

Pero mucho más importante: esta red colaborativa y solidaria funciona gracias a la generosidad y al trabajo de los delegados de la OME. Sin ellos, habría sido imposible conseguir que todos los concursantes pudieran hacer las pruebas con todas las garantías, en las mismas condiciones que si se hubieran celebrado presencialmente, salvo naturalmente por el hecho de no estar todos juntos en un mismo lugar. Los 77 participantes en la Fase Nacional de la olimpiada se seleccionan mediante olimpiadas autonómicas, cuando es necesario, entre el total de premiados en las fases locales. A ellos se ha unido, como invitada especial por haber formado parte de nuestro equipo EGMO 2021, Mencía Díaz de Cerio, una jovencísima riojana de tercero de ESO.

Como los destinatarios de la OME son principalmente los estudiantes de segundo de Bachillerato, este es el grupo mayoritario entre los seleccionados, pero ya desde el curso pasado venimos observando un significativo aumento de los más jóvenes, no solamente de primero de Bachillerato, sino también de cuarto, e incluso de tercero de ESO: han sido 35 en total, frente a los 27 de 2020. Hay que recordar que en nuestra olimpiada, al igual que en la Internacional, no hay niveles por edad, y todos los concursantes se enfrentan a los mismos problemas.

En cuanto al número de chicas en el selecto grupo de los 77, parece que ya superamos la terrible barrera del 10%, con 14 alumnas este año.

En cualquier caso, chicas y chicos, mayores y pequeños, disfrutaron con los seis problemas con los que lidiaron, y que son los que presentamos a continuación.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL CONCURSO FINAL DE LA LVII OME

PRIMERA SESIÓN, VIERNES 7 DE MAYO DE 2021

PROBLEMA 1.

Los vértices, A , B y C , de un triángulo equilátero de lado 1 están en la superficie de una esfera de radio 1 y centro O . Sea D la proyección ortogonal de A sobre el plano, α , determinado por B , C y O . Llamamos N a uno de los cortes con la esfera de la recta perpendicular a α por O . Halla la medida del ángulo \widehat{DNO} .

(Nota: la proyección ortogonal de A sobre el plano α es el punto de corte con α de la recta que pasa por A y es perpendicular a α .)

PROBLEMA 2.

Dado un número entero positivo n , definimos $\lambda(n)$ como el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x^2 - y^2 = n$. Diremos que el número n es «olímpico» si $\lambda(n) = 2021$. ¿Cuál es el menor entero positivo que es olímpico? ¿Y cuál es el menor entero positivo impar que es olímpico?

PROBLEMA 3.

Tenemos 2021 colores y 2021 fichas de cada color. Colocamos las 2021² fichas en fila. Se dice que una ficha, F , es «mala» si a cada lado de F quedan un número impar de las 2020×2021 fichas que no comparten color con F .

- (a) Determina cuál es el mínimo número posible de fichas malas.
- (b) Si se impone la condición de que cada ficha ha de compartir color con al menos una ficha adyacente, ¿cuál es el mínimo número posible de fichas malas?

SEGUNDA SESIÓN, SÁBADO 8 DE MAYO DE 2021

PROBLEMA 4.

Sean a, b, c, d números reales tales que

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12.$$

Halla el valor mínimo y el valor máximo que puede tomar el producto $abcd$, y determina para qué valores de a, b, c, d se consiguen ese mínimo y ese máximo.

PROBLEMA 5.

Disponemos de $2n$ bombillas colocadas en dos filas (A y B) y numeradas de 1 a n en cada fila. Algunas (o ninguna) de las bombillas están encendidas y el resto apagadas; decimos que eso es un «estado». Dos estados son distintos si hay una bombilla que está encendida en uno de ellos y apagada en el otro. Diremos que un estado es «bueno» si hay la misma cantidad de bombillas encendidas en la fila A que en la B.

Demuestra que el número total de estados buenos, EB, dividido por el número total de estados, ET, es

$$\frac{EB}{ET} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n n!}.$$

PROBLEMA 6.

Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$, sea I su incentro, γ su circunferencia inscrita y D el punto medio de BC . La tangente a γ por D diferente de BC toca a γ en E . Demuestra que AE y DI son paralelas.

Seguro que a todos los concursantes la semana del 9 al 14 de mayo se les hizo eterna, esperando a saber quiénes serían los galardonados de este curso. Sus nombres se hicieron públicos en el acto virtual, ¡qué remedio!, de presentación de medallistas, que no entrega de premios, como habitualmente se llama. Marco Castrillón, junto con los ganadores de medalla de oro del año pasado, fueron los conductores del acto, poniendo con sus palabras el calor que surge de forma natural junto con los aplausos y fotos cuando esta entrega de medallas y diplomas es presencial. Cerró el acto el Presidente de la RSME, Francisco Marcellán.

Entre los treinta y seis premiados, los nombres que se esperan con mayor impaciencia son, naturalmente, los de los seis primeros clasificados. Entre ellos, encabezando la tabla está Leonardo Costa. La de este año es su tercera Medalla de Oro en OME, y Leo recibe, por este motivo, la insignia de plata de la Olimpiada. ¡Muchas felicidades, Leo!



Los seis ganadores de medalla de oro en la OME. De izquierda a derecha y de arriba abajo, Leonardo Costa, Miguel Navarro, Miguel Valdivieso, Ruben Carpenter, Roger Lidón y Bernat Pagès.

Y nuestra enhorabuena, junto con nuestro agradecimiento por su esfuerzo y entusiasmo, a todos los participantes. Gratitud que deseamos hacer extensiva a cuantos han hecho posible que el reloj de la OME siga en marcha, superando dificultades e incertidumbres, y con un recuerdo muy especial para Juan Aparicio y los organizadores de Elche, que vieron frustrado todo el trabajo ya realizado para acoger esta LVII edición de la Olimpiada Matemática Española que acaba de concluir.

GANADORES DE LA LVII OME: FASE FINAL

MEDALLAS DE ORO

Leonardo Costa Lesage (Comunidad Valenciana)
Miguel Navarro Muñoz (Comunidad de Madrid)
Miguel Valdivieso Valles (Comunidad de Madrid)
Ruben Carpenter (Cataluña)
Roger Lidón Ardanuy (Cataluña)
Bernat Pagès Vives (Cataluña)

MEDALLAS DE PLATA

Àlex Rodríguez García (Cataluña)
Martín Padrón Rodríguez (Galicia)
Álvaro Gamboa Rodríguez (Comunidad de Madrid)
Pablo Puerto Muñoz (Andalucía)
Javier Castro García (Castilla y León)
Javier Badesa Pérez (Aragón)
Jordi Herrero Martínez (Comunidad Valenciana)
Hugo Lladró Prats (Comunidad Valenciana)
Ángel Rodríguez Salvador (Cataluña)
David Lecumberri Irisarri (Navarra)
Rodrigo López López (Región de Murcia)
Samuel Orellana Mateo (Andalucía)

MEDALLAS DE BRONCE

Lorenzo Tagua Santana (Andalucía)
Marcos Laserna Moratalla (Comunidad de Madrid)
Javier Ribelles Sánchez (Andalucía)
Nicolás Iserte Tarazón (Comunidad Valenciana)
Jimena Lozano Simón (Comunidad de Madrid)
Joana Pech Alberich (Cataluña)
Raquel Trull Bágüena (Cataluña)
Antón Figueroa Martínez (Galicia)
Gerard Grau García (Cataluña)
Anamaria Haralambie (Andalucía)
Daniel Sánchez Sánchez (Comunidad de Madrid)
Lucía Castán Anglada (Aragón)
Juan Francisco Cuevas Rodríguez (Andalucía)
Carlos González Bueno (Castilla y León)
Pablo Serrano Gracia (Aragón)
Marc Caballer González (Comunidad Valenciana)
Cristian Andrés Córdoba Silvestre (Castilla-La Mancha)
Pedro Daureo Bretones (Andalucía)

