

REVISTA
DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES
DE
ZARAGOZA

SERIE 2.^a

TOMO XXVIII

Núm. 4



1973

INDICE DE MATERIAS

R. R. V. — <i>Necrología del Ilmo. Sr. D. JOSÉ ESTEBAN CIRI- QUIAN.</i>	
J. F. SÁENZ. — <i>El functor Tor y la sucesión espectral de Eilenberg-Moore</i>	381
R. CID. — <i>Métodos analíticos de resolución del problema de cálculo de órbitas de satélites artificiales</i>	413
V. CAMARENA. — <i>Sobre las integrales primeras del movi- miento en optimización de trayectorias</i>	427
M. CALVO. — <i>Movimiento alrededor de los puntos equilá- teros de libración en el problema restringido elíptico</i> ...	439
J. CASAS y J. APORTA. — <i>Estudio de la esfericidad de la onda Extrasial en un sistema óptico (I)</i>	449
M. A. REBOLLEDO y E. BERNABÉU. — <i>Medida de la vida media del estado $7^2S_{1/2}$ del Talio por la técnica de cruzamien- tos de niveles a campo nulo</i>	467
R. USÓN y F. IRANZO. — <i>Preparación y estudio de los Penta- fluorofenilalanos y sus compuestos de adición con éter etílico y trimetilamina</i>	481

NECROLOGIA

ILMO. SR. D. JOSÉ ESTEVAN CIRIQUIAN

En el corriente año esta Academia ha visto con dolor la desaparición de uno de sus más distinguidos miembros numerarios, el Ilmo. Sr. D. José Estevan Ciriquian, fallecido en Zaragoza el 24 de julio de 1973. Sus cualidades intelectuales fueron destacadísimas, su actividad docente extraordinariamente meritoria y su bondad humana digna de un caballero cristiano ejemplar como él fue en su vida. Intentemos demostrar en el breve espacio de esta nota necrológica, que tales afirmaciones no se hacen sin fundamento.

Había nacido Estevan Ciriquian en Zaragoza, en 1899, mas pronto dejó esta ciudad, y otras, según las necesidades profesionales de su padre, que era Farmacéutico militar. Ingresó por oposición en la Academia de Ingenieros del Ejército de Guadalajara en 1912, como alumno de menor edad allí ingresado nunca, por cuya circunstancia y la gran brillantez de sus estudios fue distinguido en ella con la concesión de un sable de honor. Teniente de Ingenieros en 1918 prestó servicios de guerra en Africa. Luego, en 1925, alcanzó el grado de Diplomado de Estado Mayor, con la habitual perfección en los correspondientes cursos.

Cursó en la Universidad Central los estudios de Licenciado en Ciencias Exactas en los años de 1922 a 1926, con Matrícula de Honor en todas las asignaturas de la carrera menos en dos, «Química» y «Astronomía», en las que obtuvo Sobresaliente.

Destinado a Zaragoza comenzó desde 1928, cada vez más intensa, su actividad en la enseñanza privada de las Matemáticas. Al tiempo, cursó como alumno libre en la Universidad de Zaragoza la Licenciatura en Derecho durante los cursos de 1926 a 1929, con excelente expediente escolar. Si bien no ejerció la abogacía, no supo negarse a ser durante los dos cursos siguientes Ayudante de clases prácticas en la misma Facultad donde se había licenciado.

En 1931 pasó a la situación de retirado en el Ejército y se orientó decididamente en su profesión de matemático. Ingresó por oposición con el número uno en 1935 en el cuerpo de Catedráticos del Instituto en la plaza de Soria.

En 1936 se incorpora al Movimiento Nacional, pasando en Zaragoza a organizar el grupo de transmisiones, resultando herido en 1938. Aunque esta nota no esté dedicada a glosar su excelente actividad militar, es oportuno dejar constancia de ella con la relación de las principales condecoraciones que la esmaltan: Dos cruces de primera clase del Mérito Militar del distintivo rojo (1920-1921). — Medalla Militar de Marruecos con pasadores Melilla (1920) y Tetuán (1927). — Medalla de la Paz de Marruecos (1929). — Cruz de 1.ª clase del Mérito Militar con distintivo bicolor (1926). — Dos cruces de guerra (1939). — Cruz de 1.ª clase del Mérito Militar con distintivo rojo (1939). — Medalla de la Campaña de Liberación (1939). — Medalla de sufrimientos por la Patria (1941). — Cruz de la Real y Militar Orden de San Hermenegildo (1943). — Placa de la Real y Militar Orden de San Hermenegildo (1945).

Terminada la guerra pasa a ser catedrático de Matemáticas del Instituto Goya de Zaragoza, destino que desempeña hasta su jubilación reglamentaria en 1969.

De extraordinaria importancia y oportunidad fueron sus servicios en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza como Profesor Adjunto de Análisis Matemático a partir del año 1940, contribuyendo eficazmente a resolver una situación académica delicada, en un período en que la coyuntural escasez de profesorado llegó a poner en peligro la misma supervivencia de la Sección de Matemáticas en Zaragoza. Obtenida esta plaza por oposición, las sucesivas prórrogas reglamentarias le mantuvieron en esta Facultad hasta 1962 en que cesó a voluntad propia. Entonces fue nombrado Adjunto honorario de la misma, por la correspondiente Junta.

Ingresó en 1950 por oposición, también con el número uno, en la Escuela de Peritos Industriales de Zaragoza, donde le alcanza la jubilación como catedrático de «Cálculo y Métodos Matemáticos».

Esta agotadora labor docente fue realizada con una puntualidad, exactitud y dedicación absolutas de la que muchas generaciones de alumnos son testigos y llegó a comprometer seriamente su salud, pero nunca limitó su esfuerzo. Esta inquietud por la perfección de la enseñanza le llevó de modo natural a formar parte de numerosas comisiones consultivas y de investigación sobre la Metodología de la Matemática que a partir de 1940 se fueron concibiendo, iniciadas tal vez por el malogrado don Pedro Puig Adam, tan prematuramente desaparecido, y continuadas hasta hoy, cada vez, afortunadamente, con más medios y más eco en la política educativa nacional.

Ingresó por elección como miembro numerario de la Academia de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza, en fecha 24 de octubre de 1945, asignándosele la medalla núm. 4 en la que le había antecedido otro aragonés ilustre, don Manuel Lorenzo Pardo. En esta Corporación ha sido Tesorero y Vicepresidente de la Sección de Exactas.

Reconociendo sus méritos profesionales le fue concedida la Encomienda de la Orden de Alfonso X el Sabio en el año 1953. Asimismo, en 1970 fue designado como Colegiado Distinguido del Distrito de Zaragoza por el Colegio Oficial de Licenciado y Doctores, a cuya entidad pertenecía desde 1931.

Hombre de acción directa y eficaz no dejó por ello de fijar algunas veces en memorias y publicaciones sus ideas profesionales. Citemos la excelente serie de sus textos para el Bachillerato (en colaboración con Benigno Baratech) y las siguientes publicaciones:

Planteo del Problema de la Movilización Industrial. — Memorial de Ingenieros del Ejército, 1927 (páginas 88 a 94).

Movilización Industrial Obrera. Estadística Militar y Personal requisado. Censo Militar y Obrero y Especialista. Zaragoza, imprenta «Goya», 1929 (páginas 56 a 84).

Algunas representaciones geométricas usadas en Química. Revista Universidad. Zaragoza, 1936 (24 páginas).

Métodos diversos para la determinación de funciones de onda en los sistemas atómicos. Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, 1974 (45 páginas). Premiado por la Facultad de Ciencias de Zaragoza.

Algunos aspectos de la Enseñanza Media en relación con la Investigación. Discurso. Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, 1951 (15 páginas).

Universidades Laborales. Discurso en la Academia de Ciencias en la apertura del curso 1956-57 (15 páginas).

Contestación al Discurso del General don Santiago Amado en su recepción en la Academia de Ciencias. Zaragoza, 1964 (17 páginas).

Digamos finalmente, que también en la vida familiar y en la amistad fue Estevan Ciriquian un modelo inolvidable. Seguramente, fue en su misión de cabeza de una familia numerosa y unánime, donde pudo cumplir y llenar sus aspiraciones más profundas este hombre notable, cuyo recuerdo hemos evocado. Descanse en la paz del Señor.

R. R. V.

«EL FUNCTOR TOR Y LA SUCESSION ESPECTRAL DE EILENBERG - MOORE»

P O R

J. F. SAENZ

Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Ciencias.
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

In this work unify the techniques given by Baum and Smith ([3, a], [13]) for the computation of the functor Tor in the category of the algebras over a field and we obtain for those purposes the following results:

Theor. 4.7 (chapter III). Let A, B and C be differential graded algebras and f, g maps of algebras

$$C \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} B$$

where, g is onto and Ker g is a Borel ideal in A.

Then $\text{Tor}_A(B, C) \cong E[u_1, \dots, u_r] \otimes \text{Tor}_\Gamma(K, C)$ where the homological degree of u_i is -1 , and Γ is a polynomial algebra generated by the non-superfluous elements of Ker g through f.

The theor. 4.4. (Ch. III) develops the case when A is a polynomial algebra, computing then $\text{Tor}_A(K, C)$.

$$\text{Tor}_A(K, C) \cong E[v_1, \dots, v_r] \otimes \text{Tor}_\Gamma(K, C).$$

By the theor. 4.10 (Ch. III), given K-algebras A, B and a map of algebras $f: A \rightarrow B$ one determines the functor Tor, when Ker f is a Borel ideal in A, and $(f\overline{A})$ is a Borel ideal in B.

Using those results as background and also from the Eilenberg-Moore spectral sequence ([6]), the first part of the memory being devoted to the development of the latter in the category of our interest, we obtain certain results about cohomology of fibres spaces on symmetric spaces, corresponding to the classifying diagrams:

$$\begin{array}{ccc} G/H & = & G/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \rightarrow & BH \\ \downarrow & f & \downarrow \rho \\ B & \rightarrow & BG \end{array} \quad (1) \quad \begin{array}{ccc} G & = & G \\ \downarrow \uparrow & & \\ E & \rightarrow & EG \\ \downarrow & f & \downarrow \\ B & \rightarrow & BG \end{array} \quad (2)$$

where B is a symmetric space, G a compact connected Lie group, and H a closed subgroup of G.

Theor. 4.1 (Ch. IV). In the diagram (1), if ρ^* is onto and Ker ρ^* is a Borel ideal. Then

$H^*(E, |R) = E[u_1, \dots, u_r] \otimes \text{Tor}_{R[x_1, \dots, x_s]}(H^*(B, |R), |R)$ where $\text{degr. } u_i = (-1, \text{degr. } x_{s+i})$; $r = n - s$; and x_i are the generators of $(\text{Ker } \rho^*)$.

The theor. 4.4. reaches similar result to 4.1, through interchanging the roles of f^* and g^* .

As to diagram (2):

Theor. 4.7 (Ch. IV). In the conditions of diagram (2) $H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_r] \otimes \text{Tor}_{R[x_1, \dots, x_s]}(H^*(B), |R)$; where $r = n - s$; $\text{degr. } u_i = (-1, \text{degr. } x_{s+i})$, and x_i are the generators of $H^*(BG)$.

Theor. 4.9. If f^* is onto and $(\text{Ker } f^*)$ is a Borel ideal in (2), then $H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_m]$.

Finally we give further applications and some examples.

Introducción

El presente trabajo, se orienta hacia el estudio de la cohomología de espacios fibrados, utilizando la sucesión espectral de Eilenberg-Moore [6], como técnica de trabajo, en la categoría de las álgebras diferenciales graduadas y en la de los módulos sobre un álgebra.

A partir de los trabajos de Baum y L. Smith ([3], a), b)) se estudian los casos en que la citada sucesión espectral tiene mayor aplicación. Se consigue unificar los métodos utilizados por estos autores en el cálculo del functor Tor, lo que permite obtener teoremas que generalizan los correspondientes de dichos autores simultáneamente. Se aplican estos teoremas generalizados, al caso de fibraciones sobre espacios simétricos que proporcionan nuevos resultados para el cálculo de la cohomología de los citados espacios fibrados, correspondientes a los diagramas clasificados:

$$\begin{array}{ccc} G/H & = & G/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \rightarrow & BH \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \rightarrow & BG \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & = & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \rightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \rightarrow & BG \end{array}$$

donde B se considera espacio simétrico.

Finaliza el trabajo con la discusión de la posible aplicación de los teoremas obtenidos a diversos tipos de fibraciones particulares cuyo espacio no es simétrico.

Es de señalar que, asimismo se analizan detalladamente las aplicaciones obtenidas por Smith y Baum, poniendo en relación sus resultados con lo obtenido por nosotros.

En el capítulo primero desarrollamos el álgebra homológica necesaria para definir el functor Tor y construir la sucesión espectral de Eilenberg-Moore en las categorías de módulos sobre un álgebra (§ 1, § 2) y de los comódulos sobre una coálgebra (§ 3) con un desarrollo paralelo. Especial atención nos merece el caso en que el anillo de coeficientes en un cuerpo pues entonces se pueden calcular los primeros términos de la filtración asociada (§ 4). Los párrafos § 1 y § 2 los hemos desarrollado paralelamente al trabajo de Eilenberg-Moore, pero en distinta categoría.

En el capítulo segundo hemos suministrado a los espacios del tipo de homotopía de los CW-complejos numerables con homología de tipo finito, las estructuras algebraicas desarrolladas en el capítulo I, llegando al teorema de Eilenberg-Moore sobre la homología de una fibración. En el § 1 les hemos dotado de una estructura de módulo sobre un álgebra, en el § 2 de comódulos sobre una coálgebra y en el § 3 hemos estudiado en la geometría el caso en que el anillo de coeficientes es un cuerpo.

El capítulo tercero, está dedicado a dar técnicas de cálculo para el functor Tor, a partir de los complejos de Koszul (§ 1) y de las sucesiones especiales e ideales de Borel

(§ 2 y § 3). Se obtienen generalizaciones de los teoremas dados por Baum y Smith a este respecto (III.4.4, III.4.7), los que resultan como corolarios (§ 4).

En el capítulo cuarto, después de recordar en el § 1 una serie de resultados conocidos, se estudian los casos en que $E_2 = E_\infty$ en la sucesión espectral de Eilenberg-Moore y se dan con detalle los teoremas de Baum y Smith (§ 2 y § 3), para presentar (§ 4) con la ayuda de los teoremas obtenidos en el Cap. III, algunas aplicaciones al caso de fibrados sobre espacios simétricos determinando así su cohomología (4.1, 4.4, 4.7, 4.9). En el § 5 se inicia el análisis de la determinación del álgebra de cohomología de particulares fibraciones sobre espacios no simétricos.

En la presente publicación se han omitido las demostraciones de parte de los lemas y proposiciones, que pueden encontrarse en el memoria original. De algunos párrafos sólo se ofrece lo más interesante por no influir decisivamente en el desarrollo de la memoria y poderse encontrar en los trabajos que se indican o en la memoria original.

I. Álgebra homológica

En este capítulo desarrollamos algunos conceptos del álgebra homológica en las categorías de los módulos sobre un álgebra y de los comódulos sobre una coalgebra, hasta definir la sucesión espectral de Eilenberg-Moore asociada al functor Tor.

§ 1. K-módulos diferencial graduados

Sea K un anillo conmutativo con elemento unidad.

Consideramos la categoría de los K -módulos diferencial graduados (DGK) y en ella damos las siguientes definiciones:

Definición 1.1. — Diremos que una sucesión de K -módulos $DG^{(1)}$ y homomorfismos entre ellos, es *propriadamente exacta* (o exacta en DGK) cuando sean exactas las sucesiones de K -módulos

$$\begin{aligned} M' &\rightarrow M \rightarrow M'' \\ Z(M') &\rightarrow Z(M) \rightarrow Z(M'') \\ H(M') &\rightarrow H(M) \rightarrow H(M'') \end{aligned}$$

(donde $Z(M)$ indica el K -módulo de los ciclos de M).

Definición 1.2. — Diremos que un K -módulo DG , P , es *propriadamente proyectivo* (o proyectivo en DGK), si P , $Z(P)$, $H(P)$ son proyectivos como módulos.

§ 2. Módulos sobre un álgebra

Definición 2.1. — Una K -álgebra diferencial graduada es un objeto $\wedge$ de DGK, tal que $\wedge^q = 0$ para $q < 0$, provisto de dos morfismos de módulos DG

$$\varphi: \wedge \otimes \wedge \rightarrow \wedge \quad \eta: K \rightarrow \wedge$$

llamados producto y unidad tales que cumplen

- 1) son de grado cero
- 2) $\varphi \cdot (\eta \otimes 1_\wedge) = 1_\wedge = \varphi \cdot (1_\wedge \otimes \eta)$
- 3) $\varphi \cdot (\varphi \otimes 1_\wedge) = \varphi \cdot (1_\wedge \otimes \varphi)$

Diremos que el álgebra $\wedge$ es *conexa* si η establece un isomorfismo $K \cong \wedge^0 \subset \wedge$.

(1) DG: abreviatura de diferencial graduados.

Dadas las álgebras $DG \wedge_1, \wedge_2$, un morfismo f de álgebras DG , será un homomorfismo de K -módulos DG tal que

- 1) $\text{grad } f = 0$.
- 2) $f \cdot \eta_1 = \eta_2$.
- 3) $f \cdot \varphi_1 = \varphi_2 \cdot (f \otimes f)$ siendo $f: \wedge_1 \rightarrow \wedge_2$ y φ_i, η_i los morfismos producto y unidad de $\wedge_i$ ($i = 1, 2$).

Definición 2.2. — Si $\wedge$ es una K -álgebra DG , llamaremos $\wedge$ -módulo por la derecha a un objeto M , de DGK , provisto de un morfismo DG, φ_M , llamado producto

$$\varphi_M: M \otimes \wedge \rightarrow M$$

tal que cumple: 1) $\text{grad } \varphi_M = 0$; 2) $\varphi_M(1 \otimes \eta) = 1_M$; 3) $\varphi_M(\varphi_M \otimes 1_\wedge) = \varphi_M(1_M \otimes \varphi)$

A la categoría de los $\wedge$ -módulos por la derecha con sus correspondientes morfismos, la denotaremos $DG \wedge$ y por $\wedge DG$ denotaremos la análoga de los $\wedge$ -módulos por la izquierda.

Definición 2.3. — Sean A objeto de $DG \wedge$ y B de $\wedge DG$ definimos el producto tensor sobre $\wedge, A \otimes_\wedge B$, como el objeto de DGK , conúcleo del morfismo $\varphi_A \otimes 1_B - 1_A \otimes \varphi_B$.

Definimos ahora el *functor extensión* que a un objeto A de la categoría DGK , hace corresponder el objeto $A \otimes_\wedge$ de la categoría $DG \wedge$ con morfismo de estructura dado por $1_A \otimes \varphi$.

Proposición 2.4. — Sea A un $\wedge$ -módulo y $\wedge \otimes B$ un $\wedge$ -módulo extensión; entonces $A \otimes_\wedge (\wedge \otimes B) \cong A \otimes B$.

El isomorfismo viene determinado por $\varphi_A \otimes 1$; la demostración se realiza viendo que $\text{Ker}(\varphi_A \otimes 1_B) = \text{Im } \varphi_A \otimes 1_{\wedge \otimes B} - 1_A \otimes \varphi_{\wedge \otimes B}$

Definición 2.5. — Diremos que una sucesión de $\wedge$ -módulos es *exacta en* $DG \wedge$ ($\wedge$ -exacta), si la sucesión subyacente de K -módulos DG es propiamente exacta.

Definición 2.6. — Diremos que P , objeto de $DG \wedge$, es *proyectivo en* $DG \wedge$ ($\wedge$ -proyectivo) si para cada $\wedge$ -epimorfismo $g: M \rightarrow N$, todo $\wedge$ -morfismo $f: P \rightarrow N$, puede elevarse a un $\wedge$ -morfismo $\bar{f}: P \rightarrow M$ tal que $f = g \cdot \bar{f}$.

Proposición 2.7. — Si P es un K -módulo propiamente proyectivo, entonces $P \otimes_\wedge$ es un $\wedge$ -módulo proyectivo en $DG \wedge$.

Además todo $\wedge$ -módulo proyectivo en $DG \wedge$ es sumando directo de uno de este tipo.

Proposición 2.8. — Dado un $\wedge$ -módulo M , existe un $\wedge$ -módulo, $\wedge$ -proyectivo, tal que se aplica en M mediante un epimorfismo en $DG \wedge$.

La demostración es constructiva y se basa en la proposición análoga en DKG aplicando luego el functor extensión.

A continuación definimos complejo de $\wedge$ -módulos, complejo proyectivo y resolución proyectiva del modo habitual (Def. 2.9 y Def. 2.10); observando que todo complejo X en $DG \wedge$ (o $\wedge DG$) será bigraduado y dispondremos de dos diferenciales

$$X = \{X^{n,p}\} \quad \begin{aligned} d_i: X^{n,p} &\rightarrow X^{n,p+1} \text{ (diferencial interior)} \\ d_e: X^{n,p} &\rightarrow X^{n+1,p} \text{ (diferencial exterior)} \end{aligned}$$

Proposición 2.11. — Si $X \rightarrow M$ es una resolución proyectiva de M en $DG \wedge$; entonces $H_i(X) \rightarrow H(M)$ es una resolución proyectiva de $H(M)$ como $H(\wedge)$ -módulo.

(H_i indica homología respecto de la diferencial d_i).

La demostración se hace considerando $X = Y \otimes_\wedge$ con Y complejo proyectivo en DKG .

Lema 2.12. — Sea $\wedge$ un álgebra DG , sea M objeto de $\wedge DG$ y P objeto de $DG \wedge$, $\wedge$ -proyectivo. Entonces

$$H(P \otimes_\wedge M) \cong H(P) \otimes_{H(\wedge)} H(M)$$

Proposición 2.13. — Dado B , objeto de $DG \wedge$, existe una resolución proyectiva de B (que llamaremos canónica).

La demostración consiste en aplicar 2.8 reiteradamente, para construir la resolución.

Proposición 2.14. — Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow X^n & \rightarrow & \dots & \rightarrow & X^{-1} & \rightarrow & X^0 \rightarrow B \rightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow f \\ \rightarrow X^n & \rightarrow & \dots & \rightarrow & X'^{-1} & \rightarrow & X'^0 \rightarrow B' \rightarrow 0 \end{array}$$

Siendo $f: B \rightarrow B'$ un morfismo de $\wedge$ -módulos; $X \rightarrow B$ y $X' \rightarrow B'$ resoluciones proyectivas de B y B' respectivamente; entonces

- existe una aplicación $\tilde{f} = \{f^n\}$ $f^n: X^n \rightarrow X'^n$ que eleva f . $\tilde{f}: X \rightarrow X'$
- si $\tilde{g}: X \rightarrow X'$ es otra aplicación que eleva f , existe una homotopía entre $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$. La demostración es clásica en álgebra homológica.

Proposición 2.15. — Sean A y B $\wedge$ -módulos por la derecha y por la izquierda respectivamente y X, Y resoluciones $\wedge$ -proyectivas de A y B . Entonces

$$H(D(X) \otimes_{\wedge} B) \cong H(D(X) \otimes_{\wedge} D(Y)) = H(A \otimes_{\wedge} D(Y))$$

($D(X)$ nos indica la graduación por grado total).

Basta demostrar que $H(M \otimes_{\wedge} D(Y)) \cong H(M \otimes_{\wedge} B)$ siendo M $\wedge$ -módulo proyectivo de la forma $P \otimes \wedge$ (con P propiamente proyectivo).

Definición 2.16. — Con la notación de 2.15, llamamos $\text{Tor}_{\wedge}(A, B)$ al K -módulo graduado

$$H(D(X) \otimes_{\wedge} B) \cong H(D(X) \otimes_{\wedge} D(Y)) \cong H(A \otimes_{\wedge} D(Y)).$$

Observemos que $\text{Tor}_{\wedge}^{p,q}(A, B) = H^{p,q}(L)$ siendo L el complejo $L^{p,q} = (X^{(p)} \otimes_{\wedge} B)^q$ con $d: L^{p,q} \rightarrow L^{p+1,q}$.

A continuación demostramos el carácter functorial de $\text{Tor}_{\wedge}(A, B)$ (functor de dos o tres variables según tomemos $\wedge$ fijo o no) y como consecuencia de ello que no depende para nada de las resoluciones de A y B elegidas, es decir que está, bien definido.

Teorema 2.17. — Sea $\wedge$ un álgebra diferencial, A objeto de $DG \wedge$ y B de $\wedge DG$; entonces existe una sucesión espectral $\{E_r, d_r\}$ tal que

- $E_r \Rightarrow \text{Tor}_{\wedge}(A, B)$
- $E_2 = \text{Tor}_{H(\wedge)}(H(A), H(B))$

La sucesión espectral es la asociada a la filtración de $D(X) \otimes_{\wedge} B$ mediante el grado interno en $D(X)$; siendo X una resolución proyectiva de A .

Además E_r tiene carácter functorial.

Corolario 2.18. — Sean $\wedge, \Gamma$ álgebras diferenciales, N objeto de $DG \wedge$, M objeto de $\wedge DG$, A de $DG \Gamma$ y B de ΓDG , y las aplicaciones semilineales $h: \wedge \rightarrow \Gamma$; $g: N \rightarrow A$; $f: M \rightarrow B$; si f, g y h inducen isomorfismos en homología, entonces

$$\text{Tor}_h(g, f): \text{Tor}_{\wedge}(N, M) \rightarrow \text{Tor}_{\Gamma}(A, B)$$

es un isomorfismo.

Demostración: Basta ver que $\text{Tor}_{h*}(g^*, f^*): E_2 \rightarrow E'_2$ es un isomorfismo.

Definimos asimismo un producto

$$\text{Tor}_{\wedge}(A, B) \otimes \text{Tor}_{\wedge}(A, B) \rightarrow \text{Tor}_{\wedge \otimes \wedge}(A \otimes A, B \otimes B)$$

que cuando $\wedge, A, B$ son álgebras conmutativas, y la acción de $\wedge$ sobre A, B viene dada

por $f_1: \wedge \rightarrow A$; $f_2: \wedge \rightarrow B$ entonces $\text{Tor}_\wedge(A, B)$ es un álgebra cuyo producto viene dado por

$$\text{Tor}_\wedge(A, B) \otimes \text{Tor}_\wedge(A, B) \rightarrow \text{Tor}_{\wedge \otimes \wedge}(A \otimes A, B \otimes B) \xrightarrow{\text{Tor}_\varphi(\varphi_1, \varphi_2)} \text{Tor}_\wedge(A, B)$$

§ 3. Comódulos sobre una coálgebra

En este apartado se lleva un desarrollo paralelo al de § 2 pero en la categoría de los comódulos sobre una coálgebra, por lo que sólo citaremos las cuestiones más interesantes (a este respecto ver [6] o [18]).

Definición 3.1. — Una coálgebra Δ sobre K , es un objeto de DGK tal que $\Delta_q = 0$ para $q < 0$; provisto de dos morfismos ε, Φ llamados counidad y coproducto.

$$\varepsilon: \Delta \rightarrow K \quad \Phi: \Delta \rightarrow \Delta \otimes \Delta$$

tales que:

$$1) (\varepsilon \otimes 1_\Delta) \Phi = 1_\Delta = (1_\Delta \otimes \varepsilon) \Phi$$

$$2) (\Phi \otimes 1_\Delta) \Phi = (1_\Delta \otimes \Phi) \Phi$$

Definición 3.2. — Un Δ -comódulo por la derecha será un objeto A de DGK provisto de un morfismo de estructura (coproducto)

$$\Phi_A: A \rightarrow A \otimes \Delta$$

tal que

$$1) (1_A \otimes \varepsilon) \Phi_A = 1_A$$

$$2) (\Phi_A \otimes 1_\Delta) \Phi_A = (1_A \otimes \Phi) \Phi_A$$

A la categoría de los Δ -comódulos por la derecha la denotaremos DG/Δ y a la análoga de los Δ -comódulos por la izquierda Δ/DG .

Definición 3.4. — Sean A objeto de DG/Δ y B de Δ/DG , definimos el *producto cotensor* sobre Δ , $A \square_\Delta B$, como el núcleo del morfismo en DGK $\Phi_A \otimes 1_B - 1_A \otimes \Phi_B$.

Mediante desarrollo análogo al de § 2, llegamos a la definición:

Definición 3.16. — Sea A objeto de DG/Δ , B objeto de Δ/DG y X, Y resoluciones inyectivas de A y B respectivamente. Entonces llamamos $\text{Cotor}^\Delta(A, B)$ al K -módulo graduado

$$H(X \square_\Delta B) \cong H(X \square_\Delta Y) = H(A \square_\Delta Y)$$

y demostramos que Cotor es un functor y que no depende para nada de la elección de las resoluciones. A continuación construimos una filtración cuya sucesión espectral asociada cumple

Teorema 3.25. — Si $\Delta, H(\Delta), B, H(B)$ son módulos planos, disponemos de una sucesión espectral

$$E^r \Rightarrow \text{Cotor}^\Delta(A, B) \text{ con } E_{p,q}^2(A, \Delta, B) = \text{Cotor}_{p,q}^{H(\Delta)}(H(A), H(B))$$

§ 4. Caso en que K es un cuerpo conmutativo

Consideramos en el caso de módulos sobre un álgebra, el caso en que el anillo K es un campo, y veremos que en este caso podemos calcular los primeros términos de la filtración asociada a la sucesión espectral de Eilenberg-Moore.

Sea $\{F^p\}$ la filtración asociada a la sucesión espectral de 2.17, que converge a $\text{Tor}_\wedge(N, M)$.

La aplicación $\eta: K \rightarrow \wedge$ induce la aplicación

$$\nu: \text{Tor}_K(N, M) = H(N) \otimes H(M) \rightarrow \text{Tor}_\wedge(N, M)$$

Proposición 4.1. — $F^0 \text{Tor}_\wedge(N, M) = \text{im } \nu$ cuando K es un cuerpo.

Pero ν se hace cero para los elementos de la forma $xa \otimes y - x \otimes ay$ con $x \in H(N)$, $y \in H(M)$, $a \in H(\wedge)$; luego inducirá

$$\nu': H(N) \otimes_{H(\wedge)} H(M) \rightarrow \text{Tor}_\wedge(N, M)$$

Proposición 4.2. — $F^0 \text{Tor}_\wedge(N, M) = \text{im } \nu'$ cuando K es un cuerpo.

Calcularemos ahora el término siguiente de la filtración $F^{-1} \text{Tor}_\wedge(N, M)$. Para ello introducimos la construcción «bar», mediante la cual obtendremos una resolución proyectiva de un $\wedge$ -módulo, M . Consideraremos que $\wedge$ es álgebra conexas y simplemente conexa

$$(\wedge^0 \cong K; \wedge^1 = 0).$$

Tras una serie de lemas y proposiciones (ver [14], [18]) construimos dada

$$\begin{array}{ccc} \Phi: H(N) \otimes \overline{H(\wedge)}^{(1)} \otimes H(M) & \longrightarrow & H(N) \otimes H(M) \\ y \otimes a \otimes x & \rightsquigarrow & ya \otimes x - y \otimes ax \end{array}$$

la aplicación

$$T: \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Tor}_{H(\wedge)}^{-1,*}(H(N), H(M))$$

del siguiente modo. Sea $v = \sum y_i \otimes a_i \otimes x_i \in \text{Ker } \Phi$ este v nos determina un elemento de grado -1 , $w = \sum y_i [a_i] x_i$ en el complejo $X = H(N) \otimes_{H(\wedge)} B(H(\wedge), H(M))$ formado mediante la construcción «bar» ($B(H(\wedge), H(M))$); además por pertenecer v a $\text{Ker } \Phi$, w es un ciclo, luego determina una clase $(\dot{w}) \in \text{Tor}_{H(\wedge)}^{-1,*}(H(N), H(M))$; pues bien, definimos T de modo que $T(v) = (\dot{w})$.

Lema 4.9. — T es un epimorfismo de espacios vectoriales.

A partir de T definimos

$$T^\#: \text{Ker } \Phi \rightarrow F^{-1} \text{Tor}_\wedge(N, M)$$

del siguiente modo: Sea $v = \sum y_i \otimes a_i \otimes x_i \in \text{Ker } \Phi$, le asociamos el elemento $z = \sum \bar{y}_i [\bar{a}_i] \bar{x}_i - u \in F^{-1} X$ (con $X = (N \otimes_\wedge B(\wedge, M))$) donde $\bar{y}_i$ es un representante en N de la clase $y_i \in H(N)$ y análogamente $\bar{a}_i$ y $\bar{x}_i$, mientras que u es un elemento de $N \otimes M$ cuya diferencial $du = \sum \bar{y}_i \bar{a}_i \otimes \bar{x}_i - \bar{y}_i \otimes \bar{a}_i \bar{x}_i$ (u existe puesto que esta diferencia ha de ser un borde); luego z es un ciclo y podemos definir la relación aditiva

$$\begin{array}{ccc} T^\#: H(N) \otimes \overline{H(\wedge)} \otimes H(M) & \longrightarrow & F^{-1} \text{Tor}_\wedge(N, M) \\ \sum y_i \otimes a_i \otimes x_i & \rightsquigarrow & (z) \end{array}$$

o bien el homomorfismo de espacios vectoriales

$$T^\#: \text{Ker } \Phi \rightarrow F^{-1} \text{Tor}_\wedge(N, M) / F^0 \text{Tor}_\wedge(N, M) = E_\infty^{-1,*}$$

(1) Dada una K -álgebra A indicamos con $\bar{A}$ el ideal de los elementos de grado mayor que cero.

Proposición 4.10. — Los elementos $\{T^*(v) \mid v \in \text{Ker } \Phi\}$ generan $F^{-1} \text{Tor}_\wedge(N, M)$ como espacio vectorial (módulo F^0).

La demostración se realiza teniendo en cuenta la construcción de la sucesión espectral y sus propiedades ([11]) para ver que $T^*(v) = T(v)_\infty$.

II. Aplicación a la geometría

En el presente trabajo entendemos por espacio topológico, un espacio topológico con el tipo de homotopía de un CW-complejo numerable con homología de tipo finito; por fibrado, un fibrado de Serre; y consideraremos espacios con punto base.

§ 1. La estructura de $\wedge$ -módulo en la geometría

Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E' & \cong & B' \times_{B'} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ & & \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

en el que (E, π, B) es un fibrado y (E', π', B') , el fibrado inducido sobre B' mediante f ($E' \cong B' \times_{B'} E = \{(x, y) \in B' \times E \mid f(x) = \pi(y)\}$) y supongamos que B es simplemente conexo.

Entonces, dado un espacio topológico A , le asociamos su correspondiente complejo simplicial $S(A)$, y a éste el K -módulo DG de las cadenas normalizadas con coeficientes en K , $C_*(A)$ (los vértices en el punto base). Con lo que a un espacio topológico le hemos asociado un objeto de DGK.

Frecuentemente llamaremos A , indistintamente, al espacio topológico y al K -módulo de las cadenas normalizadas. Definimos

$$C^*(A) = \text{Hom}(C_*(A), K) \text{ y } H^*(A) = H^*(A, K)$$

$C^*(A)$ es una K -álgebra diferencial graduada conexa, cuyo producto viene dado por el producto «cup».

$$\begin{array}{ccc} \varphi : C^*(A) \otimes C^*(A) & \xrightarrow{\text{«cup»}} & C^*(A) \\ (c^p \otimes d^q) & \xrightarrow{\quad} & c^p \cup d^q \end{array}$$

de modo que

$$\langle c^p \cup d^q, (x_1, \dots, x_{p+q}) \rangle = \langle c^p, (x_1, \dots, x_p) \rangle \langle d^q, (x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \rangle$$

El morfismo unidad será el isomorfismo

$$C^0(A) \cong \text{Hom}(C_0(A), K) = \text{Hom}(K, K) \cong K$$

Consideremos ahora en el diagrama (1), $C^*(B)$ como K -álgebra entonces $C^*(B')$, $C^*(E)$ serán $C^*(B)$ -módulos mediante los morfismos

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_{B'} : C^*(B') \otimes C^*(B) & \xrightarrow{1 \otimes f^*} & C^*(B') \otimes C^*(B') & \xrightarrow{\text{«cup»}} & C^*(B') \\ \varphi_E : C^*(E) \otimes C^*(B) & \xrightarrow{1 \otimes \pi^*} & C^*(E) \otimes C^*(E) & \xrightarrow{\text{«cup»}} & C^*(E) \end{array}$$

Sea

$$\alpha: C^*(B') \otimes C^*(E) \rightarrow C^*(E') \quad \alpha = \text{cup} \cdot (\pi'^* \otimes \bar{f}^*)$$

y

$$\Phi: C^*(B') \otimes C^*(B) \otimes C^*(E) \rightarrow C^*(B') \otimes C^*(E)$$

dada por

$$\Phi(x \otimes v \otimes y) = x f^*(v) \otimes y - x \otimes \pi^*(v) y$$

Lema 1.1. — La restricción de α a la imagen de Φ es el morfismo nulo, por tanto induce

$$C^*(B') \otimes C^*(E) / \text{Im } \Phi \cong C^*(B') \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \rightarrow C^*(E')$$

Sea ahora P una resolución proyectiva de $C^*(B')$ como $C^*(B)$ -módulo $\varepsilon: P \rightarrow C^*(B')$; tenemos entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_{C^*(B)} C^*(E) & & \\ \downarrow \varepsilon \otimes 1 & \searrow \theta & \\ C^*(B') \otimes_{C^*(B)} C^*(E) & \xrightarrow{\alpha} & C^*(E') \end{array}$$

Teorema 1.2. — La aplicación θ induce un isomorfismo en homología

$$\theta^*: \text{Tor}_{C^*(B)}(C^*(B'), C^*(E)) \rightarrow H^*(E'), \quad \text{siendo } K \text{ un campo.}$$

Para demostrarlo se construyen dos filtraciones sobre $P \otimes_{C^*(B)} C^*(E)$ y sobre $C^*(E')$, de modo que θ establece un isomorfismo entre las sucesiones asociadas a dichas filtraciones. (Para más detalles, ver [13] ó [18]).

Lema 1.3. — Dado un $\wedge$ -módulo M y una resolución $\wedge$ -proyectiva

$$P \xrightarrow{\varepsilon} M, \text{ se cumple que } H(P) = H(M)$$

(considerando en P el grado total).

Proposición 1.4. — $\text{Tor}_{C^*(B)}(C^*(B'), C^*(E))$ posee una estructura de álgebra de modo que θ^* es un isomorfismo de álgebras.

