¿Qué es un espacio?

por

Igor Arrieta y Andoni Zozaya

Resumen. El objetivo de este artículo es discutir diferentes nociones de espacio más allá de los espacios topológicos clásicos. Para ello, introducimos la categoría de locales, cuyos objetos pueden concebirse como espacios generalizados sin puntos suficientes. Bajo la guía de la teoría de categorías exploraremos varios aspectos de la teoría y su relación con la categoría de espacios topológicos. Además, explicamos la conexión de la teoría de locales con la matemática constructiva; y destacamos su importante faceta algebraica. Finalmente, también se detallan numerosas ventajas de la topología locálica.

1. Introducción

En una primera reflexión, se tiende a pensar que un espacio es necesariamente una colección de puntos. De hecho, la primera idea intuitiva de espacio es la de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ que aparecen en la geometría clásica o el álgebra lineal; en los cuales los puntos no son más que tuplas de números reales. En topología clásica se realiza una abstracción de esos espacios, así cualquier conjunto puede ser dotado de una estructura de espacio topológico, definiendo una familia de subconjuntos abiertos que satisface ciertas condiciones. No obstante, los espacios topológicos siguen siendo una colección de puntos.

¿Pero son los puntos la noción esencial? Tras una reflexión algo más pausada, observamos que frecuentemente lo esencial no es «mirar el interior» de un espacio dado, sino, por un lado, establecer relaciones abstractas entre este y otros espacios (aplicaciones continuas, homeomorfismos, identificaciones, inmersiones…) y, por otro lado, poder estudiar propiedades espaciales, tanto globales (compacidad, conexión, separación…) como locales (por ejemplo, la versión local de las anteriores) o sus versiones hereditarias mediante ciertos «instrumentos espaciales» (tomar subespacios y cocientes, pegar, cortar, unir, intersecar). El objetivo de este artículo es demostrar que existen espacios generalizados en los que se expresan estas propiedades, aunque no están conformados por puntos, y mostrar algunas de sus ventajas.

En este sentido, aunque se haya desarrollado una amplia teoría matemática sobre espacios topológicos, algunas propiedades no ocurren tal y como se espera o surgen otros problemas; como la existencia de subespacios no medibles de $\mathbb{R}$ en teoría de la medida, el hecho de que ciertas propiedades topológicas no se preserven al tomar productos (por ejemplo, el producto de espacios topológicos Lindelöf puede no ser Lindelöf), o que los subgrupos topológicos no siempre sean cerrados, a diferencia de los subgrupos de Lie embebidos, que sí lo son. Como veremos más adelante, todos estos problemas se pueden solucionar si uno cambia ligeramente el punto de vista.

Frecuentemente, tras esos problemas, junto con la definición de espacio, se encuentran los axiomas de partida. Es más, la definición de cualquier concepto suele estar relacionada con los axiomas utilizados para trabajar con él. Es decir, al generalizar la noción de espacio topológico es necesario reflexionar sobre la idoneidad de los axiomas —concretamente en este artículo, el axioma de elección y el principio de exclusión del tercero— asumidos.

El axioma de elección es uno de los más controvertidos entre los axiomas habituales. Según este axioma, para cualquier familia de conjuntos no vacíos $\{X_i\}_{i\in I}$ existe un conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que $x_i \in X_i$ para todo $i \in I$. Otro de los axiomas que suele asumirse en la matemática clásica es el principio de exclusión del tercero (PET) que se puede resumir de este modo: para cualquier proposición ϕ, se tiene que ϕ es verdad o bien $\neg\phi$ (la negación de ϕ) es verdad. Por supuesto, esto implica que $\neg\neg\phi$ y ϕ sean equivalentes. Este axioma es más débil que el axioma de elección, ya que el axioma de elección implica PET (véase [6]).

Es extremadamente importante ser consciente de los axiomas utilizados, esto es, no tener dudas sobre lo que se asume. Por ejemplo, detrás de muchas de las demostraciones por reducción al absurdo está PET. De hecho, para demostrar la veracidad de ϕ, se asume $\neg\phi$ y tras un razonamiento lógico se llega a una contradicción. Luego $\neg\neg\phi$ es cierto y, aceptando PET, esto es equivalente a que ϕ sea cierto.

Sin embargo, supongamos que para demostrar $\neg\phi$ se asume que ϕ es verdadero y que un razonamiento lógico lleva a una contradicción. En este caso, la veracidad de $\neg\phi$ es inmediata, sin necesidad de utilizar PET. A pesar de que a ambas demostraciones se les suela llamar demostraciones por reducción al absurdo, hay una gran diferencia entre ellas, ya que en el segundo caso se asume un axioma menos.

El *constructivismo* es una rama de las matemáticas que no asume el principio de exclusión del tercero, ni por tanto el axioma de elección. Es decir, en el constructivismo toda demostración es independiente respecto a esos axiomas. Sin embargo, la no asunción de esos axiomas no significa su negación, y por tanto las demostraciones constructivas son también válidas en matemática clásica. Es más, son demostraciones realizadas usando menos axiomas. Por consiguiente, se puede afirmar que el constructivismo es una «generalización» de la matemática tradicional.

El constructivismo surgió a principios del siglo XX e inicialmente fue una rama muy discutida de la matemática, ya que PET y la afirmación «*todo subconjunto de un conjunto finito es finito*» son equivalentes (véase [5, Teorema 2.1]). La segunda afirmación parece indiscutible, luego no habría ninguna razón para no asumir PET. No obstante, también existen afirmaciones parecidas en la matemática clásica, como, por ejemplo, la paradoja de Banach-Tarski. Según esta, se puede dividir la esfera tridimensional en una cantidad finita de piezas disjuntas, y luego volver a unirlas obteniendo dos copias idénticas de la esfera inicial (véase [2]).

Es más, la afirmación «*todo subconjunto de un conjunto finito es finito*» no es inmediata computacionalmente. Para decidir si una afirmación es cierta, un ordenador necesita un *realizador*, es decir, un programa que atestigüe su veracidad. Simplificadamente, una máquina representa un conjunto numerable mediante un programa p

que enumera sus elementos, con posibles repeticiones, y un realizador de la proposición «*todo subconjunto de un conjunto finito es finito*» sería un programa q que, dado cualquier p, genera una lista finita con los elementos enumerados por p. Sin embargo, intuitivamente, si p enumera el subconjunto $0, 0, 0, \ldots$ del conjunto finito $\{0, 1\}$, no existe ningún algoritmo que, tras una cantidad finita de pasos, determine si 1 está en ese subconjunto, luego no existe ningún realizador (en [5, Sección 3.2] podemos ver una demostración formal). Así, lo que en matemática clásica es un ejemplo de ineficiencia computacional, desde la perspectiva constructiva es una incógnita lógica.