RELACIÓN DE PREMIADOS EN LAS FASES LOCALES

PRIMEROS PREMIOS

Carlos Alemán Romero (Melilla)
Íñigo Arana López de Castro (La Rioja)
Javier Badesa Pérez (Aragón)
Marc Caballer González (Comunidad Valenciana)
Yraya Castilla García (Canarias)

Javier Castro García (Castilla y León)
Leonardo Costa Lesage (Comunidad Valenciana)
Pedro Daureo Bretones (Andalucía)
Andrés Daza Gutiérrez (Castilla-La Mancha)
Antón Figueroa Martínez (Galicia)
Joan Font Perelló (Islas Baleares)
Álvaro Galisteo Bermúdez (Andalucía)
Álvaro Gamboa Rodríguez (Comunidad de Madrid)
Andrés Gómez Toribio (Comunidad Valenciana)
Carlos González Bueno (Castilla y León)
Alberto Guedes Martín (Canarias)
Anamaria Haralambie (Andalucía)
Aarón Hernández León (Ceuta)
Nicolás Iserte Tarazón (Comunidad Valenciana)
Marcos Laserna Moratalla (Comunidad de Madrid)
David Lecumberri Irisarri (Navarra)
Roger Lidón Ardanuy (Cataluña)
Hugo Lladró Prats (Comunidad Valenciana)
Nicolás López Corral (Castilla y León)
Rodrigo López López (Región de Murcia)
Jimena Lozano Simón (Comunidad de Madrid)
José Luis Alonso (Castilla y León)
Teresa Marín Marín (Región de Murcia)
Ventura Márquez Grima (Andalucía)
Manuel Bartolomé Melguizo García (Andalucía)
Miguel Navarro Muñoz (Comunidad de Madrid)
Samuel Orellana Mateo (Andalucía)
Andoni Ortuzar Eguino (País Vasco)
Martín Padrón Rodríguez (Galicia)
Bernat Pagès Vives (Cataluña)
David Pérez Caballero (Cantabria)
Marta Piñar Pérez (Andalucía)
Álex Rodríguez García (Cataluña)
Daniel Sánchez Sánchez (Comunidad de Madrid)
Alejandro Suárez Vázquez (Extremadura)
Lorenzo Tagua Santana (Andalucía)
Juan Antonio Trobajo Flecha (Asturias)
Miguel Valdivieso Valles (Comunidad de Madrid)

SEGUNDOS PREMIOS

Guillermo Barquín de la Riva (Cantabria)
Guillem Beltrán Cerezuela (Comunidad Valenciana)
Carlos Cerviño Luridiana (Canarias)
Guillem Comamala Fiol (Islas Baleares)

Cristian Andrés Córdoba Silvestre (Castilla-La Mancha)
Álvaro Cuesta Martínez (Castilla y León)
Juan Carlos Díaz Pérez (Andalucía)
Altaïr Escrihuela Peñarrocha (Comunidad Valenciana)
Paula Esquerrà Giner (Cataluña)
Irene Fernández Fernández (Región de Murcia)
Paula Gallego Melero (Andalucía)
Pablo García Martínez (Castilla y León)
Inés García Ruiz (Castilla y León)
Félix García Taboada (Comunidad de Madrid)
Raquel Giménez González (Extremadura)
Galo Gordón Cordero (Andalucía)
Juan Gutiérrez Sádaba (Navarra)
Marcos Hernández Jiménez (Castilla y León)
Amin Isbaa Ben-Seddik (Melilla)
Sergi Ivars Galiana (Comunidad Valenciana)
Fernando Jiménez Alcarria (Región de Murcia)
Jordi Herrero Martínez (Comunidad Valenciana)
Ziteng Huang (Canarias)
Alejandro Krumm de Vicente (Comunidad de Madrid)
Hugo Labella López (Comunidad de Madrid)
Diego Manso Anda (La Rioja)
Joaquín Mateos Barroso (Andalucía)
Pablo Menéndez Menéndez (Asturias)
Joana Pech Alberich (Cataluña)
Pablo Puerto Muñoz (Andalucía)
Daniel Ribalta Andrés (Comunidad de Madrid)
Javier Ribelles Sánchez (Andalucía)
Ángel Rodríguez Salvador (Cataluña)
Tristán Romero Sobrado (País Vasco)
Yago Sánchez Iglesias (Galicia)
Pablo Serrano Gracia (Aragón)
Daniel Tabares López (Comunidad de Madrid)
Juan Torre de Silva Valera (Comunidad de Madrid)
Víctor Torres Soler (Comunidad Valenciana)
Sofía Villero Schuchardt (Andalucía)
Ángel Zhang Huang (Andalucía)