Teorema 1.5. — Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde (E, π, B) es fibrado de Serre, π' la fibración inducida por f , y B es simplemente conexo. Entonces existe una sucesión espectral $\{E_r, d_r\}$ de álgebras conmutativas con

$$1) E_r \Rightarrow H^*(E') \quad 2) E_2 = \text{Tor}_{H^*(B)}(H^*(B'), H^*(E))$$

Demostración: Basta tener en cuenta simultáneamente I.2.17 y el Teorema 1.2 y las consideraciones últimas.

Caso particular de éste cuando B' se reduce a un punto es:

Teorema 1.6. — Dado el fibrado $E \xrightarrow{\pi} B$, con B simplemente conexo; existe una sucesión espectral $\{E_r, d_r\}$ de álgebras conmutativas, tal que

$$1) E_r \Rightarrow H^*(F) \quad 2) E_2 = \text{Tor}_{H^*(B)}(K, H^*(E))$$

(Donde por F denotamos la fibra).

§ 2. La estructura de Δ -comódulo en la geometría

En este párrafo, asociamos a espacios topológicos, las estructuras de comódulo sobre una coálgebra (Cap. I, § 3), para poder aplicarles la sucesión espectral de Eilenberg-Moore.

El desarrollo será paralelo al de § 1 y por tanto sólo señalaremos los enunciados más importantes. (Para los detalles ver [6], [18]).

A un espacio topológico A le asociaremos la estructura algebraica de su correspondiente complejo simplicial, $S(A)$; y a ésta el K -módulo DG de las cadenas normalizadas en A , con coeficientes en K . Además escribiremos frecuentemente A por $S(A)$, y por el correspondiente K -módulo de las cadenas normalizadas.

Dado un simplex $s \in A$ de dimensión n , denotaremos s_p^q ($0 \leq p \leq q \leq n$), el simplex de dimensión $q - p$ obtenido de s aplicando p veces el operador cara ϵ_0 y $n - q$ veces el operador cara ϵ_{q+1} (ϵ_i anula la coordenada i -ésima).

Entonces definimos un coproducto Φ , mediante la fórmula de Alexander-Whitney

$$\begin{aligned} \Phi: A &\longrightarrow A \otimes A \\ s &\longmapsto \sum_{0 \leq q \leq n} s_0^q \otimes s_q^n \end{aligned}$$

y una counidad $\epsilon: A \rightarrow K$ mediante $\begin{cases} \epsilon s = 0 & \text{si } n > 0 \\ \epsilon s = 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Hemos pues convertido A en una K -coálgebra, y dado C , objeto de DGK , $A \otimes C$ podemos considerarlo un A -comódulo por la izquierda mediante el coproducto

$$\Phi_{A \otimes C}: A \otimes C \xrightarrow{\Phi \otimes 1_C} A \otimes A \otimes C.$$

Tras la construcción de una filtración perfecta que nos dé origen a la sucesión espectral de Eilenberg-Moore; consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

en el que B es conexo y simplemente conexo, π es una fibración de Serre y π' la fibración inducida por f .

En él damos a E' , B la estructura de coálgebra, como antes hemos indicado, y a B' , $E \otimes C$ las de B -comódulos mediante los morfismos

$$\Phi_{B'} = (f \otimes 1_{B'}) \cdot \Phi; \quad \Phi_{E \otimes C} = (\pi \otimes 1_E \otimes 1_C) \cdot (\Phi \otimes 1_C)$$

Teorema 2.9. — (Eilenberg-Moore). En las anteriores condiciones se cumple que $H(E'; C) \cong \text{Cotor}^B(B', E \otimes C)$

Isomorfismo que viene dado por $\tau = \text{Cotor}^{\pi^*}(\pi^!, g \otimes 1_c)$.

Caso particular cuando B' reduce a un punto es

Teorema 2.10. — Si $\pi: E \rightarrow B$ es un fibrado de Serre de fibra F , siendo B conexo y simplemente conexo; se cumple que

$$H(F; C) \cong \text{Cotor}^B(K, E \otimes C)$$

§ 3. El término E_∞ de la sucesión espectral

En este párrafo se da un contenido geométrico al desarrollo algebraico realizado en el Cap. I § 4; es decir se estudia el caso en que K es un cuerpo conmutativo y se calculan los primeros términos de la filtración asociada a la sucesión espectral.

Para ello se construye, dado el diagrama del Teor. 1.5, la aplicación $(\bar{f} - \pi)^*: H^*(B' \times B \times E) \rightarrow H^*(B' \times E, E')$. (Ver [13]) y se obtiene

Proposición 3.1. — $F^0 H^*(E') = \text{im} \{ H^*(B') \otimes H^*(E) \rightarrow H^*(E') \}$.

(Consecuencia de la proposición I.4.1 y del Teorema 1.2).

Teorema 3.2. — $F^{-1} H^*(E')$ es el conjunto de elementos imágenes por Ψ de algún elemento de $H^*(B') \otimes \overline{H^*(B)} \otimes H^*(E)$.

Donde Ψ es la relación aditiva definida por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^*(B') \otimes \overline{H^*(B)} \otimes H^*(E) & \xrightarrow{\Psi} & H^*(E') \\ \downarrow i & & \downarrow \delta \\ H^*(B') \otimes H^*(B) \otimes H^*(E) & & H^*(B' \times E, E') \\ \searrow \zeta & \swarrow (\bar{f} - \pi)^* & \\ & H^*(B' \times B \times E) & \end{array}$$

donde i es la inclusión, ζ la aplicación de Künneth y δ , la diferencial de la sucesión exacta asociada al par $(B' \times E, E')$.

Proposición 3.3. — Si B' es un punto y E el espacio de caminos de B , entonces Ψ es precisamente la suspensión en cohomología σ^* .

(Ver detalles en [13] ó [18]).

III. El functor Tor

§ 1. Algebras de polinomios. Complejos de Koszul

Recordemos que decimos que una K -álgebra $\wedge$ es conexa cuando η aplica K isomórficamente en $\wedge^0$.

$$\eta: K \xrightarrow{\cong} \wedge^0 \subset \wedge$$

Definición 1.1. — Decimos que una k -álgebra graduada $\wedge$, es una *álgebra de polinomios* de generadores $x_1, \dots, x_n$ ($\in \wedge$) de grado par, y la denotaremos $K[x_1, \dots, x_n]$, cuando siendo conmutativa y conexa cumpla:

1) $\text{grad } x_i$, para cada i , es par.

2) $\wedge^j$ k -módulo libre para cada j ; formando una k -base para $\wedge^j$, los monomios $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n}$ con

$$\sum_k i_k \text{ grad } x_k = j \quad (i_k \geq 0).$$

Por ser $\wedge$ conexa, $\eta: K \rightarrow \wedge^0$ induce $\varepsilon: K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$ tal que $\varepsilon|_{\wedge^0} = \eta^{-1}$; a la aplicación ε le llamaremos *aumento* de $\wedge$.

Definición 1.2. — Decimos que una K -álgebra graduada E , es un *álgebra exterior* de generadores $e_1, \dots, e_n$ de grado impar, y la denotaremos $E = E[e_1, \dots, e_n]$, cuando, siendo conmutativa y conexa, cumpla:

- 1) $\text{grad } e_i$, impar, para cada i
- 2) E^j K -módulo libre para cada j , formando una k -base para E^j los monomios $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}$ con $\sum \text{grad } e_{i_k} = j$ y $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$.

Sobre el álgebra exterior $E = E[e_1, \dots, e_n]$ definimos un nuevo grado, al que llamaremos *grado exterior*, del siguiente modo: llamaremos $E_p = E_p[e_1, \dots, e_n]$ al sub K -módulo generado por los monomios $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$. Naturalmente E_p^j será el submódulo generado por los $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}$ tales que

$$\sum_k \text{grad } e_{i_k} = j.$$

Si B es un K -módulo graduado, llamaremos *r -ésima suspensión* de B , al K -módulo graduado $s_r(B)$ definido del modo siguiente:

$$s_r(B)^i = B^{i-r}$$

Con esta definición, si $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$, $E = E[e_1, \dots, e_n]$ siendo $\text{grad } e_i = \text{grad } x_i - 1$, obtenemos la siguiente resolución libre de K como $\wedge$ -módulo (mediante la aumentación ε), llamada resolución de Koszul.

$$\varepsilon = \dots s_2(E_2) \otimes \wedge \xrightarrow{d^{(-2)}} s_1(E_1) \otimes \wedge \xrightarrow{d^{(-1)}} E_0 \otimes \wedge \cong \wedge \xrightarrow{\varepsilon} K$$

donde $d^{(-1)}(e_i \otimes \lambda) = 1 \otimes x_i \lambda$

$$d^{(-p)}(e_{i_1} \dots e_{i_p} \otimes \lambda) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} e_{i_1} \dots \hat{e}_{i_j} \dots e_{i_p} \otimes x_{i_j} \lambda$$

($\wedge$ indica omisión). (Ver [8], VII.2).

Observemos que disponemos de una bigraduación de modo que

$$\text{bigrad. } \lambda = (0, \text{grad. } \lambda)$$

$$\text{bigrad. } e_i = (-1, \text{grad. } e_i + 1) = (-1, \text{grad. } x_i)$$

(pues el grado de e_i en $s_1(E)$, si $e_i \in E^j \Rightarrow e_i \in s_1(E)^{j+1} = E^j$ luego es $\text{grad. } e_i + 1$)

$$\text{bigrad. } e_{i_1} \dots e_{i_p} = (-p, \sum_k \text{grad. } x_{i_k})$$

en la que el grado total equivale al grado primitivo en E .

Los complejos de Koszul admiten generalización para álgebras que son de polinomios según veremos.

Proposición 1.3. — Sea $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$ y M un $\wedge$ -módulo por la izquierda; $E = E[e_1, \dots, e_n]$ con $\text{grad. } e_i = \text{grad. } x_i - 1$. Entonces

- 1) $\text{Tor}_{\wedge}^p(K, M)$ es la homología del complejo bigraduado L definido mediante $L^{p,q} = 0$

si $p > 0$; $L^{p,q} = (s_{-p}(E_{-p}) \otimes M)^q$ si $p \leq 0$ con operador diferencial $d : L^{p,q} \rightarrow L^{p+1,q}$ dado por

$$d(1 \otimes m) = 0 \quad (m \in M); \quad d(e_i \otimes m) = 1 \otimes x_i m$$

$$d(e_{i_1} \dots e_{i_p} \otimes m) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} e_{i_1} \dots \hat{e}_{i_j} \dots e_{i_p} \otimes x_{i_j} m$$

es decir $\text{Tor}_{\wedge}^{p,q}(K, M) = H^{p,q}(L)$

$$2) D(L) = E[e_1, \dots, e_n] \otimes M \text{ y } D(\text{Tor}_{\wedge}(K, M)) = H(E[e_1, \dots, e_n] \otimes M).$$

3) Si M es una K -álgebra conmutativa y $\wedge$ actúa sobre M mediante un homomorfismo de álgebras entonces L es K -álgebra DG y los isomorfismos de 1) y 2) lo son de álgebras.

Demostración: Es inmediata pues basta considerar la resolución de Koszul $\in$ para K y la definición de Tor (2.16). $\#$

Proposición 1.4. — Sea $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$ y M objeto de $\wedge$ DG. Entonces $\text{Tor}_{\wedge}^{p,q}(K, M) = 0$ si $p < -n$. Además si K es Noetheriano y M $\wedge$ -módulo finitamente generado $|\text{Tor}_{\wedge}^i(K, M)|$ es un K -módulo finitamente generado (donde si A es un K -módulo graduado, $|A|$ denota el K -módulo no graduado suma directa de los A^i).

Demostración: Basta para la primera parte tomar para K la resolución de Koszul y como $E_p[e_1, \dots, e_n] = 0$ para $p > n$ se sigue que $\text{Tor}_{\wedge}^{p,q}(K, M) = 0$ para $p < -n$.

Para la segunda parte, al ser $K[x_1, \dots, x_n]$ Noetheriano, podemos construir una resolución proyectiva de M con $\wedge$ -módulos finitamente generados P^i y entonces $|K \otimes_{\wedge} P^i|$ será finitamente generado, de donde se sigue la tesis. $\#$

Definiremos ahora los complejos de Koszul para un álgebra graduada, conmutativa y conexa (pero no necesariamente álgebra de polinomios). Sea A una K -álgebra con dichas propiedades y $a_1, \dots, a_n$ una sucesión de elementos de A ; llamaremos $\wedge$ al álgebra de polinomios $K[x_1, \dots, x_n]$ con $\text{grad } x_i = \text{grad } a_i$; y damos a A una estructura de $\wedge$ -módulo mediante

$$\varphi : K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow A$$

$$x_i \longmapsto a_i$$

Sea $E[e_1, \dots, e_n]$ el álgebra exterior correspondiente, tal que $\text{grad. } e_i = \text{grad. } a_i - 1$. Entonces

Definición 1.5. — Llamaremos complejo de Koszul de A respecto de los elementos $a_1, \dots, a_n$, al complejo $\in_{\wedge} = E[e_1, \dots, e_n] \otimes A$:

$$\dots \rightarrow s_2(E_2) \otimes A \xrightarrow{d^{(-2)}} s_1(E_1) \otimes A \xrightarrow{d^{(-1)}} A \xrightarrow{d} 0$$

donde $d(1 \otimes a) = 0$; $d(e_i \otimes a) = 1 \otimes a_i a$; $d(e_{i_1} \dots e_{i_p} \otimes a) = \sum (-1)^{j-1} e_{i_1} \dots \hat{e}_{i_j} \dots e_{i_p} \otimes a_{i_j} a$.

Los complejos de Koszul tienen pues estructura bigraduada de modo que

$$\text{grad. } a = (0, \text{grad. } a)$$

$$\text{grad. } e_i = (-1, \text{grad. } a_i)$$

Evidentemente el complejo de Koszul antes definido es un caso particular de éste.

Proposición 1.6. — La condición necesaria y suficiente para que el complejo de Koszul $\in_{\wedge}$ de una K -álgebra A , sea acíclico, es que A sea $\wedge$ -módulo libre (con $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$ antes definido).

Demostración: Si el complejo es acíclico, según 1.3

$$\text{Tor}_{\wedge}^{-p,*}(K, A) = H^{-p,*}(E[e_1, \dots, e_n] \otimes A) = 0 \text{ para } p \neq 0$$

pero $\text{Tor}_{\wedge}^{-p,*}(K, A)$, ($p \neq 0$) implica que A es $\wedge$ -libre (ver [4] T.6.1., pág. 156).

Recíprocamente si A es $\wedge$ -libre $\text{Tor}_{\wedge}^{-p,*}(K, A) = 0$ y por lo mismo el complejo de Koszul acíclico. $\#$

Corolario 1.7. — El complejo $\epsilon_{\wedge}$ es una resolución A -libre de $A/(a_1, \dots, a_n)$, siempre que A sea $\wedge$ -módulo libre.

Demostración: A , $\wedge$ -módulo libre implica (1.6) ϵ acíclico, luego $H^p(\epsilon) = 0$, $p \neq 0$; $H^0(\epsilon) = \text{ciclos/bordes} = A/(a_1, \dots, a_n)$. $\#$

Observemos que la afirmación de que el complejo de Koszul, definido antes de 1.3, es una resolución libre de K es una consecuencia inmediata de esta proposición, pues allí $A = \wedge$ y por tanto $\wedge$ -libre.

Supongamos que $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$ con $\text{grad. } x_i = \text{par}$, y φ la aplicación producto $\varphi: \wedge \otimes \wedge \rightarrow \wedge$ que es sobre.

Lema 1.8. — El ideal generado por $x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_1, \dots, x_n \otimes 1 - 1 \otimes x_n$ en $\wedge \otimes \wedge$ es precisamente $\text{Ker } \varphi$.

Vamos a definir a partir de esto un complejo de Koszul bilátero, ϵ^2 , análogamente a como lo hemos realizado antes.

Definición 1.9. — Llamaremos complejo de Koszul bilátero de $\wedge \otimes \wedge$ respecto de la sucesión $x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_1, \dots, x_n \otimes 1 - 1 \otimes x_n$. Al complejo

$$\epsilon^2 = \wedge \otimes E[e_1, \dots, e_n] \otimes \wedge \text{ dado por}$$

$$\dots \longrightarrow \wedge \otimes s_2(E_2) \otimes \wedge \xrightarrow{d} \wedge \otimes s_1(E_1) \otimes \wedge \xrightarrow{d} \wedge \otimes \wedge$$

donde $\text{grad. } e_i = (-1, \text{grad. } x_i)$, $\text{grad. } \lambda = (0, \text{grad. } \lambda)$ y $d(\lambda \otimes \lambda') = 0$, $d(\lambda \otimes e_i \otimes \lambda') = \lambda x_i \otimes 1 \otimes \lambda' - \lambda \otimes 1 \otimes x_i \lambda'$ (con $\lambda, \lambda' \in \wedge$).

Ahora bien, según 1.6 el complejo ϵ^2 es acíclico y por tanto suministra una resolución de $\wedge \otimes \wedge / \text{Ker } \varphi \cong \wedge$, es decir: $H^p(\epsilon^2) = 0$, $p \neq 0$; $H^0(\epsilon^2) = \text{ciclos/bordes} = (\wedge \otimes \wedge) / \text{Ker } \varphi \cong \wedge$.

Proposición 1.10. — Si M es un $\wedge$ -módulo $\epsilon^2 \otimes_{\wedge} M$ es una resolución libre de M como $\wedge$ -módulo.

Demostración: Puesto que ϵ^2 es $\wedge$ -módulo libre $\text{Tor}_{\wedge}(\epsilon^2, M) = 0$ pero esto según ([18], pág. 400) implica que existe una sucesión espectral $E_r \Rightarrow H(\epsilon^2 \otimes_{\wedge} M)$ cuyo segundo término $E_2 = \text{Tor}_{\wedge}^2(H(\epsilon^2), M)$ por tanto $E_2 = \text{Tor}_{\wedge}^2(\wedge, M) = \text{Tor}_{\wedge}^{0,*}(\wedge, M) = M$ es decir $E_2^{p,*} = \text{Tor}_{\wedge}^{p,*}(\wedge, M) = 0$, $p \neq 0$; $E_2^{0,*} = \text{Tor}_{\wedge}^{0,*}(\wedge, M) = M$ pero

$$E_2^{p,*} = 0 \Rightarrow E_2 = E_{\infty}$$

luego en definitiva

$$H^p(\epsilon^2 \otimes_{\wedge} M) = 0, p \neq 0; H^0(\epsilon^2 \otimes_{\wedge} M) = 0$$

lo que nos dice que $\epsilon^2 \otimes_{\wedge} M$ es una resolución de M . $\#$

Corolario 1.11. — Si M y N son objetos de $DG \wedge$ y $\wedge DG$ respectivamente. Tenemos

$$\text{Tor}_{\wedge}(M, N) = H(M \otimes E[e_1, \dots, e_n] \otimes N)$$

donde $\text{grad. } e_i = (-1, \text{grad. } x_i)$ y la diferencial d está definida $d(m \otimes 1 \otimes n) = 0$; $d(m \otimes e_i \otimes n) = m x_i \otimes 1 \otimes n - m \otimes 1 \otimes x_i n$

Demostración: $\text{Tor}_{\wedge}^{\wedge}(M, N) = H(M \otimes_{\wedge} (\mathbb{C}^2 \otimes_{\wedge} N)) = H(M \otimes E[e_1, \dots, e_n] \otimes N)$. $\ddagger$
 Añadiremos ahora una proposición que vamos a necesitar en el próximo párrafo.

Sean $\wedge_1, \wedge_2$ k-álgebras graduadas aumentadas $\varepsilon_1: \wedge_1 \rightarrow K, \varepsilon_2: \wedge_2 \rightarrow K$. Sea N un $\wedge_1 \otimes \wedge_2$ módulo por la izquierda $\varphi_N: \wedge_1 \otimes \wedge_2 \otimes N \rightarrow N$.

Consideremos la aplicación $\wedge_2 \xrightarrow{i_2} \wedge_1 \otimes \wedge_2$. Entonces N podremos considerarlo $\wedge_2 \xrightarrow{\lambda_2} 1 \otimes \wedge_2$

como $\wedge_2$ -módulo mediante

$$\wedge_2 \otimes N \xrightarrow{i_2 \otimes 1} \wedge_1 \otimes \wedge_2 \otimes N \xrightarrow{\varphi_N} N$$

y análogamente $\wedge_1$ -módulo mediante

$$\wedge_1 \otimes N \xrightarrow{i_1 \otimes 1} \wedge_1 \otimes \wedge_2 \otimes N \xrightarrow{\varphi_N} N$$

que induce estructura de $\wedge_1$ -módulo sobre $K \otimes_{\wedge_2} N$. Con lo que existe la aplicación

$$\text{Tor}_{\wedge_1 \otimes \wedge_2}^{\wedge_1}(K, N) \longrightarrow \text{Tor}_{\wedge_1}^{\wedge_1}(K, K \otimes_{\wedge_2} N)$$

inducida por $1 \otimes \varepsilon_2: \wedge_1 \otimes \wedge_2 \rightarrow \wedge_1$ y la proyección $N \rightarrow K \otimes_{\wedge_2} N$ aplicación que en el grado cero, será el isomorfismo

$$K \otimes_{\wedge_1 \otimes \wedge_2} N \longrightarrow K \otimes_{\wedge_1} (K \otimes_{\wedge_2} N)$$

Proposición 1.12. — Sean $\wedge_1, \wedge_2$ K-álgebras graduadas aumentadas y N un $\wedge_1 \otimes \wedge_2$ -módulo por la izquierda. Supongamos que $\wedge_1$ es proyectivo y N es $\wedge_2$ -proyectivo. Entonces la aplicación

$$\text{Tor}_{\wedge_1 \otimes \wedge_2}^{\wedge_1}(K, N) \longrightarrow \text{Tor}_{\wedge_1}^{\wedge_1}(K, K \otimes_{\wedge_2} N)$$

es un isomorfismo de K-módulos bigraduados.

§ 2. Sucesiones especiales.

En esta sección desarrollaremos algunas propiedades de las sucesiones que llamaremos especiales, dado el importante papel que éstas juegan en el cálculo del functor Tor.

En esta sección K será un cuerpo.

Denotaremos $/\wedge$ a la categoría de las K-álgebras graduadas, conmutativas, conexas y finitamente generadas, A , tales que $A^i = 0$ si $i < 0$.

Siendo A objeto de $/\wedge$, $\bar{A}$ será el ideal de elementos de grado mayor que cero en A . Existirá el morfismo aumento

$$\varepsilon: A \rightarrow K \begin{cases} \varepsilon = \eta^{-1} & \text{sobre } A^0 \\ \varepsilon = 0 & \text{sobre } \bar{A} \end{cases}$$

Diremos que un A -módulo (A objeto de $/\wedge$) M , es *acotado inferiormente* si existe un número entero n tal que $M^i = 0$ para $i < n$.

Lema 2.1. — Sea A objeto de $/\wedge$ y M un A -módulo por la izquierda que es acotado inferiormente. Entonces $M = 0$ si y sólo si $K \otimes_A M = 0$.

Corolario 2.2. — Sean M, N A -módulos y $f: M \rightarrow N$ un A -morfismo entonces f es epi-morfismo si y sólo si

$$1 \otimes f: K \otimes_A M \rightarrow K \otimes_A N \text{ lo es.}$$

Proposición 2.3. — Sea A objeto de $/\wedge$ y M un A -módulo acotado inferiormente; entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones

- 1) $\text{Tor}_A^{-1,*}(K, M) = 0$; 2) $\text{Tor}_A^{-1,*}(K, M) = 0$ para todo $j \geq 1$
- 3) M es A -módulo proyectivo; 4) como A -módulo $M \cong A \otimes (K \otimes_A M)$

Demostración: Para $1) \Rightarrow 4)$ (ver [4] VIII.6.1 ó [8] VII 6.2).

$4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$ es evidente.

Definición 2.1. — Sea A objeto de $/\wedge$. Una sucesión de elementos $a_1, \dots, a_n$ de $\bar{A}$ diremos que es una *sucesión especial* (*E-sucesión*), cuando a_1 no sea divisor de cero en A y a_i tampoco lo sea en $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$ para $i = 2, \dots, n$. A los ideales generados por sucesiones especiales les llamaremos *ideales de Borel*.

(Si la característica de K no es 2 supondremos que los a_i son de grado par).

Proposición 2.5. — Sea A objeto de $/\wedge$, y $a_1, \dots, a_n$ elementos de $\bar{A}$. Sea el álgebra de polinomios $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$ con grado $x_i = \text{grad. } a_i$; si damos a A una estructura de $\wedge$ -módulo mediante el morfismo f tal que $f(x_i) = a_i$; son equivalentes las siguientes afirmaciones

- 1) $a_1, \dots, a_n$ es E-sucesión 2) $\text{Tor}_\wedge^{-1,*}(K, A) = 0$
- 3) $\text{Tor}_\wedge^{-1,*}(K, A) = 0$ para todo $j \geq 1$
- 4) A es $\wedge$ -proyectivo
- 5) Como $\wedge$ -módulo $A \cong \wedge \otimes A/(a_1, \dots, a_n)$.

Demostración: $2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4) \Leftrightarrow 5)$ se sigue de Prop. 2.3

$5) \Rightarrow 1)$ pues $a_1 = x_1 \otimes 1$ no es divisor de cero de A ni a_i lo es de $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$

$1) \Rightarrow 2)$ se demuestra por inducción sobre n , para $n = 1$ se cumple y también sucesivamente utilizando la prop. 1.12.

Corolario 2.6. — En las condiciones de la proposición, son equivalentes las siguientes afirmaciones

- 1) $a_1, \dots, a_n$ es E-sucesión. 2) A es un $\wedge$ -módulo libre
- 3) El complejo de Koszul correspondiente $E[e_1, \dots, e_n] \otimes A$ es acíclico.

Demostración: $1) \Leftrightarrow 2)$ por 2.5; $2) \Leftrightarrow 3)$ por 1.6.

Siendo V un espacio vectorial graduado de tipo finito y con $V^i = 0$ para $i < 0$, a la correspondiente serie de Poincaré la denotaremos

$$P(V) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim V^i) X^i$$

Lema 2.7. — Sea A objeto de $/\wedge$ y M un A -módulo finitamente generado con $M^i = 0$, $i < 0$. Entonces

$$P(A) \cdot P(K \otimes_A M) \geq P(M)$$

(Entendiendo que dos series de potencias $P_1(X), P_2(X)$ con radio de convergencia mayor o igual que 1, están en la relación $P_1(X) \leq P_2(X)$ cuando para cualquier valor real positivo a se cumple que $P_1(a) \leq P_2(a)$).

Proposición 2.8. — Sea $\Gamma = K[y_1, \dots, y_r]$ y $a_1, \dots, a_r$ elementos de Γ tales que el espacio vectorial $|\Gamma/(a_1, \dots, a_r)|$ es de dimensión finita; entonces $r \geq n$.

Introduciremos ahora, para demostrar otra propiedad de las E-sucesiones un functor de $/\wedge$ en la categoría de los anillos locales $||L||$; que a un objeto A de $/\wedge$, le hace corresponder el anillo local $||A||$, cuyo único ideal maximal consiste en todos los elementos con 0-coordenada nula (elementos de $\bar{A}$). Dado un elemento $a \in A$ denotaremos $\tilde{a}$ al correspondiente elemento de $||A||$, que tendrá si $\text{grad. } a = i$, la i -ésima coordenada igual a a y las demás coordenadas nulas.

Lema 2.9. — Sea A un objeto de $/\wedge$ y $a_1, \dots, a_n$ elementos de A , entonces $||A/(a_1, \dots, a_n)||$ es isomorfo a $||A||/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$.

Demostración: Bastará aplicar a $\pi: A \rightarrow A/(a_1, \dots, a_n)$ el functor antes definido y ver que $\text{Ker } ||\pi|| = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$.

Proposición 2.10. — Sea $a_1, \dots, a_n$ una sucesión de n elementos de $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma = K[y_1, \dots, y_n]$. Entonces el espacio vectorial $|\Gamma/(a_1, \dots, a_n)|$ es de dimensión finita si y sólo si $a_1, \dots, a_n$ forman sucesión especial.

Corolario 2.11. — Sea $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$ y $\Gamma = K[y_1, \dots, y_n]$ $f: \wedge \rightarrow \Gamma$ un homomorfismo de álgebras. Entonces considerando a Γ como $\wedge$ -módulo mediante f , si Γ es un $\wedge$ -módulo finitamente generado, es un $\wedge$ -módulo libre.

Diremos que los elementos $a_1, \dots, a_n$ de A objeto de $/\wedge$ son algebraicamente independientes, si es monomorfismo la aplicación $f: K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$, dada por $f(x_i) = a_i$ (donde $\text{grad. } x_i = \text{grad. } a_i$).

Lema 2.12. — Si $a_1, \dots, a_n$ es una E-sucesión en A ; la subálgebra generada por $a_1, \dots, a_n$ será isomorfa a $K[x_1, \dots, x_n]$.

Demostración: A es $K[x_1, \dots, x_n]$ -libre (2.6) y por tanto la inclusión un monomorfismo.

Damos ahora una serie de lemas conducentes a demostrar que, dado un ideal de Borel $I \subset A$, toda E-sucesión generando I forma un sistema minimal de generadores y recíprocamente, que todo sistema minimal de generadores de I forma E-sucesión. (Ver [18]).

Lema 2.13. — Sea $a_1, \dots, a_n$ un sistema minimal de generadores para un ideal $I \subset A$ (A objeto de $/\wedge$). Supongamos que $a_1, \dots, a_r$ son los elementos de grado mínimo, entonces, forman base del espacio vectorial formado por los elementos de grado mínimo de I .

Lema 2.14. — Con la notación anterior, sea J el ideal generado por $(a_1, \dots, a_r)$; entonces las clases $[a_{r+1}], \dots, [a_n]$ forman un sistema minimal de generadores del ideal I/J .

Proposición 2.15. — Si I es un ideal de Borel de A , y $a_1, \dots, a_n$ una E-sucesión que genera I ; entonces $a_1, \dots, a_n$ forman un sistema minimal de generadores para I .

Lema 2.16. — Supongamos que V es un subespacio vectorial de A objeto de $/\wedge$ y que $\{a_1, \dots, a_n\}$ y $\{b_1, \dots, b_n\}$ forman dos bases de V . Entonces $a_1, \dots, a_n$ es una E-sucesión si y sólo si lo es $b_1, \dots, b_n$.

Lema 2.17. — La sucesión $a_1, \dots, a_n$ en A es una E-sucesión si $a_1, \dots, a_r$ es E-sucesión en A y $[a_{r+1}], \dots, [a_n]$ lo es en $A/(a_1, \dots, a_r)$.

Proposición 2.18. — Supongamos que I es un ideal de Borel en A y que $a_1, \dots, a_n$ es un sistema minimal de generadores de I ; entonces $a_1, \dots, a_n$ es una E-sucesión en A .

Por tanto de las proposiciones 2.15 y 2.18 deducimos que es equivalente, en ideales de Borel, hablar de E-sucesión generadora que de sistema minimal de generadores.

Lema 2.19. — Sea I un ideal de A (objeto de $/\wedge$) y $\pi: I \rightarrow K \otimes_A I$ la proyección natural. Entonces la condición necesaria y suficiente para que el conjunto de elementos de I , $a_1, \dots, a_n$, sea un sistema minimal de generadores es que $\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)$ formen base del espacio vectorial $|K \otimes_A I|$.

Corolario 2.20. — Dado un ideal de Borel I , toda E-sucesión de elementos de I , que genere I , tendrá el mismo número de elementos.

Lema 2.21. — Si $a_1, \dots, a_r$ forman un sistema minimal de generadores para un ideal I de $K[x_1, \dots, x_s]$; entonces $a_1, \dots, a_r, x_{s+1}, \dots, x_n$ forman un sistema minimal de generadores para el ideal por ellos engendrado en $K[x_1, \dots, x_n]$.

§ 3. Presentaciones mediante álgebras de polinomios.

En esta sección asociaremos a un objeto de $/\wedge$, A , mediante una presentación, el álgebra $J(A)$ que representará un importante papel en el cálculo de la cohomología de espacios homogéneos.

K seguirá siendo un campo.

Dado A , objeto de $/\wedge$, llamaremos $Q(A)$ al espacio vectorial de los elementos indecomponibles de A ($Q(A) = \overline{A}/\overline{A} \cdot \overline{A}$).

Definición 3.1. — Una sucesión de objetos y morfismos de $/\wedge$ $\dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \rightarrow \dots$ es *coexacta* si $\text{Ker } f_n = f_{n-1}(\overline{A}_{n-1}) \cdot A_n$.

Observemos que un homomorfismo de álgebras f , es sobre (inyectivo) si y sólo si es coexacta la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varepsilon} K \xrightarrow{\eta} A \xrightarrow{f} B$.

Definición 3.2. — Si A es objeto de $/\wedge$, llamaremos *presentación* de A , a una sucesión coexacta $\wedge \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{f} A \rightarrow K$ en la que $\wedge$ y Γ son álgebras de polinomios y la aplicación inducida $Q(\wedge) \rightarrow K \otimes_A \text{Ker } f$ es un isomorfismo de espacios vectoriales graduados sobre K .

(Observemos que para que A tenga presentación será necesario que sus elementos sean de grado par, si $\text{car. } K \neq 2$).

Los elementos de $Q(\Gamma)$ serán los generadores de A y los de $Q(\wedge)$ los relatores de A . El isomorfismo lo que nos impide es que en $Q(\wedge)$ haya elementos superfluos; luego si $\wedge = K(x_1, \dots, x_n)$ $g(x_1), \dots, g(x_n)$ formarán un sistema minimal de generadores para $(\text{Ker } f)$.

Proposición 3.3. — Sean $\wedge_1 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow A \rightarrow K$; $\wedge_2 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow A \rightarrow K$ dos presentaciones de A , objeto de $/\wedge$. Entonces se cumple

- 1) $\text{Tor}_{\wedge_1}(K, \Gamma_1) = \text{Tor}_{\wedge_2}(K, \Gamma_2)$ como álgebras bigraduadas
- 2) para cada i $\dim Q(\wedge_1)^i - \dim Q(\Gamma_1)^i = \dim Q(\wedge_2)^i - \dim Q(\Gamma_2)^i$.

Con lo que a la K -álgebra A le asociamos el álgebra bigraduada $J(A) = \text{Tor}_{\wedge}(K, \Gamma)$, además $A \cong \text{Tor}_{\wedge}^{0,*}(K, \Gamma)$, luego $A \subset J(A)$.

Definición 3.4. — Un objeto A de $/\wedge$, diremos que es un *álgebra especial* (*E-álgebra*) si para toda representación $\wedge \rightarrow \Gamma \rightarrow A \rightarrow K$ de A , tenemos que Γ es $\wedge$ -proyectivo.

Caracterizamos ahora estas álgebras

Proposición 3.5. — Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- 1) A es E-álgebra.
- 2) A tiene una presentación $\wedge \rightarrow \Gamma \rightarrow A \rightarrow K$ tal que Γ es un $\wedge$ -módulo proyectivo.
- 3) A tiene una presentación $\wedge \xrightarrow{g} \Gamma \rightarrow A \rightarrow K$ en la que $g(x_1), \dots, g(x_n)$ forman E-sucesión ($\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$).

- 4) A es isomorfa al cociente de un álgebra de polinomios por un ideal de Borel.
 5) $A = J(A)$.

El otro elemento invariante en proposición 3.3 nos lleva a definir.

Definición 3.6. — Dada una K-álgebra A (de $\wedge$) y una presentación de $A: \wedge \xrightarrow{g} \Gamma \rightarrow A \rightarrow K$, llamaremos *deficiencia i-ésima de A* al número entero $df^i(A) = \dim Q(\wedge)^i - \dim Q(\Gamma)^i$ y *deficiencia de A* a la suma $df A = \sum_i df^i(A)$.

Proposición 3.7. — Sea A, objeto de $\wedge$, tal que $|A|$ es espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $df A \geq 0$ y $df A = 0$ si y sólo si A es E-álgebra.

§ 4. Algunos cálculos del functor Tor.

En esta sección calcularemos el functor Tor en los casos en que nos pueda ser útil posteriormente. Especial atención tendremos con el caso de álgebra de polinomios, de gran interés para las aplicaciones.

Proposición 4.1. — Si I es un ideal de Borel en A, objeto de $\wedge$, y $a_1, \dots, a_n$ un sistema minimal de generadores para I, entonces

$$\text{Tor}_A(A/I, K) = E[u_1, \dots, u_n]$$

como álgebra, donde $\text{grad } u_i = (-1, \text{grad } a_i)$.

Corolario 4.2. — Dada una E-álgebra A y una presentación $\wedge \xrightarrow{g} \Gamma \rightarrow A \rightarrow K$, considerando A, como Γ -módulo, tenemos

$$\text{Tor}_\Gamma(A, K) \cong E[u_1, \dots, u_n]$$

con $\text{grad } u_i = (-1, \text{grad } a_i)$; siendo $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$ y $g(x_i) = a_i$.

Proposición 4.3. — Sea A un álgebra y B una subálgebra de A, en la categoría $\wedge$. Sea $C = A/B^{(1)}$. Supongamos que A es B-módulo libre y sean M y N, objetos de DGC y ADG respectivamente. Entonces existe una sucesión espectral $E_r \Rightarrow \text{Tor}_A(M, N)$ con

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_C^p(M, \text{Tor}_B^q(K, N))$$

Demostración: (Ver [4], pág. 349).

Sea $g: \wedge = K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$ una aplicación de álgebras; $g(x_1), \dots, g(x_n)$ genera un ideal I, en A; seleccionamos un sistema minimal de generadores para I y reordenamos los x_i de modo que el sistema minimal esté formado por $g(x_1), \dots, g(x_m)$, y los elementos superfluos sean $g(x_{m+1}), \dots, g(x_{m+r})$, con $m+r = n$; y llamamos

$$\Gamma = K[x_1, \dots, x_m] \quad \text{y} \quad \Omega = [x_{m+1}, \dots, x_{m+r}];$$

tendremos que

$$\wedge = \Gamma \otimes \Omega.$$

Con este lenguaje podemos enunciar

Teorema 4.4. — Sea $g: \wedge \rightarrow A$ una aplicación de álgebras. Entonces

$$\text{Tor}_\wedge(K, A) = E[v_1, \dots, v_r] \otimes \text{Tor}_\Gamma(K, A)$$

donde $\text{grad } v_i = (-1, \text{grad } x_{m+i})$.

(1) Nota. Sea $\varphi: B \rightarrow A$ la inclusión, entonces denotamos A/B a $A/\varphi(\overline{B})$. A (Notación de [4]).