Más allá de las razones computacionales y filosóficas, el constructivismo también posee una importante motivación matemática. Existen ciertos universos matemáticos, llamados *topos*, con una estructura parecida a la de conjuntos, pero cuya lógica interna es constructivista. Esto es, se pueden reproducir las construcciones y operaciones habituales de conjuntos en los topos, siempre que no se utilice PET.

Un resultado demostrado constructivamente se puede interpretar en un topos arbitrario y, frecuentemente, esa interpretación se puede «externalizar» obteniendo así nuevos teoremas. Por ejemplo, dado cualquier espacio topológico X se pueden obtener resultados sobre aplicaciones continuas con codominio X, externalizando la topología constructiva sobre un topos llamado *topos de haces sobre* X (véase [13, Capítulo C1.6]).

En cualquier caso, entre otros, el teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección (véase [14]), y la compactificación de Stone-Čech lo utiliza, así que la topología clásica no se puede desarrollar constructivamente. Resulta intuitivo que el razonamiento mediante puntos es el obstáculo principal por el cual la topología clásica depende intrínsecamente de PET, puesto que, al seleccionar un punto del espacio, un razonamiento habitual implica dividir el espacio en dos: por un lado ese punto, y por otro, si aceptamos PET, el resto del espacio.

Por consiguiente, con el fin de solucionar los problemas mencionados anteriormente y poder trabajar constructivamente es necesario redefinir el concepto de espacio, y parece razonable centrarse en los entornos abiertos más que en los propios puntos. Así, en este artículo introduciremos los *locales*, que no son más que estructuras abstractas ordenadas de «abiertos». En general, todos los espacios topológicos definen un local, pero hay locales que no provienen de un espacio topológico, es decir, espacios sin puntos suficientes.

Existen nociones de espacio aún más generales que los locales, que no abordaremos en este artículo. Las limitaciones que presentaba la topología clásica llevaron A. Grothendieck a un nuevo enfoque de la topología, dando lugar a lo que se conoce como *topologías de Grothendieck* o *sitios* (un local es un cierto tipo de sitio; más precisamente, todo local induce canónicamente un sitio cuya categoría subyacente es el propio local) y los anteriormente mencionados topos. En su manuscrito «Prélude» de *Récoltes et Semailles*, él mismo manifestaba la necesidad de estas generalizaciones para poder desarrollar la teoría de esquemas:

> *El concepto de situs*[1] *o de "topología de Grothendieck" (versión provisional del concepto de topos) apareció en la estela inmediata de la noción*

[1] El traductor utiliza el término *situs* al que nosotros nos referimos como *sitio*.

de esquema. Proporciona a su vez el nuevo lenguaje de la "localización" o del "descenso", utilizado a cada paso en el desarrollo del tema y de la herramienta esquemáticos.

(A. Grothendieck, traducción de J. A. Navarro, véase [7, p. 26])

La finalidad de este artículo es exponer el concepto de local. Por un lado, se definen los locales, proporcionando todos los instrumentos matemáticos necesarios para ello, y por otro lado se muestran varios ejemplos de su utilidad.

Entre otras ventajas, los locales son espacios idóneos para desarrollar la matemática constructiva y en ellos desaparecen algunas de las patologías de los espacios topológicos convencionales. Es más, al no asumir el axioma de elección se pueden evitar algunos contratiempos de la matemática clásica: en los locales no se puede dividir la esfera en la forma paradójica de Banach-Tarski, o se tiene que todos los sublocales de $\mathbb{R}^n$ son medibles (véase [21]). Esto es, aunque generalmente en matemática clásica se prefiera asumir los axiomas convencionales y resignarse a tener ciertos problemas, con la definición adecuada de espacio estos se pueden evitar.

Nota. En este artículo, *constructivo* y *válido en un topos arbitrario* serán sinónimos, y para ello trabajaremos informalmente en la categoría de conjuntos y utilizaremos el lenguaje habitual de la teoría de conjuntos pero teniendo cuidado de no derivar de PET nuestros razonamientos. Esto es suficiente para poder interpretar los resultados en un topos arbitrario. Los resultados sobre locales serán constructivamente válidos salvo que se indique lo contrario. Además, para la construcción del local de números reales de la Subsección 4.1 se asumirá adicionalmente que el topos tiene un *objeto de números naturales* que nos permita definir los números racionales. Por último, constructivamente, no todas las nociones de finitud son equivalentes. En este artículo, los conjuntos finitos lo serán en el sentido de Kuratowski, es decir, F es un conjunto finito si existen un $n \in \mathbb{N}$ y una aplicación sobreyectiva $\{1, 2, \dots, n\} \to F$.

2. Preliminares

Para poder definir y estudiar los locales hacen falta ciertos conocimientos sobre la teoría del orden y la teoría de categorías. Aunque la finalidad de este artículo no sea su desarrollo, se quiere dotar al lector de todos los instrumentos necesarios para la comprensión de los locales, ya que solo se asume el conocimiento matemático básico. Por consiguiente, en esta sección se expondrán estos conceptos de forma detallada.

2.1. Teoría del orden

Al ser los locales familias ordenadas de abiertos, primero se estudiarán las propiedades básicas de los órdenes.

Un *orden parcial* en el conjunto X es una relación binaria reflexiva, transitiva y antisimétrica, que normalmente denotaremos por el signo $\leq$. Así, un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset* es un conjunto X con un orden parcial $\leq$ en él. De manera similar, una relación binaria reflexiva y transitiva se llama *preorden*, y un *conjunto preordenado* es un conjunto equipado con un preorden.

Algunos ejemplos canónicos de conjuntos ordenados son los números naturales o reales con el orden usual; o $\mathbb{N}_0$ con el orden de la división, es decir, $a \leq b$ si y solo si $a \mid b$. Además, para cualquier conjunto X, su conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ es un conjunto ordenado con la inclusión, es decir, por definición se tiene $Y \leq Z$ si y solo si $Y \subseteq Z$.

