusiones de su tratamiento teórico a los datos de la Tabla I.

El esquema de niveles hallado por Ballhausen y Liehr para los complejos de níquel (II) paramagnéticos con distorsión tetragonal débil predice un espectro d-d de tres bandas.

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_1 &= E_1({}^1A_{1g}) - E({}^3B_{1g}) = 3(4F_2 + 15F_4) - [(4F_2 + 15F_4)^2 + \Delta_1^2]^{\frac{1}{2}} \\ \bar{\nu}_2 &= E_2({}^1B_{1g}) - E({}^3B_{1g}) = 2(4F_2 + 15F_4) \simeq 11000 \text{ cm}^{-1} \\ \bar{\nu}_3 &= E_2({}^1A_{1g}) - E({}^3B_{1g}) = 3(4F_2 + 15F_4) + [(4F_2 + 15F_4)^2 + \Delta_1^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Estas tres transiciones son de espín prohibido por lo que debieran presentar poca intensidad.

En la Tabla I aparecen para estos compuestos cuatro transiciones débiles en 9200, 10800, 16540 y 20450 cm^{-1} . De ellas, las tres primeras son especialmente débiles. Curiosamente, la segunda transición está en la zona que le correspondería según Ballhausen y Liehr. Con ella, y la de 9200 cm^{-1} resulta para Δ_1 (como parámetro típico del campo tetragonal) un valor de 4460 cm^{-1} , lo que está de acuerdo con el hecho de que los complejos sean paramagnéticos. Con este último valor $\bar{\nu}_3$ debiera de estar hacia 23000 cm^{-1} . El valor de 20450 cm^{-1} de la banda cuarta de la tabla I está próximo al hallado aunque no concuerda totalmente con el teórico. Queda entonces por asignar la banda de 16540 cm^{-1} .

Otra forma de enfocar el problema sería suponer que, dada la facilidad con que pierden el agua los complejos de níquel formados por "oxinas" tipo b) y el tiempo que se tarda en hacer el espectro por reflexión, la banda de 20450 cm^{-1} corresponde a la transición $n \rightarrow \pi^*$ existente en los complejos diamagnéticos. Un pequeño tanto por ciento de la forma diamagnética presente en la paramagnética podría dar origen a esta absorción aparentemente débil, si se considera que el coeficiente de extinción de estas bandas de transferencia de carga es del orden de 10^4 . Si esto fuera así, las transiciones d-d observadas serían las tres primeras de 9000, 10800 y 16400 cm^{-1} , transiciones que se corresponden muy bien con las existentes en los complejos formados por "oxinas" tipo a). El hecho de que sus frecuencias sean algo más bajas que las que aparecen en estos últi-

* Valores medios.

mos complejos podría achacarse a las distintas fuerzas reticulares deformantes presentes en cada caso.

Finalmente, los complejos diamagnéticos de fórmula Ni ["oxinato"]₂ formados por las 5,7 dihalogen-oxinas (tabla III) presentan una sola banda cuya posición promedio está en 16860 cm.⁻¹.

Según Ballhausen y Liehr (13) "debiéramos esperar que los complejos planos y diamagnéticos de níquel (II) presenten una, o posiblemente dos bandas del campo cristalino ($\epsilon \approx 10^2$), la segunda enmascarada probablemente por bandas muy fuertes del ligando". Los hechos observados responden a esta suposición.

Estos autores, para el caso de distorsión tetragonal fuerte en la que el estado fundamental sea un singlete (diamagnetismo) obtienen tres transiciones posibles.

$$\bar{\nu}_1 = E(^3A_{2g}) - E_1(^1A_{1g}) = -3(35F_4) + [(35F_4)^2 + \Delta_2^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{\nu}_2 = E(^1A_{2g}) - E_1(^1A_{1g}) = -(35F_4) + [(35F_4)^2 + \Delta_2^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{\nu}_3 = E_2(^1A_{1g}) - E_1(^1A_{1g}) = 2[(35F_4)^2 + \Delta_2^2]^{\frac{1}{2}}$$

De ellas, la $\bar{\nu}_1$ será muy débil debido a su carácter de transición prohibida singlete-triplete. De acuerdo con ello, la banda de 16800 cm.⁻¹ debe de corresponder a la transición $\bar{\nu}_2$. Si se considera que $F_2 = 10F_4 = 1000$ cm.⁻¹ (13), se obtiene para Δ_2 un valor de 20050 cm.⁻¹. Con él resulta para $\bar{\nu}_1$ una frecuencia de 9860 cm.⁻¹, o sea que debiera aparecer una banda en esta zona. En los espectros por reflexión realizados sobre los "oxinatos" de Ni²⁺ diamagnéticos no se observa absorción alguna en estas frecuencias pero, como hemos dicho, ello puede deberse al carácter de transición prohibida de la banda $\bar{\nu}_1$. Por otro lado, con el Δ_2 obtenido, $\bar{\nu}_3$ debe de aparecer en 40720 cm.⁻¹, zona totalmente inobservable debido a las fuertes transiciones $\pi \rightarrow \pi^*$ de las "oxinas" en dicha zona.