Demostración: Según 1.3 $\text{Tor}_{\wedge}(K, A)$ es la homología del complejo $L = E[u_1, \dots, u_n] \otimes A$ con $\text{grad. } u_i = \text{grad. } x_i - 1$ y diferencial $d(1 \otimes a) = 0$; $d(u_i \otimes a) = 1 \otimes a_i a$ ($i=1, \dots, n$). Entonces definimos un segundo complejo $L' = E[v_1, \dots, v_r] \otimes A$ con diferencial $d(1 \otimes a) = 0$, ($a \in A$), $d(v_i \otimes a) = 0$ para $i = m+1, \dots, m+r$; $d(v_i \otimes a) = 1 \otimes a_i a$ para $i = 1, \dots, m$.

Establecemos un homomorfismo θ entre L y L'

$$\begin{aligned} \theta(1 \otimes a) &= 1 \otimes a; \quad \theta(u_i \otimes 1) = v_i \otimes 1, \quad i = 1, \dots, m; \\ \theta(u_{m+i} \otimes 1) &= v_i \otimes b_{1i} + \dots + v_m \otimes b_{mi} \quad \text{para } i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

$$(\text{siendo } a_{m+i} = \sum_{k=1}^m a_k b_{ki};$$

$b_{ki} \in A$; para $i = 1, \dots, r$). Entonces θ establece un isomorfismo

de álgebras diferenciales, que en homología nos inducirá el del enunciado.

Con la misma notación tenemos:

Corolario 4.5. — Sea $g: \wedge \rightarrow A$ una aplicación de álgebras con $g(\overline{\wedge}) \cdot A = I$ ideal de Borel en A .

Entonces

$$\text{Tor}_{\wedge}(K, A) = E[u_1, \dots, u_r] \otimes A/I$$

donde $\text{grad. } u_i = (-1, \text{grad. } x_{m+i})$ (suponiendo la debida ordenación en los x_i).

Demostración: Basta notar que $g(x_1), \dots, g(x_m)$ forman sistema minimal para I , lo que por 2.18 implica que forman E-sucesión luego A es Γ -módulo libre (2.6) y por tanto

$$\text{Tor}_{\Gamma}(K, A) = K \otimes_{\Gamma} A \cong A/I$$

Corolario 4.6. — Sea $\wedge \rightarrow \Gamma \rightarrow A \rightarrow K$ una sucesión coexacta, en $/\wedge$, siendo $\wedge$ y Γ álgebras de polinomios. Entonces

$$\text{Tor}_{\wedge}(K, \Gamma) = E[u_1, \dots, u_r] \otimes J(A)$$

de modo que $\dim E^{-1,i} = \dim Q(\wedge)^i - \dim Q(\Gamma)^i - df(A)$.

Demostración: Basta aplicar 4.4 al álgebra Γ siendo $g: \wedge \rightarrow \Gamma$; entonces

$$\text{Tor}_{\wedge}(K, \Gamma) = E[u_1, \dots, u_r] \otimes \text{Tor}_{\wedge^{\#}}(K, \Gamma),$$

pero siendo $\wedge^{\#} \rightarrow \Gamma \rightarrow A \rightarrow K$ presentación, luego $\text{Tor}_{\wedge^{\#}}(K, \Gamma) = J(A)$.

Por otra parte $\dim E^{-1} = r = \dim Q(\wedge) - \dim Q(\wedge^{\#}) = \dim Q(\wedge) - \dim Q(\Gamma) - df(A)$ cumpliéndose además la igualdad en cada grado.

Teorema 4.7. — Supongamos dadas las K -álgebras de $/\wedge$, A , B y C . Con las aplicaciones de álgebras

$$C \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} B$$

siendo 1) g sobre

2) $\text{Ker } g$ ideal de Borel. Entonces

$$\text{Tor}_A(B, C) = E[u_1, \dots, u_r] \otimes \text{Tor}_{\Gamma}(K, C).$$

Demostración: Sea $x_1, \dots, x_n$ una E-sucesión generando $\text{Ker } g$ y sea $\wedge$ la subálgebra de A , $\wedge = K[x_1, \dots, x_n]$, por 2.6 A es un $\wedge$ -módulo libre (estructura de $\wedge$ -módulo dada por la inclusión) entonces según 4.3, existe una sucesión espectral $E_r \Rightarrow \text{Tor}_{\wedge}(B, C)$ con $E_2 = \text{Tor}_{\wedge//\wedge}(B, \text{Tor}_{\wedge}(K, C))$. Pero $A//\wedge = A/\text{Ker } g \cong B$ por 1) luego $E_2 = \text{Tor}_B(B, \text{Tor}_{\wedge}(K, C))$ lo que implica que por ser B , B -libre $E_2^p = 0$ $p \neq 0$,

$E_2^{0,*} = \text{Tor}_\wedge(K, C)$, pero esto implica $E_2 = E_\infty$ y por tanto $\text{Tor}_\wedge(B, C) = \text{Tor}_\wedge(K, C)$, si aplicamos ahora 4.4 obtenemos el enunciado de la proposición. Donde el grado de las u_i y el significado de $\Gamma \subset \wedge$ es el dado en 4.4.

Corolario 4.8. — Dadas las álgebras A, B, C y las aplicaciones

$$C \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} B$$

donde 1) g es sobre

2) $\text{Ker } g$ es ideal de Borel en A

3) $f(\text{Ker } g)$ genera un ideal de Borel I en C .

entonces $\text{Tor}_\wedge(B, C) = [u_1, \dots, u_r] \otimes C/I$.

Demostración: Basta aplicar en 4.7 el corolario 4.5.

Corolario 4.9. — Dadas las álgebras A, B , el álgebra de polinomios Ω y las aplicaciones

$$\Omega \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} B$$

donde 1) g es sobre

2) $\text{Ker } g$ es ideal de Borel en A . Entonces

$$\text{Tor}_\wedge(B, \Omega) = E[u_1, \dots, u_r] \otimes J(\Omega // \wedge)$$

(si llamamos I al ideal engendrado por $f(\text{Ker } g): E \otimes J(\Omega/I)$).

Demostración: Basta señalar que $\wedge \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega/I \rightarrow K$ es una sucesión coexacta (siendo $\wedge$ el definido en 4.7) y aplicar sucesivamente 4.7 y 4.6.

Teorema 4.10. — Sean A y B objetos de $\wedge/\wedge$ y $f: A \rightarrow B$ un morfismo de álgebras tal que

1) $(\text{Ker } f)$ es ideal de Borel en A

2) $(f\bar{A}) \cdot B = J$ es ideal de Borel en B

Entonces

$$\text{Tor}_\wedge(B, K) \cong B/J \otimes \text{Tor}_T(K, K)$$

donde $\Gamma = K[x_1, \dots, x_n]$, siendo $x_1, \dots, x_n$ un sistema minimal de generadores para $(\text{Ker } f)$.

Demostración: Por ser $x_1, \dots, x_n$ sucesión especial A es Γ -libre. Si tomamos una E -sucesión $y_1, \dots, y_m$ generando J , podremos definir $\wedge = K[y_1, \dots, y_m]$ y por lo mismo B será $\wedge$ -libre. Podemos ahora aplicar 4.3, por lo que existirá una sucesión espectral

$$E_r \Rightarrow \text{Tor}_\wedge(B, K) \text{ con } E_2 = \text{Tor}_\wedge(B, \text{Tor}_T(K, K))$$

pero como B es $\wedge$ -libre $\Rightarrow E_2 = E_\infty = E_2^{0,*} = B \otimes_\wedge \text{Tor}_T(K, K) \cong (B \otimes_\wedge K) \otimes \text{Tor}_T(K, K)$ por ser trivial la acción de

$$\wedge \text{ sobre } \text{Tor}_T(K, K); \text{ pero } B \otimes_\wedge K \cong B \otimes_A K \cong B/J$$

de donde se sigue el enunciado.

IV. Aplicaciones

§ 1. Espacios clasificantes. Grupos de Weyl.

En este apartado se recuerdan algunos resultados referentes a homología de espacios clasificantes que necesitaremos utilizar más adelante. (K cuerpo de característica p).

Los demás notables son los siguientes. Sea G un grupo de Lie compacto y H un subgrupo cerrado y conexo de G; BG y BH serán los espacios clasificantes de G y H respectivamente y EG y EH sus espacios universales.

1) $H^*(G, K)$ es un álgebra exterior con un sistema de generadores primitivos $e_1, \dots, e_n$ de grado impar. ($n = \text{rango de } G$).

2) $H^*(BG, K)$ es un álgebra de polinomios $K[y_1, \dots, y_n]$ con $\text{grad. } y_i = \text{grad. } e_i + 1$. (Ver [1] T. 19.1 Pr. 7.2; [2] 1.5, 2.8).

3) Disponemos del fibrado $G/H \rightarrow BH \rightarrow BG$ que nos induce $H^*(BG) \xrightarrow{\rho^*(H, G)} H^*(BH) \xrightarrow{\sigma^*} H^*(G/H)$ donde σ^* es el homomorfismo clasificante del fibrado $H \rightarrow G \rightarrow G/H$.

4) $\rho^*(H, G)$ a través de la transgresión viene definida por la inclusión ([1]. Prop. 21.3).

5) Si T es un toro maximal de G y S lo es de H, con $S \subset T$ disponemos del diagrama (G conexo),

$$\begin{array}{ccccc} & & H^*(BS) & \xleftarrow{\rho^*(S, T)} & H^*(BT) \\ & \rho^*(S, H) \uparrow & & & \uparrow \rho^*(T, G) \\ H^*(BH) & & \xleftarrow{\rho^*(H, G)} & & H^*(BG) \end{array}$$

donde si G, G/T, T, H/S son sin p-torsión $\rho^*(T, G)$ y $\rho^*(S, H)$ son biunívocos ([1] Prop. 29.1) y la imagen de $\rho^*(T, G)$ es $I_G \otimes K$ (siendo I_G los invariantes por el grupo de Weyl de G); pero $\rho^*(S, T)$ viene inducida por la inclusión i ([1] 28.1). Luego para calcular $\rho^*(H, G)$ bastará ver cómo actúa i^* sobre los generadores de $I_G \otimes K$.

Observación: Cuando H es subgrupo invariante de G, disponemos además del fibrado $BH \rightarrow BG \rightarrow B(G/H)$.

§ 2. Espacios homogéneos.

En este párrafo veremos la aplicación de lo realizado a la determinación de la cohomología de espacios homogéneos; K será un cuerpo $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ será un espacio fibrado de Serre con B simplemente conexo, entonces (Teor. II.1.6) sabemos que se le asocia una sucesión espectral (de E.-M.) tal que $E_r \Rightarrow H^*(F; K)$;

$$E_2 = \text{Tor}_{H^*(B)}(K, H^*(E)) \text{ además (II.3.1) } F^0 H^*(F; K) = \text{im } \{ i^* : H^*(E; K) \longrightarrow H^*(F; K) \}$$

Proposición 2.1. — Sea $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ una fribración cuya sucesión espectral de Eilenberg-Moore, es tal que $E_2 = E_\infty$. Entonces es coexacta la sucesión

$$H^*(B; K) \xrightarrow{\pi^*} H^*(E; K) \xrightarrow{i^*} H^*(F; K)$$

Demostración: $\text{im } i^* = E_\infty^{0,*} = E_2^{0,*} = K \otimes_{H^*(B)} H^*(E)$.

Proposición 2.2. — Sea $F \rightarrow E \rightarrow B$ una fibración con F, E conexos, B simplemente conexo. Sea $H^*(E; K)$ un $H^*(B, K)$ -módulo proyectivo. Entonces es coexacta la sucesión $K \rightarrow H^*(B; K) \rightarrow H^*(E, K) \rightarrow H^*(F, K)$ y como $H^*(B; K)$ -módulo $H^*(E; K) \cong H^*(B; K) \otimes H^*(F; K)$.

Demostración: La hipótesis de módulo proyectivo implica que $E_2^{p,q} = 0$ para $p \neq 0$, por tanto $E_2 = E_2^{0,*} = E_\infty^{0,*} = E_\infty$, pero $\text{im } i^* = E_\infty^{0,*}$ luego $H^*(F) = \text{im } i^*$ luego el fibrado es totalmente no homólogo a cero y $H^*(E) \cong H^*(B) \otimes H^*(F)$ ([12], pág. 472, [11]). Para ver la primera parte basta considerar tras esto la proposición anterior.

Estudiaremos ahora el fibrado $G/H \rightarrow BH \rightarrow BG$, siendo G , grupo de Lie compacto y conexo y H subgrupo cerrado y conexo de G . Supondremos además que $H^*(BG, K)$ y $H^*(BH; K)$ álgebras de polinomios con generadores de grado par (Ver § 1).

(Notación: Escribiremos $H^*(A)$ por $H^*(A; K)$ mientras no se preste a confusión).

Proposición 2.3. — En estas condiciones, considerando $H^*(BH)$ como $H^*(BG)$ -módulo mediante ρ^* ; es un módulo finitamente generado.

Demostración: Basta considerar el término E_2 de la sucesión espectral de Serre que es finitamente generado, junto al hecho de ser $H^*(BH)$ noetheriano, lo que induce que E_∞ también lo es y por tanto $H^*(BH)$.

Teorema 2.4. — (Borel). Si rango de G es igual a rango de H ,

- 1) Es coexacta la sucesión $K \rightarrow H^*(BG) \xrightarrow{\rho^*} H^*(BH) \xrightarrow{\sigma^*} H^*(G/H) \rightarrow K$.
- 2) $H^*(BH; K) \cong H^*(BG; K) \otimes H^*(G/H; K)$ como $H^*(BG)$ -módulo.

Demostración: Por 2.3 se puede aplicar III.2.11 y $H^*(BH)$ es $H^*(BG)$ -libre, basta ahora aplicar 2.2 al fibrado para obtener la tesis.

Veamos ahora lo que sucede cuando $\text{rang } G \neq \text{rang } H$.

Notación: $df(H, G; K) = df(H^*(BH; K)/H^*(BG; K))$.

Daremos a continuación una serie de lemas que nos llevan a la demostración del teorema de Baum.

Lema 2.5. — $0 \leq df(H, G; K) \leq \text{rang } G - \text{rang } H$.

Lema 2.6. — Sea T' un toro maximal de H . Entonces

$$\text{Tor}_{H^*(BG; K)}^{i,*}(K; H^*(BH; K)) \neq 0 \text{ si y sólo si } \text{Tor}_{H^*(BG; K)}^{i,*}(K; H^*(BT', K)) \neq 0$$

Lema 2.7. — Si $i < \text{rang } H - \text{rang } G$; $\text{Tor}_{H^*(BG; K)}^{i,*}(K, H^*(BH; K)) = 0$.

Teorema 2.8. — (Baum). Sea G un grupo de Lie compacto y conexo, H un subgrupo cerrado y conexo de G , con $df(H, G; K) \leq 2$. Entonces

- 1) La graduación asociada a $H^*(G/H; K)$, es isomorfa al álgebra $\text{Tor}_{H^*(BG)}(K, H^*(BH))$
- 2) Es coexacta la sucesión $H^*(BG; K) \rightarrow H^*(BH; K) \rightarrow H^*(G/H; K)$.

Demostración: Aplicando III.4.6

$$\text{Tor}_{H^*(BG)}(K, H^*(BH)) = E[u_1, \dots, u_r] \otimes J(H^*(BH)/H^*(BG)),$$

con $r = \text{rang } G - \text{rang } H - df(H, G) \geq \text{rang } G - \text{rang } H - 2$. Entonces para $i < -2$, $J(H^*(BH)/H^*(BG))^{i,*} = 0$ según 2.7, y si consideramos la sucesión espectral de Eilenberg-Moore asociada al fibrado, los únicos términos distintos de cero serán $E_2^{0,q}$, $E_2^{-1,q}$, $E_2^{-2,q}$ (con q par), por tanto todos sus elementos son ciclos para d_2 , luego $E_2 = E_\infty$, entonces aplicando II.1.6 obtenemos 1) y aplicando 2.1 obtenemos 2).

Corolario 2.9. — En las condiciones del teorema, la sucesión espectral de Eilenberg-Moore asociada al fibrado $G/H \rightarrow BH \rightarrow BG$ es tal que

$$1) E_2 = E[u_1, \dots, u_r] \otimes J(H^*(BH)/H^*(BG))$$

$$2) Gr(H^*(G/H)) \cong E_2.$$

donde $r = \text{rang } G - \text{rang } H - \text{df}(H, G)$.

Demostración: Basta tener en cuenta II.1.6, 2.8 y el corolario III.4.6.

§ 3. Casos en que $E_2 = E_\infty$

Los espacios topológicos utilizados serán, como siempre, del tipo de homotopía de un CW-complejo numerable con homología finitamente generada; K será un cuerpo.

Estudiaremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xlongequal{\quad} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & B_0 \end{array}$$

en el que, como siempre, $F \rightarrow E_0 \rightarrow B_0$ es un fibrado de Serre $F \rightarrow E \rightarrow B$, el fibrado inducido por f ; y B_0 simplemente conexo.

En esta situación, se cumple:

Teorema 3.1. — (L. Smith). Si

a) $\pi_0^*: H^*(B_0, K) \rightarrow H^*(E_0; K)$ es sobre

b) $I = \text{Ker } \pi_0^*$ es ideal de Borel en $H^*(B_0, K)$

c) $f^*(I)$ genera en $H^*(B, K)$ un ideal de Borel J .

entonces, la sucesión espectral de Eilenberg-Moore asociada al diagrama es tal que:

1) $E_2 = E[u_1, \dots, u_r] \otimes H^*(B, K)/J$

2) La graduación asociada a $H^*(E, K)$, es isomorfa a

$$Gr(H^*(E; K)) \cong \text{Tor}_{H^*(B_0, K)}(H^*(E_0; K), H^*(B; K) = E_2).$$

Demostración: 1) Se sigue directamente de III.4.8 y II.1.5.

Veamos ahora que $E_2 = E_\infty$. Los generadores de $E_2^{p,*}$ tienen según 1), grado homológico 0, -1 (pues los elementos u_i tienen por grado: $\text{grad. } u_i = (-1, *)$ y los elementos de $H^*(B)/J = K \otimes_r H^*(B) = \text{Tor}_{r,*}^0(K, H^*(B))$ tienen por grado $(0, *)$).

Por lo tanto, como d_2 aplica:

$$d_2: E_2^{0,*} \rightarrow E_2^{2,*} = 0 \quad (p = 2 > 0)$$

$$d_2: E_2^{-1,*} \rightarrow E_2^{1,*} = 0 \quad (p = 1 > 0)$$

y con mayor motivo le sucede a d_r con $r > 2$; todos los elementos son ciclos y no hay bordes luego $E_2 = E_3 = \dots = E_\infty$.

Pero según el Teor. II.1.5 $E_r \Rightarrow H^*(E, K)$ y $E_2 = \text{Tor}_{H^*(B_0)}(H^*(E_0), H^*(B))$ luego queda asimismo demostrado 2). $\ddagger$

Colorialio 3.2. — Sea $F \rightarrow E_0 \rightarrow B_0$ un fibrado de Serre con B_0 simplemente conexo. Cumpléndose

a) $\pi_0^*: H^*(B_0, K) \rightarrow H^*(E_0; K)$ sobre

b) $\text{Ker } \pi_0^*$ ideal de Borel en $H^*(B_0, K)$.

Entonces la sucesión espectral de Eilenberg-Moore asociada al fibrado es tal que:

1) $E_2 = E[u_1, \dots, u_r]$.

2) $\text{Gr}(H^*(F; K)) = E_2$.

Demostración: Basta aplicar el teorema anterior al caso en que B es un punto y por consiguiente E se identifica con F . $\#$

(Bastaría asimismo utilizar II.1.6 en lugar de II.1.5).

Corolario 3.3. — En las hipótesis de 3.1, tenemos $\text{Ker } \pi^* = J$.

Vamos a estudiar ahora el caso de espacio Riemannianos simétricos. Sea el fibrado $(E, p, B, G/H)$ y su diagrama clasificante

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xlongequal{\quad} & G/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & BH \\ \downarrow p & & \downarrow \rho \\ B & \xrightarrow{f} & BG \end{array} \quad (1)$$

Siendo G , grupo de Lie compacto y conexo y H subgrupo cerrado de G . Supongamos que B es un espacio Riemanniano simétrico y compacto. Probaremos que en esta situación, la sucesión espectral de Eilenberg-Moore asociada, también cumple que $E_2 = E_\infty$.

Para ello utilizaremos la cohomología de Rham para variedades modeladas sobre espacios de Hilbert separables (observando que todo espacio Riemanniano simétrico y compacto es una variedad analítica con métrica Riemanniana).

(Para la cohomología de Rham ver por ejemplo «Introducción To Differentiable Manifolds», S. Lang. o «Variétés Differentiables», G. de Rham).

Daremos ahora algunos resultados conocidos en cohomología de Rham.

Teorema de Hodge. — Si M es una variedad Riemanniana compacta, cada clase de cohomología de $H^*(M, \mathbb{R})$ contiene una única forma armónica.

Teorema. — (E. Cartan). Si M es espacio Riemanniano simétrico compacto, las formas armónicas; y el producto de dos formas armónicas será de nuevo armónica.

Con esto dicho podemos enunciar el teorema.

Teorema 3.4. — (Baum-Smith). En las condiciones dadas para el diagrama (1), existe un isomorfismo de álgebras

$$H^*(E) \cong \text{Tor}_{H^*(BG)}(H^*(B), H^*(BH)).$$

(Coeficientes en $\mathbb{R}$).

Demostración: Podemos, en primer lugar, suponer que BH y BG son variedades diferenciables modeladas sobre espacios separables de Hilbert. (Ver [5]); y suponer asimismo que por aproximación las aplicaciones son diferenciables.

Por II.1.5 sabemos que existe $E_r \Rightarrow H^*(E) \cong \text{Tor}_{R^*(BG)}(R^*(B), R^*(BH))$ con $E_2 = \text{Tor}_{H^*(BG)}(H^*(B), H^*(BH))$ (donde $R^*(A)$ expresa el álgebra de cocadenas de Rham).

Entonces el isomorfismo se establece mediante el morfismo composición siguiente

$$\begin{array}{c}
 \text{Tor}_{H^*(BG)}(H^*(B), H^*(BH)) \\
 \downarrow \text{Tor}_1(0, 1) \\
 \text{Tor}_{H^*(BG)}(R^*(B), H^*(BH)) \\
 \downarrow \text{Tor}_1(1, \beta) \\
 \text{Tor}_{H^*(BG)}(R^*(B), R^*(BH)) \\
 \downarrow \text{Tor}_\alpha(1, 1) \\
 \text{Tor}_{R^*(BG)}(R^*(B), R^*(BH))
 \end{array}$$

donde $\alpha: H^*(BG) \rightarrow R^*(BG)$ y

$\beta: H^*(BH) \rightarrow R^*(BH)$ a cada generador del álgebra de cohomología ($H^*(BG) = R[x_1, \dots, x_n]$; $n = \text{rang } G$), le hacen corresponder un cociclo representante.

Por otra parte $\theta: H^*(B) \rightarrow R^*(B)$ a cada clase de cohomología le hace corresponder la única forma armónica contenida en ella. (Teoremas de Hodge y Cartan); y es aquí donde se necesita la hipótesis de que B sea espacio simétrico.

Tanto α y β como θ inducen isomorfismos en homología luego las aplicaciones del diagrama son isomorfismos.

§ 4. Fibraciones sobre espacios simétricos.

Consideraremos espacios fibrados sobre un espacio Riemanniano simétrico y compacto, B , y los diagramas del párrafo anterior

$$\begin{array}{ccc}
 G/H & \longrightarrow & G/H \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E & \longrightarrow & BH \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{f} & BG
 \end{array} \quad (1)$$

Donde G es grupo de Lie compacto y conexo y H subgrupo cerrado de G . Entonces según 3.4, tenemos que

$$H^*(E, R) = \text{Tor}_{H^*(BG, R)}(H^*(B, R), H^*(BH, R))$$

Trataremos de estudiar ahora las situaciones en que la cohomología de E nos será conocida, por saber calcular el correspondiente functor Tor , aplicando los cálculos desarrollados en el Cap. III de este trabajo.

(En este apartado trabajaremos con cohomología con coeficientes reales y escribiremos $H^*(X)$ por $H^*(X, R)$).

Consideremos el morfismo de álgebras de polinomios

$$\rho^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(BH)$$

y sea $x_1, \dots, x_n$ un sistema minimal de generadores para $\text{Ker } \rho^*$. Si suponemos que el ideal ($\text{Ker } \rho^*$) es de Borel, entonces $x_1, \dots, x_n$ formarán E-sucesión y la subálgebra de $H^*(BG)$, generada por ellos será isomorfa a $R[x_1, \dots, x_n]$ (III.2.12). Consideremos la restricción de f^* a dicha subálgebra

$$f^*: R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow H^*(B)$$

$f^*(x_1), \dots, f^*(x_n)$ generan un ideal en $H^*(B)$; seleccionamos entre ellos un sistema minimal de generadores $f^*(x_1), \dots, f^*(x_s)$ (suponiendo reordenadas las variables); $R[x_1, \dots, x_s] \subset R[x_1, \dots, x_n]$. En estas condiciones, tenemos:

Teorema 4.1. — Considerando el diagrama (1) si se cumple

- 1) que $\rho^*(H, G)$ es sobre
- 2) que $\text{Ker } \rho^*$ es ideal de Borel.

entonces $H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_r] \otimes \text{Tor}_{R[x_1, \dots, x_s]}(H^*(B), R)$ donde bigrad. $u_i = (-1, \text{grad. } x_{s+i})$ desde $i = 1, \dots, r$; siendo $r = n - s$.

Demostración: Hechas las consideraciones que preceden al teorema, basta aplicar simultáneamente III.4.7 y 3.4. $\#$

Corolario 4.2. — En las condiciones de 4.1, si además se cumple que $f^*(\text{Ker } \rho^*)$ genera un ideal de Borel en $H^*(B)$, J. Entonces

$$H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_r] \otimes H^*(B)/J$$

Demostración: Basta aplicar al teorema anterior III.4.5. $\#$

Proposición 4.3. — Si $\text{rang. } G = \text{rang. } H$ siendo ρ^* sobre, se cumple que

$$H^*(E) \cong H^*(B)$$

Demostración: $\text{rang. } G = \text{rang. } H$ según un teorema de Borel. (Ver [1] 26.1) implica que ρ^* es inyectiva luego $\text{Ker } \rho^*$ será el ideal cero y asimismo $f^*(\text{Ker } \rho^*)$, luego podemos aplicar 4.2 con $J = 0$ y $r = n$. $\#$

Consideremos ahora el morfismo

$$f^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(B)$$

y tomemos un sistema minimal de generadores para $\text{Ker } f^*$, que supondremos ideal de Borel, $y_1, \dots, y_m$. Sea $R[y_1, \dots, y_m]$ la subálgebra generada por ellos (III.2.12), consideramos la restricción de ρ^* a dicha subálgebra

$$\rho^*: R[y_1, \dots, y_m] \rightarrow H^*(BH)$$

y seleccionamos entre los $\rho^*(y_i)$ un sistema minimal de generadores del ideal generado por ellos:

$$\rho^*(y_1), \dots, \rho^*(y_t).$$

(suponemos reordenadas las variables). Teniendo en cuenta todo esto, podemos enunciar:

Teorema 4.4. — En las condiciones del diagrama (1), si se cumple

- 1) $f^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(B)$ es sobre.
- 2) $\text{Ker } f^*$ ideal de Borel en $H^*(BG)$

entonces $H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_q] \otimes \text{Tor}_{R[y_1, \dots, y_t]}(R, H^*(BH))$.

Donde bigrad. $u_i = (-1, \text{grad. } y_{t+i})$ ($i = 1, \dots, q$) con $q = m - t$.

Demostración: Basta aplicar simultáneamente III.4.7 y 3.4. $\#$

Corolario 4.5. — En las condiciones de 4.4 si además $\rho^*(\text{Ker } f^*)$ genera un ideal de Borel en $H^*(BH)$, I. Entonces

$$H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_q] \otimes H^*(BH)/I$$

Demostración. — Basta aplicar a 4.4, III.4.5.

4.6. — Observemos que los cálculos realizados en § 2 sobre $\text{Tor}_{H^*(BG)}(R, H^*(BH))$; podrán aplicarse a $\text{Tor}_{R[y_1, \dots, y_r]}(R, H^*(BH))$ en el teorema 4.4.

Observemos asimismo que el corolario 4.2 se cumple sin necesidad de exigir que B sea espacio simétrico, pues está en las condiciones de 3.1 y entonces $E_2 = E_\infty$ (luego no hace falta aplicar 3.4).

Y se cumple, considerando el diagrama (1) simplemente como de espacios topológicos, tomando coeficientes en un cuerpo cualquiera K .

Estudiemos ahora el caso de un fibrado principal sobre un espacio Riemanniano simétrico y compacto B , a través de su diagrama clasificante. Donde G es un grupo de Lie compacto y conexo. ($K = R$).

$$\begin{array}{ccc} G & \rightleftharpoons & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E_G \\ \downarrow & & \downarrow g \\ E & \xrightarrow{f} & BG \end{array} \quad (2)$$

como sabemos, si $\text{rang } G = n$, $H^*(BG) = R[x_1, \dots, x_n]$.

$$f^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(B)$$

Los $f^*(x_1), \dots, f^*(x_n)$ generan un ideal en $H^*(B)$, seleccionamos entre los $f^*(x_i)$ un sistema minimal de generadores, y reordenamos los subíndices de modo que éstos sean $f^*(x_1), \dots, f^*(x_s)$.

Teorema 4.7. — En estas condiciones se cumple que

$$H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_r] \otimes \text{Tor}_{R[x_1, \dots, x_s]}(H^*(B), R)$$

donde bigrad. $u_i = (-1, \text{grad. } x_{s+i})$, ($i = 1, \dots, r$) $r = n - s$.

Demostración: $g^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(EG) \cong R$, luego g^* cumple las condiciones de III.4.7, $\text{Ker } g^* = \overline{H^*(BG)} = (x_1, \dots, x_n)$ que es evidentemente de Borel. Por tanto basta aplicar 3.4 en el caso en que $H = \{e\}$ para obtener la tesis.

Corolario 4.8. — Si se cumple en (2) que $f^*(\overline{H^*(BG)})$ es ideal de Borel I . Entonces

$$H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_r] \otimes H^*(B)/I = E[u_1, \dots, u_r] \otimes H^*(B)/f^* \quad (1)$$

Demostración: Basta aplicar al teorema anterior III.4.5.

((1) denotamos por $H^*(B)/f^*$ a $H^*(B)/f^*(\overline{H^*(BG)})$. $H^*(B)$, notación de [4]).

Sea ahora $f^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(B)$. Supongamos que $\text{Ker } f^*$ es ideal de Borel, y seleccionamos un sistema minimal de generadores de $(\text{Ker } f^*)$, $y_1, \dots, y_m$; $R[y_1, \dots, y_m]$ será la subálgebra de $H^*(BG)$ generada por ellos (es subálgebra por el lema III.2.12).

Teorema 4.9. — En las condiciones del diagrama (2), si se cumple

- 1) f^* es sobre
- 2) $\text{Ker } f^*$ es ideal de Borel

entonces $H^*(E) \cong E[u_1, \dots, u_m]$ donde bigrad. $u_i = (-1, \text{grad } y_i)$.

Demostración: Puesto que $g^*(\text{Ker } f^*) = 0$ podemos aplicar el corolario 4.5.

Observemos que 4.8 se cumple también cuando B no es un espacio simétrico pues bastará aplicar el teorema 3.1, en cuyas condiciones está, en lugar del 3.4 que exige que B sea simétrico.

Luego podremos aplicarlos al caso de un espacio M localmente simétrico, algunos de cuyos fibrados principales tienen verdadero interés.

Ejemplo. Consideremos el espacio simétrico $B = SU(2n)/SO(2n)$ con n impar. Vamos a considerar un fibrado sobre B de fibra G/H con $G = U(2k)$, $H = Sp(k)$ con $n < 2k$, como en el diagrama (1).

Comenzaremos calculando la cohomología de B utilizando las técnicas de § 2.

$$\begin{aligned} \rho^*(SO(2n), SU(2n)) : H^*(BSU(2n)) &\rightarrow H^*(BSO(2n)) \\ R[x_4, x_6, \dots, x_{4n}] &\rightarrow R[y_4, y_6, \dots, y_{4n-4}, y'_{2n}] \end{aligned}$$

con

$$\rho^*(x_{4i}) = y_{4i} \text{ para } i = 1, \dots, n-1, \quad \rho^*(x_{4n}) = y'_{2n}{}^2$$

$\rho^*(x_{4i+2}) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$ (ver por ejemplo Sem. Cartan 59-60 exp. 17), donde los subíndices nos expresan el grado de cada elemento. Como la imagen es ideal de Borel $H^*(BSO(2n))/H^*(BSU(2n))$ es E-álgebra y tiene deficiencia cero (III.3.7), luego

$$J(H^*(BSO(2n))/H^*(BSU(2n))) \cong R[y'_{2n}]/(y'_{2n}{}^2).$$

Luego según (III.4.6)

$$H^*(B) = E[v_5, v_9, \dots, v_{4n-3}] \otimes R[y'_{2n}]/(y'_{2n}{}^2).$$

Ahora consideremos la aplicación $\rho^*(H, G)$ con $H = Sp(k)$, $G = U(2k)$,

$$\begin{aligned} \rho^*(H, G) : H^*(BU(2k)) &\rightarrow H^*(BSp(k)) \\ R[x_2, x_4, \dots, x_{4k}] &\rightarrow R[z_4, z_8, \dots, z_{4k}] \end{aligned}$$

dada por

$$\rho^*(x_{4i}) = z_{4i} \quad (i = 1, \dots, k); \quad \rho^*(x_{4i-2}) = 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

Luego $\rho^*(H, G)$ es sobre y $\text{Ker } \rho^* = (x_2, x_6, \dots, x_{4k-2})$ es ideal de Borel y estamos en las condiciones de 4.1. Bastaría ahora determinar f^* en cada fibrado para tener perfectamente determinada la cohomología de E .

Supongamos que f^* venga definida sobre $R[x_2, x_6, \dots, x_{4k-2}]$ del siguiente modo:

$$f^*(x_{2n}) = y'_{2n}$$

y los demás generadores a cero (lo que es posible pues n es impar y $n < 2k$, lo que implica que x_{2n} esté entre los x_{4i-2}). Entonces aplicando 4.1 obtenemos

$$H^*(E) \cong E[u_1, u_5, \dots, u_{2n-5}, u_{2n+3}, \dots, u_{4k-3}] \otimes \text{Tor}_{R[x_{2n}]}(H^*(B), R)$$

pero este functor Tor es la homología del complejo

$$s_1(E_1[u_{2n-1}]) \otimes H^*(B) \xrightarrow{d} H^*(B) \xrightarrow{d} 0$$

con $d(b) = 0$ para $b \in H^*(B)$

$$d(u_{2n-1} \otimes b) = y'_{2n} b (= 0 \text{ si } b \in (y'_{2n}) \text{ en } H^*(B))$$

por tanto

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{R[x_{2n}]}^{0,*}(H^*(B), R) &= H^*(B)/(y'_{2n}) = E[v_5, v_9, \dots, v_{4n-3}] \\ \text{Tor}_{R[x_{2n}]}^{-1,*}(H^*(B), R) &= (u_{2n-1} \otimes y'_{2n}) \otimes E[v_5, \dots, v_{4n-3}] = \\ &= E_1[w_{4n-1}] \otimes E[v_5, \dots, v_{4n-3}] \end{aligned}$$

en definitiva tenemos que

$$H^*(E) = E[u_1, u_5, \dots, u_{2n-5}, u_{2n+3}, \dots, u_{4k-3}, v_5, \dots, v_{4n-3}, w_{4n-1}]$$

y hemos calculado la cohomología del supuesto fibrado E.

§ 5. Otros ejemplos.

Veamos ahora algunas aplicaciones, en el caso que B no sea espacio simétrico.

Según hemos señalado en el párrafo anterior, en los corolarios 4.2 y 4.8 no es necesaria la hipótesis de espacio simétrico. Supongamos que es un espacio localmente simétrico M; los diagramas (1) y (2) de § 4, se convierten

$$\begin{array}{ccc} G/H & \rightleftharpoons & G/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & BH \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & BG \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \rightleftharpoons & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & BG \end{array}$$

al primero le podremos aplicar T.3.1 y al segundo, la siguiente proposición.

Proposición 5.1. — Si en el segundo diagrama, $f^*(H^*(BG))$ es ideal de Borel I, en $H^*(M)$. Entonces

$$\text{Gr}(H^*(E)) \cong E[u_1, \dots, u_r] \otimes H^*(M)/I$$

con $\text{grad. } u_i = (-1, \text{grad. } x_{i+1})$; $r = n - s$. Siendo s el número de elementos de un sistema minimal de generadores de I.

(Coeficientes en un campo K).

Demostración: Basta aplicar 3.1 pues g^* es sobre y su núcleo es $\overline{H^*(BG)}$ que es ideal de Borel. $\sharp$

Ahora bien esto tiene interés en las variedades localmente simétricas puesto que en ellas disponemos del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \pi_0 \swarrow & & \searrow \\ X = G/K & & \Gamma \backslash G \\ \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & M & \end{array}$$

donde X es el recubrimiento universal de M, y es espacio simétrico simplemente conexo y π_0, π_1 son fibrados principalmente de fibra el subgrupo de Lie de G, K; siendo $\Gamma \backslash G$ espacio compacto. (Ver Matsushima: *On betti numbers of compact, locally symmetric...* Osaka Math. J. 14, 1962, Matsushima and Murakami *On certain cohomology groups...* Osaka Math. J. 2, 1965, otros trabajos de estos dos autores, que sería prolijo enumerar, y por ejemplo Borel *Compact Clifford-Klein forms of...* Topology Vol. 2, núm. 2, 1963).

Las técnicas por nosotros desarrolladas aplicadas al fibrado

$$K \longrightarrow \Gamma \backslash G \longrightarrow M$$

ponen en relación las cohomologías de M y $\Gamma \backslash G$, lo que está en la dirección de los trabajos precitados.