Las aplicaciones naturales entre conjuntos (pre)ordenados son aquellas que mantienen las relaciones de (pre)orden. Concretamente, una aplicación $f\colon (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ es *monótona* si siempre que $x \leq_1 y$ se cumple $f(x) \leq_2 f(y)$. Además, para cualquier conjunto (pre)ordenado $(X, \leq)$ se puede definir de forma natural otro (pre)orden, llamado (pre)orden dual y al que denotaremos $\leq^{\mathrm{op}}$, en X, donde $x \leq^{\mathrm{op}} y$ si y solo si $y \leq x$. Así, el conjunto (pre)ordenado $(X, \leq^{\mathrm{op}})$ se denomina *conjunto (pre)ordenado dual de* $(X, \leq)$.

Dado un poset $(X, \leq)$, el *ínfimo* del subconjunto S, denotado $\operatorname{ínf} S$, es, si existe, el elemento $a \in X$ que verifica las siguientes condiciones:

(i) $a \leq s$ para todo $s \in S$;

(ii) si $x \leq s$ para todo $s \in S$, entonces $x \leq a$.

Es decir, $\operatorname{ínf} S$ es la mayor cota inferior del conjunto S. De forma similar, el *supremo* de un subconjunto S, al que denotaremos $\sup S$, es la menor cota superior de S. Nótese que de las condiciones anteriores y la antisimetría del orden parcial se deduce la unicidad del ínfimo y del supremo, cuando estos existen.

Por ejemplo, en el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ el supremo de una familia $\{Y_i\}_{i \in I}$ es $\bigcup_{i \in I} Y_i$, mientras el ínfimo es $\bigcap_{i \in I} Y_i$. Siguiendo este ejemplo, a menudo el supremo y el ínfimo de un subconjunto S en un poset general se representan, respectivamente, como $\bigvee S$ y $\bigwedge S$. Asimismo, para un conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es habitual utilizar las notaciones $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ y $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, respectivamente, para el supremo y el ínfimo.

Como cualquier elemento $x \in X$ de un poset es una cota inferior del conjunto vacío, $\operatorname{ínf} \varnothing$, cuando existe, es el mayor elemento del poset, al que se denomina *máximo* y se representa con el signo $\top$. Igualmente, cuando existe $\sup \varnothing$, este es el menor elemento de poset, al que se denomina *mínimo* y se representa como $\perp$.

Definición 2.1. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces,

(i) $(X, \leq)$ es un *retículo* si para todo $x, y \in X$ existen $x \vee y$ y $x \wedge y$;

(ii) $(X, \leq)$ es un *retículo completo* si todo subconjunto tiene supremo e ínfimo.

En particular, en un retículo completo siempre existen los elementos $\top$ y $\perp$. Aunque en la definición de retículo completo se pida la existencia del supremo y del ínfimo, basta pedir tan solo uno de los dos:

Lema 2.2 (véase [19, Apéndice I, Proposición 4.3.1]). *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Supongamos que todo subconjunto tiene supremo; entonces $(X, \leq)$ es un retículo completo.*

Del mismo modo, si todo subconjunto de un poset tiene ínfimo, este es un retículo completo. No obstante, el resultado análogo no es cierto para retículos, es decir, en un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ la existencia de $x \vee y$ para todo $x, y \in X$ no asegura que X sea un retículo. El conjunto $X = \{a, b, c\}$, donde las únicas relaciones de orden no triviales son $a \leq c$ y $b \leq c$, es un ejemplo de ello.

2.2. Teoría de categorías

Este artículo hará uso de ciertas herramientas de la teoría de categorías, por lo que dedicaremos el resto de esta sección a su estudio.

Definición 2.3. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consta de *objetos* $A, B, C, \ldots$, de *morfismos* $f, g, h, \ldots$ y de las siguientes operaciones:

(i) una asignación que envía cada morfismo f a un objeto denotado $\mathrm{dom}(f)$, al que llamaremos *dominio* de f;

(ii) una asignación que envía cada morfismo f a un objeto denotado $\mathrm{cod}(f)$, al que llamaremos *codominio* de f.

Si $\mathrm{dom}(f) = A$ y $\mathrm{cod}(f) = B$, entonces denotaremos $f\colon A \to B$;

(iii) una asignación que envía cada objeto A a un morfismo $1_A\colon A \to A$, al que llamaremos *identidad* sobre A;

(iv) una asignación que envía cada par de morfismos f, g tales que $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ (se dice en este caso que la *composición de f y g está definida*) a un morfismo $g \circ f$ que cumple $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$. El morfismo $g \circ f$ se llama *composición de f y g*. Además, se han de cumplir las siguientes propiedades:

- la composición es asociativa, es decir, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ siempre que las composiciones estén definidas;
- las aplicaciones 1_A son identidades respecto a la composición, esto es, para cada $f\colon A \to B$ se verifica que $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Nota 2.4. La definición de categoría se ha dado axiomáticamente en el sentido de las metacategorías de Mac Lane (véase [15, Capítulo 1, Sección 1]), sin hacer referencia a ninguna teoría de conjuntos subyacente. Sin embargo, por comodidad o por necesidad, ocasionalmente será interpretada en una teoría de conjuntos no especificada, es decir, requeriremos que los objetos y morfismos de $\mathcal{C}$ formen clases, denotadas respectivamente por $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ y $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$. Informalmente, las clases son «colecciones que pueden no formar un conjunto» como por ejemplo la colección de todos los conjuntos (para una exposición más precisa, consúltese [1, Capítulo 0, Sección 2.2]). Además, diremos que $\mathcal{C}$ es una categoría *pequeña* si $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$, y por tanto $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, es un conjunto. Sin embargo, tratamos de hacer la menor referencia posible a la teoría de conjuntos subyacente; en particular, el desarrollo teórico de esta sección se puede realizar sin el axioma de elección ni PET; incluyendo, por ejemplo, las demostraciones de los Teoremas 2.13 y 2.17.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $f\colon A \to B$ un morfismo. Se dice que f es un *isomorfismo* si existe otro morfismo $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$; en este caso se comprueba fácilmente que el morfismo g es único y se suele denotar como f^{-1}. Además, diremos que f es *monomorfismo* si cada vez que se verifica $f \circ h = f \circ k$, entonces $h = k$; y diremos que f es *epimorfismo* si cada vez que se verifica $h \circ f = k \circ f$, entonces se tiene $h = k$.

Las estructuras matemáticas habituales forman categorías de forma natural:

Ejemplos 2.5. (1) La categoría de conjuntos, que denotaremos por Set, cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son aplicaciones. La composición es simplemente la habitual entre aplicaciones. Es fácil comprobar que los isomorfismos son precisamente las aplicaciones biyectivas, los monomorfismos las aplicaciones inyectivas y los epimorfismos las aplicaciones sobreyectivas.