TERCEROS PREMIOS

Yosra Abdelkader El Gharib (Melilla)
Felipe Abengózar Vega (Comunidad de Madrid)
Raúl Agulló Pardo (Comunidad Valenciana)
Manel Armero Melià (Islas Baleares)
Mario Balda Agudo (Andalucía)

Eva Barrera Garbí (Comunidad Valenciana)
Nicolás Botas Bernardo (Asturias)
Alejandro Breen Herrera (Andalucía)
Sara Cabrero Jiménez (Andalucía)
Marta Cano Cagigas (Comunidad de Madrid)
Ruben Carpenter (Cataluña)
Luis Carrillo Hernández (Comunidad Valenciana)
Lucía Castán Anglada (Aragón)
Raúl Cuevas Castillo (Castilla-La Mancha)
Juan Francisco Cuevas Rodríguez (Andalucía)
Victoria Durán Fernández (Comunidad de Madrid)
Lucía Echevarría Soto (Castilla y León)
Ester Espeso Queipo (Cantabria)
Sergio Fonseca Ruiz (La Rioja)
José Antonio Fuentes Mesa (Andalucía)
Miguel García Cambor (Comunidad de Madrid)
María Belén Garrido García (Extremadura)
Ismael Gómez Poyato (Región de Murcia)
Gerard Grau García (Cataluña)
Himar Hernández Jiménez (Canarias)
Sebastian Iacovino Spitaleri (Andalucía)
Ana Jiménez González (Castilla y León)
Mateo López-Yarto Rodríguez (Comunidad de Madrid)
Nicolás Merenciano Estévez (Comunidad Valenciana)
Jorge Merino Esteban (Comunidad de Madrid)
Ander Miranda Zapata (Navarra)
Marcos Ochoa Gil (Castilla y León)
Miguel Palma Sánchez (Región de Murcia)
Nicolás David de Silva Gueorguiev (Andalucía)
Diego Rabanedo Amigo (Castilla y León)
Ane Redondo Berasaluce (País Vasco)
Mateo Miguel Tabernero Fuentes (Comunidad Valenciana)
Raquel Trull Báguena (Cataluña)
Alejandro Vega Peleteiro (Canarias)

MARÍA GASPAR, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Correo electrónico: mgaspar@ucm.es

X Olimpiada Europea Femenina de Matemáticas

por

Daniel Lasasosa Medarde y Elisa Lorenzo García

Durante la semana del 9 al 15 de abril de 2021, tuvo lugar la décima edición de la EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad), organizada por Georgia pero realizada nuevamente en formato virtual debido a la situación de pandemia que vivimos. El equipo español estuvo compuesto por Paula Esquerrà Giné, Jimena Lorenzo Simón, Mencía Díaz de Cerio Ruiz de Lobera y Raquel Trull Báguena. Como jefa de delegación ejerció Elisa Lorenzo García y como tutor Daniel Lasasosa Medarde. Al igual que el año pasado, las pruebas se realizaron de forma telemática, «enclaustrándose» las competidoras y enviando las soluciones en formato digital al tutor y a la jefa de delegación, reenviándose las esta última a los Coordinadores.