FIBRADOS CON FIBRA UNA VARIEDAD DE STIEFFEL

Terminaremos este trabajo dando una aplicación al caso en que las fibras sean variedades de Stiefel. Sea el diagrama de espacios topológicos (en el sentido de este trabajo) y K un cuerpo cualquiera

$$\begin{array}{ccc}
 V_{n,r} & \rightleftharpoons & V_{n,r} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E & \longrightarrow & BSO(n-r) \\
 \downarrow p & & \downarrow \rho \\
 B & \xrightarrow{f} & BSO(n)
 \end{array}$$

En este diagrama si $\xi = (E, p, B)$ es totalmente no homólogo a cero se cumplen las hipótesis del teorema de Smith (ver [8] ejemplo 3)) y

$$\text{Gr}(H^*(E)) \cong E_2 = \text{Tor}_{H^*B(SO(n), K)}(H^*(B, K), H^*(BSO(n-r), K))$$

el cálculo de Tor podrá realizarse aplicando el teorema III.4.7 y los corolarios y proposiciones subsiguientes.

Existen cuatro casos posibles en cuanto a las paridades de n y $n-r$. Siempre que $n-r$ es impar la aplicación ρ^* es sobre y $(\text{Ker } \rho^*)$ es ideal de Borel, por lo que en ese caso se puede aplicar el teorema 4.1 (con coeficientes en un campo cualquiera). Sin embargo cuando $n-r$ es par, aparece un generador de grado $n-r$: y'_{n-r} en $H^*(BSO(n-r))$, cuyo cuadrado es imagen de un generador de $H^*(BSO(n))$, por lo que ρ^* no es sobre y no se puede aplicar el Teor. 4.1; en este caso solamente si f^* es sobre y $\text{Ker } f^*$ ideal de Borel podrían aplicarse los teoremas de § 4.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en su mayor parte disfrutando de una beca del Plan de Formación del Personal Investigador, en la Facultad de Ciencias de Zaragoza y bajo la dirección del Profesor José Luis Viviente Mateu, al que quiero expresar mi más sincero agradecimiento por sus orientaciones y aportaciones, que han hecho posible la realización del mismo, así mismo quiero agradecer a mis compañeros de Departamento y demás profesores de esta Facultad sus sugerencias y atenciones, así como a María Rosa Galindo su cuidada labor mecanográfica y el tiempo extraordinario que ello le ha exigido.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BOREL: *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*. Ann. of Math. 57 (1953), 115-207.
- [2] A. BOREL: *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts conexas*. Am. J. Math. 76 (1954), 273-342.
- [3] a) P. F. BAUM: *On the cohomology of homogeneous spaces*. Topology 7 (1968), 15-38.
b) P. F. BAUM-L. SMITH: *The real cohomology of differentiable fibre bundles*. Comment. Math. Helvet, 42 (1967), 171-179.
- [4] H. CARTAN-EILENBERG: *Homological Algebra*. Princenton University Press, 1956.
- [5] J. EELLS: *A setting for global analysis*. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 751-807.
- [6] S. EILENBERG-J. C. MOORE: *Homology and fibrations*. Comment. Math. Helv. 40 (1966), 199-236.
- [7] D. HUSEMOLLER: *Fibre Bundles*. McGraw-Hill (1966).
- [8] S. MACLANE: *Homology*. Academic Press. Springer-Verlag (1963).
- [9] J. MOORE: *Algebre homologique et des espaces classificants*. Sem. Cartan, 1959-60. Exposé 7.
- [10] NORTHCOTT: *An introducción to homological algebra*. Cambridge Univ. Press. 1966.
- [11] J. F. SÁENZ: *Homología singular de espacios fibrados, según Serre*. Sem. de Geom. Diffe. de F. C. Zaragoza, 1969-70. IV.
- [12] J. P. SERRE: *Homologie singuliere des espaces fibrés. Aplications*. Ann. of Math. 54
- [13] L. SMITH: *Homological álgebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence*. Trans. of A. M. S. 129 (1967), 58-93.
- [14] L. SMITH: *Lectures on the Eilengerg-Moore spectral sequence*. Lectures Notes in Math. 134 (1970).
- [15] E. SPANIER: *Algebraic Topology*. McGraw-Hill (1966).
- [16] J. A. WOLF: *Symetric spaces which are real cohomology spheres*. Journal of Dif. geometrh 3 (1969), 59-68.
- [17] ZARISKI-SAMUEL: *Conmutative Algebra*. I, II, Van Nostrand, Princenton (1958-60).
- [18] J. F. SÁENZ: *El functor Tor y la sucesión espectral de Eilenberg-Moore*. Tesis doctoral.

MÉTODOS ANALÍTICOS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CÁLCULO DE ÓRBITAS DE SATELITES ARTIFICIALES*

P O R

R. C I D

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos.
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

The motion of an artificial satellite in the gravitatory field of the Earth is considered. A revision of different resolution methods on this problem is made. Special references to different intermediate orbits are given (Sterne, Garfinkel, Aksnes, Vinti) and also to the perturbation methods in canonical (Von Zeipel, Hori, Deprit) or non canonical form (Kamel, Calvo, etc.) employed in the resolution of this problem.

Introducción

Un satélite artificial que se mueve alrededor de la Tierra, está sometido a fuerzas que provienen de la atracción terrestre, la atracción luni-solar, el roce con la atmósfera terrestre, la presión de la radiación solar, efectos electromagnéticos, choques con meteoritos, etc.

En condiciones ordinarias la fuerza perturbadora más importante se origina por la forma esferoidal de nuestro planeta, por lo cual es frecuente estudiar el problema de movimiento de un satélite artificial bajo la acción exclusiva de la atracción terrestre, como haremos en este artículo.

Consideremos, pues, un sistema de ejes ecuatoriales con origen O en el centro de gravedad de la Tierra, y sean R_e el radio ecuatorial terrestre, M la masa total de la Tierra, G la constante de gravitación y μ una constante dada por la expresión $\mu = GM$.

Entonces, para un satélite $P(x_1, x_2, x_3)$, cuyas coordenadas polares esféricas son: Su radio vector r , su declinación o latitud Φ y su ascensión recta o longitud λ , el potencial V creado por la Tierra sobre P , viene definido por la fórmula

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n J_{nk} P_{nk}(\sin \Phi) \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \right] \quad (1.1)$$

donde J_n , J_{nk} , se denominan armónicos zonales y tesserales, respectivamente, y son constantes, al igual que los argumentos λ_{nk} .

* Este trabajo ha sido presentado en las Primiras Jornadas Matemáticas Luso-Españolas, celebradas en Lisboa en abril de 1972.

Como se sabe, $P_n(z)$ es un polinomio de Legendre de grado n , y $P_{nk}(z)$ un polinomio asociado de grado n y orden k , cuyas expresiones respectivas, son

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{q=0}^n (-1)^q \binom{n}{q} \frac{(2n-2q)!}{(n-2q)!} z^{n-2q} = \begin{cases} \frac{1}{2} n & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{1}{2} n(n-1) & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$P_{nk}(z) = (1-z^2)^{k/2} \frac{d^k [P_n(z)]}{dz^k}$$

De acuerdo con esto, si ponemos

$$U = \frac{\mu}{r} \quad (1.2)$$

$$R = \frac{\mu}{r} \left[- \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{R_0}{r} \right)^n J_{nk} P_{nk}(\sin \Phi) \cos k(\lambda - \lambda_{nk}) \right] \quad (1.3)$$

las ecuaciones fundamentales del movimiento, son

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial (U + R)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Finalmente, introduciendo la función $H(x_1, x_2, x_3, X_1, X_2, X_3)$

$$H = \frac{1}{2} (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) - U - R \quad (1.5)$$

donde $X_i = \dot{x}_i$, las ecuaciones (1.4) adoptan la forma canónica

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial X_i} \quad \frac{dX_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

Varias observaciones deben hacerse:

a) El coeficiente J_2 , es del orden de 10^{-3} , en tanto que los restantes armónicos son del orden 10^{-6} o inferior, lo que permite considerar el hamiltoniano H desarrollable en función potencial de un pequeño parámetro $\varepsilon (\cong J_2)$, es decir

$$H = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \dots$$

De esta forma, puede hablarse de perturbaciones de primer orden, segundo orden, etc., en consonancia con los términos que se consideran en el hamiltoniano.

b) Definida una transformación canónica $(x_k, X_k) \rightarrow (x'_k, X'_k)$, por medio de una función generatriz $S = S(X'_k, x_k, t)$ en la forma

$$X_k = \frac{\partial S}{\partial x_k} \quad x'_k = \frac{\partial S}{\partial X'_k} \quad (\det S_{x'_k x_j} \neq 0) \quad (1.8)$$

los hamiltonianos H y H^* , en ambas variables, están relacionadas por la igualdad

$$H^*(X'_k, x'_k, t) = H(X_k, x_k, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.9)$$

o bien

$$H^* = H \left(\frac{\partial S}{\partial x_k}, x_k, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.10)$$

Entonces, utilizando una función S adecuada, podremos conseguir que el nuevo hamiltoniano H^* sea lo más sencillo posible, lo que permite formular una equivalencia entre la resolución de las ecuaciones canónicas del movimiento y una ecuación en derivadas parciales (método de Jacobi).

Supongamos, por ejemplo, que se puede descomponer el hamiltoniano H en la forma

$$H = H^{(k)}(X_k, x_k, t) + H^{(p)}(X_k, x_k, t) \quad (1.11)$$

y que conocemos una función S que verifica cualquiera de las relaciones

$$H^{(k)} \left(\frac{\partial S}{\partial x_k}, x_k, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \begin{cases} 0 \\ F(X_k) \end{cases}$$

En este caso, el nuevo hamiltoniano será

$$H^* = \begin{cases} 0 \\ F(X_k) \end{cases} + H^{(p)} \left(\frac{\partial S}{\partial x_k}, x_k, t \right) \quad (1.12)$$

y el problema habrá quedado reducido a la integración del nuevo sistema.

c) Entre los sistemas de variables canónicas que han sido más utilizados en el problema del satélite, citaremos los siguientes:

I. Las coordenadas cartesianas y las componentes de la velocidad empleadas en los desarrollos anteriores, cuyo hamiltoniano ha sido definido en (1.5).

II. Las coordenadas polares (r, Φ, λ) y sus momentos conjugados

$$X_1 = \dot{r} \quad X_2 = r^2 \dot{\Phi} \quad X_3 = r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \Phi \quad (1.13)$$

para los cuales el hamiltoniano viene dado en la forma

$$H = \frac{1}{2} \left(X_1^2 + \frac{1}{r^2} X_2^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \Phi} X_3^2 \right) - U - R \quad (1.14)$$

III. Las variables canónicas de Delaunay (L, G, H, l, g, h) , solamente válidas en el caso elíptico, definidas por

$$X_1 = L = \sqrt{\mu a} \quad X_2 = G = L \sqrt{1 - e^2} \quad X_3 = H = G \cos I \quad (1.15)$$

$$x_1 = l = \text{anom. media} \quad x_2 = g = \text{argum. perigeo} \quad x_3 = h = \text{ang. nodo}$$

donde a (= semieje mayor), e (= excentricidad) e I (= inclinación), son tres elementos orbitales. En este caso, el hamiltoniano será

$$H = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} - R = \mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) - \frac{\mu}{r} - R = -\frac{\mu^2}{2X_1^2} - R \quad (1.16)$$

IV. Representando por f la anomalía verdadera, las variables canónicas de Hill, son

$$X_1 = \dot{r} \quad X_2 = G \quad X_3 = H \quad (1.17)$$

$$x_1 = r \quad x_2 = g + f \quad x_3 = h$$

y el hamiltoniano correspondiente

$$H = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2) - \frac{\mu}{r} - R = \frac{1}{2} \left(X_1^2 + \frac{X_2^2}{x_2^2} \right) - \frac{\mu}{x_1} - R \quad (1.18)$$

2. Métodos basados en una órbita intermedia distinta de la kepleriana

Los principales métodos que utilizan como órbita intermedia una solución más general que la kepleriana, son debidos a Sterne (1958), Garfinkel (1959, 1964), Aksnes (1965) y Vinti (1963).

Consideremos el potencial V , definido por (1.1), dividido en dos partes: La primera V_1 , que incluye los términos de J_2 ,

$$V_1 = -\frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{J_2}{r^2} P_2(\sin \Phi) \right] = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \Phi) \right] \quad (2.1)$$

y la segunda V_2 , que contiene los de los restantes armónicos.

Sterne demuestra que, si el potencial es de la forma

$$V_0 = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I \right) - \frac{3J_2}{2rp} (\sin^2 \Phi - \frac{1}{2} \sin^2 I) \right] \quad (2.2)$$

con p (= parámetro), I (= inclinación) constante, la ecuación correspondiente de Hamilton-Jacobi es separable. Y una vez efectuada su integración, en la que intervienen integrales elípticas, el problema queda reducido al estudio de un sistema dinámico con el potencial residual o de perturbación V_R , del tipo

$$V_R = V - V_0 = -\frac{3\mu J_2}{2r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{1}{2} \sin^2 I - \sin^2 \Phi \right) + V_2$$

Por otra parte, Garfinkel ha probado que el potencial

$$V_0 = -\frac{\mu}{r} + 3\mu J_2 \left[\frac{c_1 (\sin^2 \Phi - c_2)}{2r^2} + \frac{c_3}{r} + \frac{c_4}{r^3} \right]$$

donde c_1, c_2, c_3, c_4 , son constantes, es el más general que verifica las siguientes propiedades:

1. La ecuación correspondiente de Hamilton-Jacobi es separable.
2. La solución se puede expresar por medio de funciones elípticas.
3. Dicho potencial se aproxima al del problema considerado.

En este caso, el potencial de perturbación V_R , será

$$V_R = -\frac{\mu J_2}{r} \left[\frac{P_2(\sin \Phi)}{r^2} + \frac{3c_1 (\sin^2 \Phi - c_2)}{2P_2} + 3c_3 + \frac{3c_4}{r^2} \right] + V_2$$

lo que supone una ligera complicación incluso en la obtención de una teoría de primer orden. Naturalmente, la dificultad aumenta extraordinariamente al intentar construir una teoría de segundo orden y el problema ya resulta inabordable al pretender llegar a órdenes superiores.

Aksnes modifica el esquema de cálculo, eligiendo un potencial intermedio

$$V_0 = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu J_2 c_1}{r^2} P_2(\sin \Phi)$$

en el que c_1 se considera como una variable dinámica.

El potencial V_R , será entonces

$$V_R = \frac{\mu J_2}{r^2} P_2(\sin \Phi) \left(\frac{1}{r} - c_1 \right) + V_2$$

y el coeficiente variable c_1 se determina por la condición de que la parte secular de $V_1 - V_0$ sea nula. Así, por ser el promedio de $1/r$, a lo largo de una revolución, igual a $1/p$, se elige $c_1 = 1/p$, al igual que en los métodos de Sterne y Garfinkel, si bien ahora se considera c_1 como una función del parámetro p . Esta elección tiene la ventaja de conservar el potencial V_R en una forma simple, lo que ha permitido a Aksnes construir una teoría de segundo orden,

Garfinkel y Aksnes (1970) han hecho un estudio crítico comparativo de los métodos mencionados, que resumen en el siguiente cuadro:

Autor	c_1	c_2	c_3	c_4	N_1	N_2	N	m'	m
Sterne	$1/p$	$\frac{1}{2} \sin^2 I$	0	$-\frac{1}{6} P_2(\cos I)$	4	8	12	1	1
Garfinkel . .	$1/p$	$\cos^2 I$	$P_2(\cos I) (1 - e^2)^{1/2}$	0	2	8	10	2	1
Aksnes	$1/p$	$1/3$	$2 p^2$	0	3	5	8	1	2

N_1 = número de integrales elípticas que entran en el algoritmo.

N_2 = número de argumentos independientes en el hamiltoniano.

$N = N_1 + N_2$ = medida de la complejidad total del método.

m' = orden de las perturbaciones seculares incorporadas.

m = orden de la teoría completa que existe.

Veamos finalmente el proceso seguido por Vinti. Este autor comienza definiendo el hamiltoniano H en un sistema de coordenadas esferoidales (ρ, η, λ) tales que

$$r \cos \Phi e^{i\lambda} = \sqrt{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)} e^{i\lambda} \quad r \sin \Phi = \rho \eta$$

donde c es una constante a determinar.

En este sistema, las superficies $\lambda = \text{const.}$, son planos que contienen el eje polar, las superficies $\rho = \text{const.}$, elipsoides achatados de revolución y las superficies $\eta = \text{const.}$, hiperboloides alabeados de revolución.

Suponiendo que el potencial intermedio $V_0(\rho, \eta)$ es de simetría axial, el hamiltoniano independiente del tiempo se expresa en la forma

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^2 + c^2}{\rho^2 + c^2 \eta^2} p_\rho^2 + \frac{1 - \eta^2}{\rho^2 + c^2 \eta^2} p_\eta^2 + \frac{1}{(\rho^2 + c^2)(1 - \eta^2)} p_\lambda^2 \right] + V_0(\rho, \eta) = \text{const.}$$

Introduciendo una nueva variable $\xi = \rho/c$, Vinti demuestra que la ecuación anterior es separable, si y sólo si V_0 es de la forma

$$V_0 = \frac{f(\xi) + g(\eta)}{\xi^2 + \eta^2}$$

Además, si se imponen las condiciones de que V_0 satisfaga la ecuación de Laplace $\nabla^2 V_0 = 0$, y no sea singular sobre el eje polar, se tiene

$$V_0 = \frac{b_0 \xi - b_1 \eta}{\xi^2 + \eta^2} = b_0 \operatorname{Re}(\xi + i\eta)^{-1} + b_1 \operatorname{Im}(\xi + i\eta)^{-2}$$

donde b_0, b_1 son constantes a determinar.

Ahora bien, de las igualdades

$$(\xi + i\eta)^2 = \frac{\rho^2}{c^2} - \eta^2 + 2i \frac{\rho\eta}{c} = \frac{\rho^2 + c^2}{c^2} - \eta^2 + 2i \frac{\rho\eta}{c} - 1 = \frac{r^2}{c^2} + 2i \frac{r}{c} \sin \Phi - 1$$

se deduce

$$(\xi + i\eta)^2 = \frac{r^2}{c^2} \left[1 + 2 \frac{ic}{r} \sin \Phi + \frac{c^2}{r^2} \right]$$

y por tanto, para $|c/r| < 1$, se tiene la serie absolutamente convergente

$$(\xi + i\eta)^{-1} = \frac{c}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{ic}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi)$$

y finalmente

$$V_0 = \frac{b_0 c}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) \right] + \frac{b_1 c}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{c}{r} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\sin \Phi)$$

Escogiendo las constantes b_0 , b_1 , c , mediante las condiciones

$$b_0 c' = -\mu = 0, \quad c^2 = R_e^2 J_2, \quad b_1 c^2 = -\mu R_e J_1$$

resulta

$$V_0 = -\frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n J_n' P_n(\sin \Phi) \right]$$

donde

$$\begin{aligned} J_1' &= J_1 = 0 & J_{2k+1}' &= (-1)^k J_1 J_{2k} = 0 \\ J_2' &= J_2 & J_{2k}' &= (-1)^{k+1} J_{2k} \end{aligned}$$

En resumen, el potencial intermedio V_0 nos queda reducido al desarrollo

$$V_0 = -\frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{R_e}{r} \right)^{2k} J_{2k} P_{2k}(\sin \Phi) \right]$$

y la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente a este potencial es separable, pudiendo integrarse por medio de integrales elípticas de primera, segunda y tercera clase.

El proceso concluirá con la integración correspondiente al potencial

$$V - V_0 = -\frac{\mu}{r} \left[\left(\frac{R_e}{r} \right)^3 J_3 P_3(\sin \Phi) + \left(\frac{R_e}{r} \right)^4 (J_4 + J_2^2) P_4(\sin \Phi) + \dots \right]$$

3. Métodos que utilizan las ecuaciones en forma canónica

Los métodos más importantes que utilizan la forma canónica de las ecuaciones del movimiento, son los de von Zeipel (1916-17), Gen Ichiro Hori (1966) y Deprit (1969).

Método de von Zeipel. — Consideremos un sistema canónico del tipo (1.6), en el que su hamiltoniano $H(X_k, x_k)$ no contiene el tiempo explícitamente y es de la forma (1.7).

Entonces, definida una transformación canónica $(X_k, x_k) \rightarrow (X'_k, x'_k)$ por medio de una función generatriz

$$S(X'_k, x_k) = \sum X'_k x_k + \varepsilon S^{(1)}(X'_k, x_k) + \varepsilon^2 S^{(2)}(X'_k, x_k) + \dots \quad (3.1)$$

tal que

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{\partial S}{\partial x_k} = X'_k + \varepsilon S^{(1)}_{x_k} + \varepsilon^2 S^{(2)}_{x_k} + \dots \\ x'_k &= \frac{\partial S}{\partial X'_k} = x_k + \varepsilon S^{(1)}_{X'_k} + \varepsilon^2 S^{(2)}_{X'_k} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

se tendrá un nuevo hamiltoniano $H^*(X'_k, x'_k)$, que supondremos desarrollable en serie

$$H^* = H^{*(0)} + \varepsilon H^{*(1)} + \varepsilon^2 H^{*(2)} + \dots \quad (3.3)$$

Ahora bien, por existir la integral $H = \text{const.}$, tendremos

$$H^*(X'_k, x'_k) = H(X_k, x_k) \quad (3.4)$$

y desarrollando ambos miembros en el entorno del punto (X'_k, x'_k) , e identificando los términos de órdenes $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots$, se llega a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{orden } 0: & \quad H^{(0)} = H^{*(0)} \\ \text{orden } 1: & \quad H^{(1)} + \sum H^{(0)}_{x'_k} S^{(1)}_{x_k} = H^{*(1)} + \sum H^{*(0)}_{x'_k} S^{(1)}_{x_k} \\ \text{orden } 2: & \quad H^{(2)} + \sum H^{(1)}_{x'_k} S^{(1)}_{x_k} + \sum H^{(0)}_{x'_k} S^{(2)}_{x_k} + \frac{1}{2} \sum H^{(0)}_{x'_k x'_j} S^{(1)}_{x_k} S^{(1)}_{x_j} = \\ & \quad = H^{*(2)} + \sum H^{*(1)}_{x'_k} S^{(1)}_{x_k} + \sum H^{*(0)}_{x'_k} S^{(2)}_{x_k} + \frac{1}{2} \sum H^{*(0)}_{x'_k x'_j} S^{(1)}_{x_k} S^{(1)}_{x_j} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Cid y Lahulla (1970), han demostrado que estas ecuaciones (3.5) pueden ser reducidas a la forma invariante

$$H^{(0)} = H^{*(0)}$$

$$[H^{(0)}, W^{(1)}] = H^{*(1)} - H^{(1)} \quad (3.6)$$

$$[H^{(0)}, W^{(2)}] = H^{*(2)} - H^{(2)} - [H^{(1)}, W^{(1)}] - \frac{1}{2} [[H^{(0)}, W^{(1)}], W^{(1)}]$$

donde el símbolo $[]$ representa un paréntesis de Poisson y las funciones

$$W^{(1)} = S^{(1)} \quad , \quad W^{(2)} = S^{(2)} - \frac{1}{2} \sum S^{(1)}_{x'_k} S^{(1)}_{x_k} \quad , \quad \dots$$

son a su vez invariantes, según fue probado por Cid, Calvo y Correas (1971) en un trabajo inédito.

Escritas las ecuaciones del método de von Zeipel en la forma (3.6) cualquiera de ellas es del tipo

$$[H^{(0)}, W^{(n)}] = H^{*(n)} - H^{(n)} - P^{(n)} \quad (3.7)$$

donde $P^{(n)}$, es calculable por las anteriores, y el proceso de von Zeipel consistirá en ir calculando las funciones $H^{*(0)}, H^{*(1)}, H^{*(2)}, \dots, W^{(1)}, W^{(2)}, \dots$, a partir de las ecuaciones (3.6), de manera que ninguna de las funciones $H^{*(i)}$, contenga una cierta variable x , cuya eliminación se persigue.

Esto supone, al menos, que $H^{(0)}$ no contenga x_i , por lo cual la primera ecuación (3.6) se verificará idénticamente. Para cualquiera de las restantes ecuaciones, se efectuará una descomposición

$$H^{(n)} = H_s^{(n)} + H_p^{(n)} \quad P^{(n)} = P_s^{(n)} + P_p^{(n)}$$

y las ecuaciones

$$H^{*(n)} = H_s^{(n)} + P_s^{(n)} \quad [H^{(0)}, W^{(n)}] + H_p^{(n)} + P_p^{(n)} = 0$$

servirá para calcular $H^{*(n)}$ en la primera y $W^{(n)}$ en la segunda por integración.

Este proceso deberá repetirse tantas veces como sea necesario, hasta llegar a un hamiltoniano H^* que sólo contenga las variables X_k . Finalmente, el sistema

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H^*(X_k)}{\partial X_k} = M(X_k) \quad \frac{dX_k}{dt} = 0$$

es fácilmente integrable en la forma

$$X_k = \text{const.} \quad x_k = t M(X_k) + x_k^0 \quad (3.8)$$

El método ha sido aplicado por Brouwer (1959) para obtener una teoría de primer orden y por Kozai (1962) a una teoría de segundo orden, utilizando las variables de Delaunay, cuyo hamiltoniano (1.16) es del tipo

$$H = -\mu^2/2 L^2 - R(L, G, H, l, g, -)$$

La eliminación sucesiva de las variables l y g , proporciona las perturbaciones de corto y largo período, respectivamente, en tanto que las expresiones (3.8) constituyen perturbaciones seculares.

Las soluciones obtenidas presentan pequeños divisores en $e \sim 0$, $I \sim 0^\circ$, $I \sim 180^\circ$, $I \sim I_c$, donde I_c viene dado por la igualdad $1 - 5 \cos^2 I = 0$. Para eliminar estos pequeños divisores puede efectuarse un cambio canónico de variables, toda vez que las ecuaciones (3.6) son invariantes. Recordemos a este respecto los artículos de Izsac (1963), Lyddane (1963), Cid (1969), Lahulla (1970), Cid y Lahulla (1969), etc.

Método de Hori. — Definida la $2n$ -matriz cuadrada I , por las relaciones

$$I = \begin{pmatrix} O^n & E^n \\ -E^n & O^n \end{pmatrix} \quad I^T = I^{-1} = -I \quad (3.9)$$

donde O^n , E^n son las matrices nula y unidad de orden n , e I^T , I^{-1} , las matrices transpuesta e inversa de I , consideremos la solución del sistema hamiltoniano

$$\frac{dx}{d\tau} = -I S_x \quad (3.10)$$

con las condiciones iniciales $x(0) = y$, y donde la función escalar $S = S(x, \epsilon)$ depende del $2n$ -vector del espacio fásico $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ y del parámetro ϵ .

Dicha solución vendrá expresada como función del $2n$ -vector $y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_{2n})$, del parámetro ϵ y de la variable independiente τ ,

$$x = X(y, \epsilon, \tau) \quad (3.11)$$

y de acuerdo con la teoría de transformaciones canónicas (3.11) representa para cada valor de τ una transformación canónica $y \rightarrow x$. Su representación explícita puede lograrse por medio del operador de Lie

$$L_\epsilon f = [S, f] = S_x \cdot I f_x \quad (3.12)$$

Entonces, por un desarrollo de Taylor, para cualquier función $f(x, \varepsilon)$, tendremos

$$f(x, \varepsilon) = f[X(y, \varepsilon, \tau), \varepsilon] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \frac{d^n f}{d \tau^n} \bigg|_{\tau=0, x=y} \quad (3.13)$$

donde

$$\frac{df}{d\tau} \bigg|_{\tau=0, x=y} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{d\tau} \bigg|_{\tau=0, x=y} = f_x \cdot (-I S_x) \bigg|_{x=y} = S_x I f_x \bigg|_{x=y} = L_s f(y)$$

y en general

$$\frac{d^n f}{d \tau^n} \bigg|_{\tau=0, x=y} = L_s^n f(y)$$

estando L_s^n definida por aplicación reiterada del operador L_s .

Si hacemos el convenio $L_s^0 f(x) \big|_{x=y} = f(y)$, la fórmula (3.13) puede escribirse

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} L_s^n f(y) \quad (3.14)$$

y en particular

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} L_s^n y = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} L_s^n y \quad (3.15)$$

Para $\tau = 1$, resultará

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} L_s^n y \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_s^n f(y) \quad (3.16)$$

Se demuestra que la transformación inversa de la anterior, es

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} L_s^n x \quad f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} L_s^n f(x) \quad (3.17)$$

y también que, dadas dos transformaciones

$$x = X(y, \varepsilon, \tau) \quad y = Y(z, \varepsilon, \tau)$$

soluciones respectivas de los sistemas hamiltonianos

$$\frac{dx}{d\tau} = -I S_x \quad (x(0) = y) \quad \frac{dy}{d\tau} = -I T_y \quad (y(0) = z)$$

la función generante U de la transformación producto

$$x = Z(z, \varepsilon, \tau)$$

verifica

$$U(x, \varepsilon) = S(x, \varepsilon) + T(y, \varepsilon)$$

donde $T(y, \varepsilon)$ ha de ser expresada como función de x , por medio de la transformación inversa (3.17).

Sobre estas bases, dado un sistema canónico

$$\frac{dx}{dt} = -I H_x \quad H(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n H_n(x) \quad (3.18)$$

y conocida la solución para $\varepsilon = 0$, es decir cuando $H = H_0(x)$, se puede buscar una transformación canónica $x \rightarrow y$, que para $\varepsilon = 0$ se reduzca a la identidad y haga más fácil la solución (como hemos visto en el método de von Zeipel) del sistema transformado

$$\frac{dy}{dt} = -I K_y \quad K(y, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n K_n(y) \quad (3.19)$$

Sea, pues

$$S(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n S_n(y) \quad (3.20)$$

la función generatriz de la transformación de Lie, que lleva (3.18) a (3.19).

Como la transformación es canónica conservativa

$$H(x, \varepsilon) = K(y, \varepsilon)$$

y expresando H por medio de la variable y , iremos deduciendo sucesivamente las funciones S_n , de modo que el nuevo hamiltoniano tenga la forma deseada. En efecto, poniendo

$$L_{S_n} H = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n+1} H_n^{(1)} \quad L_{S_n}^2 H = L_{S_n} L_{S_{n-1}} H = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n+2} H_n^{(2)}$$

y en general

$$L_{S_n}^K H = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^{n+K} H_n^{(K)} \quad H_n^{(K)} = \sum_{l=0}^n L_{S_{l+1}} H_{n-l}^{(K-1)}$$

se obtiene la fórmula recurrente

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{(n-j)!} H_j^{(n-j)} = K_n$$

Así se van obteniendo para los primeros órdenes

$$H_0 = K_0; \quad L_{S_1} H_0 = K_1 - H_1, \quad L_{S_2} H_0 = K_2 - H_2 - L_{S_1} H_1 - \frac{1}{2} L_{S_1} L_{S_1} H_0, \dots$$

en consonancia con las expresiones obtenidas en el método de von Zeipel.

Hemos de advertir, sin embargo, que el método de Hori, por su construcción invariante, permite pasar fácilmente de un sistema canónico a otro y de éste al primero invirtiendo el proceso. Otra característica importante es la utilización de un solo sistema de variable (digamos el primitivo), mientras en el de von Zeipel se utiliza la mitad de las variables primitivas y la mitad de las nuevas, con la consiguiente dificultad en los procesos de cálculo.

Método de Deprit. — Este método presenta ciertas analogías con el anterior. En efecto, dado un sistema canónico del tipo (3.18), busquemos una transformación canónica $x \rightarrow y$, de modo que el nuevo sistema (3.19) tenga un hamiltoniano que satisfaga ciertas condiciones que faciliten su resolución.

Entonces, elegida una transformación canónica como solución del sistema

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = -I W_x \quad W(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(x) \quad (3.21)$$

y determinada por las condiciones iniciales $x(0) = y$, pongamos

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n^{(0)}(x) \quad \Phi[x(y, \varepsilon), \varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_0^{(n)}(y)$$

El problema consiste en expresar las funciones $\Phi_0^{(n)}(y)$ en términos de las funciones $\Phi_i^{(0)}(x)$ y $W_k(x)$.

Considerando el triángulo

$$\begin{array}{l} \Phi_0^{(0)} \\ \Phi_1^{(0)} - \Phi_0^{(1)} \\ \Phi_2^{(0)} - \Phi_1^{(1)} - \Phi_0^{(2)} \\ \Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(1)} - \Phi_1^{(2)} - \Phi_0^{(3)} \\ \dots \end{array}$$

se demuestra la fórmula

$$\Phi_i^{(n)} = \Phi_{i+1}^{(n-1)} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} L_{W_{j+1}} \Phi_{i-j}^{(n-1)}$$

que permite ir calculando cada término en función de los que le anteceden en el esquema triangular, y también de los pertenecientes a la primera columna mediante la fórmula recurrente

$$\Phi_0^{(n)} = \Phi_n^{(0)} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} M_j \Phi_{n-j}^{(0)}$$

donde M_n son operadores diferenciales del tipo

$$M_1 = L_{W_1} \quad M_n = L_{W_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} M_{n-j} L_{W_j} \quad (n > 1)$$

Asimismo, se pueden calcular las funciones $\Phi_0^{(n)}$ por medio de la fórmula

$$\Phi_0^{(n)} = \Phi_n^{(0)} - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} N_j \Phi_0^{(n-j)}$$

donde los operadores diferenciales N_j están definidos por las relaciones

$$N_1 = -L_{W_1} \quad N_j = -L_{W_j} - \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j-1}{i-1} N_{j-i} L_{W_i} \quad (j > 1)$$

Con estas expresiones, el método de Deprit nos proporciona los términos K_n del nuevo hamiltoniano por la fórmula recurrente

$$H_n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} M_j H_{n-j} = K_n$$

Tanto en este método como en el de Hori, la resolución del problema se concluye por integración de un cierto número de ecuaciones en derivadas parciales, como vimos al estudiar el método de von Zeipel.

La relación existente entre los métodos de Von Zeipel y Deprit ha sido dada por Shniad (1970), en tanto que la equivalencia entre éstos y el de Hori ha sido completada por Mersman (1971).

Una generalización del método de Deprit a sistemas no canónicos, ha sido desarrollada por Kamel (1970) y una formulación del método de Hori desde un punto de vista más general ha sido efectuada por Mersman (1970), del mismo modo que Calvo (1971) lo ha extendido a sistemas no canónicos.

Mencionemos finalmente que la eliminación de la variable $u = g + f$, en el sistema de variables de Hill, ha sido realizada por Cid y Lahulla (1971) por los métodos de von Zeipel y Deprit. La integración total del problema en dicho sistema de variables fue efectuada por Calvo (1971) hasta el primer orden y por Caballero (pendiente de publicación) hasta el segundo.

4. *Otros métodos de resolución.* — Otros métodos, cuya variedad no nos permite hacer su desarrollo, han sido empleados en la resolución del problema de cálculo de órbitas de satélites artificiales. Entre ellos podemos citar las solución de primer orden de Kozai (1959), desarrollada a partir de las ecuaciones de Lagrange y una solución mejorada de primer orden llevada a cabo por Calvo (1970), tomando como base el método de promedios (Bogoliubov y Mitropolski, 1961), en la que hace un estudio especial sobre la inclinación crítica, problema que ya había sido tratado anteriormente por Hori (1960), Garfinkel (1961), Aoki (1963) y otros.

Notemos finalmente, que en general, los desarrollos utilizados son de tipo formal y que poco puede decirse sobre su convergencia. Acaso el método de promedios presenta mayores posibilidades en cuanto a la acotación de los errores cometidos al cortar las series en un cierto orden.

BIBLIOGRAFIA

- AKSNES, K. (1965). — *Astrophys. Norvegica*, X, núm. 4, 69.
 — (1967). — *Astrophys. Norvegica*, X, núm. 8, 149.
 — (1969). — *Dissertation*, Yale University.
 AOKI, S. (1963). — *Ast. J.* 68, 355.
 BOGOLIUBOV y MITROPOLSKI (1961). — *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*. Gordon y Breach. New Delhi.
 CALVO, M. (1971). — *Rev. Acad. Ciencias*, s. 2.^a, XXVI, 461. Zaragoza.
 — (1971). — *Urania*, núm. 273, Tarragona.
 CID, R. (1967). — *Actas VIII Reun. Mat. Esp.* 187. Madrid, 1969.
 CID, R. y LAHULLA, J. (1968). — *Actas IX Reun. Mat. Españ.* 274. Madrid, 1971.
 — (1969). — *Actas X Reun. Mat. Españ.* 288. Madrid, 1972.
 — (1969). — *Rev. Acad. Ciencias*, s. 2.^a, XXIV, 159. Zaragoza.
 — (1971). — *Rev. Acad. Ciencias*, s. 2.^a, XXVI, 333. Zaragoza.
 — (1970). — *Actas XI Reun. Mat. Españ.* 247. Madrid, 1973.
 DEPRIT, A. (1969). — *Celestial Mech* 1, 12.
 GARFINKEL, B. (1959). — *Ast. J.* 64, 353.
 — (1960). — *Ast. J.* 65, 624.
 — (1964). — *Ast. J.* 69, 223.
 GARFINKEL, B. y AKSNES, K. (1970). — *Ast. J.* 75.
 HORI, G. I. (1960). — *Ast. J.* 65, 291.
 — (1966). — *Pub. of the Astr. Soc. of Japan*, 18, 287.
 IZSAC, I. G. (1961). — *Ast. J.* 66, 129.
 — (1963). — *Ast. J.* 68, 559.
 KAMEL, A. A. (1970). — *Celestial Mech.* 3, 90.
 KOZAI, Y. (1959). — *Ast. J.* 64, 367.
 — (1962). — *Ast. J.* 67, 446.
 LAHULLA, J. (1970). — *Rev. Acad. Ciencias*, s. 2.^a, XXV, 5, Zaragoza.
 LYDDANE, R. H. (1963). — *Ast. J.* 68, 555.

CALCULO DE ORBITAS DE SATELITES ARTIFICIALES

- MERSMAN, W. (1970). — Celestial Mech. 3, 81.
— (1971). — Celestial Mech. 3, 384.
SHNIAD, H. (1970). — Celestial Mech. 2, 114.
STERNE, T. E. (1958). — Ast. J. 63, 28.
VINTI, J. P. (1963). — J. Res. Nat. Bur. Stds. 67 B, núm. 4, 191.
VON ZEIPPEL, H. (1916-17). — Arkiv. Mat. Astron. Fysik. núms. 1 y 7, 11; núm. 9, 12; núm. 3, 13.

SOBRE LAS INTEGRALES PRIMERAS DEL MOVIMIENTO EN OPTIMIZACION DE TRAYECTORIAS*

P O R

V. CAMARENA

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

In this work a first vector integral of optimal rocket trajectories in a central force fields is derived, by means of Noether's theorem. The connection with the well known first vector integral of angular momentum in Kepler motion is also discussed. One three parameter infinitesimal transformation group which leaves the corresponding Hamiltonian invariant, is found. Finally we have defined and interpreted the concept of orientation-free.