(2) La categoría Gp de grupos tiene como objetos grupos y como morfismos los homomorfismos de grupos. De forma similar, se tienen las categorías Ring de anillos, R-Mod de R-módulos... Cada vez que se tiene una estructura algebraica podemos construir una categoría. En todas ellas los isomorfismos son aplicaciones biyectivas y los monomorfismos son aplicaciones inyectivas, pero en alguna de estas categorías existen epimorfismos no sobreyectivos.

(3) Sea Top la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyos morfismos son aplicaciones continuas. También podemos construir la categoría Smooth formada por variedades diferenciables y morfismos lisos.

(4) Por un lado, tenemos una categoría Pos en la cual los objetos son conjuntos ordenados y los morfismos son las aplicaciones monótonas. Análogamente, se tiene la categoría Preord de conjuntos preordenados y aplicaciones monótonas entre ellos.

Todos los ejemplos hasta ahora tienen un rasgo común: los objetos son conjuntos con alguna estructura adicional y los morfismos son aplicaciones especiales entre esos conjuntos. Una categoría de este tipo se denomina *concreta*. Sin embargo, existen categorías no concretas, como se deduce de los siguientes ejemplos:

(5) Sea P un conjunto preordenado y defínase la categoría $\mathcal{C}_P$ de la siguiente manera: los objetos son los elementos de P y, dados $a, b \in P$, existe un único morfismo $a \to b$ si y solo si $a \leq b$. La composición es la única que se puede definir, y la asociatividad y existencia de identidades se deducen de las propiedades transitiva y reflexiva, respectivamente. Además, es fácil verificar que P es un conjunto parcialmente ordenado si y solo si todo isomorfismo de $\mathcal{C}_P$ es una identidad.

(6) Sea $(G, *)$ un grupo y consideremos la categoría $\mathcal{C}_G$ con un único objeto (es decir, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_G) = \{p_0\}$) de manera que para cada $g \in G$ existe un único morfismo $\hat{g}\colon p_0 \to p_0$. La composición se define mediante $\hat{g} \circ \hat{h} = \widehat{g * h}$. Si e denota el elemento neutro del grupo, está claro que $\hat{e}$ es la identidad composicional y que la asociatividad de la operación garantiza la asociatividad de la composición.

Por último, hay una manera natural de obtener una nueva categoría a partir de una dada:

(7) Dada una categoría $\mathcal{C}$, su *categoría dual* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ y para cada morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $f^{\mathrm{op}}\colon B \to A$ en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Esto es, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ se obtiene *al invertir formalmente el sentido de los morfismos*. La composición $\circ_{\mathrm{op}}$ se define por $f^{\mathrm{op}} \circ_{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} = (g \circ f)^{\mathrm{op}}$, y obviamente se verifica que $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

(7) Sean un conjunto preordenado P y la categoría $\mathcal{C}_P$ del ejemplo (5). Entonces se verifica que $\mathcal{C}_{P^{\mathrm{op}}} = \mathcal{C}_P^{\mathrm{op}}$, donde P^{op} es el conjunto preordenado dual $(P, \leq^{\mathrm{op}})$.

Nota 2.6. Dado un objeto A de una categoría, es útil considerar la noción de monomorfismo con codominio A «salvo isomorfismo». Más precisamente, dos monomorfismos $f\colon B \to A$, $f'\colon B' \to A$ son *isomorfos* si existe un isomorfismo $g\colon B \to B'$ tal que $f = f' \circ g$. Así, un *subobjeto* de A es simplemente una clase de isomorfismos de monomorfismos con codominio A. En cualquier categoría, los subobjetos de un objeto dado están naturalmente ordenados. En efecto, dados $f\colon B \to A$ y $f'\colon B' \to A$ dos representaciones de subobjetos, diremos que $f \leq f'$ si existe un morfismo $g\colon B \to B'$ que cumple $f = f' \circ g$. Se verifica fácilmente que $\leq$ está bien definida, y que es de hecho una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ahora, si queremos definir la noción de morfismo entre categorías, es natural exigir que se preserven identidades y composiciones. Esta idea se expresa en la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.7. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un *funtor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ está formado por:

(i) una asignación que envía cada objeto A de $\mathcal{C}$ a un objeto $F(A)$ de $\mathcal{D}$,

(ii) una asignación que envía cada morfismo f de $\mathcal{C}$ a un morfismo $F(f)$ de $\mathcal{D}$,

de manera que se verifican los siguientes enunciados:

- si $f\colon A \to B$, entonces $F(f)\colon F(A) \to F(B)$,
- se tiene que $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo objeto A de $\mathcal{C}$,
- se tiene que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ si la composición de f y g está definida.

Diremos que un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es *fiel* si dados morfismos $f, g\colon A \to B$ en $\mathcal{C}$ tales que $F(f) = F(g)$, entonces se verifica $f = g$. Por otro lado, un functor es *pleno* si, dado un morfismo $h\colon F(A) \to F(B)$ en $\mathcal{D}$, existe un morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathcal{C}$ tal que $F(f) = h$.

En algunos de los siguientes ejemplos se definirá el efecto de los funtores sobre los objetos, dejando como ejercicio al lector extender el funtor a los morfismos.

EJEMPLOS 2.8. (1) Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, hay un *funtor identidad* $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que verifica $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ para todo objeto A y $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo morfismo f.

(2) Sea un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Entonces F asigna a cada morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f)\colon F(B) \to F(A)$ en $\mathcal{D}$. Por consiguiente, un funtor de este tipo se suele denominar *funtor contravariante* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$; pero en este artículo no utilizaremos esta terminología.

(3) Para toda aplicación $f\colon A \to B$ entre conjuntos, tenemos una aplicación imagen inversa $P^*(f)\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ dada por $P^*(f)(C) = f^{-1}(C)$, y otra aplicación imagen directa $P(f)\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ dada por $P(f)(D) = f(D)$. Así, se obtienen sendos funtores $P^*\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ y $P\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ tales que $P^*(A) = P(A) = \mathcal{P}(A)$.

(4) Para toda categoría concreta $\mathcal{C}$ existe un funtor $U\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$, llamado *funtor de olvido*, porque «olvida» la estructura adicional de los objetos y morfismos. Por ejemplo, el funtor olvidadizo $U\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ lleva un espacio (X, τ_X) al conjunto X.