El valor obtenido de Δ_2 como parámetro característico del campo planocuadrado producido por las "oxinas" no es absurdo pues se compara bien con el producido por la estilbendiamina ($\Delta_2 = 26000$ cm.⁻¹) (11), quelante que con el Ni²⁺ produce complejos diamagnéticos y tetracoordinados. Posiblemente, dado que las dihalogen oxinas diamagnéticas se disuelven bien en piridina pasando a formar complejos octaédricos, el valor hallado de Δ_2 sea un poco demasiado elevado, sin embargo, no existiendo otra opción en la asignación de las bandas d-d observadas en los "8-hidroxiquinoleinatos" diamagnéticos debemos aceptarlo como bueno en principio.

El estudio teórico de Ballhausen y Liehr (13) no es el único aplicable a los complejos plano-cuadrados sin embargo es el más simple. Una asignación según el esquema de O. M. (4) aunque posiblemente más correcta, no es aplicable a nuestros espectros pues al ser insolubles los complejos en disolventes inertes (benceno, dioxano, etc.) no podemos saber las densidades ópticas de las bandas que aparecen y, en consecuencia, asignar como tales las que sean d-d y las que sean Ni²⁺ $\rightarrow \pi^*$.

Toda esta discusión revela sin embargo un hecho: el de que las deducciones de la teoría del campo cristalino, si bien responden cualitativa y cuantitativamente al caso de complejos con campos de los ligandos bastante diferentes entre sí, es poco aplicable como herramienta para ordenar o diferenciar cuantitativamente entre complejos formados por moléculas muy próximas en sus propiedades. Es decir, los cambios de tendencia hacia la planaridad (diamagnetismo) de los "oxinatos" complejos de Ni²⁺ no los revelan ni los espectros visibles (transiciones d-d) ni los ultravioletas (transiciones $n \rightarrow \pi^*$), al menos mientras los espectros se observen, como nos hemos visto obligados, en estado sólido.

Agradecimientos

L. A. O. y A. R. agradecen a la Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación la concesión de sendas becas para la realización de parte de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

- (1) MORPURGO, L. y WILLIAMS, R. J. P. — J. Chem. Soc. Inorg., Phys. Theoret. (1966), 1, 73-6.
- (2) GÓMEZ BELTRÁN, F., ORO, L. A. y PISA, J. — Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza. — Serie 2.^a, Tomo XVI, núm. 2, 413-27 (1971).
- (3) PERKAMPUS, H. H. y KÖRTUM, K. — Z. Analyt. chem. — 190, 111-26 (1962).
- (4) GRAY, H. B. — *Transition Metal Chemistry*. Vol. 1. — Ed. R. L. Carlin. Dekker. N. Y. (1965).
- (5) LINDOY, L. F., LIVINGSTONE, S. E., LOCKHYER, T. N. — Aust. J. Chem. 19, 1391-1400 (1966).
- (6) PALENIK, G. J. — Acta Cryst. — 17, 696, (1964).
- (7) PALENIK, G. J. — Acta Cryst. — 17, 687, (1964).
- (8) MERRIT, L. L. — Anal. Chem. — 25, 718, (1953).
- (9) MAKI, G. — *The Energy Levels of Transition Elements of 3d²⁽⁺⁾ Type: Spectra, Magnetic Properties, Geometry and Bonding in Complexes*. — Tesis Doctoral, Univ. California (1957).
- (10) BALLHAUSEN, C. J. — Dan. Mat. Fys. Medd. — 29 (8), 3, (1965).
- (11) PUEYO, L. — *Comunicación*, XV Bienal Soc. Esp. Fis. y Quím. (1971).
- (12) FIGGIS, B. N. — *Introduction to Ligand Fields*.—Interscience Publishers N. Y. (1966).
- (13) BALLHAUSEN, C. J. y LIEHR, A. — J. Am. Chem. Soc. — 81, 538, (1959).