1. Grupos continuos de transformaciones

Sea f una aplicación diferenciable del conjunto $E \times A$ en E^n , donde $A \subset E^r$, que viene dada por:

$$\begin{aligned} f: E^n \times A &\rightarrow E^n \\ (x, a) &\rightarrow x' = f(x, a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

y supongamos que la matriz jacobiana $\partial f / \partial x$ sea no nula.

Es claro, que fijada la f , si variamos el parámetro $a \in A$ obtenemos un conjunto continuo G de transformaciones especificadas por:

$$x' = f(x, a), \quad a \in A \quad (1.2)$$

1.1 Definición. Diremos que los parámetros $(a_1, \dots, a_r)$ componentes de $a \in A$ son esenciales; si es imposible encontrar r funciones $\chi_k(a)$ $k = 1, 2, \dots, r$, tales que

$$\forall x \in E^n, \forall a \in A; \quad \sum_{k=1}^r \chi_k(a) \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

donde las f_i son las componentes de la función f .

Si los elementos de G verifican las propiedades:

(i) Dadas dos transformaciones $x' = f(x, a)$, $x'' = f(x', b)$, a y $b \in A$ existe un $c \in A$ tal que $c = \varnothing(a, b)$ y $x'' = f(x, c)$. Es decir se verifica que

$$f(f(x, a), b) = f(x, \varnothing(a, b))$$

* Este trabajo fue presentado en las Primeiras Jornadas Luso-Españolas, celebradas en Lisboa en abril de 1972.

- (ii) Dada una transformación $x' = f(x, a)$ existe un $\bar{a} \in A$ tal que $x = f(x', \bar{a})$.
 (iii) Existe un $a^0 \in A$, que tomaremos como el cero, tal que la transformación $x' = f(x, a^0)$ es la transformación idéntica. Es decir,

$$x' = f(x, a^0) = x$$

entonces diremos que G es un grupo continuo de transformaciones de orden r , o grupo de Lie de transformaciones, Y_r .

1.2 Definición. Sea $\Omega_0 \subset A$ un entorno del origen. Llamaremos transformaciones infinitesimales, a los elementos de un subgrupo $Y \subset G$ tal que $x' = f(x, a)$ es un elemento de Y si $a \in \Omega_0$.

Si denotamos con δa_i las componentes de un $a \in \Omega_0$ resulta: que los elementos de Y pueden expresarse en la forma

$$x'_i = x_i + \sum_{p=1}^r u_{ip}(x) \delta a_p \quad (1.4)$$

donde $u_{ip}(x)$ son funciones de x definidas y continuas en E^n .

1.3 Generadores infinitesimales de un grupo de transformaciones. Sea $F(x)$ una función n de variables, si denotamos con δF la variación que experimenta $F(x)$, cuando efectuamos una transformación infinitesimal en las x ; es claro, que

$$\begin{aligned} \delta F &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \sum_{l=1}^r u_{il}(x) \delta a_l \\ &= \sum_{l=1}^r \delta a_l X_l F \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde las δa_l denotan pequeñas variaciones en los parámetros a_l , de manera que $a + \delta a \in \Omega_0$, y los X_l definidos por las relaciones

$$X_l = \sum_{i=1}^n u_{il}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.6)$$

designan los llamados operadores o generadores infinitesimales del grupo de transformaciones infinitesimales Y_r .

1.4 Consecuencia. Las condiciones que tiene que verificar la función escalar $F(x)$, para que sea invariante por el grupo de transformaciones infinitesimales $x' = f(x, a)$, son:

$$X_l F = 0 \quad l = 1, \dots, r \quad (1.7)$$

2. El teorema de Noether

Sea W el siguiente funcional

$$W = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

donde $q = (q^1, \dots, q^n)$ es el n -vector de estado de un sistema dinámico con n grados de libertad, $\dot{q} = dq/dt$ y t el parámetro tiempo que varía en el intervalo $[t_0, t_1]$. Diremos que el funcional W es invariante por el grupo de transformaciones infinitesimales

$$\begin{cases} \bar{t} = t + \varepsilon u_1(q, t) = t + \varepsilon \delta t \\ \bar{q}^i = q^i + \varepsilon u_2^i(q, t) = q^i + \varepsilon \delta q^i \end{cases} \quad (2.2)$$

dependientes de un parámetro ε , si se verifica:

$$\int_{t_0}^{\bar{t}_1} F(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{t}) d\bar{t} = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t) dt$$

Teorema de Noether. — Si el funcional W es invariante por el grupo de transformaciones infinitesimales (2.2), para t_0 y t_1 arbitrarios, entonces a lo largo de toda extremal de W ($\delta W = 0$) se verifica que

$$Fu_1 - \sum_{i=1}^n (u_i^2 - q^i u_i) \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} = cte \quad (2.3)$$

Si introducimos los momentos canónicos conjugados de las q^i y la función hamiltoniana H por las relaciones:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} \quad H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - F \quad (2.4)$$

la ecuación (2.3) se convierte en la siguiente

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q^i - H \delta t = cte \quad (2.4)$$

En resumen, lo que nos asegura el teorema de Noether es: que si el funcional

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p, t) \right) dt$$

es invariante por el grupo de transformaciones (2.2) una integral primera de las ecuaciones canónicas del movimiento del sistema es la (2.4) (ver R-2).

3. Formulación variacional del problema de optimización de trayectorias

Supongamos un sistema dinámico evolutivo y controlado caracterizado en cada instante $t \in [t_0, t_1]$ por el n -vector de estado $q = (q^1, \dots, q^n) \in \mathcal{C} \subset E^n$, y que dicho vector de estado verifica en cada instante t las siguientes ecuaciones diferenciales de estado

$$\dot{q} = f(q, u) \quad (3.1)$$

donde u es un vector de control tal que $u = u(t) \in U \subset E^r$ y f es una n -vectorial función de clase C^1 en el conjunto $\mathcal{C} \times U \subset E^{n+r}$.

3.1 Definición. Llamaremos controles admisibles a toda r -vectorial función $u = (t) \in U$ continua para todo $t \in [t_0, t_1]$ salvo en un número finito de instantes $\tau_i \in (t_0, t_1)$, donde $u(t)$ puede poseer discontinuidades de 1.ª especie.

Es claro, que dado un cierto control admisible $u(t)$ y unas condiciones iniciales (q_0, t_0) , de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales existe una trayectoria $q = q(t)$, continua y diferenciable a trozos, solución de (3.1).

3.2 Definición. Llamaremos función de costo a todo funcional de la forma

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(q(t), u(t)) dt \quad (3.2)$$

donde f^0 es la clase C^1 en $\mathcal{E} \times U$.

Con todo esto podemos formular el siguiente:

Problema de control óptimo con extremos fijos

Dados dos puntos fijos q_0 y $q_1 \in E^n$, se trata de encontrar entre todos los controles admisibles $u(t)$, aquel o aquellos que nos proporcionan una trayectoria $q(t)$ que pasa por q_0 y q_1 en los instantes t_0 y t_1 y hagan que la función de costo J tome un valor mínimo. A los controles u^* y a las trayectorias $q^*(t)$ correspondientes, solución del problema se les llama controles y trayectorias óptimas respectivamente.

Si introducimos una variable q^0 de manera que

$$\dot{q}^0 = f^0(q, u) \quad (3.3)$$

entonces, podemos caracterizar el estado del sistema por el $(n+1)$ -vector de estado $\tilde{q} = (q^0, q)$ tal que en cada instante $t \in [t_0, t_1]$ verifica el sistema de ecuaciones diferenciales de estado (3.1) y (3.3), que de una manera conjunta puede ponerse en la forma

$$\dot{q}^i = f^i(q, u) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Es conocido, que el sistema de ecuaciones diferenciales adjunto de (3.4) es

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j(q, u)}{\partial q^i} p_j \\ i &= 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde los p_i representan los momentos canónicos conjugados de las q^i .

Combinando los sistemas (3.4) y (3.5) podemos definir la función hamiltoniana variacional H , por la relación

$$H = \sum_{i=0}^n p_i \dot{q}^i \quad (3.6)$$

con lo cual las ecuaciones de las trayectorias óptimas se deducen mediante la formulación variacional

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H \right) dt = 0 \quad (3.7)$$

y las condiciones de optimalidad que se obtienen, por el hecho de anular la primera variación del funcional W , son:

$$\frac{\partial H}{\partial u^h} = 0, \quad h = 1, \dots, r \quad (3.8)$$

a parte de otras condiciones en los extremos, que no reseñamos y que pueden verse en la (R-7).

Notemos que las condiciones (3.8) son condiciones necesarias de optimalidad y expresan el hecho de que la función hamiltoniana H es máxima para los controles óptima-

les $u^*(t)$. Es decir, los controles correspondientes a trayectorias optimales, hay que elegirlos en cada instante de manera que H sea máxima, fijados los vectores $\tilde{q}$ y $\tilde{p}$ correspondientes.

4. Obtención de una integral primera para trayectorias optimales

De acuerdo con todo lo expuesto en los apartados 2 y 3 podemos afirmar: que si el funcional W dado por la fórmula

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H \right) dt \quad (4.1)$$

es invariante por el grupo de transformaciones infinitesimales (2.2), para t_0 y t_1 arbitrarios, entonces a lo largo de toda trayectoria optimal una integral primera del movimiento es

$$p \cdot \delta q = \text{cte.} \quad (4.2)$$

puesto que en el caso de que la duración de trayecto $t_1 - t_0$, sobre una trayectoria optimal sea arbitraria, puede verse que $H = 0$ (ver R—1).

A este mismo resultado hemos llegado, en nuestro trabajo (R—6), por medio de las ecuaciones en variaciones de las ecuaciones de estado (3.4) en torno de una trayectoria nominal optimal.

5. La integral primera de Breakwell

Supongamos un cohete que se mueve en un campo gravitatorio central newtoniano, y que dicho cohete está dotado de un sistema de propulsión de los denominados (S_1), es decir con velocidad de eyección de gases constante, que le proporciona una aceleración de empuje $\vec{\gamma}$, en virtud del principio de acción y reacción. Es claro, que el estado del cohete, en cada instante $t \in [t_0, t_1]$, puede caracterizarse por el vector de estado $q = (\vec{r}, \vec{V}, C)$, donde $\vec{r}$ y $\vec{V}$ representan la posición y velocidad del cohete en cada instante, y C es la llamada velocidad característica, dada por

$$C = \int_{t_0}^t \gamma dt \quad (5.1)$$

Si $\vec{g}(\vec{r}) = -\mu \vec{r}/r^3$ representa la aceleración gravitacional newtoniana, entonces las ecuaciones diferenciales de estado son

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{V} \\ \dot{\vec{V}} = -\mu \vec{r}/r^3 + \vec{\gamma} = \vec{g}(\vec{r}) + \vec{\gamma} \\ \dot{C} = \gamma \end{cases} \quad (5.2)$$

y el sistema adjunto correspondiente es:

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}}_r = -\frac{\mu}{r^3} \left[3 \frac{(\vec{p}_v \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} - \vec{p}_v \right] = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial r} \vec{r} \\ \dot{\vec{p}}_v = -\vec{p}_r \\ \dot{\vec{p}}_c = -\frac{\partial H}{\partial C} \end{cases} \quad (5.3)$$

y donde el hamiltoniano variacional H viene dado por la expresión:

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{V} - \frac{\mu}{r^3} (\vec{p}_v \cdot \vec{r}) + \vec{p}_v \cdot \vec{\gamma} + p_c \gamma \quad (5.4)$$

El vector de control, en este caso, es la aceleración de propulsión $\vec{\gamma}$, y el funcional a minimizar la velocidad característica C_1 en el instante final t_1 . Así pues, las trayectorias optimales T serán aquellas que partiendo en el instante t_0 del punto $q_0(\vec{r}_0, \vec{V}_0, C_0) \in E^7$ pasan, en el instante t_1 , por el punto $q_1(\vec{r}_1, \vec{V}_1, C_1) \in E^7$ y hacen mínima la velocidad característica C .

Puede verse (R-6), que en este caso, las condiciones necesarias de optimalidad de las trayectorias de cohetes, moviéndose en un campo central newtoniano, son:

(i) Cuando el motor del cohete actúa y $|\vec{p}_v| \neq 0$ la aceleración de propulsión tiene la dirección y sentido del vector primer $\vec{p}_v$ (nombre debido a Lawden).

(ii) Una trayectoria optimal solamente puede estar formada por arcos de los tres tipos siguientes:

$$\begin{aligned} NT &\text{— Arco balístico con } \gamma = 0 \text{ y } k = |\vec{p}_v| + p_c < 0 \\ MT &\text{— Arco propulsado con } \gamma = \gamma_{\max} \text{ y } k = |\vec{p}_v| + p_c > 0 \\ IT &\text{— Arco singular con } \gamma \text{ cualquiera y } k = |\vec{p}_v| + p_c = 0 \end{aligned}$$

(iii) En los puntos de unión de arcos distintos, las funciones $\vec{p}_v$, $\vec{p}_r$ y p_c son continuas. Asimismo es continuo el hamiltoniano H , y si γ es discontinua se verifica que $k = 0$.

Supongamos que T es una trayectoria optimal del movimiento del cohete, entonces, por lo visto anteriormente una integral primera del movimiento es: $p \cdot \delta q = \text{cte}$, supuesto que δq representa la diferencia entre los vectores de estado q' y q de dos trayectorias T y T' simultáneas y equicontroladas (con el mismo control $\vec{\gamma}$ optimal), que verifican las ecuaciones de estado (5.2). Desde otro punto de vista δq representa un vector de componentes las δq^i que generan un grupo de transformaciones infinitesimales de orden 3, que deja invariante la función hamiltoniana H .

Si tomamos como δq el vector

$$\delta q = (\vec{\epsilon} \wedge \vec{r}, \vec{\epsilon} \wedge \vec{V}, 0) \quad (5.5)$$

donde $\vec{\epsilon}$ es un vector infinitesimal arbitrario y finito de componentes $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ resulta: que una integral primera, para trayectorias optimales de cohetes moviéndose en un campo newtoniano, es:

$$\vec{p}_r \cdot (\vec{\epsilon} \wedge \vec{r}) + \vec{p}_v \cdot (\vec{\epsilon} \wedge \vec{V}) = -\vec{\epsilon} \cdot \vec{B}$$

donde $\vec{B}$ es un vector constante. Y teniendo en cuenta la arbitrariedad del vector $\vec{e}$, resulta la siguiente expresión de la integral primera

$$\vec{p}_r \wedge \vec{r} + \vec{p}_v \wedge \vec{V} = \vec{B} \quad (5.6)$$

5.1 Definición. Si $\vec{B} = 0$ diremos que la orientación es indiferente. Es decir, que la optimalidad de una trayectoria no depende de la orientación del par $(\vec{r}, \vec{V})$ en el punto de salida y de llegada. Así sucede, por ejemplo, en el problema de las transferencias optimales entre dos órbitas circulares concéntricas (Transferencia de Hohmann).

5.2 Definición. Si $q = q(t)$ son las trayectorias optimales que verifican las condiciones necesarias de optimalidad enumeradas anteriormente, y tales que parten en el instante t_0 de un punto fijo $q_0 \in \mathcal{E} \subset E^7$; entonces, llamaremos *frentes de onda* a las curvas de nivel $t = t_i$ de la hipersuperficie σ de trayectorias optimales $q = q(t)$ con un punto fijo q_0 (fig. 5.1), suponiendo que la representación se efectúa en el espacio de las variables (q, t) .

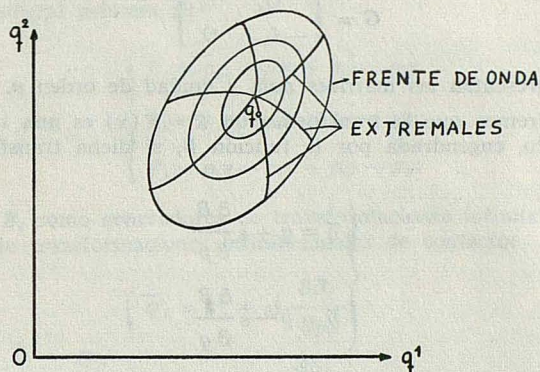


FIG. 5.1

Es claro, que si consideramos una trayectoria nominal $q(t)$ y otra variada $q(t) + \delta q(t)$ simultáneas, y suponiendo que ambas parten en t_0 del punto fijo q_0 , entonces: el vector $\delta q(t)$ es tangente al frente de onda correspondiente, que pasa por el punto $q(t)$ en el instante t .

5.3 Teorema. De acuerdo con las hipótesis y notaciones de la definición anterior, resulta: que el vector $p = (\vec{p}_r, \vec{p}_v, p_e)$, adjunto del vector de estado q , es normal al frente de onda que pasa por el punto $q(t)$ en el instante t . Es decir, se verifica la relación

$$p(t) \cdot \delta q(t) = 0 \quad (5.7)$$

Demostración. En efecto, sobre una trayectoria optimal una integral primera del movimiento es: $p \cdot \delta q = \text{cte}$. Ahora bien, esta constante es nula en el supuesto de que las trayectorias partan de un mismo punto q_0 en el instante t_0 , ya que $\delta q(t_0) = 0$.

El resultado dado por este teorema justifica rigurosamente el significado de orientación indiferente dado en la 5.1 Definición.

6. Transformaciones infinitesimales de contacto

6.1 Transformaciones canónicas

Para describir el estado de un sistema dinámico, en el formalismo hamiltoniano, tomaremos el vector $x = (q, p)$ donde q es el vector de estado en el formalismo adoptado hasta ahora. Si $\bar{x} = (\bar{q}, \bar{p})$ es otro vector estado del mismo sistema, diremos que la transformación

$$\bar{x} = \bar{x}(x)$$

es canónica, si la matriz jacobiana $J = \bar{x}_x$ es simplética. Es decir si J verifica la relación

$$J' G J = G$$

donde J' indica la transpuesta de J , G es la matriz

$$G = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$$

y donde O_n e I_n representan las matrices nula y unidad de orden n .

6.2 Definición. Diremos que la transformación $\bar{x} = \bar{x}(x)$ es una transformación infinitesimal de contacto, engendrada por la función B , si dicha transformación es de la forma:

$$\begin{cases} \bar{q} = q + \varepsilon \frac{\partial B}{\partial p} \\ \bar{p} = p - \varepsilon \frac{\partial B}{\partial q} \end{cases} \quad (6.1)$$

Notemos que la transformación infinitesimal de contacto (6.1), es canónica.

6.3 Definición. Dadas dos funciones f y g de la variable x , llamaremos corchete de Poisson, y lo denotaremos por $\{f, g\}$, a la siguiente función derivada

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (6.2)$$

Si un sistema dinámico, en el formalismo hamiltoniano, verifica las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.3)$$

donde H es la función hamiltoniana del sistema; entonces dada una función $F = F(q, p)$ se verifica:

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \quad (6.4)$$

Por otra parte, si efectuamos una transformación infinitesimal de contacto del tipo (6.1), la variación que sufre la F vendrá dada por

$$\delta F = \varepsilon \{B, F\} \quad (6.5)$$

Así pues, si tomamos como función F la hamiltoniana H , resulta:

$$\delta H = \epsilon \{B, H\} = -\epsilon \frac{dB}{dt}$$

lo que nos conduce al siguiente resultado: Si B es una función generatriz de una transformación infinitesimal de contacto, que deja invariante la función hamiltoniana H del sistema dinámico ($\delta H = 0$), entonces la función B resulta ser una integral primera del movimiento del sistema, y recíprocamente.

7. La integral primera $\vec{B}$ y la teoría de grupos de transformaciones

Si elegimos un sistema de coordenadas rectangulares de origen el centro atractivo 0, entonces las componentes de los vectores $\vec{r}$, $\vec{V}$, $\vec{p}_r$ y $\vec{p}_v$ serán: $\vec{r}(x, y, z)$, $\vec{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\vec{p}_r(p_1, p_2, p_3)$ y $\vec{p}_v(p_4, p_5, p_6)$ respectivamente. Con todo ello resultan las siguientes componentes para la integral primera $\vec{B}$:

$$\begin{cases} B_1 = p_2 z - p_3 y + p_5 \dot{z} - p_6 \dot{y} \\ B_2 = p_3 x - p_1 z + p_6 \dot{x} - p_4 \dot{z} \\ B_3 = p_1 y - p_2 x + p_4 \dot{y} - p_5 \dot{x} \end{cases} \quad (7.1)$$

Si tomamos los B_j como generadores de transformaciones infinitesimales, resultan los siguientes grupos de transformaciones infinitesimales de contacto:

$$G_j: \begin{cases} \bar{q}^i = q^i + \epsilon_j \frac{\partial B_j}{\partial p_i} \\ \bar{p}^i = p^i - \epsilon_j \frac{\partial B_j}{\partial q^i} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, 6 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix} \quad (7.2)$$

donde con q^i , p_i denotamos las componentes de los vectores de estado $q(\vec{r}, \vec{V})$ y adjunto $p(\vec{p}_r, \vec{p}_v)$, y el índice j indica cada uno de los grupos de transformaciones infinitesimales de parámetro ϵ_j .

De acuerdo con la terminología propia de la teoría de grupos de Lie, las condiciones de invariancia del hamiltoniano

$$H = \vec{p}_r \cdot \vec{V} - \frac{\mu}{r^3} (\vec{p}_v \cdot \vec{r}) \quad (7.3)$$

respecto de los grupos G_j anteriores, pueden escribirse en la forma

$$X_j H = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.4)$$

donde los X_j son los generadores infinitesimales de los grupos G_j , definidos por las relaciones (1.6), que aplicadas a nuestro caso nos dan las siguientes expresiones

$$X_j = L_j + M_j + N_j + P_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (7.5)$$

donde con L_i , M_i , N_i y P_i denotamos las componentes de los operadores momento angular L_r , L_v , L_{p_r} y L_{p_v} respectivamente; y que vienen definidos a su vez por las fórmulas

$$\begin{cases} L_r = \vec{r} \wedge \vec{\nabla}_r \\ L_v = \vec{v} \wedge \vec{\nabla}_v \\ L_{p_r} = \vec{p}_r \wedge \vec{\nabla}_{p_r} \\ L_{p_v} = \vec{p}_v \wedge \vec{\nabla}_{p_v} \end{cases} \quad (7.6)$$

siendo $\vec{\nabla}_r$, $\vec{\nabla}_v$, $\vec{\nabla}_{p_r}$ y $\vec{\nabla}_{p_v}$ los respectivos operadores gradiente, respecto de las variables que figuran como subíndices.

Si definimos los operadores momento angular generalizados L_q y L_p por las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} L_q &= L_r + L_v \\ L_p &= L_{p_r} + L_{p_v} \end{aligned} \quad (7.7)$$

resulta, que el operador vectorial X de componentes los operadores X_i viene dado por la igualdad

$$X = L_q + L_p \quad (7.8)$$

8. Paralelismo entre las integrales $\vec{h}$ y $\vec{B}$

Es un hecho conocido, que por ser invariante el hamiltoniano $K = V^2/2 - \mu/r$ del movimiento kepleriano, por el grupo de rotaciones infinitesimales, debido a la simetría central del problema, resulta que el vector momento cinético $\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V}$ es una integral primera del movimiento kepleriano. Siendo los generadores infinitesimales de dicho grupo de rotaciones infinitesimales, las componentes del operador momento angular L_r . Mientras que la invariante del hamiltoniano variacional H , correspondiente a las trayectorias optimales de un cohete que se mueve en un campo central newtoniano, por el mismo grupo de rotaciones infinitesimales, implica, según hemos visto, la existencia de la integral primera $\vec{B}$.

Así pues, podemos establecer el siguiente paralelismo entre el movimiento kepleriano y la optimización de trayectorias en un campo central newtoniano:

$$L_r K = 0 \Rightarrow \text{existe la integral } \vec{h} = \text{cte. (Orbitas keplerianas)}$$

$$X H = 0 \Rightarrow \text{existe la integral } \vec{B} = \text{cte. (Trayectorias optimales keplerianas)}$$

9. Ecuaciones en variaciones

Si T representa la trayectoria de un cohete que se mueve en un campo central newtoniano de aceleración $\vec{g} = -\mu \vec{r}/r^3$, sometido además a una aceleración de propulsión γ , entonces las ecuaciones de estado del cohete son las (5.2). Así pues, si $\gamma = 0$ en un instante $t \in [t_0, t_1]$ el vehículo describe una órbita kepleriana O (órbita osculatriz a T en dicho instante), determinada por la posición $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{V}$ en dicho instante t .

Sea O' la órbita kepleriana osculartiz a T en el instante $t + \delta t$ (fig. 9.1), entonces las variaciones $\delta \vec{r}$ y $\delta \vec{V}$ verifican las siguientes ecuaciones en variaciones:

$$\begin{cases} \delta \dot{\vec{r}} = \delta \vec{V} \\ \delta \dot{\vec{V}} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} \end{cases} \quad (9.1)$$

que combinándolas nos dan la siguiente ecuación diferencial vectorial de segundo orden:

$$\delta \ddot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} \quad (9.2)$$

que es la misma que verifica el vector $\vec{p}_v$, puesto por las ecuaciones (5.3) se deduce la ecuación diferencial vectorial

$$\ddot{\vec{p}}_v = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}} \vec{p}_v \quad (9.3)$$

que verifica el vector primer $\vec{p}_v$, que coincide con la (9.2)

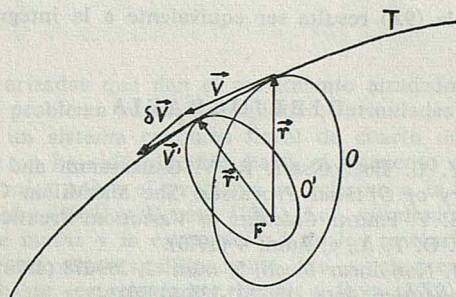


FIG. 9.1

Así pues, si $\delta \vec{r}$ y $\vec{p}_v$ de una parte, y $\delta \vec{V}$ y $-\vec{p}_r$ de otra, son inicialmente proporcionales, es decir existe una constante λ tal que $\delta \vec{r}_0 = \lambda \vec{p}_{v_0}$ y $\delta \vec{V}_0 = -\lambda \vec{p}_{r_0}$ (en $t = t_0$); así sucede $\forall t \in [t_0, t_1]$. Con lo cual se tiene:

$$\begin{cases} \delta \vec{r} = \lambda \vec{p}_v \\ \delta \vec{V} = -\lambda \vec{p}_r \end{cases} \quad (9.4)$$

Si $\vec{h}$ es el vector momento cinético correspondiente a la órbita osculatriz O , y $\delta \vec{h}$ denota la variación de $\vec{h}$ correspondiente a una variación $(\delta \vec{r}, \delta \vec{V})$ en la posición y velocidad del cohete. Entonces,

$$\delta \vec{h} = \delta \vec{r} \wedge \vec{V} + \vec{r} \wedge \delta \vec{V} \quad (9.5)$$

de donde, teniendo en cuenta la (9.4), deducimos:

$$\delta \vec{h} = \lambda (\vec{p}_v \wedge \vec{V} + \vec{p}_r \wedge \vec{r}) = \lambda \vec{B} \quad (9.6)$$

y por tanto,

$$\delta \vec{h} = \text{cte.} \Leftrightarrow \vec{B} = \text{cte.}$$

Por otra parte, sabemos que la ecuación de perturbación del vector $\vec{h}$ es:

$$\dot{\vec{h}} = \vec{r} \wedge \vec{\gamma}^* \quad (9.7)$$

donde $\vec{\gamma}^*$ designa la aceleración de propulsión optimal, y que por las condiciones necesarias de optimalidad, debe tener la dirección y sentido del vector primer $\vec{p}_v$. Y como la ecuación en variaciones de $\vec{h}$ viene dada por

$$\delta \vec{h} = \frac{d}{dt} (\delta \vec{h}) = \delta \vec{r} \wedge \vec{\gamma}^* \quad (9.8)$$

debido a que consideramos trayectorias variadas equicontroladas (con $\delta \vec{\gamma}^* = 0$); de esta última ecuación se deduce la siguiente integral primera

$$\delta \vec{h} = \text{cte.}$$

que, como vemos, por la (9.6) resulta ser equivalente a la integral primera $\vec{B} = \text{cte.}$

BIBLIOGRAFIA

- 1) L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE and E. F. MISHCHENKO: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. The MacMillan Company (1964).
- 2) I. M. GELFAND and S. V. FOMIN: *Calculus of Variation*. Prentice Hall (1963).
- 3) H. GARNER MOYER: J. O. T. A., 6, núm. 4 (1970).
- 4) B. VUJANOVIC: Int. J. Non-linear Mech, 5, núm. 2, 269-278 (1970).
- 5) B. VUJANOVIC: *Astronáutica Acta*, 15, 231-233 (1970).
- 6) V. CAMARENA: Rev. Acad. Ciencias de Zaragoza, serie 2.ª, XXVII, núm. 4, 367-454 (1972).
- 7) B. FRAEIJIS DE VEUBEKE: *Astronáutica Acta*, 11, núm. 4, 271-283 (1965).

MOVIMIENTO ALREDEDOR DE LOS PUNTOS EQUILATEROS DE LIBRACION EN EL PROBLEMA RESTRINGIDO ELIPTICO*

P O R

M. CALVO

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

The differential equations that describe the motion around the equilateral points in the elliptically restricted problem are considered. Taking the eccentricity of primaries as small parameter and using Deprit's method a second order solution is obtained. The possibility to extend the solution to higher orders is also considered.

1. Introducción

Las ecuaciones linealizadas que dan el movimiento alrededor de los puntos equiláteros de libración en el problema restringido elíptico, formuladas en un sistema rotante y pulsante, constituyen un sistema canónico lineal de cuarto orden con coeficientes periódicos cuya solución no ha sido obtenida hasta el momento en forma cerrada.

Los principales trabajos sobre el problema se refieren a la estabilidad de estas soluciones equiláteras. Danby (1964) y Bennet (1965), han estudiado la estabilidad según los valores de la razón de masas y la excentricidad de los primarios. Bennet (1966) dio un procedimiento para determinar analíticamente los exponentes característicos, pero lo desarrolló solamente hasta segundo orden. Deprit y Rom (1970) después de efectuar una transformación canónica lineal que normaliza el hamiltoniano para $e = 0$, aplicaron el método asintótico de Deprit (1970) para obtener la solución en potencias de la excentricidad. En el presente trabajo se aplica directamente el método de Deprit, con alguna pequeña modificación, y se obtiene la solución en potencias de la excentricidad de un modo explícito hasta segundo orden, pudiendo extenderse a órdenes superiores. Nuestro procedimiento proporciona también los exponentes característicos y tiene la ventaja respecto al de Deprit y Rom que la solución es obtenida de un modo más directo.

2. Problema restringido elíptico

Supongamos dos masas finitas —primarios— que se mueven describiendo una elipse kepleriana de excentricidad e y consideremos el movimiento de una masa infinitesimal que situada en el plano de las dos anteriores está sometida a las atracciones gravitatorias de éstas. Para lograr una descripción más sencilla tomaremos como unidad de masa la suma de las masas de los primarios. Llamaremos μ la masa del menor, por lo

* Este trabajo fue presentado a las I Jornadas Matemáticas Luso-Españolas de Lisboa en 1972.

que la del otro será $1 - \mu$. Vamos a referir el movimiento a un sistema Oxy con origen en el centro de masa de los primarios y cuyo eje Ox está situado permanente en la dirección de éstos, por tanto se trata de unos ejes girando con velocidad df/dt , donde f es la anomalía verdadera del movimiento de los primarios.

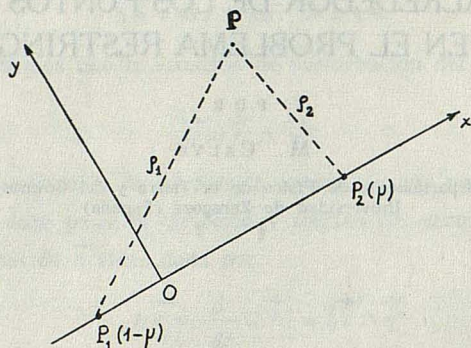


FIG. 1

Asimismo tomemos la unidad de distancia variable con el tiempo de modo que la separación entre los primarios P_1 y P_2 sea unidad, entonces dichos puntos tienen por coordenadas $(-\mu, 0)$, $(1-\mu, 0)$. En estas condiciones si elegimos f como variable independiente, la función de Lagrange que describe el movimiento de la partícula infinitesimal P es (Szebehely)

$$L = (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \Phi \quad (2-1)$$

con

$$\Phi = \Omega (1 + e \cos f)^{-1}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} [(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2] + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \quad (2-2)$$

$$\rho_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2$$

$$\rho_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2$$

El sistema dinámico cuya función lagrangiana es (2-1) tiene cinco soluciones de equilibrio, tres de ellas situadas sobre el eje Ox corresponden a puntos en los que están equilibradas las fuerzas gravitatorias y las centrífugas, además de estos están las soluciones de equilibrio L_4 , L_5 cuyas coordenadas son $((1-2\mu)/2, \pm \sqrt{3}/2)$. Geométricamente los triángulos $P_1P_2L_4$ y $P_1P_2L_5$ son equiláteros, por eso las soluciones $L_{4,5}$ se llaman soluciones equiláteras de libración.

Para estudiar soluciones próximas a la de equilibrio L_4 (en el caso L_5 el problema es completamente simétrico) hagamos una traslación de ejes de modo que L_4 coincida con el nuevo origen de coordenadas

$$x = X + (1-2\mu)/2, \quad y = Y + \sqrt{3}/2$$

y seguidamente una rotación de ángulo β dado por

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= (1-2\mu) \sqrt{3}/\delta & \cos 2\beta &= 1/\delta \\ \delta^2 &= 1 + 3(1-2\mu)^2 \end{aligned} \quad (2-3)$$

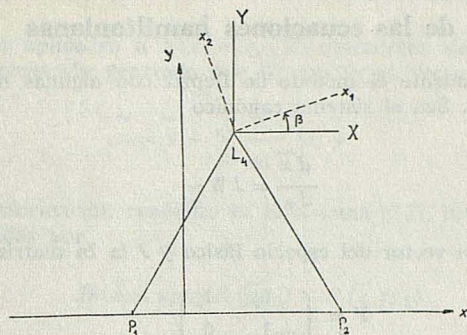


FIG. 2

Si en la función lagrangiana resultante retenemos solamente los términos cuadráticos del potencial, es decir, nos limitamos a las ecuaciones linealizadas, el movimiento de la partícula infinitesimal alrededor de la posición de equilibrio L_4 está dado por

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) + \frac{1}{1 + e \cos f} \left[\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \delta \right) x_1^2 + \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \delta \right) x_2^2 \right]$$

Los momentos conjugados de x_1 y x_2 serán

$$X_1 = L_{x_1} = \dot{x}_1 - x_2 \quad (2-5)$$

$$X_2 = L_{x_2} = \dot{x}_2 + x_1$$

y la función de Hamilton

$$H = (1/2) (X_1^2 + X_2^2) - (x_1 X_2 - x_2 X_1) + (1/2) (x_1^2 + x_2^2) - (1 + e \cos f)^{-1} [(3/4) (1 - \delta/2) x_1^2 + (3/4) (1 + \delta/2) x_2^2] \quad (2-6)$$

Para $e = 0$ (problema restringido circular) la función de Hamilton se reduce a

$$H_0 = (1/2) (X_1^2 + X_2^2) - (x_1 X_2 - x_2 X_1) - (1/4) (1 - 3 \delta/2) x_1^2 - (1/4) (1 + 3 \delta/2) x_2^2 \quad (2-7)$$

y las ecuaciones correspondientes resultan ser un sistema lineal de coeficientes constantes cuya solución ha sido ampliamente estudiada (Szebehely) según los valores de μ , pero para $e \neq 0$ la solución no ha podido obtenerse en forma cerrada. Debido a esto, tomaremos la excentricidad como pequeño parámetro y aplicando el método de Deprit obtendremos una solución aproximada del problema. Desarrollando $(1 + e \cos f)^{-1}$ y sustituyendo en (2-6) se tiene

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^n H_n(x, X, f) \quad (2-8)$$

siendo

$$H_i = (-1)^{i+1} (i!) (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2) \cos^i f \quad i \geq 1 \quad (2-9)$$

$$\alpha_1 = (3/4) (1 - \delta/2) \quad \alpha_2 = (3/4) (1 + \delta/2)$$

3. Transformación de las ecuaciones hamiltonianas

Expondremos seguidamente el método de Deprit con algunas modificaciones adecuadas a nuestro problema. Sea el sistema canónico

$$\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = J W_{\tilde{x}} \quad (3-1)$$

donde $\tilde{x} = (x, X)$ es el $2n$ vector del espacio fásico y J la $2n$ matriz simpléctica

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}$$

y $W = W(\tilde{x}, f; \varepsilon)$. La solución de (3-1) con las condiciones iniciales $\tilde{x}(0) = \tilde{y} = (y, Y)$ puede escribirse $\tilde{x} = \tilde{x}(y, f; \varepsilon)$ y representa una transformación canónica de $\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$ tal que para $\varepsilon = 0$ se reduce a la identidad.