(5) Hay un funtor $D\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ que lleva el conjunto X al espacio discreto $D(X) = (X, \tau_{\mathrm{dis}})$.

(6) Sea K un cuerpo, y denotemos por V^* el dual de un K-espacio vectorial V. Para cada aplicación lineal $f\colon V \to W$ sabemos que existe otra aplicación lineal $f^*\colon W^* \to V^*$ en la dirección opuesta. Así, la asignación $V \mapsto V^*$ se extiende a un funtor $(-)^*\colon \mathsf{Mod}_K \to \mathsf{Mod}_K^{\mathrm{op}}$.

Hasta ahora, hemos definido categorías y morfismos entre ellas (a saber, funtores). Además, podemos definir la composición entre funtores fácilmente: dados $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, pongamos $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ y $(G \circ F)(f) = G(F(f))$. Es un sencillo ejercicio comprobar que $G \circ F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ es de nuevo un funtor y que la operación de composición entre funtores es asociativa. Además, el funtor identidad de los anteriores ejemplos actúa como identidad composicional. Así, tenemos una categoría Cat cuyos objetos son las categorías pequeñas y cuyos morfismos son funtores. Realmente, la estructura de Cat es mucho más rica, puesto que, como veremos en la próxima definición, también existen morfismos entre morfismos (es decir, entre funtores):

Definición 2.9. Sean $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Una *transformación natural* $\eta\colon F \to G$ es una asignación que envía cada objeto A de $\mathcal{C}$ a un morfismo $\eta_A\colon F(A) \to G(A)$ de $\mathcal{D}$ y que cumple la siguiente propiedad: para cada morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Diremos además que una transformación natural η es un *isomorfismo natural* si η_A es un isomorfismo para todo objeto A de $\mathcal{C}$. En este caso es inmediato ver que la asignación que envía A a η_A^{-1} es de nuevo una transformación natural $G \to F$, denotada η^{-1}.

Ejemplos 2.10. (1) Con la notación del Ejemplo 2.8(3), existe una transformación natural $\eta\colon 1_{\mathsf{Set}} \to P$, donde el morfismo $\eta_A\colon A \to P(A)$ está dado por $\eta_A(a) = \{a\}$.

(2) Recordemos el Ejemplo 2.8(6). Consideramos el funtor $(-)^{**}\colon \mathsf{Mod}_K \to \mathsf{Mod}_K$ (es decir, el que se obtiene componiendo dos veces $(-)^*$), que lleva un espacio vectorial a su bidual. Dado un espacio vectorial V, sea $\eta_V\colon V \to V^{**}$ la aplicación lineal dada por $\eta_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$. Se verifica que las aplicaciones η_V forman una transformación natural $\eta\colon 1_{\mathsf{Mod}_K} \to (-)^{**}$.

Definición 2.11. Un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *equivalencia categórica* si existen un funtor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturales $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ y $\beta\colon F \circ G \to 1_{\mathcal{D}}$. Dos categorías se dicen *equivalentes* si existe una equivalencia categórica entre ambas.

Las categorías equivalentes son iguales desde la óptica de la teoría de categorías. Así, diremos que P es una *propiedad categórica* si se preserva bajo equivalencias. Esto es, si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes, entonces $\mathcal{C}$ cumple P si y solo si $\mathcal{D}$ cumple P.

Nota 2.12. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, una *subcategoría* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ viene dada por dos subcolecciones $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ que son cerradas respecto a tomar dominios, codominios, identidades y composiciones. Es evidente que una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ es por sí misma una categoría y que hay un *funtor inclusión* $I\colon \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$. Además, una subcategoría $\mathcal{D}$ se dice *plena* si todo $f\colon A \to B$ en $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ con $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ pertenece a $\mathrm{Mor}(\mathcal{D})$.

Ahora, si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías y $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor fiel (resp., fiel y pleno), entonces existe una subcategoría (resp., subcategoría plena) $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ y una equivalencia $G\colon \mathcal{D}' \to \mathcal{C}$ tal que $F \circ G = \mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{D}$ es el funtor inclusión. Así, salvo equivalencia, los funtores fieles corresponden a subcategorías, y los funtores fieles y plenos corresponden a subcategorías plenas.

Principio de dualidad. Dada una propiedad categórica P, definimos la *propiedad dual* P^{op} declarando que $\mathcal{C}$ cumple P^{op} si y solo si $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ cumple P. El siguiente teorema es trivial pero de enorme importancia en teoría de categorías:

Teorema 2.13 (Principio de dualidad). *Si una propiedad P se cumple en todas las categorías, entonces también se cumple P^{op}.*

Subcategorías (co)reflectivas. Entre todas las subcategorías $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$, estamos interesados en las que tengan buenas propiedades. Por ejemplo, es razonable pedir que, dado un objeto C de $\mathcal{C}$, exista una aproximación óptima de C mediante un objeto de $\mathcal{D}$. Así, una subcategoría plena $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ se dice que es *reflectiva en* $\mathcal{C}$ si para cada objeto C de $\mathcal{C}$ existen un objeto D_C de $\mathcal{D}$ y un morfismo $\eta_C\colon C \to D_C$ de $\mathcal{C}$ que verifican la siguiente propiedad: para todo objeto C de $\mathcal{C}$ y D de $\mathcal{D}$ y para todo morfismo $f\colon C \to D$ de $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $g\colon D_C \to D$ de $\mathcal{D}$ que verifica $f = g \circ \eta_C$.

Asimismo, una subcategoría plena $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ se dice *correflectiva en* $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ es reflectiva en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. La formulación explícita se deja como ejercicio al lector.

(Co)productos. En diferentes áreas de la matemática se repiten construcciones similares, y la teoría de categorías puede unificarlas. Un ejemplo ubicuo de este tipo de construcciones son los productos: sabemos construirlos entre conjuntos, espacios topológicos, grupos, espacios vectoriales… La siguiente definición aúna todos ellos:

Definición 2.14. Sean $\mathcal{C}$ una categoría e I un conjunto de índices. Un *producto* de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ viene dado por un objeto P de $\mathcal{C}$ y una familia de morfismos $\{\pi_i\colon P \to A_i\}_{i\in I}$ (llamados *proyecciones*) que cumplen lo siguiente: para toda familia de morfismos $\{f_i\colon B \to A_i\}_{i\in I}$, existe un único $f\colon B \to P$ tal que $f_i = \pi_i \circ f$ para todo $i \in I$.