En esta edición, presentaron soluciones a los problemas 213 competidoras de 55 países, un número algo mayor que las 204 de 53 nacionalidades que participaron el año pasado. La evolución de países participantes en la EGMO en estas 10 primeras ediciones ha sido por lo tanto la siguiente (entre paréntesis países europeos oficiales): 19 (16), 22 (21), 29 (22), 30 (23), 39 (31), 44 (33), 52 (36), 49 (35), 53 (39), 55 (37). Este año participaron por primera vez Bangladés, Kirguistán y Tayikistán, y volvieron a competir, tras no hacerlo el año pasado, Bolivia, Japón, Kosovo y Túnez. En cambio, Chile, Grecia, Indonesia y Lituania, que sí participaron en 2020, no lo hicieron este año.

Las ceremonias de apertura y clausura fueron virtuales, pero, a diferencia del año pasado, este año la posibilidad de interacción de las competidoras ha sido menor, no existiendo las mismas oportunidades en cuanto a foros, chats o similares. Esperemos que el año que viene, bien la EGMO pueda ser celebrada de forma presencial, bien se habiliten mecanismos para que las participantes puedan interactuar más y mejor, ya que el conocimiento mutuo e incluso la amistad que surgen entre participantes de todo el mundo es un aspecto fundamental a nivel humano en este tipo de competiciones internacionales.

Las dos sesiones de problemas se realizaron los días 11 y 12 de abril por la mañana. Como es habitual en estas competiciones internacionales, cada sesión duró 4 horas y media y consistió en 3 problemas valorados en hasta 7 puntos cada uno. A continuación mostramos los 6 problemas a los que se enfrentaron las chicas.

PROBLEMA 1. (Propuesto por Australia)

El número 2021 es *fantabuloso*. Si para algún entero positivo m , alguno de los elementos del conjunto $\{m, 2m + 1, 3m\}$ es fantabuloso, entonces todos los elementos de dicho conjunto son fantabulosos. ¿Esto implica que el número 2021²⁰²¹ es fantabuloso?



El equipo español al completo. De izquierda a derecha y de arriba abajo, Elisa Lorenzo, Paula, Daniel Lasasa, Raquel, Jimena y Mencía.

PROBLEMA 2. (Propuesto por Eslovaquia)

Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tales que la ecuación

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

se cumple para todos los números racionales x y y .

Nota: \mathbb{Q} denota el conjunto de todos los números racionales.

PROBLEMA 3. (Propuesto por Ucrania)

Sea ABC un triángulo con ángulo obtuso en A . Sean E y F las intersecciones de la bisectriz exterior del ángulo $\angle BAC$ con las alturas del triángulo ABC desde B y C , respectivamente. Sean M y N puntos en los segmentos EC y FB , respectivamente, tales que $\angle EMA = \angle BCA$ y $\angle ANF = \angle ABC$. Demuestre que los puntos E , F , M y N están sobre una misma circunferencia.

PROBLEMA 4. (Propuesto por Australia)

Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC . La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en el punto E . La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en el punto F . Demuestre que la reflexión de A sobre la recta EF está en la recta BC .

Nota: la reflexión de un punto P sobre una recta r es el punto Q tal que r es la mediatriz del segmento PQ .

PROBLEMA 5. (Propuesto por Austria)

Un plano tiene un punto especial O llamado origen. Sea P un conjunto de 2021 puntos en el plano que cumple las siguientes dos condiciones:

- (i) no hay tres puntos de P sobre una misma recta,
- (ii) no hay dos puntos de P sobre una misma recta que pasa por el origen.

Se dice que un triángulo con vértices en P es *gordo* si O es un punto interior de dicho triángulo. Encuentre la mayor cantidad de triángulos gordos que puede haber.

PROBLEMA 6. (Propuesto por Austria)

Determine si existe un entero no negativo a para el cual la ecuación

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

tiene más de un millón de soluciones diferentes (m, n) con m y n enteros positivos.