Se trata de buscar una adecuada función W , para que la transformación producida por ésta, convierta el sistema canónico

$$\tilde{x}' - J H_{\tilde{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{y}' - J K_{\tilde{y}} = 0 \quad (3-2)$$

de modo que la nueva hamiltoniana

$$K(\tilde{y}; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} K^{(n)}(\tilde{y}) \quad (3-3)$$

no dependa de la variable independiente f . Con este objeto pongamos

$$W = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \varepsilon^n W_{n+1}(x, X; f) \quad (3-4)$$

$$L_i g(\tilde{x}, f) = (g; W_i) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial W_i}{\partial X_k} - \frac{\partial g}{\partial X_k} \frac{\partial W_i}{\partial x_k} \right) \quad (3-5)$$

Puede probarse que dada una unción escalar $g(x, X, f; \varepsilon)$ cuyo desarrollo en serie de potencias del pequeño parámetro es

$$g(x, X, f; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \varepsilon^n g_n(x, X, f) \quad (3-6)$$

su expresión en las variables y, Y mediante la transformación generada por W es

$$g(y, Y, f; \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \varepsilon^n g^{(n)}(y, Y, f) \quad (3-7)$$

en donde la dependencia formal de las funciones $g^{(n)}$ está dada por

$$g^{(n)}(x, X, f) = g_n(x, X, f) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} M_j g_{n-j}(x, X, f) \quad (3-8)$$

y M_j son operadores definidos en función de los paréntesis de Poisson por

$$\begin{aligned} M_1 &= L_1 \\ M_n &= L_n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} M_{n-j} L_j \end{aligned} \quad (3-9)$$

si estas fórmulas son aplicadas a $g(x) = x_j$, X_j obtenemos de un modo explícito la fórmulas de la transformación generada por W ; en forma vectorial quedan

$$\tilde{x} = \tilde{y} + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} M_n \tilde{y} \quad (3-10)$$

Al efectuar la transformación canónica en el sistema (3-2), las dos funciones hamiltonianas están relacionadas por

$$H(\tilde{x}, f; \varepsilon) = K(\tilde{y}; \varepsilon) + R(\tilde{x}, f; \varepsilon) \quad (3-11)$$

donde R verifica $R_{\tilde{x}} = -J \tilde{x}_f$ y teniendo en cuenta (3-1), (3-4), resulta

$$R(\tilde{x}, f; \varepsilon) = \int \frac{\partial W}{\partial f} d\varepsilon = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial W_n}{\partial f} \quad (3-12)$$

expresando H y R en las variables y mediante las fórmulas de transformación (3-8), (3-9) e identificando coeficientes de potencias respectivas de ε , los de orden n quedarán

$$H_n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} M_j H_{n-j} = K^{(n)} + \frac{\partial W_n}{\partial f} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} M_j \frac{\partial W_{n-j}}{\partial f}$$

o bien

$$\begin{aligned} L_n H_0 - \frac{\partial W_n}{\partial f} &= K^{(n)} + \Phi_n = K^{(n)} - H_n - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} M_{n-j} L_j H_0 \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} M_j H_{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} M_j \frac{\partial W_{n-j}}{\partial f} \end{aligned} \quad (3-13)$$

Supongamos obtenidas las funciones $K^{(i)}$, W_i hasta el orden $n-1$, entonces se puede calcular la función Φ_n y tomaremos $K^{(n)}$ como la parte secular de Φ_n respecto a f , resolviendo la ecuación en derivadas parciales que queda se obtendrá la función W_n . De esta forma el proceso puede ser conducido hasta cualquier orden.

Aplicaremos el método asintótico expuesto anteriormente a nuestro problema. Para orden cero es evidente que $K^{(0)} = H_0$, y en primer orden la ecuación (3-13) es

$$L_1 H_0 - \frac{\partial W_1}{\partial f} = K^{(1)} - H_1 \quad (3-14)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2-9) de H_1 , $K^{(1)} = 0$. Entonces la ecuación (3-14) de modo explícito queda

$$\begin{aligned} [-X_2 + (1-2\alpha_1)x_1] \frac{\partial W_1}{\partial X_1} + [X_1 + (1-2\alpha_2)x_2] \frac{\partial W_1}{\partial X_2} - (X_1 + x_2) \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \\ - (X_2 - x_1) \frac{\partial W_1}{\partial x_2} - \frac{\partial W_1}{\partial f} = -(\alpha_1 x_2^2 + \alpha_2 x_1^2) \cos f \end{aligned} \quad (3-15)$$

Hay que obtener una solución completa de esta ecuación en derivadas parciales; para

ello observemos que el segundo miembro de (3-15) es una forma cuadrática, esto nos lleva a ensayar para W_1 una función de la forma

$$W_1 = A x_1^2 + B x_2^2 + 2 C x_1 x_2 + \bar{A} X_1^2 + \bar{B} X_2^2 + 2 \bar{C} X_1 X_2 + 2 D x_1 X_1 + 2 E x_2 X_2 + 2 F x_2 X_1 + 2 G x_2 X_2 \quad (3-16)$$

donde cada coeficiente es una función periódica de f . Sustituyendo (3-16) en (3-15), los coeficientes de (3-16) deben verificar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\bar{C} - 2D - \bar{A}' &= 0 \\ 2\bar{C} + 2G + \bar{B}' &= 0 \\ -2\bar{A} + 2\bar{B} - 2E - 2F - 2\bar{C}' &= 0 \\ -\omega_1 \bar{A} + 2E - 2A + 2F - 2D' &= 0 \\ -2F - \omega_2 B - 2E - 2B - 2G' &= 0 \\ -2D - \omega_1 \bar{C} - 2C + 2G - 2E' &= 0 \\ 2G - \omega_2 \bar{C} - 2C - 2D - 2F' &= 0 \\ -\omega_1 F - \omega_2 E - 2A + 2B - 2C' &= 0 \\ -\omega_1 D + 2C - A' &= -\alpha_1 \cos f \\ -\omega_2 G - 2C - B' &= -\alpha_2 \cos f \end{aligned} \quad (3-17)$$

Las primas indican derivación respecto a f . El sistema (3-17) admite la solución

$$\begin{aligned} A &= A^{(1)} \sin f & \bar{A} &= \bar{A}^{(1)} \sin f \\ B &= B^{(1)} \sin f & \bar{B} &= \bar{B}^{(1)} \sin f \\ C &= C^{(1)} \cos f & \bar{C} &= \bar{C}^{(1)} \cos f \\ D &= D^{(1)} \cos f & F &= F^{(1)} \sin f \\ E &= E^{(1)} \sin f & G &= G^{(1)} \cos f \end{aligned} \quad (3-18)$$

en donde el superíndice asociado a las letras anteriores indican que son constantes; en efecto, sustituyendo (3-18) en (3-17), estas variables deben verificar el sistema

$$\begin{aligned} 2\bar{C}^{(1)} - 2D^{(1)} - \bar{A}^{(1)} &= 0 \\ 2\bar{C}^{(1)} + 2G^{(1)} + \bar{B}^{(1)} &= 0 \\ -2\bar{A}^{(1)} + 2B^{(1)} - 2E^{(1)} - 2F^{(1)} + 2\bar{C}^{(1)} &= 0 \\ -\omega_1 \bar{A}^{(1)} + 2E^{(1)} - 2A^{(1)} + 2F^{(1)} + 2D^{(1)} &= 0 \\ -2F^{(1)} - \omega_2 B^{(1)} - 2E^{(1)} - 2B^{(1)} + 2G^{(1)} &= 0 \\ -2D^{(1)} - \omega_1 \bar{C}^{(1)} - 2C^{(1)} + 2G^{(1)} - 2E^{(1)} &= 0 \\ 2G^{(1)} - \omega_2 \bar{C}^{(1)} - 2C^{(1)} - 2D^{(1)} - 2F^{(1)} &= 0 \\ -\omega_1 F^{(1)} - \omega_2 E^{(1)} - 2A^{(1)} + 2B^{(1)} + 2C^{(1)} &= 0 \\ -\omega_1 D^{(1)} + 2C^{(1)} - A^{(1)} &= -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \delta \right) \\ -\omega_2 G^{(1)} - 2C^{(1)} - B^{(1)} &= -\frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \delta \right) \end{aligned} \quad (3-19)$$

cuya solución es

$$A^{(1)} = (-9\delta^3/2 + 33\delta^2/2 + 7\delta - 44)/\Delta$$

$$B^{(1)} = (9\delta^3/2 + 33\delta^2/2 - 7\delta - 44)/\Delta$$

$$C^{(1)} = 4\delta/\Delta$$

$$\bar{A}^{(1)} = (-6\delta^2 + 14\delta + 44)/\Delta$$

$$\bar{B}^{(1)} = (-6\delta^2 - 6\delta + 44)/\Delta$$

$$\bar{C}^{(1)} = 8\delta/\Delta$$

$$D^{(1)} = (3\delta^2 + \delta - 22)/\Delta$$

$$E^{(1)} = (6\delta^2 - 10\delta)/\Delta$$

$$F^{(1)} = (-6\delta^2 - 10\delta)/\Delta$$

$$G^{(1)} = (3\delta^2 - \delta - 22)/\Delta$$

$$\Delta = 8(3\delta^2 - 11)$$

Los coeficientes de (3-18) dados por las fórmulas (3-20) resultan expresados como cocientes de polinomios en δ y todos ellos tienen Δ como denominador común. Este denominador se anula para $\delta^2 = 11/3$ lo que corresponde según (2-3) al valor de μ

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{8}{9}} \right) = 0,028595 \dots$$

por tanto la transformación obtenida resulta regular para todo valor de μ distinto de μ_1 .

La función generatriz W_1 dada por (3-16) de acuerdo con (3-18) toma la forma

$$\begin{aligned} W_1 = & A^{(1)} \sin f x_1^2 + B^{(1)} \sin f x_2^2 + 2 C^{(1)} \cos f x_1 x_2 + \bar{A}^{(1)} \sin f X_1^2 + \\ & \bar{B}^{(1)} \sin f X_2^2 + 2 \bar{C}^{(1)} \cos f X_1 X_2 + 2 D^{(1)} \cos f x_1 x_2 + 2 E^{(1)} \sin f \\ & x_1 X_2 + 2 F^{(1)} \sin f x_2 X_1 + 2 G^{(1)} \cos f x_2 X_2 \end{aligned} \quad (3-21)$$

Para obtener los resultados de segundo orden planteamos la ecuación (3-13) para $n = 2$, la cual después de simplificada con ayuda de (3-14) queda

$$L_2 H_0 - \frac{\partial W_2}{\partial f} = K^{(2)} - H_2 - L_1 H_1 \quad ((3-22))$$

Es necesario calcular $H_2 + L_1 H_1$ y posteriormente elegir $K^{(2)}$ de modo que agote la parte secular de ésta, operando resulta

$$K^{(2)} = (2 D^{(1)} - 1) \alpha_1 x_1^2 + (2 G^{(1)} - 1) \alpha_2 x_2^2 + 2 \bar{C}^{(1)} \alpha_1 x_1 X_2 + 2 \bar{C}^{(1)} \alpha_2 x_2 X_1 \quad (3-23)$$

y la función W_2 se obtiene como solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\begin{aligned} L_2 H_0 - \frac{\partial W_2}{\partial f} = & (2 D^{(1)} - 1) \alpha_1 \cos 2 f x_1^2 + (2 G^{(1)} - 1) \alpha_2 \cos 2 f x_2^2 + \\ & (2 E^{(1)} \alpha_2 + 2 F^{(1)} \alpha_1) \sin 2 f x_1 x_2 + 2 \bar{A}^{(1)} \alpha_1 \sin 2 f x_1 X_1 \\ & + 2 \bar{C}^{(1)} \alpha_1 \cos 2 f x_1 x_2 + 2 \bar{B}^{(1)} \alpha_2 \sin 2 f x_2 X_2 + 2 \bar{C}^{(1)} \alpha_2 \cos 2 f x_2 X_1 \end{aligned} \quad (3-24)$$

Esta ecuación admite una solución cuya forma es completamente análoga a (3-21), la única diferencia es que el argumento f está sustituido por $2f$.

$$\begin{aligned}
 W = & A^{(2)} \sin 2f x_1^2 + B^{(2)} \sin 2f x_2^2 + 2C^{(2)} \cos 2f x_1 x_2 + \bar{A}^{(2)} \sin 2f X_1^2 + \\
 & \bar{B}^{(2)} \sin 2f X_2^2 + 2\bar{C}^{(2)} \cos 2f X_1 X_2 + 2D^{(2)} \cos 2f x_1 X_1 + 2E^{(2)} \sin 2f x_1 x_2 + \\
 & + 2F^{(2)} \sin 2f x_2 X_1 + 2G^{(2)} \cos 2f x_1 X_2
 \end{aligned} \quad (3-25)$$

En efecto, sustituyendo en la ecuación (3-24), los coeficientes $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, ... aparecen como soluciones de un sistema de diez ecuaciones con otras tantas incógnitas que puede resolverse en forma análoga al anterior dando la solución

$$\begin{aligned}
 A^{(2)} &= (63\delta^4/2 - 81\delta^3/2 - 94\delta^2 + 66\delta + 176)/8\delta\Delta \\
 B^{(2)} &= (45\delta^4/2 + 135\delta^3/2 - 38\delta^2 - 198\delta - 176)/8\delta\Delta \\
 C^{(2)} &= (-14\delta^2 + 22)/\delta\Delta \\
 \bar{A}^{(2)} &= -(3\delta^3 + 17\delta^2 + 66\delta + 176)/4\delta\Delta \\
 \bar{B}^{(2)} &= -(3\delta^3 - 17\delta^2 + 66\delta + 176)/4\delta\Delta \\
 \bar{C}^{(2)} &= -2(\delta^2 + 22)/\delta\Delta \\
 D^{(2)} &= 3(\delta^2 + 3\delta + 22)/4\Delta \\
 E^{(2)} &= 3(\delta^2 + 3\delta - 22)/4\Delta \\
 F^{(2)} &= 3(-\delta^2 + 3\delta + 22)/4\Delta \\
 G^{(2)} &= 3(\delta^2 - 3\delta + 22)/4\Delta
 \end{aligned} \quad (3-26)$$

Para tercer orden hay que calcular la función Φ_3 dada por (3-13); simplificando mediante las ecuaciones (3-14), (3-22) se tiene

$$\Phi_3 = -H_3 - 2L_2 H_1 - 2L_1 K^{(2)} - L_1 H_2$$

Entonces $K^{(3)}$ debe ser obtenida tomando la parte secular de Φ_3 , ahora bien, como todas las funciones obtenidas son formas cuadráticas en las variables x_1 , x_2 , X_1 , X_2 , Φ_3 también lo será y además sus coeficientes estarán formados por términos del tipo $\sin^\alpha f \cdot \cos^\beta f$ con $\alpha + \beta = 3$ por tanto su valor medio es nulo y $K^{(3)} = 0$.

En resumen, la aplicación en segundo orden del método de Deprit nos permite decir que al efectuar en el sistema (2-6) la transformación

$$\begin{aligned}
 x_i &= y_i + e \frac{\partial W_1}{\partial Y_i} + \frac{e^2}{2!} \left(\frac{\partial W_2}{\partial Y_i} + \left(\frac{\partial W_1}{\partial Y_i}; W_1 \right) \right) \\
 X_i &= Y_i - e \frac{\partial W_1}{\partial y_i} + \frac{e^2}{2!} \left(-\frac{\partial W_2}{\partial y_i} + \left(-\frac{\partial W_1}{\partial y_i}; W_1 \right) \right)
 \end{aligned} \quad (3-27)$$

donde las funciones W_1 , W_2 están dadas por (3-21), (3-25) con el cambio formal de (x, X) por (y, Y) , la nueva hamiltoniana hasta tercer orden en potencias de e está dada por

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} (Y_1^2 + Y_2^2) - (y_1 Y_2 - y_2 Y_1) - \omega_1 y_1^2 - \omega_2 y_2^2 \\
 &+ \frac{e^2}{2} [(2D^{(1)} - 1) \alpha_1 y_1^2 + (2G^{(1)} - 1) \alpha_2 y_2^2 + 2\bar{C}^{(1)} \alpha_1 y_1 Y_2 + 2\bar{C}^{(1)} \alpha_2 y_2 Y_1] + O(e^4)
 \end{aligned} \quad (3-28)$$

donde

$$\omega_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \delta \right) \quad \omega_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \delta \right)$$

El método expuesto puede extenderse hasta cualquier orden, para ello basta tener en cuenta las siguientes observaciones:

1.º De acuerdo con (3-13) los segundos miembros de las ecuaciones que aparecen en orden sucesivos son formas cuadráticas en las variables x_1 , x_2 , X_1 , X_2 , cuyos coeficientes son expresiones periódicas respecto a f .

2.º Los coeficientes de la forma cuadrática Φ_n en (3-13) son sumas de términos de la forma $\cos^j f \sin^k f$ donde $j + k = n$, por lo tanto cuando n es impar la parte secular de Φ_n respecto a f es nula, lo que implica $K^{(n)} = 0$.

3.º Como la ecuación en derivadas parciales es lineal, se puede descomponer el segundo miembro como suma de las distintas frecuencias y resolver la ecuación (3-13) para cada una de las frecuencias.

4.º La ecuación para la frecuencia pf puede resolverse ensayando una solución de la forma (3-16) donde los coeficientes sean expresiones del tipo $A_1 \cos pf + A_2 \sin pf$.

Con estas observaciones apreciamos que la obtención de la solución se reduce a la resolución algebraica de los sistemas lineales que van apareciendo sucesivamente, la complejidad crece considerablemente con el orden, por tanto si se quieren extender los resultados a órdenes superiores parece conveniente establecer una programación del algoritmo.

4. Sistema transformado

Las ecuaciones de Hamilton correspondientes a (3-28) pueden escribirse como sistema lineal de coeficientes constantes en la forma

$$\frac{d}{df} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^2 \bar{C}^{(1)} \alpha_2 & 1 & 0 \\ -1 + e^2 C^{(1)} \alpha_1 & 0 & 0 & 1 \\ 2\omega_1 - e^2 (2D^{(1)} - 1) \alpha_1 & 0 & 0 & 1 - e^2 \bar{C}^{(1)} \alpha_1 \\ 0 & 2\omega_2 - e^2 (2G^{(1)} - 1) \alpha_2 & -1 - e^2 \bar{C}^{(1)} \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

y la ecuación característica correspondiente a este sistema lineal

$$\lambda^2 + \lambda^2 (1 + e^2 \varphi_0 + e^4 \varphi_1) + \psi_0 + e^2 \psi_1 + e^4 \psi_2 + e^6 \psi_3 = 0 \quad (4-2)$$

siendo φ_i, ψ_i funciones del coeficiente constante δ . Las primeras están dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{33(4 - \delta^2)}{16(3\delta^2 - 11)} & \psi_0 &= \frac{9(4 - \delta^2)}{16} \\ \psi_1 &= \frac{9(4 - \delta^2)(9\delta^2 - 22)}{64(3\delta^2 - 11)} \end{aligned} \quad (4-3)$$

Las raíces de (4-2) son los exponentes característicos, para obtenerlos pongamos $\lambda^2 = \Lambda$, entonces la ecuación bicuadrada (4-2) tiene dos soluciones

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 + e^2 \Lambda_0 + O(e^4) \\ \Lambda^* &= \Lambda_0^* + e^2 \Lambda_1^* + O(e^4) \end{aligned} \quad (4-4)$$

siendo

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= (-1 + \sqrt{-8 + 9\delta^2/4})/2 \\ \Lambda_0^* &= (-1 - \sqrt{-8 + 9\delta^2/4})/2 \\ \Lambda_1 &= \frac{\psi_1 + \varphi_0 \Lambda_0}{\Lambda_0^* - \Lambda_0} = \frac{1}{2} \Lambda_0 \frac{(1 + \Lambda_0)(7 + 6\Lambda_0)}{(1 + 2\Lambda_0)(1 + 4\Lambda_0)} \\ \Lambda_1^* &= \frac{\psi_1 + \varphi_0 \Lambda_0^*}{\Lambda_0 - \Lambda_0^*} = \frac{1}{2} \Lambda_0^* \frac{(1 + \Lambda_0^*)(7 + 6\Lambda_0^*)}{(1 + 2\Lambda_0^*)(1 + 4\Lambda_0^*)} \end{aligned} \quad (4-5)$$

Las expresiones (4-5) presentan dos singularidades. Primeramente cuando $\Lambda_0^* - \Lambda_0 = 0$ lo que equivale a $\delta^2 = 32/9$ ó $\mu = \mu_0$, entonces ambas expresiones Λ_1 y Λ_1^* son singulares. Por otro lado para $\mu = \mu_1$ ó $1 + 4\Lambda_0 = 0$, Λ_1 también resulta singular.

Pasemos seguidamente a ver la naturaleza de los exponentes característicos en un entorno de los valores $\mu = \mu_0$, $e = 0$ y $\mu = \mu_1$, $e = 0$. El discriminante de la ecuación (4-2) de acuerdo con (4-3) hasta primer orden en e^2 resulta

$$D = 1 - 4\psi_0 + 2e^2(\varphi_0 - 2\psi_1)$$

$$D = \frac{9\delta^2 - 32}{4} + e^2 \frac{3(4 - \delta^2)}{8(3\delta^2 - 11)} (88 - 27\delta^2)$$

Para $e = 0$, el valor $\delta = \sqrt{32/9} = \delta_0$ anula el discriminante D y por tanto separa las regiones de estabilidad e inestabilidad, sin embargo para $e > 0$ puede verse que $D > 0$ aun para valores de $\delta < \delta_0$, lo que significa que la estabilidad se extiende para $\mu > \mu_0$ cuando $e > 0$. En primera aproximación la curva que separa las regiones de estabilidad e inestabilidad está representada en el plano (μ, e) por $D = 0$, luego

$$e^2 = -2(3\delta^2 - 11)(9\delta^2 - 32)/3(4 - \delta^2)(88 - 27\delta^2)$$

$$e^2 = \frac{-72(3\delta^2 - 11)(\mu - \mu_0)(\mu - 1 + \mu_0)}{(4 - \delta^2)(88 - 27\delta^2)}$$

y para $\mu = \mu_0$ queda

$$e^2 = \frac{27}{4}(\mu - \mu_0)$$

Estudiemos a continuación la naturaleza de las soluciones en un entorno del punto $\mu = \mu_1$, $e = 0$. Para que haya estabilidad, es decir que las raíces de (4-2) sean reales y negativas es necesario y suficiente que se verifiquen las condiciones.

i) $D > 0$.

ii) $-(-1 + e^2\varphi_0) + \sqrt{D} < 0$.

Estas condiciones en términos de e , δ quedan

$$1 + e^2 \frac{(9\delta^2 - 22)}{4(3\delta^2 - 11)} > 0, \quad \frac{9\delta^2 - 32}{4} + e^2 \frac{3(4 - \delta^2)(88 - 27\delta^2)}{8(3\delta^2 - 11)} > 0$$

y en un entorno de $\delta_1 = \sqrt{11/3}$ estas acotaciones son equivalentes a

$$e^2 > 4(3\delta^2 - 11)/12, \quad e^2 < -4(3\delta^2 - 11)/12$$

Por tanto en un entorno de μ_1 la curva que separa las regiones de estabilidad e inestabilidad tiene un punto cuspidal. Puede verse que los resultados de nuestras investigaciones analíticas están de acuerdo con los obtenidos numéricamente por Danby y Bennet (1965).

BIBLIOGRAFIA

- A. BENNET: *Icarus*, 4, 177 (1965).
 A. BENNET: *Progress in Astronautics* (1966).
 J. M. A. DANBY: *Astron. Journal* 69, 2, 165 (1964).
 A. DEPRIT: *Celestial Mechanics* 1, 1, 12 (1969).
 A. DEPRIT and A. ROM: *Astrom. and. Astroph.* 5, 416 (1970).
 V. SZEBEHELY: *Theory of Orbits*. Academic Press (1967).

«ESTUDIO DE LA ESFERICIDAD DE LA ONDA EXTRAXIAL EN UN SISTEMA OPTICO» (I)*

P O R

J. CASAS y J. APORTA

Departamento de Física Fundamental. Cátedra de Optica
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

The light patterns (spot-diagrams) in different optical systems are studied in function of the height difference (DIF) between the spots of the principal and the marginal sagital rays on the paraxial plans.

An empirical study is made for different optical systems the bahavior well-known.

It is observed that, when the height difference is small, if the incident ray describes a circumference on the entrance pupil plane with center on the pupil axis, then the emergent ray describes another circumference on the image plane with center on the principal ray impact. That confirms that emergent wave is of revolution around the principal ray.

Introducción

Al proceso de diseño y corrección de los sistemas ópticos desde un estado inicial, dado por el anteproyecto, hasta un estado final que, cumpliendo las exigencias de campo, abertura y focal prefijadas de la calidad de imagen deseada, se denomina «Cálculo de combinaciones ópticas», pudiéndose distinguir a lo largo de su desarrollo y perfeccionamiento tres épocas bien diferenciadas.

En la primera de ellas, que cubre aproximadamente el siglo XVIII, las mayores contribuciones al cálculo son debidas a Dolland y Fraunhofer, de los que se tienen noticias que obtenían sistemas corregidos por retoques en las distintas superficies en el proceso de fabricación más que por un cálculo previo.

En la segunda etapa, que abarca el siglo XIX y parte del XX, el cálculo de sistemas sufre un gran impulso con las contribuciones de Seidel y Petzval, que dan fórmulas aproximadas hasta el tercer orden para las expresiones de las aberraciones fundamentales de un sistema óptico y que constituyen el primer método analítico de corrección de aberraciones.

El exigir que los sistemas trabajasen con grandes aberturas y campos, siendo importantes las contribuciones de órdenes superiores al 3°, las sumas de Seidel sólo se pudieron utilizar como un método aproximado de cálculo, siendo las adiciones necesarias a dicho método para conseguir el estado de corrección final del sistema algo propio de cada autor y en ello consistiría el llamado arte de calcular. Sobre esta metodología se han producido obras como las de A. E. Conrady¹⁾, H. Chretien²⁾, G. G. Sliusarev³⁾ y J. Burcher⁴⁾.

* Este trabajo constituye parte de la Tesis Doctoral del Dr. J. Aporta, leída en la Facultad de Ciencias de Zaragoza, el 14 de diciembre de 1973.

El desarrollo de las aberraciones de 5.º orden y superiores⁵⁾ supuso una importante contribución al método del 3.º orden, pero en definitiva no se encontró un álgebra que generalizase toda la experiencia anterior, dando la posibilidad de nuevas predicciones, y que constituyera un método sistemático de cálculo de sistemas en el que la experiencia no fuese un factor decisivo.

Con todo, el cálculo de sistemas ha evolucionado cada vez más hacia métodos consistentes en el trazado exacto de rayos, pues como señala J. M. Palmer⁶⁾, así se pueden determinar las aberraciones geométricas exactas siendo éste, como dice G. Toraldo⁷⁾, el método más seguro de cálculo.

No obstante, el cálculo trigonométrico de las marchas de rayos se llevaba a cabo casi exclusivamente en plano meridiano, pues el trazado de rayos cruzados con el eje del sistema resultaba tan penoso que muy rara vez se calculaban; y no extraño encontrarse con sistemas que, estando bien corregidos en plano meridiano, tenían que ser desechados después de cuantiosos gastos de cálculo y fabricación del prototipo debido al mal comportamiento de la luz extrameridiana.

El comportamiento de esa luz extrameridiana ha podido estudiarse gracias a los potentes calculadores electrónicos que marcan con su aparición en el mercado hacia 1950, una nueva etapa en el cálculo de combinaciones ópticas.

A partir de este momento se pueden estudiar un gran número de rayos que, después de atravesar el sistema, nos den cuenta del comportamiento de la luz que por él pasa pudiéndose así establecer criterios sobre la calidad de la imagen a partir de métodos geométricos o difraccionales que pueden verse ampliamente en los tratados de M. Herzbergen⁸⁾, H. H. Hopkins⁹⁾ y otros¹⁰⁾.

El estudio del comportamiento de la luz extrameridiana se comenzó en este laboratorio con la tesis de C. Oñate¹¹⁾. Mediante el análisis de esta tesis y de un trabajo posterior¹²⁾, se obtuvo como conclusión más importante la posibilidad de intentar un método de cálculo de sistemas basado en conseguir la esfericidad de la onda emergente de una forma directa e íntimamente relacionada con el comportamiento de la luz extrameridiana.

Propósito

Como se ha observado en trabajos anteriores que cuando la diferencia de alturas de impacto en plano paraxial de los rayos principal y sagital (que entraron en el sistema, a la misma altura, por centro y borde sagital de PE), y que llamamos DIF, era muy pequeña se mejoraba profundamente la simetría de la mancha imagen, vamos a hacer un estudio sistemático de este hecho, y otros importantes que aparezcan, sobre unos sistemas ópticos bien conocidos para poder sacar conclusiones generalizadas que nos permitan atacar los problemas de cálculo de sistemas ópticos empleando para ello el menor número de rayos posibles.

Método de cálculo y desarrollo del trabajo

Para estudiar el comportamiento de la luz que pasa por el sistema procedente de cualquier punto objeto, se calcula la marcha real de 29 de los rayos que entran en el sistema por la mitad derecha de PE —ya que la simetría del problema nos ahorra el considerar la otra mitad— de tal forma que sus puntos de corte se encuentran distribuidos sobre cuatro semicircunferencias concéntricas con el punto de impacto del rayo principal, que es el centro de la PE. Cada una de esas cuatro semicircunferencias, de ra-

dios $r_i = n_i \frac{R}{4}$ (con $n_i = 1, 2, 3, 4$ y R = radio de la PE), une los puntos de corte con pupila —equidistante entre sí— de siete de los rayos.

El método seguido para obtener la marcha de los rayos cruzados a través del sistema puede verse un trabajo de J. Casas y J. Aporta¹²⁾.

Los sistemas ópticos objeto de estudio han sido los oculares M-2-III y 2-II y los objetivos Tessar y Triplete de Taylor, trabajando con apertura relativa 1/4.

Todos ellos son sistemas que aparecen en la literatura y que admiten algún estado de corrección aceptable para determinados valores de los parámetros que lo definen, por lo que pueden ser empleados como sistemas test partiendo de un estado inicial descomulgado.

A cada uno de estos sistemas, se les ha exigido:

i) corrección de aberración esférica longitudinal (AEL) asegurando que la onda emergente en eje sea esférica, cosa que tradicionalmente siempre se ha hecho, sin duda con la esperanza de que dicha esfericidad se propagase a los haces de campo.

ii) hacer mínima la diferencia de alturas de impacto en plano imagen paraxial de los rayos principal y sagital para el mayor semicampo con el que va a trabajar el sistema.

Se analizan en cada caso los impactos de los rayos, después de atravesar el sistema, en los planos paraxial (PP) y comático (PC) (entendiendo por plano comático el que siendo perpendicular al eje del sistema pasa además por el punto de corte de los rayos superior e inferior) para semicampos de 21°, 15° y 10°, uniendo los impactos correspondientes a los rayos que entraron por PE sobre una misma semicircunferencia, mediante una línea para poder así visualizar mejor la simetría de la mancha imagen y poder relacionarla con la forma de la superficie de onda emergente. Las líneas se marcan con un 1 si corresponde a los impactos de los rayos que entraron por PE sobre una semicircunferencia de radio $r = R$ y por 2, 3 ó 4 si $r = 3R/4$, $R/2$ o $R/4$ respectivamente. Un rayo quedará pues determinado por dos números (a, b) que especifican el punto de incidencia en PE. Todas las referencias que existen en los diagramas de punto tienen como unidad el milímetro.

Los criterios adoptados para la valoración de la imagen de un punto han sido la simetría y la superficie por ella ocupada¹³⁾.

Todos los cálculos se han realizado mediante programas elaborados en lenguaje Fortran IV.

Resultados

a) Ocular 2-II.

La forma y características de este primer sistema óptico objeto de estudio pueden sacarse de la Tabla 1 donde d_1 es la distancia de la PE a la primera superficie del sistema; y el comportamiento del sistema en este estado original observando la Gráfica 1.

TABLA 1

$r_1 = 195.80$	$d_1 = 76$	$n_1 = 1.000$
$r_2 = -1960.60$	$d_2 = 10$	$n_2 = 1.72722$
$r_3 = -315.00$	$d_3 = 15$	$n_3 = 1.62291$
$r_4 = 80.00$	$d_4 = 0.2$	$n_4 = 1. (aire)$
$r_5 = -145.12$	$d_5 = 15$	$n_5 = 1.62291$
$r_6 = 216.29$	$d_6 = 10$	$n_6 = 1.72722$

Modificando los radios de las distintas superficies se ha alcanzado un nuevo estado caracterizado por unos valores de los radios

$r_1 = 195.760$	$r_4 = 64.49$
$r_2 = -1966.00$	$r_5 = -145.12$
$r_3 = -313.00$	$r_6 = 124.79$

reduciendo la AEL para el rayo de borde de pupila a un valor 0.00032. En la Gráfica 2 se representan los diagramas de impacto en este nuevo estado para semicampos de 21°, 15° y 10°, y en la parte inferior la curva de AEL que como se ve aseguraría el buen comportamiento de toda la luz del haz de eje.

Exigiendo al sistema en su comportamiento minimización de DIF para semicampo de 21° evolucionó hacia un nuevo estado en el que los radios de las distintas superficies tomaban los valores

$$\begin{array}{ll} r_2 = -376.11 & r_5 = -145.11 \\ r_1 = 638.50 & r_4 = 132.51 \\ r_3 = -223.50 & r_6 = -335.40 \end{array}$$

Los diagramas de impacto de este nuevo estado del sistema se representan en la Gráfica 3.

En la Tabla 2 pueden apreciarse los valores de las aberraciones reales para las distintas haces de campo en los tres estados, (original, corregido de AEL y minimizado de DIF), del ocular 2-II.

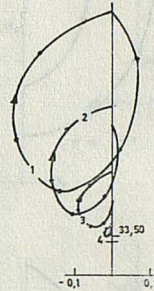
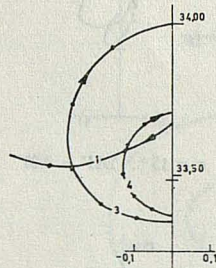
TABLA 2
OCULAR 2-II

		Estado original		
		$\sigma = 21^\circ$	$\sigma = 15^\circ$	$\sigma = 10^\circ$
Coma		0.600	0.312	0.184
	S	-7.750	-2.848	-1.425
Astigmatismo	P	-0.456	0.528	0.416
	I	4.010	3.487	1.898
Curvaturas	SA	-3.950	-2.373	-1.151
	TA	-3.520	-2.901	-1.562
Distorsión		-12.730	-6.302	2.5512
Esférica		-0.133,	-0.075, -0.033,	0.00074
		Estado corregido de AEL		
		$\sigma = 21^\circ$	$\sigma = 15^\circ$	$\sigma = 10^\circ$
Coma		0.887	0.334	0.179
	S	1.842	1.341	1.236
Astigmatismo	P	11.522	-2.177	-0.0979
	I	6.445	4.761	2.881
Curvaturas	SA	-5.180	-3.138	-1.524
	TA	-7.022	-5.280	-2.761
Distorsión		-16.319	-7.939	-2.233
Esférica		0.00032,	-0.00084, -0.00028,	0.00072
		Estado corregido de DIF		
		$\sigma = 21^\circ$	$\sigma = 15^\circ$	$\sigma = 10^\circ$
Coma		-0.067	-0.009	-0.006
	S	1.370	1.200	1.310
Astigmatismo	P	-0.891	-0.517	-0.242
	I	0.221	1.041	1.440
Curvaturas	SA	-3.651	-1.880	-0.857
	TA	-2.754	-1.363	-0.615
Distorsión		-8.650	-4.141	-1.573
Esférica		0.81,	-0.454 -0.202,	-0.049

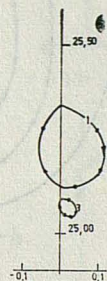
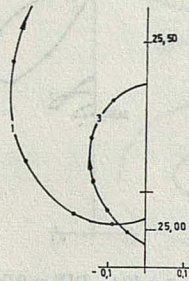
Comparando las Gráficas 1, 2 y 3 y observando los valores de Tabla 2, podemos asegurar que la corrección de AEL no mejora el comportamiento del sistema para los distintos haces de campo —sobre todo en lo que a simetría de las manchas imágenes se refiere—; mientras que la minimización de DIF les confiere una gran simetría, pues las líneas que unen los impactos de los rayos, que entraron por PE equidistantes de su centro, son prácticamente semicircunferencias concéntricas con el impacto del rayo principal, lo que asegura que la superficie de onda emergente será de revolución en torno al rayo principal.

OCULAR 2-II ORIGINAL

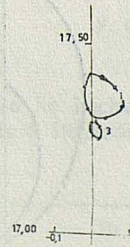
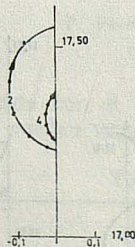
$\sigma = 21^\circ$. DIF = 0.12



$\sigma = 15^\circ$. DIF = 0.08



$\sigma = 10^\circ$. DIF = 0.05



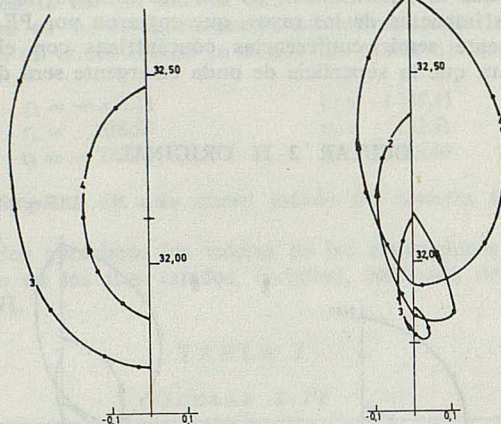
P. Paraxial

P. Comático

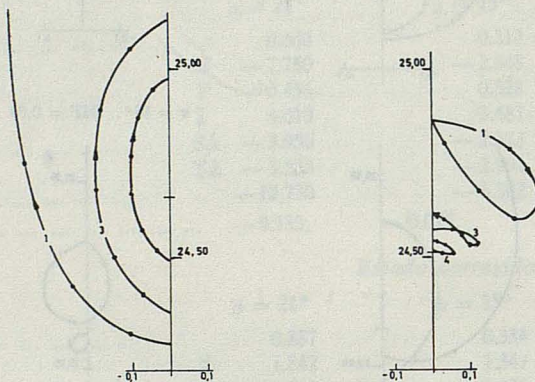
GRÁFICA 1

OCULAR 2-II CORREGIDO DE AEL

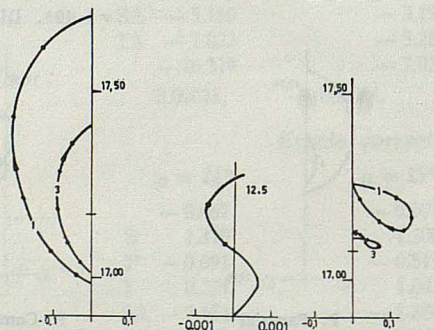
$\sigma = 21^\circ$. DIF = 0.12



$\sigma = 15^\circ$. DIF = 0.07



$\sigma = 10^\circ$. DIF = 0.04

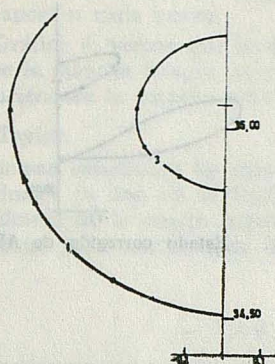


P. Paraxial Curva de AEL P. Comático

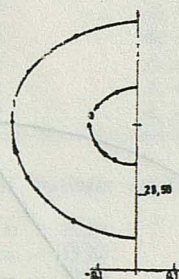
GRÁFICA 2

OCULAR 2-II CORREGIDO DE DIF

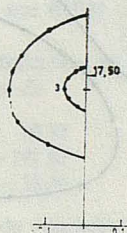
$$\sigma = 21^\circ. \text{ DIF} = 0.022$$



$$\sigma = 15^\circ. \text{ DIF} = 0.004$$



$$\sigma = 10^\circ. \text{ DIF} = 0.001$$



P. Paraxial

P. Comático

GRÁFICA 3

b) Ocular M-2-III.