Cuando no haya riesgo de confusión (o sea obvio) las proyecciones no se especificarán. No es difícil probar que un producto, si existe, es único salvo isomorfismo. Además, diremos que

(i) $\mathcal{C}$ *tiene productos binarios* si existe una asignación que envía cada par de objetos A y B a un producto que denotaremos $A \times B$; y que

(ii) $\mathcal{C}$ *tiene productos* si existe una asignación que envía cada conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos a un producto que denotaremos $\prod_{i\in I} A_i$.

Observamos que en el caso $I = \varnothing$ la anterior definición se reduce a lo siguiente: existe un objeto P de manera que para todo objeto B existe un único morfismo $B \to P$. Un objeto P de este tipo se denomina *final*, y en caso de existir diremos que $\mathcal{C}$ *tiene objeto final*.

Por último, definimos el *coproducto* de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{C}$ como el producto de $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ y utilizaremos la notación $\coprod_{i\in I} A_i$. Asimismo, diremos que un objeto P es *inicial* si P es un objeto final en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Es habitual denotar el objeto final mediante $1_{\mathcal{C}}$ (o simplemente 1), y el objeto inicial mediante $0_{\mathcal{C}}$ (o simplemente 0).

Ejemplos 2.15. (1) La categoría Set tiene productos, siendo estos los habituales productos cartesianos. El objeto final es cualquier conjunto $\{*\}$ de un elemento (todos son isomorfos). Los coproductos no son más que uniones disjuntas y el objeto inicial es el conjunto vacío.

(2) En las categorías Gp y Mod_R existen todos los productos, a saber, los productos directos (cartesianos) habituales. Los objetos finales e iniciales coinciden, siendo estos los grupos y módulos triviales. Además, en Mod_R los coproductos son las sumas directas, los cuales, en el caso finito, coinciden con los productos.

(3) En la categoría Ring el objeto final es el anillo trivial de un elemento, mientras que el objeto inicial es el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

(4) En Top también existen los productos: el producto de una familia $\{(X_i, \tau_{X_i})\}_{i\in I}$ está dado por la topología de Tychonoff $(\prod X_i, \tau_{\mathrm{Tych}})$. Del mismo modo, los coproductos son uniones disjuntas equipadas con la topología de la unión disjunta.

(5) Sea P un conjunto parcialmente ordenado y recordemos la categoría asociada $\mathcal{C}_P$ del Ejemplo 2.5(5). Entonces, el producto de $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq P$ existe en $\mathcal{C}_P$ si y solo si el ínfimo de $\{x_i\}_{i\in I}$ existe en P, y en ese caso se verifica $\prod_i x_i = \bigwedge_i x_i$. Por el principio de dualidad, el supremo de $\{x_i\}_{i\in I}$, si existe, es el coproducto $\coprod_i x_i$.

Nota 2.16. Los (co)productos son en realidad casos particulares de la noción más amplia de *(co)límite*. Para los objetivos de este artículo es suficiente usar (co)productos, pero advertimos al lector que el siguiente teorema es realmente mucho más general.

El siguiente teorema indica que las subcategorías reflectivas poseen propiedades muy convenientes:

Teorema 2.17 (véase [19, Apéndice II, Proposición 8.3]). *Sea $\mathcal{D}$ reflectiva en $\mathcal{C}$. Si existe el producto en $\mathcal{C}$ de una familia $\{D_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{D}$, entonces el producto en $\mathcal{D}$ también existe y ambos coinciden.*

3. Teoría de locales

Una vez presentadas todas las herramientas necesarias, en este apartado se formalizará y analizará la noción de *local* como espacio sin suficientes puntos.

3.1. Historia

A principios del siglo XX, F. Hausdorff y varios topólogos de la escuela polaca, como W. Sierpiński o K. Kuratowski, se percataron de que la información básica de un espacio residía fundamentalmente en los entornos abiertos. En este sentido, G. Nöbeling publicó en 1945 el libro [18], en el que las definiciones y demostraciones topológicas clásicas se dan basándose en los abiertos de la topología, y no en los puntos del espacio; esto constituyó un gran paso para liberar los espacios topológicos de los puntos.

Por otro lado, el desarrollo de A. H. Stone de las presentaciones topológicas de las álgebras de Boole puso de manifiesto la necesidad de unir la interpretación geométrica tradicional de los espacios topológicos con una visión más algebraica.

Así, la teoría de locales surgió en la década de 1950. En este campo es especialmente destacable la aportación de B. Banaschewski, puesto que fue uno de los autores más prolíficos de la rama durante las siguientes tres décadas. No obstante, la verdadera revolución en la teoría de locales se produjo en 1972 cuando J. R. Isbell publicó el famoso artículo [8]. En él, en primer lugar, estableció el término de *local*, nombre que subraya la naturaleza espacial de esta estructura, sin olvidar su carácter algebraico; y definió la categoría formada por ellos. Y en segundo lugar, y principalmente, mediante este artículo dejó claro que los locales no son meras generalizaciones de los espacios topológicos, sino una mejora. Para ello mostró que los locales poseen ciertas propiedades positivas respecto a los productos o los subconjuntos densos, de las que carecen los espacios topológicos clásicos (véase la Subsección 4.4).

Aunque [8] sea un hito en la teoría de locales, el carácter constructivo de la teoría también sirvió de impulso para su desarrollo. De hecho, escoger un punto en un espacio es dividirlo en dos: el punto por un lado, y, si aceptamos PET, todo lo que no sea ese punto por otro lado. Por supuesto, en matemática constructiva esto no es realizable, luego en vez de ver los espacios como un conjunto de puntos, es conveniente analizarlos mediante sus abiertos, precisamente como se hace en teoría de locales. Asimismo, este enfoque permite demostrar muchos teoremas de forma constructiva o sin necesidad del axioma de elección. De este modo, el creciente interés en la matemática constructiva propulsó el estudio de la teoría de locales.

Finalmente, desde que en 1982 P. T. Johnstone escribiera el primer libro monográfico [11] sobre teoría de locales, se ha estudiado mucho sobre ellos y se ha ido ampliando el campo a medida que surgían nuevas ramas de investigación: teoría de topos, topología categórica, productos de locales, teoría de locales no conmutativos —denominada teoría de cuantales— o teoría de grupos locálicos.