Nota: la expresión $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera (o suelo) del número real x . Por ejemplo, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor \frac{22}{7} \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ y $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Como sugieren las estadísticas oficiales que se pueden encontrar en la página web de la EGMO (<https://www.egmo.org/egmos/egmo10/scoreboard>), en esta ocasión los problemas tuvieron una dificultad promedio más elevada que en otras ediciones. La opinión de los redactores de este artículo es que, además, varios de los problemas eran de naturaleza marcadamente técnica, requiriendo de una dosis importante de preparación específica para conseguir una mayor probabilidad de resolución. Esto explica que, por una parte, los cortes de medallas hayan sido muy inferiores a otras ediciones (8 puntos para bronce, 14 puntos para plata, 21 para oro), mientras que, por otra, países potentes con entrenamiento intenso hayan obtenido puntuaciones muy altas (Federación Rusa 167 puntos y Estados Unidos 147, sobre un total posible de 168). Las representantes de la Federación Rusa no solo conformaron el equipo con la mayor puntuación total, sino que tres de ellas obtuvieron las únicas puntuaciones perfectas de 42 puntos, con 41 puntos para la cuarta y siendo la siguiente puntuación obtenida de 37 puntos, compartida exactamente por tres de las representantes de Estados Unidos.

Como siempre, las representantes de España compitieron con gran dedicación e intensidad. Sin embargo, la dificultad y necesidad de preparación de los problemas por una parte, y unos criterios de coordinación bastante encorsetados por otra, resultaron en puntuaciones que no recompensaron generosamente su esfuerzo. Esta falta de recompensa, que ya viene siendo una tónica habitual en muchas de nuestras representantes, se vio este año aumentada por el factor preparación. En la opinión de los redactores de este artículo, la formalización matemática no es demasiado habitual en los estudios de Secundaria y Bachillerato, ni aun en los alumnos y las alumnas más competentes. Cuando la celebración de la Olimpiada ha sido presencial, durante el viaje y los días previos a la competición se ha intentado reforzar este aspecto en nuestras representantes. Este año, y con la celebración telemática de la Olimpiada, no ha existido esta oportunidad de preparación, y de hecho no se ha producido un «corte» con el día a día habitual para permitir a nuestras representantes centrarse exclusivamente en la competición. Es posible que estos factores hayan resultado también en puntuaciones por debajo de las que serían acordes con el talento y el esfuerzo de nuestro equipo.

La edición del año que viene tendrá lugar en Eger (Hungría) del 6 al 12 de abril. De las cuatro participantes de este año, Raquel y Mencía podrían repetir si se clasifican.

Los resultados de este año nos reafirman, por lo tanto, en la opinión de que la mejora de nuestro rendimiento en la EGMO pasa por una mejor preparación al menos del equipo que nos represente, e idealmente de todas aquellas chicas que por su capacidad y voluntad quieran dedicarse, no solo ahora sino durante su vida académica y profesional, a las matemáticas. Por extensión, pensamos que se debe perseverar e intensificar la promoción de la excelencia matemática, y en especial del talento creativo y del rigor en la formalización aplicados en este campo. En este sentido, la EGMO puede seguir siendo una herramienta para que esta promoción sea más efectiva entre las alumnas, como un año más se ha podido comprobar en una mayor participación femenina en la fase final de la Olimpiada Matemática Española, donde, además, cinco chicas (tres de ellas participantes en esta EGMO) obtuvieron medalla de bronce.

No podemos finalizar este artículo sin dar las gracias a todas nuestras chicas por su dedicación a esta competición, deseándoles la mejor de las suertes en su futuro.

DANIEL LASAOSA MEDARDE, MIEMBRO DE LA COMISIÓN DE OLIMPIADAS DE LA RSME

Correo electrónico: daniel.lasaosa@gmail.com

ELISA LORENZO GARCÍA, IRMAR, UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Correo electrónico: elisa.lorenzogarcia@univ-rennes1.fr

Página web: <https://sites.google.com/site/elisalorenzo/>