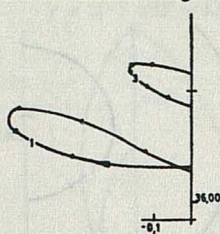
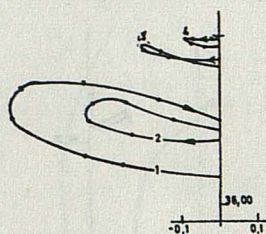
Análogo estudio al realizado con el ocular 2-II se ha hecho con el ocular M-2-III, cuya forma y características pueden verse en la Tabla 4, llegando también a los mismos resultados.

TABLA 4

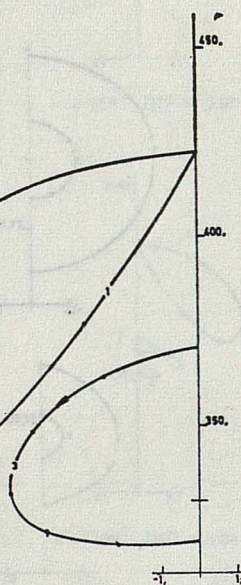
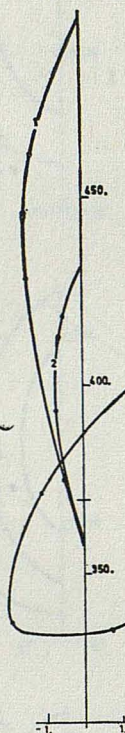
$r_1 = 620.10$	$d_1 = 80$	$n_1 = 1.0000$
$r_2 = 110.12$	$d_2 = 15$	$n_2 = 1.72722$
$r_3 = -110.12$	$d_3 = 30$	$n_3 = 1.62291$
$r_4 = 157.31$	$d_4 = 0.2$	$n_4 = 1. (\text{aire})$
$r_5 = -157.31$	$d_5 = 30$	$n_5 = 1.62291$
$r_6 = -638.10$	$d_6 = 15$	$n_6 = 1.72722$

OCULAR M-2-III $\sigma = 21^\circ$

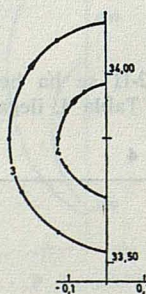
Estado original DIF = 0.12



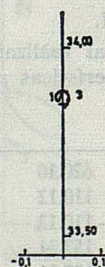
Estado corregido de AEL. DIF = -0.53



Estado corregido de DIF. DIF = 0.005



P. Paraxial



P. Comático

GRÁFICA 4

En la Gráfica 4 pueden verse los impactos en plano paraxial y plano comático para semicampos de 21° en los tres estados (Original, comegido de AEL y minimizado de DIF) del ocular M-2-III. Se omiten los diagramas de impactos para semicampos de 15° y 10° por que no aportan nada nuevo.

Al observar la Gráfica 4, vemos que la disminución de la AEL no influye para nada sobre la simetría de la mancha imagen, mientras que la minimización de DIF lo hace en un alto grado, reduciéndose la mancha prácticamente a un punto en plano comático.

c) Triplete de Taylor.

Otro de los sistemas estudiados ha sido un objetivo tipo Triplete de Taylor, cuyas características originales se dan en la Tabla 5, con el diafragma de apertura colocado un milímetro por detrás de la cuarta superficie. Los diagramas de impacto del sistema en este estado original para semicampos de 21° , 15° y 10° están representados en la Gráfica 5.

TABLA 5

$r_1 = 26.70$	$d_1 = -16$	$n_1 = 1.000$
$r_2 = -148.80$	$d_2 = 5$	$n_2 = 1.537$
$r_3 = -36.80$	$d_3 = 9.$	$n_3 = 1. (\text{aire})$
$r_4 = 23.30$	$d_4 = 1.5$	$n_4 = 1.624$
$r_5 = 122.10$	$d_5 = 14.9$	$n_5 = 1. (\text{aire})$
$r_6 = -24.50$	$d_6 = 5.$	$n_6 = 1.493$

Cuando los radios de las distintas superficies tomaban los valores

$r_1 = 45.16$	$r_4 = 52.74$
$r_2 = -119.50$	$r_5 = 46.49$
$r_3 = -52.42$	$r_6 = -104.16$

la AEL para el rayo de borde era 0.0031 y los impactos de los rayos tal como se indican en la Gráfica 6.

Minimizando DIF para semicampos de 21° se alcanza un nuevo estado, caracterizado por unos valores de los radios de

$r_1 = 30.72$	$r_4 = 23.56$
$r_2 = -141.50$	$r_5 = 499.90$
$r_3 = -35.34$	$r_6 = -22.64$

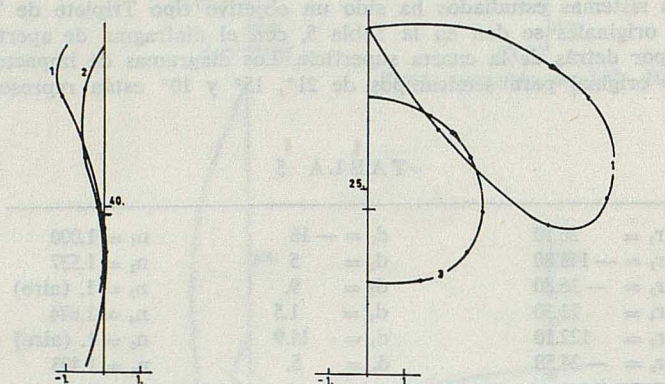
representándose los diagramas de impacto para este nuevo estado del sistema en la Gráfica 7.

Los valores que toman las aberraciones reales en los tres estados (original, comegido de AEL y minimizado de DIF) del objetivo Triplete de Taylor pueden verse en la Tabla 6.

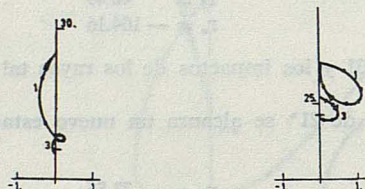
Comparando las gráficas 5, 6 y 7 vemos que la corrección de AEL no mejora la simetría de las manchas imagen y que la minimización de DIF no confiere tampoco a los diagramas de impacto la marcada simetría que en los casos anteriormente estudiados, sobre todo para semicampo de 21° , aumentando sin embargo, dicha simetría al disminuir los semicampos. Observando la Tabla 6 vemos que para semicampo de 21° el coma toma el valor 4.26 disminuyendo a 0.45 para 15° lo que indujo a pensar que la falta de simetría existente en las manchas imágenes en este caso sería debido en gran parte a la disimetría existente en plano meridiano.

TRIPLETE DE TAYLOR ORIGINAL

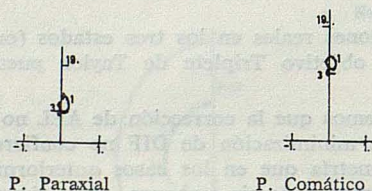
$$\sigma = 21^\circ. \text{ DIF} = -0.41$$



$$\sigma = 15^\circ. \text{ DIF} = -0.19$$



$$\sigma = 10^\circ. \text{ DIF} = 0.08$$



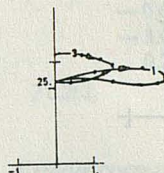
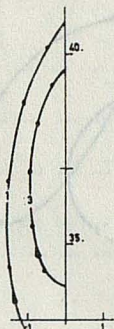
P. Paraxial

P. Comático

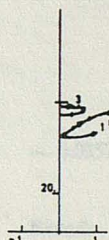
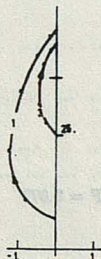
GRÁFICA 5

TRIPLETE DE TAYLOR CORREGIDO DE AEL

$\sigma = 21^\circ$. DIF = 0.77



$\sigma = 15^\circ$. DIF = 0.44



$\sigma = 10^\circ$. DIF = 0.27



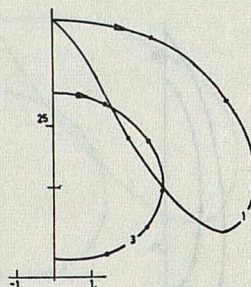
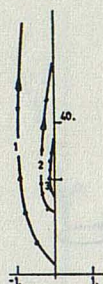
P. Paraxial

P. Comático

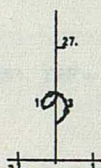
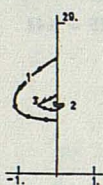
GRÁFICA 6

TRIPLETE DE TAYLOR CORREGIDO DE DIF

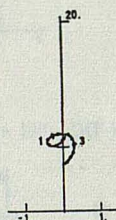
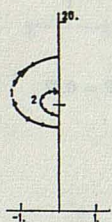
$\sigma = 21^\circ$. DIF = 0.001



$\sigma = 15^\circ$. DIF = 0.049



$\sigma = 10^\circ$. DIF = 0.072



P. Paraxial

P. Comático

GRÁFICA 7

TABLA 6

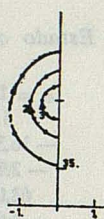
OBJETIVO TRIPLETE DE TAYLOR

<i>Estado original</i>				
	$\sigma = 21^\circ$	$\sigma = 15^\circ$	$\sigma = 10^\circ$	
Coma	2.870	1.48	0.387	
	S 55.130	-16.390	-18.381	
Astigmatismo	P 14.051	-2.720	0.382	
	I 99.000	62.051	3.880	
Curvaturas	SA -1.920	-0.680	-0.291	
	TA -15.950	-3.400	-0.673	
Distorsión	-0.410	0.278	0.398	
Esférica	1.268,	? 0.262,	-0.316,	-0.101
<i>Estado corregido de AEL</i>				
	$\sigma = 21^\circ$	$\sigma = 15^\circ$	$\sigma = 10^\circ$	
Coma	-1.400	-1.15	-0.50	
	S 21.700	16.200	6.950	
Astigmatismo	P 16.590	-8.610	3.930	
	I 35.150	3.140	0.740	
Curvaturas	SA -13.130	-6.620	-2.950	
	TA -29.700	-15.290	-6.880	
Distorsión	-3.350	-0.890	-0.018	
Esférica	0.0031,	-0.0357,	-0.0267,	-0.0075
<i>Estado corregido de DIF</i>				
	$\sigma = 21^\circ$	$\sigma = 15^\circ$	$\sigma = 10^\circ$	
Coma	4.296	0.450	0.420	
	S 37.150	1.321	3.061	
Astigmatismo	P 8.120	-0.970	-1.130	
	I 389.6	3.542	3.420	
Curvaturas	SA 1.320	0.960	0.440	
	TA -6.900	1.930	1.570	
Distorsión	0.300	0.040	0.23	
Esférica	-4.930,	-2.710	-1.162,	-0.240

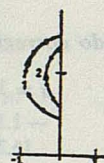
Con objeto de comprobar la anterior suposición se corrigió un poco el sistema de coma tangencial a la vez que se hacía mínimo DIF, alcanzándose un nuevo estado en el que las manchas imágenes tenían de nuevo la simetría de los casos anteriores como puede verse en la Gráfica 8.

TRIPLETE DE TAYLOR FINAL

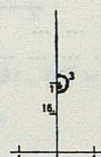
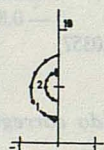
$$\sigma = 21^\circ. \text{ DIF} = 0.07$$



$$\sigma = 15^\circ. \text{ DIF} = 0.03$$



$$\sigma = 10^\circ. \text{ DIF} = 0.01$$



P. Paraxial

P. Comático

GRÁFICA 8

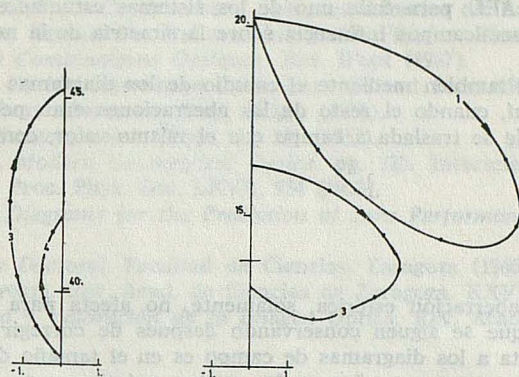
d) Objetivo Tessar.

El último sistema objeto de estudio fue un objetivo Tessar, cuyos resultados vinieron a corroborar las conclusiones parciales obtenidas de los sistemas anteriores.

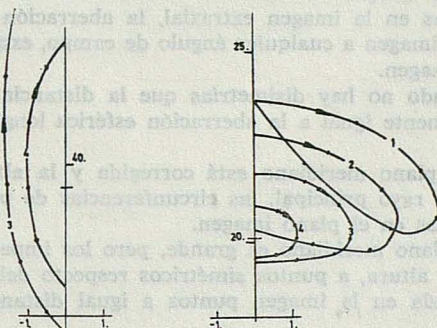
En la Gráfica 9 pueden verse los impactos en plano paraxial y comático para semicampo de 21° en los tres estados (original, corregido de AEL y minimizado de DIF) del objetivo Tessar, pudiéndose observar que la corrección de AEL no influye nada sobre la simetría de las manchas imágenes mientras que la minimización de DIF les confiere una gran simetría en torno al impacto del rayo principal.

OBJETIVO TESSAR $\sigma = 21^\circ$

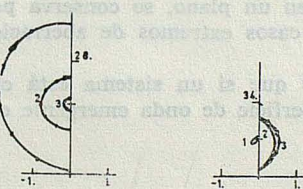
Estado original DIF = -1.70



Estado corregido de AEL. DIF = 0,27



Estado corregido de DIF. DIF = 0.02



P. Paraxial

P. Comático

GRÁFICA 9

Consideraciones

Se han representado también en cada estado de los sistemas estudiados los diagramas de impacto en planos sagital y tangencial, encontrándose que cuando DIF era pequeño en plano paraxial, también lo era en los planos sagital y tangencial, lo que indica que en la congruencia de rayos emergentes, el principal y el sagital están prácticamente sobre un mismo plano.

La simetría observada en plano paraxial cuando DIF era muy pequeño, existía también en los planos sagital y tangencial, omitiéndose su representación por no aportar nada nuevo al objeto de este trabajo.

Para comprobar hasta qué punto la corrección en eje no influía en campo, se estudiaron los diagramas de impacto para semicampos de 8° , 6° , 4° y 2° en los estados original y comegido de AEL, para cada uno de los sistemas estudiados, no encontrándose para ninguno de los semicampos influencia sobre la simetría de la mancha imagen en el segundo estado.

Se ha comprobado también mediante el estudio de los diagramas de algunos estados, no representados aquí, cuando el resto de las aberraciones eran pequeñas, que la aberración esférica de eje se traslada a campo con el mismo valor, como asegura la teoría del 3.^{er} orden.

Conclusiones

La corrección de aberración esférica, solamente, no afecta para nada a las disimetrías de la imagen, que se siguen conservando después de corregir la esférica en eje. En lo único que afecta a los diagramas de campo es en el tamaño de las figuras, sobre todo para ángulos de campo pequeños en los cuales, prácticamente, la única aberración significativa es la esférica de campo.

Cuando no hay disimetrías en la imagen extraxial, la aberración esférica es responsable del área de la mancha imagen a cualquier ángulo de campo, excepto que se le sume un efecto de curvatura de imagen.

También se observa, cuando no hay disimetrías que la distancia de plano comático a plano paraxial es prácticamente igual a la aberración esférica longitudinal en eje para cualquier ángulo de campo.

Cuando la disimetría en plano meridiano está corregida y la altura de impacto de rayo sagital es igual a la del rayo principal, las circunferencias de pupila se transforma en circunferencias concéntricas en el plano imagen.

Cuando la disimetría en plano meridiano es grande, pero los impactos de rayo sagital y principal están a la misma altura, a puntos simétricos respecto del plano sagital en la pupila de entrada corresponda en la imagen puntos a igual distancia del plano meridiano.

Cuando las disimetrías en plano meridiano no son grandes, la igualación de alturas de impacto de rayo principal y sagital en un plano, se conserva para cualquier plano imagen. Esta conservación se pierde en casos extremos de aberraciones meridianas excesivamente grandes.

De todo lo anterior parece deducirse que si un sistema está corregido en sección meridiana y DIF es muy pequeño, la superficie de onda emergente es esférica.

Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento al C. S. I. C. y al M. E. C. por sus ayudas económicas.

Uno de los autores (J. Aporta) ha sido becario con cargo al Plan de Formación de Personal Investigador del M. E. C.

BIBLIOGRAFIA

- 1) A. E. CONRADY. *Applied Optics and Optical Desing*. Dover Publications (1967).
- 2) H. CHRETIEN. *Calcul des Combinaisons Optiques*. Libraire du Bac. Paris (1969).
- 3) G. G. SLINSAREV. Traducción Italiana. Litografia Filipine. Florencia (1937).
- 4) J. BURCHER. *Les Combinaisons Optiques*. Rev. D'opt (1967).
- 5) H. A. BUCHDAL. *Optical Aberration Coeficients*. Oxford Press (1954).
- 6) J. M. PALMER. *Lens Aberration Data*. Hilger (1971).
- 7) G. TORALDO DI FRANCA. «Rev. D'opt. 31, 381 (1952).
- 8) M. HERZBERGEN. *Modern Geometrical Optics*, pg. 320. Interscience (1958).
- 9) H. H. HOPKINS. Proc. Phys. Soc. LXVB, 934 (1952).
- 10) N. B. S. *Sport Diagrams for the Prediction of Lens Performance From Desing Data*. (1965).
- 11) C. OÑATE. *Tesis Doctoral*. Facultad de Ciencias. Zaragoza (1966).
- 12) J. CASAS y J. APORTA. Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza. XXVII, 5 (1972).
- 13) J. CASAS. *Forma y Valoración de la Imagen Optica*. Rev. Acad. de Ciencias Zaragoza (1966).

MEDIDA DE LA VIDA MEDIA DEL ESTADO $7^2S_{1/2}$ DEL TALIO POR LA TECNICA DE CRUZAMIENTOS DE NIVELES A CAMPO NULO*

P O R

M. A. REBOLLEDO y E. BERNABÉU

Departamento de Física Fundamental, Cátedra de Óptica.
Universidad de Zaragoza (España)

Abstract

The lifetime of the $7^2S_{1/2}$ state of the Tl is determined by the zero-field level-crossing (Hanle effect) technique, using a dynamic method with modulation of the exciting source. The lifetime obtained is $(7.61 \pm 0.16) \times 10^{-9}$ sec.

The experimental set-up was designed and constructed by us, and is extensively described below. Moreover, it was designed to measure level-crossing in some other elements and for different magnetic fields.

Introducción

La espectroscopia de cruzamientos de niveles iniciada por Colegrove, Franken, Lewis y Sands¹⁾ es un excelente método espectroscópico, debido a que proporciona información sobre la corteza y el núcleo del átomo con gran precisión y a su elegancia y simplicidad en comparación con otras técnicas espectroscópicas. Por otra parte, la estructura hiperfina se ha revelado como el test más fructuoso para el conocimiento detallado de la función de onda del átomo, debido a la gran precisión alcanzada en la medida de efectos hiperfinos y por lo tanto, en la determinación de constantes de estructura hiperfina y momentos nucleares.

Por estos motivos hemos diseñado, construido y puesto a punto una instalación para la detección de cruzamientos entre subniveles magnéticos hiperfinos. La instalación es lo suficientemente versátil como para permitir la detección de cruzamientos de subniveles en un gran número de elementos del sistema periódico.

Una vez construidos y puestos a punto los elementos fundamentales de la instalación, hemos iniciado el estudio experimental de cruzamientos de niveles con la determinación de la vida media del nivel $7^2S_{1/2}$ del Tl, mediante la medida de los cruzamientos de niveles a campo nulo (efecto Hanle) en dicho nivel.

II. Detección de cruzamientos de niveles

Consideremos un átomo sometido a un campo externo, que puede estar constituido por la suma de campos eléctricos y magnéticos. Cuando dos subniveles de energía pre-

* El trabajo que se recoge en este artículo forma parte de la Tesis Doctoral del Dr. M. A. Rebollo, que se leyó el 14 de diciembre de 1973, en la Facultad de Ciencias de Zaragoza, obteniendo la calificación de «Sobresaliente Cum Laude».

sentan una degeneración para un valor del campo externo, se dice que dichos subniveles se cruzan.

Excitemos ópticamente un átomo que presenta un cruzamiento entre dos subniveles de estados excitados, de forma que puedan realizarse transiciones dipolares eléctricas desde un mismo subnivel del estado inicial a los dos subniveles que se cruzan. La intensidad de fluorescencia emitida espontáneamente por el átomo viene dada por²⁾

$$I = \sum_{f,f'} \sum_{e,e'} I_{fe} \frac{\langle e | \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{Q}^{(1)} | f \rangle \langle e' | \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{Q}^{(1)} | f \rangle^* \times \langle f' | \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{Q}^{(1)} | e \rangle \langle f' | \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{Q}^{(1)} | e' \rangle^*}{(\Gamma_{e'} + \Gamma_e)/2 + i(E_{e'} - E_e)} \quad (1)$$

y presenta una variación en función del campo, en torno al valor del cruzamiento, lo que permite detectar el mismo. En (1) f y f' representan a los números cuánticos que caracterizan a los subniveles del estado fundamental y e y e' representan a los estados excitados, de energías E_e y $E_{e'}$ y anchuras Γ_e y $\Gamma_{e'}$, respectivamente. $\mathbf{e}_\lambda$ y $\mathbf{e}_{\lambda'}$ son los vectores de polarización de los haces excitador y detector respectivamente e I_{fe} es la intensidad emitida por la fuente excitadora luminosa en la transición $|e\rangle \rightarrow |f\rangle$. El perfil de la señal de detección, en función del campo, presenta forma de lorentziana, curva de dispersión o mezcla de ambas.

En el caso de subniveles magnéticos hiperfinos, si se toman como funciones base las funciones de onda $|\gamma JIFM_F\rangle$, puede escribirse una función de onda cualquiera $|\psi\rangle$, en el caso de no considerar mezcla de configuraciones ni de términos, en la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{J,F} \langle \gamma JIFM_F | U | \psi \rangle | \gamma JIFM_F \rangle \quad (2)$$

siendo U la matriz de transformación que diagonaliza al hamiltoniano del átomo. Esto sólo es preciso aplicarlo para los estados excitados, ya que (1) no depende de los coeficientes $\langle \gamma JIFM_F | U | f \rangle$, $\langle \gamma' J'IF'M'_F | U' | f' \rangle$ puesto que $\sum_f |f\rangle \langle f|$ y $\sum_{f'} |f'\rangle \langle f'|$ son invariantes bajo cambios de base. Esto nos permite considerar las funciones de onda $|f\rangle$ y $|f'\rangle$ como estados puros, lo que simplifica considerablemente el cálculo.

Teniendo en cuenta esto (1) se convierte, en el caso de excitación con espectro de banda amplia para el que todas las intensidades I_{fe} son prácticamente iguales, en³⁾

$$I = \sum_{e,e'} S_{ee'} \quad (3)$$

siendo

$$S_{ee'} = \sum_{J,F,J',F'} \frac{\langle e | U | \gamma JIFM_F \rangle \langle e' | U' | \gamma' J'IF'M'_F \rangle^*}{(\Gamma_{e'} + \Gamma_e)/2 + i(E_{e'} - E_e)} \times \langle \gamma JIFM_F | U | e \rangle \langle \gamma' J'IF'M'_F | U' | e' \rangle^* \times$$

$$\langle \gamma' J'IF'M'_F | M_1 | \gamma' J'IF'M'_F \rangle \langle \gamma JIFM_F | M_2 | \gamma' J'IF'M'_F \rangle \quad (4)$$

con

$$\langle \gamma JIFM_F | M_1 | \gamma' J'IF'M'_F \rangle = \sum_{F_1, M_{F_1}} \langle \gamma JIFM_F | \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{Q}^{(1)} | \gamma_1 J_1 IF_1 M_{F_1} \rangle \times \langle \gamma' J'IF'M'_F | \mathbf{e}_{\lambda'} \cdot \mathbf{Q}^{(1)} | \gamma_1 J_1 IF_1 M_{F_1} \rangle^* \quad (5)$$

y

$$\langle \gamma \bar{J} I \bar{F} M_F | M_1 | \gamma' \bar{J}' I' \bar{F}' M_F' \rangle = (-1)^{J_1 - I + M_F - 1} \times$$

$$\langle \bar{J} \| Q^{(1)} \| J_1 \rangle \langle \bar{J}' \| Q^{(1)} \| J_1 \rangle^* [(2\bar{J} + 1)(2\bar{J}' + 1)(2\bar{F} + 1)(2\bar{F}' + 1)]^{1/2} \times$$

$$\sum_{\nu} (2\nu + 1) \begin{Bmatrix} \bar{J}' & \bar{J} & \nu \\ \bar{F} & \bar{F}' & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \nu \\ \bar{J}' & \bar{J} & J_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} F & F' & \nu \\ -M_F & M_F' & M_F - M_F' \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \nu \\ P - P & 0 & 0 \end{pmatrix} D_{M_F - M_F', 0}^{\nu}(\Phi_1, \theta_1, 0) \quad (6)$$

siendo

$$D_{M_F - M_F', 0}^{\nu}(\Phi_1, \theta_1, 0) Y_{\nu, M_F - M_F'}(\theta_1, \Phi_1) \quad (7)$$

En (6) θ_1 y Φ_1 son los ángulos polares del vector de propagación o polarización del haz excitador, según que la polarización de éste sea circular ($P = \pm 1$) o lineal ($P = 0$) respectivamente. Pueden obtenerse expresiones análogas a las (5) y (6) para M_2 que corresponde al haz detector, en las que intervienen θ_2 y Φ_2 .

En la tabla se presentan los valores de $\Delta M = |M_F - M_F'|$, ν , θ_1 , θ_2 , $\Delta \Phi = |\Phi_1 - \Phi_2|$ y las polarizaciones que es preciso utilizar, para que la señal de cruzamiento sea una lorentziana o una curva de dispersión puras, valores que se producen de las expresiones (4), (5), (6) y (7).

TABLA I

ΔM	ν	Polarización	θ_1	θ_2	$\Delta \Phi$	
					Perfil lorentziano	Perfil dispersión
2	2	Circular y lineal	$\pi/2$	$\pi/2$	$n \pi/2$	$(2n+1) \pi/4$
1	2	Circular y lineal	$\pi/4$	$\pi/4$	$n \pi$	$(2n+1) \pi/2$
1	1	Circular	$\pi/2$	$\pi/2$	$n \pi$	$(2n+1) \pi/2$

En el caso de que la excitación se haga mediante un conjunto de rayas monocromáticas, no es válida la expresión (4), debido a la intervención de I_{ν} , teniendo que realizarse el cálculo a partir de (1).

III. Método experimental

Para valor nulo del campo magnético externo existen tres cruzamientos de subniveles en el nivel $7S_{1/2}$ del Tl, uno con $\Delta M = 2$ entre los subniveles $|F=1, M_F = +1\rangle$, $|F=1, M_F = -1\rangle$ y dos con $\Delta M = 1$ entre los subniveles $|F=1, M_F = +1\rangle$, $|F=1, M_F = 0\rangle$ y $|F=1, M_F = -1\rangle$, $|F=1, M_F = 0\rangle$.

Para determinar las condiciones en que pueden detectarse estos cruzamientos es preciso utilizar el desarrollo (6) y su análogo para $\langle \gamma J I F M_F | M_2 | \gamma' J' I' F' M_F' \rangle$. Debido a las propiedades de los símbolos 6-j, dichos desarrollos se anulan para $J = J' = 1/2$ y $\nu = 2$, por lo que queda excluido el cruzamiento con $\Delta M = 2$, pudiendo detectarse los

$\Delta M = 1$. Además según las propiedades de los símbolos $3-j$, $\langle \gamma \bar{J} \bar{I} \bar{F} M_F | M_1 | \gamma \bar{J} \bar{I} \bar{F}' M_F' \rangle$ y $\langle \gamma \bar{J} \bar{I} \bar{F} M_F | M_2 | \gamma' \bar{J}' \bar{I}' \bar{F}' M_F' \rangle$ sólo son distintos de cero si $P = \pm 1$, por lo que la excitación y detección de los cruzamientos debe hacerse con luz polarizada circular, dextrógira o levógira. La observación de la tabla I nos muestra que la excitación y la detección deben hacerse en direcciones perpendiculares a la del campo magnético, obteniéndose una señal de detección en forma de lorentziana si $\Delta \Phi = 0$ y en forma de curva de dispersión si $\Delta \Phi = \pi/2$. En nuestra instalación hemos elegido la geometría con $\Delta \Phi = 0$, puesto que para obtener $\Delta \Phi = \pi/2$ es preciso que el campo magnético que produce los cruzamientos sea vertical, disposición que restringe mucho las posibilidades de la instalación, impidiendo la observación de cruzamientos para los que sean necesarias otras orientaciones de los haces excitador y detector. Esto no ocurre si disponemos el campo en dirección horizontal y utilizamos la geometría con $\Delta \Phi = 0$, con lo cual se obtienen curvas de detección en forma de lorentziana.

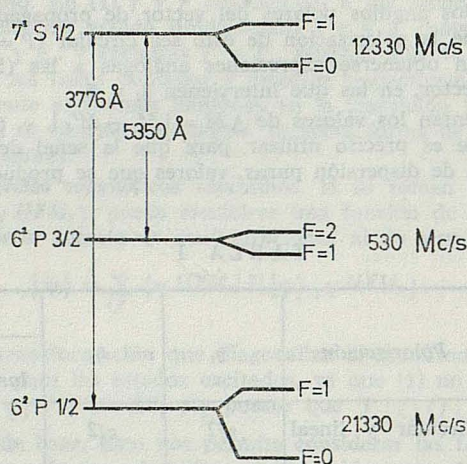


FIG. 1

En un vapor de átomos de talio en equilibrio térmico (distribución de Boltzman) la población del nivel $6^3 P_{3/2}$ es despreciable frente a la del nivel fundamental $6^3 P_{1/2}$, debido a la notable diferencia de energía entre dichos niveles ($2.337 \times 10^8 \text{ MHz}$). Ello obliga a que para la excitación del nivel $7^1 S_{1/2}$ haya que utilizar la raya ($7^1 S_{1/2} \rightarrow 6^3 P_{1/2}$) de $3776 \text{ \AA}$. La detección puede hacerse midiendo la luz de fluorescencia de $3776 \text{ \AA}$ o la de $5350 \text{ \AA}$; sin embargo, con la geometría adoptada por nosotros resulta necesario hacerlo con la de $5350 \text{ \AA}$, debido a que con la de $3776 \text{ \AA}$ llegaría al detector la luz de excitación, que es de la misma longitud de onda y enmascararía la señal de cruzamiento. Por otra parte la luz de fluorescencia de $3776 \text{ \AA}$ puede ser absorbida por los propios átomos, originando una considerable despolarización de la misma y disminuyendo por lo tanto la magnitud de la señal de cruzamiento. Esto no ocurre con la fluorescencia de $5350 \text{ \AA}$, puesto que el vapor atómico es ópticamente delgado para esta longitud de onda.

En este trabajo hemos utilizado un método de modulación del haz excitador, modulando la lámpara excitadora.

IV. Descripción de la instalación

La disposición general adoptada por nosotros para la instalación es la que se muestra esquemáticamente en la figura 2. En la realización experimental del montaje escogido existen una serie de sistemas y componentes, muchos de los cuales han sido diseñados y construidos por nosotros y cuyas técnicas han tenido que ser puestas a punto para la realización de este trabajo y que se describen a continuación.

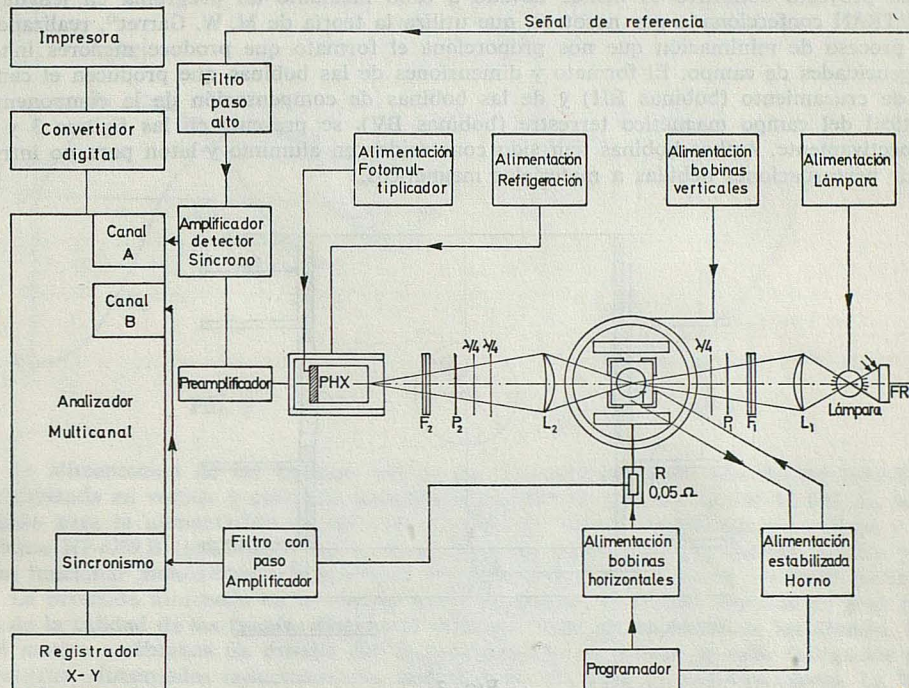


FIG. 2

a) Zona de interacción.

La muestra de talio metálico se encuentra encerrada en el interior de una célula esférica de 10 mm de radio, fabricada en cuarzo tetrasil, para poder soportar las altas temperaturas necesarias para producir vapor de Tl y permitir el paso de la radiación ultravioleta, cerrando la célula con un vacío del orden de 10^{-6} torr.

La célula es calentada mediante un horno eléctrico que puede producir temperaturas de hasta 600°C y que hemos construido con materiales no magnéticos para evitar perturbaciones magnéticas, por lo cual los elementos calefactores se han construido con hilo de platino y en arrollamiento doble.

El campo magnético es producido por dos pares de bobinas Helmholtz de gran homogeneidad, unas para la compensación de la componentes vertical del campo magnético terrestre y otras para la producción del campo magnético de cruzamiento, en la dirección de la componente horizontal del campo magnético terrestre, para poder compensarla.

El anteproyecto de estas bobinas lo hemos realizado suponiendo que los N pares de espiras están confundidos en uno solo de sección infinitesimal exigiendo:

- que para un determinado valor de la intensidad de corriente, produzcan un campo magnético determinado en el centro,
- que puedan ser alimentadas por fuentes de características prefijadas,
- un peso mínimo.
- unas condiciones prefijadas de homogeneidad en el eje Z.

Los cálculos nos proporcionan el valor del radio medio de las espiras, el número de las mismas y el grosor del hilo que es preciso utilizar para la construcción de las bobinas.

El proyecto definitivo lo hemos llevado a cabo mediante un programa en lenguaje FORTRAN confeccionado por nosotros, que utiliza la teoría de M. W. Garret⁴⁾, realizando un proceso de minimación que nos proporciona el formato que produce menores inhomogeneidades de campo. El formato y dimensiones de las bobinas que producen el campo de cruzamiento (bobinas BH) y de las bobinas de compensación de la componente vertical del campo magnético terrestre (bobinas BV), se presenta en las figuras 3 y 4 respectivamente. Ambas bobinas han sido construidas en aluminio y latón para no introducir perturbaciones debidas a materiales magnéticos.

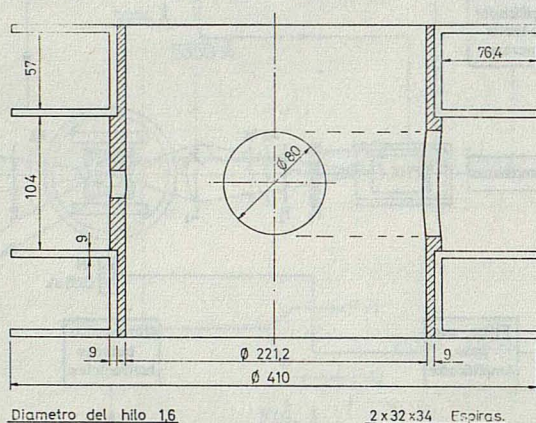


FIG. 3

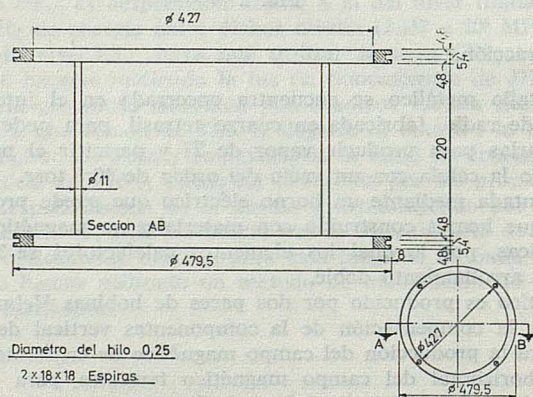


FIG. 4

En la figura 5 presentamos el valor de la inhomogeneidad relativa para las componentes axial (B_z), radial (B_p) y módulo del vector campo magnético, en función de la coordenada azimutal θ del vector de posición del punto en el que se realiza el cálculo, para un valor constante de la coordenada radial R . Se observa que la máxima inhomogeneidad B se presenta para $\theta = 0$, que corresponde al eje de simetría de las bobinas. El valor de B es de 2.2×10^{-5} para las bobinas BH y de 5.7×10^{-6} para las bobinas BV, habiendo tomado $R = 1$. La figura 6 muestra, en unidades arbitrarias, los valores relativos de la inhomogeneidad B_p del módulo del vector campo magnético en función de R .