3.2. Fundamentos de la teoría de locales

Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces, $(\tau_X, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. El hecho de que las uniones arbitrarias de abiertos son abiertas garantiza que τ_X posee supremos (son sencillamente uniones) y en virtud del Lema 2.2 se deduce que τ_X es un retículo completo. Nótese que los ínfimos infinitos no son generalmente intersecciones, pues las intersecciones infinitas de abiertos no son generalmente abiertas. En cualquier caso, los ínfimos *finitos* sí están dados por intersecciones. Ahora, como las uniones arbitrarias distribuyen sobre intersecciones, se tiene trivialmente que

$$U \wedge \bigvee_i V_i = \bigvee_i (U \wedge V_i), \qquad \forall U \in \tau_X,\ \forall \{V_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_X. \tag{1}$$

Por lo tanto, si (X, τ_X) es un espacio topológico, τ_X es un retículo completo que adicionalmente cumple la *ley infinita de distributividad* (1) entre supremos arbitrarios e ínfimos finitos. Visto lo anterior, es natural plantear la siguiente definición.

Definición 3.1. Un retículo completo L se dice *local* o *marco* (*frame* en inglés) si se cumple la siguiente ley infinita de distributividad:

$$a \wedge \bigvee_i b_i = \bigvee_i (a \wedge b_i), \qquad \forall a \in L,\ \forall \{b_i\}_{i\in I} \subseteq L.$$

Así, τ_X es el ejemplo canónico de un local, y pensaremos que un local general es un espacio topológico generalizado.

Asimismo, para toda aplicación continua $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ las imágenes inversas de abiertos son abiertas, es decir, obtenemos una aplicación $f^{-1}(-)\colon \tau_Y \to \tau_X$ que manda un abierto U a $f^{-1}(U)$. Sabemos de la teoría de conjuntos básica que $f^{-1}(-)$ conmuta con uniones e intersecciones arbitrarias, así que en particular preserva ínfimos finitos y supremos.

Definición 3.2. Una aplicación $f\colon L \to M$ entre marcos se dice *homomorfismo de marcos* si preserva supremos arbitrarios e ínfimos finitos, esto es, si verifica $f(\bigvee_i a_i) = \bigvee_i f(a_i)$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(\perp_L) = \perp_M$ para todo $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq L$ y $a, b \in L$.

Marcos y homomorfismos de marcos entre ellos forman la *categoría de marcos*, denotada por Frm. Observamos que en Frm los morfismos van en la dirección opuesta a la de las aplicaciones continuas. Esta discrepancia será enmendada próximamente con la introducción de la categoría Loc. Hasta ahora, hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 3.3. *La asignación* $\Omega(X, \tau_X) = \tau_X$ *y* $\Omega(f) = f^{-1}(-)$ *determina un funtor* $\Omega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$.

Diremos que un marco o local L es *espacial* si existe un isomorfismo $L \cong \tau_X$ en Frm para algún espacio topológico (X, τ_X). Por ahora, no sabemos ni siquiera si existen locales no espaciales, pero próximamente veremos que sí.

Sigamos pensando en locales como espacios generalizados. En este sentido, nos gustaría que el funtor Ω fuera fiel y pleno, pues así podríamos ver Top como una subcategoría plena de $\mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$ (en virtud de la Nota 2.12), formalizando así la idea de obtener «una categoría de espacios generalizados». Esta idea, la de considerar el dual de Frm como la «categoría topológica» (donde los morfismos van en la dirección adecuada), fue presentada por J. R. Isbell en su artículo pionero [8]. Ahora está claro que $\mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$ merece un nombre, lo llamaremos *categoría de locales* y lo denotaremos $\mathsf{Loc} = \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$. Bajo esta terminología, el funtor Ω de la proposición anterior se convierte en un funtor $\Omega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Loc}$. Aun así, no es cierto que Ω sea siempre fiel y pleno; pero sí lo es al restringirnos a espacios topológicos «suficientemente buenos». Primero, necesitamos la siguiente definición:

Definición 3.4. Un *filtro* F en un retículo completo L es un subconjunto $F \subseteq L$ que cumple las siguientes condiciones:

(i) si $a \in F$ y $b \geq a$, entonces $b \in F$;

(ii) $\top \in F$;

(iii) si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

Un filtro F se dice *completamente primo* si para todo $S \subseteq L$ tal que $\bigvee S \in F$ existe un $a \in S \cap F$.

Obsérvese que tomando $S = \varnothing$ en la definición anterior se deduce que un filtro completamente primo no contiene a $\bot$.

Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Nótese que para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{U}_x = \{U \in \tau_X \mid x \in U\}$ es un filtro completamente primo en τ_X.

Definición 3.5. Un espacio topológico (X, τ_X) se dice *sobrio* (*sober*, en inglés) si todo filtro completamente primo de τ_X es de la forma $\mathcal{U}_x$ para un único $x \in X$.

Por lo tanto, los puntos de un espacio sobrio X están en correspondencia biyectiva con los filtros completamente primos de τ_X, y por extensión, un filtro completamente primo en un local general L puede pensarse como un *punto generalizado* de L.

La mayoría de espacios que uno encuentra en la práctica son sobrios. Por ejemplo, es fácil comprobar que todo espacio de Hausdorff es sobrio, luego no supone una gran limitación la restricción a esta clase de espacios. Sea SobTop la subcategoría plena de Top formada por espacios sobrios. Por otro lado, sea SpLoc la subcategoría plena de Loc formada por locales espaciales. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.6. (i) $\Omega' \colon \mathsf{SobTop} \to \mathsf{SpLoc}$ *(la restricción de* Ω*) es una equivalencia.*

(ii) *La subcategoría* SobTop *es reflectiva en* Top.

(iii) *La subcategoría* SpLoc *es correflectiva en* Loc.

Demostración. (i) Primero, construimos un funtor $\Sigma \colon \mathsf{Loc} \to \mathsf{Top}$. Dado un local L, sea X_L el conjunto de sus filtros completamente primos; y considérese la familia $\tau_{X_L} = \{\varphi_a \mid a \in L\}$ de subconjuntos de X_L, donde $\varphi_a = \{F \in X_L \mid a \in F\}$. Las identidades

$$\varphi_\bot = \varnothing, \quad \varphi_\top = X_L, \quad \varphi_{\bigvee_i a_i} = \bigcup_i \varphi_{a_i} \qquad \text{y} \qquad \varphi_{a \wedge b} = \varphi_a \cap \varphi_b \tag{2}$$