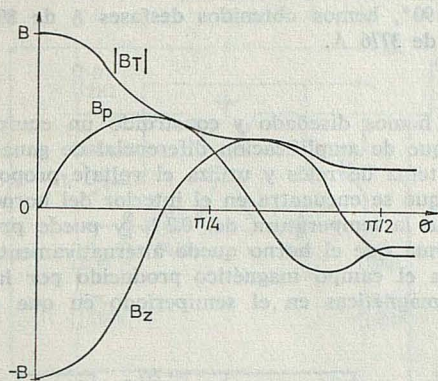


FIG. 5

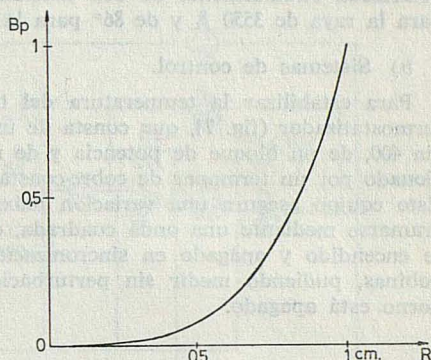


FIG. 6

La alimentación de las bobinas BH se ha realizado mediante una fuente HP-6274 B estabilizada en voltaje y corriente (estabilidad del 0.03 % y salida de 0-60 V, 0-15 A), utilizando para la alimentación de las bobinas BV una fuente estabilizada en voltaje y corriente HP-6209 B (estabilidad del 0.1 % y salida de 0-320 V, 0-0.1 A). Ambas fuentes pueden funcionar manualmente, o mediante programación por resistencia o voltaje externos.

La precisión alcanzada en la medida de cruzamientos de niveles, depende en gran parte de la calidad de las fuentes luminosas utilizadas para la excitación de los átomos. Por tal motivo realizamos un estudio del comportamiento de bulbos de talio fabricados por nosotros, alimentados inductivamente mediante un oscilador de radiofrecuencia. La lámpara lucía con considerable intensidad, pero el tiempo de permanencia en funcionamiento era del orden de hora y media, precisando de un largo tiempo de reposo para volver a iniciar la descarga. Los evidentes inconvenientes derivados de un funcionamiento interrumpido de esta lámpara de Tl, junto con el refrendo de la bibliografía^{5,6)} en este tipo de lámparas nos llevó a rechazar este método. Hemos estudiado también el comportamiento de lámparas espectrales de Tl Osram y Philips alimentadas mediante corriente continua y alterna, eligiendo las lámparas Osram que son muy estables. La elección es debida a que las lámparas Philips alimentadas con corriente continua presentaban una gran modulación en amplitud y la influencia del campo magnético sobre el flujo luminoso era cuatro veces mayor que para las lámparas Osram. No hemos utilizado lámparas Osram alimentadas con radiofrecuencia a través de sus electrodos, a pesar de haber realizado un estudio sobre ellas y de lucir en régimen permanente y estable, debido a que la radiofrecuencia producía perturbaciones en el instrumental electrónico de control y medida de nuestra instalación.

La excitación óptica de los átomos se realiza perpendicularmente al campo magnético de cruzamiento. La componente de 3776 Å es seleccionada por el filtro F_1 (Wratten Kodak 18 A + 32) y polarizada σ_+ ó σ_- mediante un polarizador circular constituido por un polarizador lineal P_1 (Polaroid HNP'B) y una lámina cuarto de onda (construida en mica por la casa Steeg & Reuter). La lente L_1 ($f' = 50$ mm., $\varnothing = 50$ mm.) focaliza la luz de

excitación sobre la célula. La componente de 5350 Å de la fluorescencia emitida en la misma dirección de excitación es seleccionada mediante el filtro F_2 (Schott Depal), mientras que un analizador circular formado por un polarizador lineal P_2 (Polaroid HN 42) y dos láminas cuarto de onda (Polaroid, $\lambda/4 = 1400 \pm 200$ Å) que seleccionan la fracción de fluorescencia polarizada circularmente σ_+ ó σ_- .

Hemos utilizado en la preparación de polarizadores circulares, un método análogo al descrito por R. Corbalán y E. Bernabeu⁹. Asignando la elipticidad residual, al hecho de que el desfase δ , entre los campos eléctricos (de igual amplitud y perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación), de las dos ondas que constituyen el haz de luz polarizada circularmente no sea exactamente 90° , hemos obtenidos desfases δ de 89° para la raya de 3550 Å y de 86° para la raya de 3776 Å.

b) Sistemas de control.

Para estabilizar la temperatura del horno hemos diseñado y construido un equipo termostatzador (fig. 7), que consta de un bloque de amplificación diferencial de ganancia 400, de un bloque de potencia y de un sistema de relés y utiliza el voltaje proporcionado por un termopar de cobre-constantán que se encuentra en el interior del horno. Este equipo asegura una variación máxima de la temperatura de. 0.2 % y puede programarse mediante una onda cuadrada, de forma que el horno quede alternativamente encendido y apagado en sincronización con el campo magnético producido por las bobinas, pudiendo medir sin perturbaciones magnéticas en el semiperíodo en que el horno está apagado.

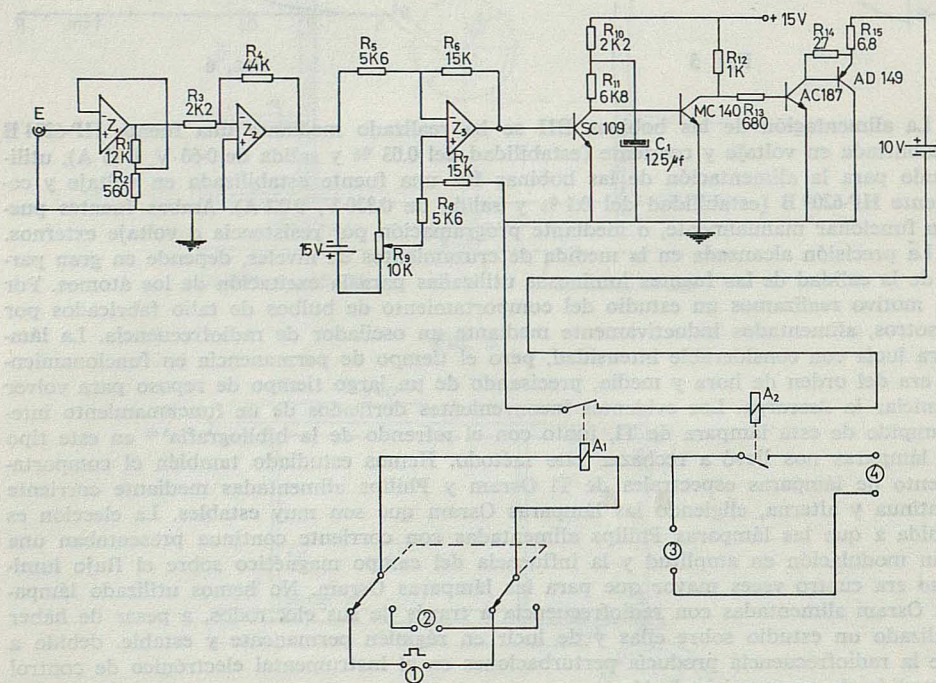


FIG. 7

Para realizar la detección de cruzamientos por un método dinámico es preciso realizar barridos automáticos del campo magnético de cruzamiento, lo que obliga a progra-

mar la fuente de alimentación de las bobinas correspondientes mediante un voltaje que realice un barrido lineal con el tiempo. Como la medida final de la señal de cruzamiento debe ser el promedio automático, mediante el analizador multicanal, de varias señales de cruzamiento, es preciso que el barrido del campo magnético se realice de forma periódica y sincronizable con el analizador de señal multicanal. Por otra parte es preciso programar el horno sincronizándolo con el barrido del campo magnético y del analizador multicanal, para realizar la medida cuando el horno está apagado y evitar las perturbaciones magnéticas.

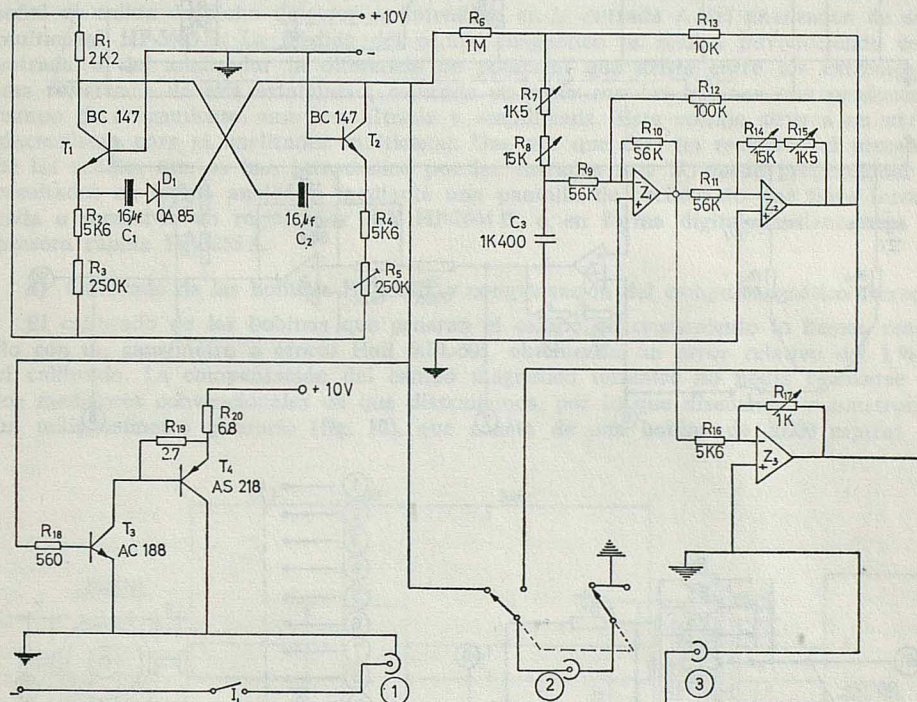


FIG. 8

Para tal fin hemos diseñado y construido un equipo de sincronización y programación (fig. 8), que posee dos salidas de forma de onda triangular con distintos voltajes de pico (regulable uno de ellos) y dos salidas de forma de onda cuadrada con distintas potencias, todas ellas sincronizadas.

c) Cadena de detección.

La lente L_2 ($f' = 170$ mm., $\varnothing = 90$ mm.) focaliza la luz de fluorescencia sobre el fotocátodo de un fotomultiplicador de 12 dinodos RCA-8575, apantallado eléctrica y magnéticamente, refrigerado a -20°C por efecto termoeléctrico Peltier y alimentado por una fuente estabilizada en tensión Keithley-244. La corriente proporcionada por el fotomultiplicador se introduce en la etapa de preamplificación de un equipo de detección en continua (fig. 9) que hemos construido, con etapas de preamplificación, amplificación, amplificación diferencial y filtrado, con diversas opciones que lo hacen muy versátil. Las etapas de filtrado pueden actuar con constantes de tiempo altas o bajas se-

— 476 —

gún se utilice el equipo para medidas estáticas o dinámicas. En el conector de salida pueden obtenerse las señales proporcionadas por cada una de las etapas, pudiendo actuar en particular como preamplificador. Puede obtenerse una ganancia total de hasta 38000, por lo que puede utilizarse en la detección de señales muy débiles, que en nuestra experiencia están comprendidas entre 10 y 160 nA. La señal de salida del preamplificador se introduce en un amplificador detector síncrono PAR-121. La lámpara excitadora está alimentada a corriente alterna de 50 c/s. La diferencia de potencial entre los extremos de la fotorresistencia FR, se filtra para eliminar la componente de continua y se introduce en el amplificador detector síncrono como señal de referencia. La señal de salida de dicho detector se introduce en la entrada A del analizador de señal multicanal HP-5480 B. La medida del campo magnético se realiza introduciendo en la entrada B del analizador la diferencia de potencial que existe entre los extremos de una resistencia de alta estabilidad, colocada en serie con las bobinas que producen el campo de cruzamiento, una vez filtrada y amplificada. Este voltaje sirve a su vez de sincronismo para el analizador multicanal. Una vez que éste ha realizado el procesamiento de las señales que se han introducido por las entradas A y B, puede proporcionar los resultados en forma analógica mediante una pantalla de oscilógrafo que lleva incorporada o mediante un registrador X-Y HP-7004 B, o en forma digital mediante una impresora rápida HP-5055 A.

d) Calibrado de las bobinas Helmholtz y compensación del campo magnético terrestre.

El calibrado de las bobinas que generan el campo de cruzamiento lo hemos realizado con un gausímetro a efecto Hall RFL-505, obteniendo un error relativo del 1 % en el calibrado. La compensación del campo magnético terrestre no podía realizarse con los medidores convencionales de que disponíamos, por lo que diseñamos y construimos un miligaussímetro giratorio (fig. 10), que consta de una bobina de 20000 espiras que

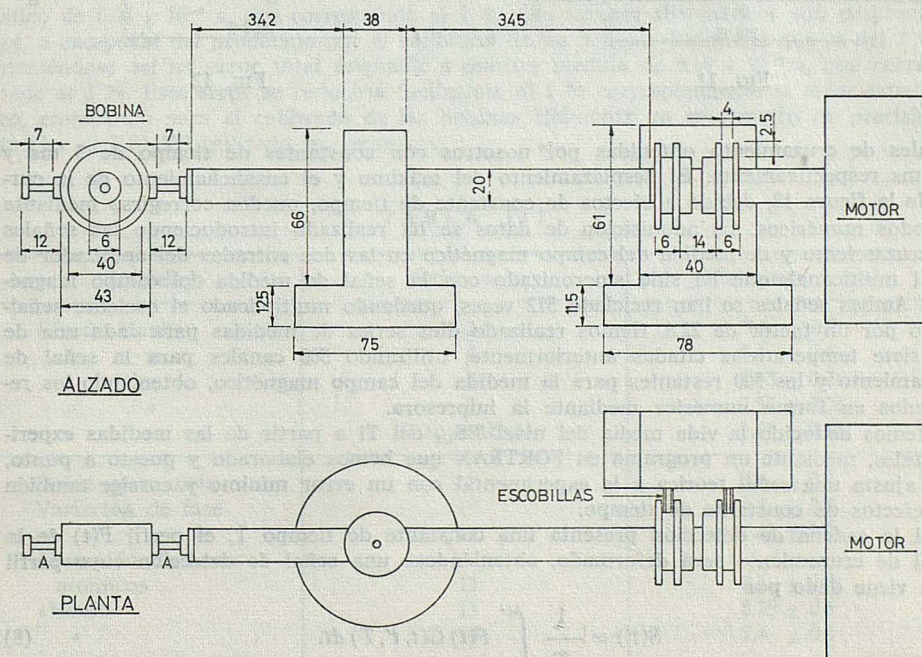


FIG. 10

giran mediante un motor síncrono (2700 r.p.m.), amplificando el voltaje inducido en la bobina 160 veces. Con este miligaussímetro hemos compensado el campo magnético terrestre con un campo residual inferior a 3 mG.

V. Resultados

Hemos realizado medidas para temperaturas comprendidas entre 350°C y 410°C inclusive, con intervalos de 10°C, haciendo un barrido del campo de cruzamiento de 0 a 100 Gs y con la componente vertical del campo magnético terrestre compensada. La detección de la señal de cruzamiento se ha realizado alimentando el fotomultiplicador con un voltaje de 1400 V y una constante de tiempo de 100 ms en el amplificador detector síncrono, que mejora el cociente señal-ruido respecto a constantes de tiempo inferiores, como puede observarse comparando las figuras 11 y 12, que corresponden a dos

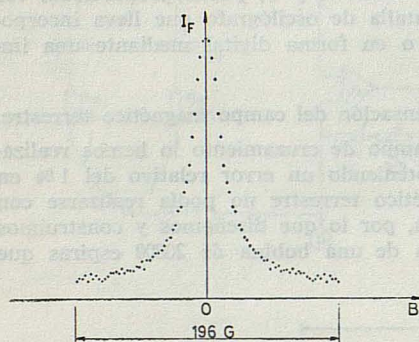


FIG. 11

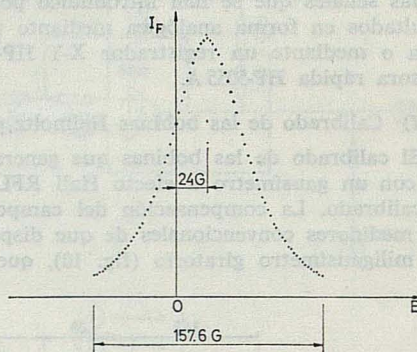


FIG. 12

señales de cruzamiento obtenidas por nosotros con constantes de tiempo de 3 ms y 100 ms respectivamente. El desplazamiento del máximo y el ensanchamiento de la curva de la figura 12, debido a efectos de constante de tiempo, pueden corregirse mediante métodos numéricos. La adquisición de datos se ha realizado introduciendo las señales de cruzamiento y de medida del campo magnético en las dos entradas del analizador de señal multicanal, que ha sido sincronizado con la señal de medida del campo magnético. Ambas señales se han reciclado 512 veces, quedando multiplicado el cociente señal-ruido por un factor de 22.6. Hemos realizado diez series de medidas para cada una de las siete temperaturas citadas anteriormente, utilizando 500 canales para la señal de cruzamiento y los 500 restantes para la medida del campo magnético, obteniendo los resultados en forma numérica mediante la impresora.

Hemos deducido la vida media del nivel $7^2S_{1/2}$ del Tl a partir de las medidas experimentales, mediante un programa en FORTRAN que hemos elaborado y puesto a punto, que ajusta una señal teórica a la experimental con un error mínimo y corrige también los efectos de constante de tiempo.

Si la cadena de detección presenta una constante de tiempo T , el perfil $F(t)$ de la señal de cruzamiento será deformado, obteniéndose una señal de detección cuyo perfil $S(t')$ viene dado por

$$S(t') = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t, t', T) dt. \quad (8)$$

Para realizar la corrección hemos supuesto que

$$G(t, t', T) = \exp [(t - t')/T]. \quad (9)$$

Esta aproximación no corrige totalmente los efectos producidos por la constante de tiempo; dificultad que hemos superado con un estudio comparativo entre las señales de cruzamiento medidas con constantes de tiempo de 100 ms y 3 ms, tratando estas últimas con la corrección aproximada exclusivamente.

Hemos deducido los valores medios de la vida media del nivel $7^2S_{1/2}$ del Tl para las siete temperaturas, mostrándose los resultados y sus errores estadísticos en la Tabla II.

TABLA II

Temperatura	Vida media (ns)	Error probable (ns)
350°C	7.73	0.056 (0.74 %)
360°C	7.60	0.048 (0.63 %)
370°C	7.50	0.035 (0.47 %)
380°C	7.66	0.021 (0.27 %)
390°C	7.71	0.027 (0.35 %)
400°C	7.46	0.050 (0.66 %)
410°C	7.89	0.035 (0.44 %)

A 410°C comienza a contribuir la difusión múltiple coherente³⁾ en la determinación de la vida media, por lo que hemos promediado los valores obtenidos para todas las temperaturas excepto la de 410°C. El resultado obtenido es de 7.61×10^{-9} s con un error estadístico de 0.08×10^{-9} s, que corresponde al 1 %. Los errores sistemáticos son despreciables, a excepción del producido por el calibrado de las bobinas Helmholtz que es del 1 %, obteniéndose así un error total asignable a nuestra medida de 0.16×10^{-9} s, que corresponde al 2 %. Este error se reduciría fácilmente al 1 % correspondiente al error estadístico, empleando para el calibrado de las bobinas Helmholtz un gausímetro de precisión superior al RFL-505 utilizado por nosotros.

TABLA III

Método	Referencia	Vida media (ns)
Efecto Hanle	2	7.6 ± 0.2
» »	8	7.4 ± 0.4
» »	9	7.45 ± 0.2
» »	3	7.55 ± 0.08
» »	Este trabajo	7.61 ± 0.16
Doble resonancia	2	7.4 ± 0.3
Variación de fase	10	8.7 ± 0.3
» »	11	7.65 ± 0.2
Absorción de haces atómicos	12	8.1 ± 0.8
«Hook»	13	8.25 ± 0.6
»	14	7.4 ± 0.4

El valor obtenido por nosotros para la vida media del nivel $7^2S_{1/2}$ del Tl concuerda satisfactoriamente con los obtenidos por otros autores (tabla III) con métodos diferentes al nuestro, utilizando la técnica de cruzamientos de niveles. Otras técnicas (doble resonancia, variación de fase, absorción de haces atómicos y método «hook») han sido utilizadas para la determinación de la vida media de este nivel, obteniéndose resultados con errores comprendidos entre el 3 % y el 10 %, superiores a los obtenidos por espectroscopía de cruzamientos de niveles.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Prof. Dr. J. Casas por su continuo estímulo y por haber procurado el costoso material sin el cual no podría haberse llevado a cabo este trabajo.

Así mismo, al Ministerio de Educación y Ciencia, al Instituto de Estudios Nucleares y al C. S. I. C. por su ayuda económica.

Uno de los autores (Dr. M. A. Rebolledo) ha sido becario con cargo al Plan de Formación de Personal Investigador del M. E. y C.

BIBLIOGRAFIA

- (1) F. D. COLEGROVE, P. A. FRANKEN, R. R. LEWIS, and R. H. SANDS: *Phys. Rev. Letters* 3, 420 (1959).
- (2) A. GALLAGHER and A. LURIO: *Phys. Rev.* 136, A 87 (1964).
- (3) J. C. HSIEH and J. C. BAIRD: *Phys. Rev. A* 6, 141 (1972).
- (4) M. W. GARRET: *J. Appl. Phys.* 22, 1091 (1951).
- W. FRANZEN: *Rev. Scient. Instr.* 33, 933 (1962).
- (5) R. J. HULL and H. H. STROKE: *J. Opt. Soc. Am.* 51, 11 (1961).
- (6) H. KLEIMAN and S. DAVIS: *J. Opt. Soc. Am.* 53, 822 (1962).
- (7) R. CORBALÁN y E. BERNABEU: *Opt. Pur. y Aplic.* 5, 80 (1972).
- (8) Y. R. EVDOKIMOV, M. P. CHAIKA and V. A. CHERENKOVSKII: *Opt. Spektrosk.* 27, 97 (1969). *Opt. Spectrosc.* 27, 97 (1969).
- (9) M. NORTON and A. GALLAGHER: *Phys. Rev. A* 3, 915 (1971).
- (10) W. DEMTRÖDER: *Z. Physik* 166, 42 (1962).
- (11) P. T. CUNNINGHAM and J. K. LINK: *J. Opt. Soc. Am.* 57, 1000 (1967).
- (12) G. M. LAWRENCE, J. K. LINK and R. B. KING: *Astrophys. J.* 141, 293 (1965).
- (13) N. P. PENKIN and L. N. SHABANOVA: *Opt. Spektrosk.* 14, 5 (1963); *Opt. Spectrosc.* 14, 87 (1963).
- (14) N. P. PENKIN, V. P. RUZOV and L. N. SHABANOVA: *Opt. Spektrosk.* 34, 1017 (1973). *Opt. Spectrosc.* 34, 588 (1973).

PREPARACION Y ESTUDIO DE LOS PENTAFLUOROFENILALANOS Y SUS COMPUESTOS DE ADICION CON ETER ETILICO Y TRIMETILAMINA*

P O R

R. USÓN y F. IRANZO

Departamento de Química Inorgánica. Facultad de Ciencias.
Zaragoza (España)

Abstract

Compounds with the general formula $\text{AlH}_{3-x}(\text{C}_6\text{F}_5)_x.n\text{L}$ (where $x = 1, 2$; $n = 1, 2$; $\text{L} = \text{O}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ and $\text{N}(\text{CH}_3)_3$) were prepared by metathetic reactions of etheric solutions of chloroalane and pentafluorophenyl-lithium. Furthermore, the stability of those compounds and some of their characteristics were studied.

Introducción

Los halogenalanos fueron preparados por Wiberg y Schmidt¹⁾, siendo aportados nuevos métodos de preparación por Wiberg, Moedritzer y Usón²⁾, quienes estudiaron sus compuestos de adición con trimetilamina.

El interés en la preparación de los halogenalanos radicó en la obtención de una gama variable de agentes reductores, suficientemente estables y solubles en distintos disolventes, que facilitasen y ampliasen su utilización.

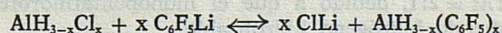
Actualmente sigue patente este interés, así como el de la preparación de compuestos organoaluminicos, debido a la elevada reactividad del enlace Al-C, lo que permite utilizarlos, al igual que los compuestos de Grignard, como reactivos de síntesis, habiéndose mostrado especialmente útiles en la preparación de organometálicos de galio, indio y talio.

Así nosotros intentando unir estas dos zonas de interés actual, hemos elegido el grupo C_6F_5 , como grupo orgánico, para introducirlo en el hidruro de aluminio.

Discusión de los resultados

I. — Preparación de los eteratos de los pentafluorofenilalanos

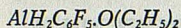
Para la preparación de las disoluciones etéreas de los pentafluorofenilalanos, hemos hecho uso del proceso general:



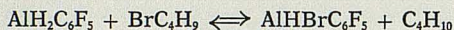
(donde $x = 1$ y 2) que se desplaza a la derecha por la precipitación de ClLi , insoluble en el medio de reacción.

* Este trabajo forma parte de la Tesis Doctoral de F. Iranzo.

Si después de filtrar el $\text{C}_6\text{F}_5\text{Li}$, se evapora a vacío las disoluciones etéreas, se obtiene en cada caso los pentafluorofenilalanos con un mol de éter de coordinación.



La reacción de obtención de este compuesto se verifica totalmente, y al evaporar la disolución etérea a sequedad, lo obtenemos acompañado del subproducto $\text{AlHBrC}_6\text{F}_5$, cuya presencia se debe a la reacción³⁾

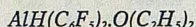


(El BrC_6H_5 es un subproducto que acompaña al $\text{C}_6\text{F}_5\text{Li}$ en su preparación⁴⁾).

Una vez comprobada la presencia del derivado bromado, hemos realizado experiencias similares a -30°C , para frenar en lo posible la reacción secundaria de reducción del bromuro de butilo, con objeto de obtener el producto principal lo más puro posible, y de poder estudiar el desarrollo de la reacción de reducción del halogenuro de alquilo a temperatura ambiente.

Así hemos tomado disoluciones etéreas originales a -30°C y las hemos mantenido a temperatura ambiente durante intervalos de tiempos variables, observándose que progresa la reducción del bromuro de butilo, y que se produce una reacción de descomposición caracterizada por la pérdida de hidrógeno hidrolizable.

Cuando al residuo de evaporación a sequedad de la disolución de partida se le añade benceno o tolueno precipita el derivado bromado, separándose así de la disolución que contiene el $\text{AlH}_2\text{C}_6\text{F}_5$. Si se mantienen agitando estas disoluciones a temperatura ambiente, se observa la misma reacción de descomposición que en la disolución etérea.



La reacción de obtención de este compuesto no es total en éter, alcanzándose rendimientos máximos del 80 % en la precipitación de $\text{C}_6\text{F}_5\text{Li}$.

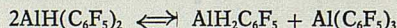
Si cambiamos el disolvente éter por benceno, la reacción progresa, llegando a realizarse totalmente.

Con objeto de frenar en lo posible la previsible reducción del bromuro de butilo a parafina, las reacciones realizadas en éter se han llevado a cabo en las proximidades de -25°C . Si estas disoluciones las ponemos a agitar a temperatura ambiente, durante intervalos de tiempos determinados, se observa los mismos resultados que con las disoluciones de $\text{AlH}_2\text{C}_6\text{F}_5$, es decir, progreso de la reducción del bromuro de butilo y la reacción de descomposición.

Cuando el residuo de la evaporación a sequedad de la disolución etérea original se le añade benceno o tolueno, precipita el derivado bromado, separándose del producto principal. Si se mantienen estas disoluciones agitando a temperatura ambiente se observa la reacción de descomposición caracterizada por la pérdida de hidrógeno hidrolizable.

Si preparamos una disolución en tolueno, y la mantenemos agitando a -30°C , se disminuye la descomposición del producto, y se observan en disolución relaciones $\text{H}:\text{Al}$ superiores al valor 1:1.

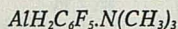
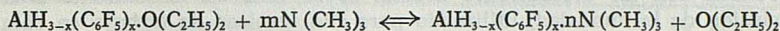
La interpretación del valor obtenido en esta relación, se justifica por la producción de la desproporcionación siguiente:



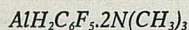
ya que el $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3$ es insoluble en tolueno a esa temperatura. No se obtiene en solución la relación teórica $\text{H}:\text{Al} = 2:1$, debido a que el monopentafluorofenilalano es inestable y se descompone perdiendo hidrógeno hidrolizable.

II.—Preparación de los trimetilaminatos de los pentafluorofenilalanos

Hemos preparado los aductos con trimetilamina de los pentafluorofenilalanos, desplazando el éter etílico de los eteratos con una disolución etérea de la base libre, según el esquema de reacción siguiente⁵⁾:

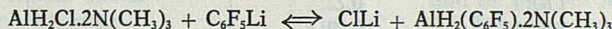


Cuando trabajamos desplazando el éter con trimetilamina, con relaciones molares $\text{N}(\text{CH}_3)_3:\text{Al} = 1:1$, y evaporamos a sequedad el éter, obtenemos este compuesto.



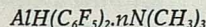
Cuando producimos la reacción de desplazamiento del éter por trimetilamina, trabajando con relaciones molares $\text{N}(\text{CH}_3)_3:\text{Al} = 2:1$ ó $\gg 3:1$, y evaporamos la disolución a sequedad, obtenemos siempre el diaminato correspondiente, no consiguiéndose introducir más de dos moléculas de amina de coordinación por átomo de aluminio.

Este producto ha sido también preparado evaporando la disolución etérea resultante de la reacción siguiente:



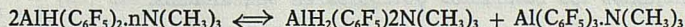
Los dos sólidos obtenidos, así como sus disoluciones etéreas y bencénicas son estables con el tiempo en ausencia de humedad, consiguiendo así la estabilización del $\text{AlH}_2\text{C}_6\text{F}_5$ en forma de compuestos de coordinación con trimetilamina⁶⁾.

En las disoluciones bencénicas se han hecho determinaciones de peso molecular, indicándonos los valores obtenidos que el monoaminato es dímero y que el diaminato es monómero. En los dos casos el aluminio presenta un índice de coordinación de 5, que coincide con el máximo valor encontrado para este metal en los compuestos de adición de los halogenalanos con trimetilamina⁷⁾.



Cuando intentamos preparar los compuestos de coordinación con trimetilamina del bispentafluorofenilalano, aparece un precipitado blanco y una solución incolora. El precipitado está compuesto por $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3$ y ClLi , debiéndose la presencia de este último a que progresa la reacción de preparación del eterato). En la solución encontramos relaciones H:Al superiores al valor 1:1.

Estos resultados confirman la desproporcionación apuntada en el eterato del $\text{AlH}(\text{C}_6\text{F}_5)_2$ en tolueno a -30°C y que en el caso de los aminatos se produce como sigue:

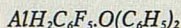


En este caso deberíamos haber encontrado en solución relaciones H:Al = 2:1, ya que el aminato del pentafluorofenilalano es estable. Los valores obtenidos aunque más próximos a esta relación que los de la solución de tolueno, no llegan a alcanzar el valor teórico ya que el $\text{Al}(\text{C}_6\text{F}_5)_3.N(\text{CH}_3)_3$ es ligeramente soluble en éter, rebajándose la relación H:Al.

Parte experimental

Método general de trabajo

Debido a la gran reactividad de los enlaces Al-H y Al-C, todo el trabajo experimental se ha desarrollado con las precauciones usuales sobre todo en lo referente a la más completa exclusión de la humedad, utilizando para ello técnicas de trabajo en caja seca y de alto vacío.



En la tabla I se recogen los resultados obtenidos en el análisis de las soluciones etéreas.

TABLA I

$t^\circ \text{C}$	Relaciones atómicas.		% Al	
	H : Al	Br : Al	Teórico	Encontrado
— 30	1,78:1	0,14:1	10,00	9,76
— 30	1,73:1	0,22:1		9,92
— 30	1,80:1	0,22:1		10,10
— 30	1,90:1	0,09:1		10,00
— 30	1,85:1	0,06:1		9,80

Estas disoluciones se tuvieron agitando a temperatura ambiente y a intervalos de tiempo determinados se analizaron. En la tabla II se reflejan los resultados obtenidos.

TABLA II

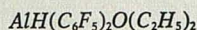
Sol. inicial Rel. atómica	Tiempo	Sol. final Rel. atómica	
H: Al = 1,84:1 Br: Al = 0,06:1	5 horas	H: Al = 1,64:1	Br: Al = 0,10:1
	20 horas	H: Al = 1,34:1	Br: Al = 0,17:1
	96 horas	H: Al = 1,08:1	Br: Al = 0,31:1
	168 horas	H: Al = 0,85:1	Br: Al = 0,34:1

Las disoluciones bencénicas formadas añadiendo benceno al residuo de la evaporación a sequedad de la disolución etérea, se tuvieron agitando a temperatura ambiente. En la tabla III reflejamos los resultados obtenidos en sus análisis.

TABLA III

Sol. inicial Rel. atómica	Tiempo agitación	Sol. final Rel. atómica	
H: Al = 1,84:1 Br: Al = 0,06:1	5 horas	H: Al = 1,50:1	Br: Al = 0,0:1
	24 horas	H: Al = 0,84:1	Br: Al = 0,0:1
	96 horas	H: Al = 0,75:1	
	168 horas	H: Al = 0,56:1	

ESTUDIO DE LOS PENTAFLUOROFENILALANOS Y SUS COMPUESTOS



Al no ser la reacción total en éter, en las disoluciones etéreas tendremos cloruros en disolución, como se observa en los resultados recogidos en la Tabla IV referentes al análisis de estas disoluciones.

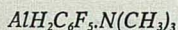
TABLA IV

Relaciones atómicas			% Al	
H : Al	X : Al	Br : Al	Encontrado	Teórico
0,97:1	0,76:1	0,06:1	5,5	6,19
0,93:1	0,74:1	0,09:1	5,7	
0,90:1	0,96:1	0,06:1	5,7	

Las disoluciones de tolueno a -30°C fueron analizadas, encontrándose los resultados reflejados en la tabla V, en los que justificamos la desproporción en este disolvente.

TABLA V

Sol. etérea inicial Rel. atómica	Sol. de tolueno final Rel. atómica
H:Al = 0,83:1	H:Al = 1,36:1
Br:Al = 0,06:1	Br:Al = 0,0 :1
X:Al = 0,96:1	X:Al = 0,0 :1
H:Al = 0,90:1	H:Al = 1,11:1
Br:Al = 0,06:1	Br:Al = 0,0 :1
X:Al = 0,96:1	X:Al = 0,0 :1

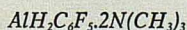


Hemos trabajado con un ligero exceso de trimetilamina sobre la relación molar $\text{N}(\text{CH}_3)_3$:Al = 1:1.

El producto obtenido de la evaporación a sequedad ha sido analizado y sus resultados se recogen en la tabla VI, juntamente con los valores del peso molecular obtenido en benceno por crioscopia.

TABLA VI

Sol. etérea inicial Rel. atómica	Rel. atómica final	Tiempo	Δt	Pm	gr./Kg.
H:Al = 1,80:1	H:Al = 1,80:1	1 hora	0,035	616	4,47
Br:Al = 0,22:1	Br:Al = 0,0 :1 $\text{N}(\text{CH}_3)_3$:Al = 1,18:1				



Los resultados de los análisis referentes a este producto se reflejan en la tabla VII, junto con la determinación del peso molecular obtenido en benceno.

TABLA VII

Sol. etérea inicial Rel. atómica	Rel. atómica final	Tiempo agitac.	Δt	Pm	gr./kg.
H:Al = 1,70:1	H:Al = 1,67:1 N(CH ₃) ₃ :Al = 2,0:1	3 h	0,080	336	5,25
H:Al = 1,85:1	H:Al = 1,87:1 N(CH ₃) ₃ :Al = 1,98:1	44 h			
H:Al = 1,87:1	H:Al = 1,79:1 N(CH ₃) ₃ :Al = 2,0:1	24 h	0,40 0,18	293 326	23,0 11,5

AlH(C₆F₅)₂.nN(CH₃)₃

Cuando hemos intentado formar los aductos con trimetilamina del bispentafluorofenilalano, se nos separa un precipitado blanco y una solución incolora.

En la tabla VIII recogemos los resultados obtenidos al analizar las disoluciones etéreas obtenidas, indicándose además el producto de partida en la obtención de los trimetilaminatos.

TABLA VIII

Producto de partida	Rel. atómica inicial	Rel. atómica final
$AlH(C_6F_5)_2.O(C_2H_5)_2$	H:Al = 0,82:1	H:Al = 1,10:1
	X:Al = 1,04:1	X:Al = 0,48:1
	H:Al = 0,83:1	H:Al = 1,26:1
	X:Al = 0,96:1	X:Al = 0,87:1
$AlHCl_2.2N(CH_3)_3$	H:Al = 1,00:1	H:Al = 1,70:1 X:Al = 0,75:1

El precipitado se identificó como ClLi y $Al(C_6F_5)_3.N(CH_3)_3$.

Espectros IR

Los espectros IR se realizaron en dos espectrofotómetros, Infracord de Perkin-Elmer y Beckman 20 A, utilizando técnicas de suspensión en nujol y de pastilla de BrK.

En los compuestos de coordinación con éter etílico se han identificado las bandas correspondientes a enlaces Al-H⁸⁾, grupos C₆F₅⁹⁾, enlace C-O-C¹⁰⁾ y C-H del éter etílico.

También se han determinado los espectros IR de los gases desprendidos en el calentamiento a vacío de los sólidos, lo que nos ha permitido determinar que no hay más ligando coordinado que el que se indica.

Agradecimiento

Uno de nosotros (F. I.) agradece a la Dirección General de Enseñanza e Investigación la concesión de una beca para la realización de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1. E. WIBERG y M. SCHMIDT: Z. Naturforschung, 6b, 458 (1951).
2. E. WIBERG, K. MOEDRITZER y R. USÓN: Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, IX, 91 (1954).
3. J. L. FINAR: Química orgánica, Ed. Alhambra (1966), Vol. 1, pág. 46.
4. P. L. COE, R. STEPHENS and J. C. TATLOW: J. Chem. Soc. 3227 (1962).
5. V. GUTMAN: Coordination Chemistry in non Aqueous solutions. Ed. Springer Verlag (1966).
6. E. WIBERG, H. GRAF y R. USÓN: Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, VII, 107 (1952).
7. E. WIBERG, K. MOEDRITZER y R. USÓN: Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, IX, 94 (1954).
8. DAVID M. ADAMS: Metal ligand and related vibrations. Ed. Edward Arnold Publishers (1967), pág. 10.
9. P. ROYO y R. USÓN: Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, XXIV, 122 (1969).
10. C. N. RAO: Chemical applications of infrared spectroscopy. Academic Press Inc. (1963), pág. 188.