se verifican fácilmente, luego la familia τ_{X_L} es una topología sobre X_L. Definimos $\Sigma(L) = (X_L, \tau_{X_L})$; no es difícil comprobar que esta regla se extiende a un funtor $\Sigma \colon \mathsf{Loc} \to \mathsf{Top}$ y que $\Sigma(L)$ es siempre sobrio. Así, se tiene en particular un funtor restricción $\Sigma' \colon \mathsf{SpLoc} \to \mathsf{SobTop}$. Para un espacio topológico X, definimos una aplicación $\eta_X \colon X \to \Sigma(\Omega(X, \tau_X))$ dada por $\eta_X(x) = \mathcal{U}_x$. Observamos que $\eta_X^{-1}(\varphi_U) = U$ para todo $U \in \tau_X$, y por tanto η_X es continua. Además, la definición de sobrio implica que, cuando X es sobrio, η_X es biyectiva. La fórmula $\eta_X^{-1}(\varphi_U) = U$ y la sobreyectividad de η_X garantizan que η_X es también abierta, y por tanto es homeomorfismo. Es inmediato verificar que la asignación $X \mapsto \eta_X$ define una transformación natural $\eta \colon 1_{\mathsf{SobTop}} \to \Sigma' \circ \Omega'$, y por tanto, es isomorfismo natural.

Por otro lado, para cada local L sea $\varepsilon_L\colon L \to \Omega(\Sigma(L)) = \tau_{X_L}$ la aplicación dada por $\varepsilon_L(a) = \varphi_a$. En virtud de las ecuaciones (2), ε_L preserva supremos arbitrarios e ínfimos finitos, y por tanto es un morfismo sobreyectivo en Frm. Además, es inmediato verificar que $\Omega(\eta_X) \circ \varepsilon_{\Omega(X)} = 1_{\Omega(X)}$. De ello sigue fácilmente que, para L espacial, ε_L es inyectiva y por tanto un isomorfismo en Frm. Equivalentemente, se tiene un isomorfismo $\varepsilon_L^{\mathrm{op}}\colon \Omega'(\Sigma'(L)) \to L$ en Loc, y por tanto también en SpLoc. Finalmente, la asignación $L \mapsto \varepsilon_L^{\mathrm{op}}$ establece una transformación natural $\varepsilon^{\mathrm{op}}\colon \Omega' \circ \Sigma' \to 1_{\mathsf{SpLoc}}$, luego es un isomorfismo natural.

(ii) Los morfismos η_X requeridos en la definición son los $\eta_X\colon X \to \Sigma(\Omega(X))$ definidos en (i) (recordemos que el codominio es sobrio). La prueba de (iii) es similar. □

El siguiente diagrama expresa la situación anterior de forma gráfica (las flechas punteadas indican subcategoría reflectiva a la izquierda y correflectiva a la derecha):

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, "\Omega"] \arrow[d, dashed, bend right] & \mathsf{Loc} \arrow[d, dashed, bend left] \\
\mathsf{SobTop} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Omega'", "\cong"'] & \mathsf{SpLoc} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Nótese que el apartado (i) del teorema indica que existe una copia exacta de SobTop (a saber, SpLoc) como subcategoría de Loc. Así, si uno restringe el funtor Ω a SobTop, este se vuelve fiel y pleno, como habíamos adelantado anteriormente. Por consiguiente, la idea del teorema anterior se puede resumir como sigue:

> *La topología realizada en la categoría* Loc *es una extensión fiel de la topología clásica sobre espacios sobrios.*

Todas las propiedades y construcciones espaciales —tomar subespacios, por ejemplo— mencionadas en la Introducción se pueden generalizar a Loc. En el siguiente ejemplo nos guía de nuevo la teoría de categorías. Un monomorfismo $f\colon B \to A$ en una categoría se dice *extremo* si cada vez que $f = g \circ e$ con e epimorfismo, se tiene que e es isomorfismo. Así, tal y como se explica en la Nota 2.6, se obtiene la noción de *subobjeto extremo* de A, es decir, una clase de isomorfismos de monomorfismos extremos con codominio A. Además, podemos restringir el orden parcial introducido en la Nota 2.6 a los subobjetos extremos de un objeto.

En Top, los subobjetos extremos de (X, τ_X) corresponden precisamente a inclusiones $(A, \tau_A) \hookrightarrow (X, \tau_X)$ donde $A \subseteq X$ y τ_A es la topología subespacio, y el orden parcial de los subobjetos extremos corresponde sencillamente a la inclusión entre subespacios. Por todo ello, uno define un *sublocal* o *subespacio generalizado* de un local L como un subobjeto extremo de L en Loc (véase [20, Sección 2.4]).

Esta noción resulta ser, sin duda, la adecuada, pues uno puede hablar de sublocales abiertos y cerrados, así como realizar las operaciones habituales entre ellos. Por ejemplo, bajo la relación de orden introducida se pueden construir supremos e ínfimos, es decir, análogos a uniones e intersecciones de subespacios clásicos. Un ejemplo concreto, el de *sublocal denso*, se detalla en la Subsección 4.3.

4. Ventajas de la topología locálica

Ya hemos visto que además de la categoría Top de espacios topológicos, existe la categoría Loc formada por objetos interpretables como espacios generalizados. ¿Pero merece la pena trabajar en esta categoría más abstracta? El objetivo de esta sección es mostrar que Loc posee propiedades muy satisfactorias en comparación con Top.

4.1. El dual de Loc es una categoría algebraica

Si miramos la categoría Loc en el espejo (es decir, si tomamos $\mathsf{Loc}^{\mathrm{op}} = \mathsf{Frm}$), el comportamiento categórico es excelente. Asumamos de momento el axioma de elección para poder hablar de cardinales y fijémonos en la categoría Frm desde el punto de vista algebraico: sus objetos son conjuntos junto con algunas operaciones (tomar supremos e ínfimos), y las condiciones que deben verificar esas operaciones se pueden expresar mediante ecuaciones. Concretamente, un local es un conjunto L equipado con las operaciones $\wedge\colon L \times L \longrightarrow L$ y $\bigvee_\kappa\colon L^\kappa \longrightarrow L$, para todo cardinal κ, y dos constantes $\top \in L$ y $\bot \in L$. Pero, ¿cuáles son las condiciones que deben verificar esas operaciones para que L sea un local?

Proposición 4.1. *Sea L un conjunto y supóngase que existen elementos $\top \in L$ y $\bot \in L$ y operaciones $\wedge\colon L \times L \longrightarrow L$, $\bigvee_\kappa\colon L^\kappa \longrightarrow L$, para todo cardinal $\kappa \geq 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *L es un local, donde los ínfimos binarios están dados por la operación $\wedge$ y los supremos por $\bigvee_\kappa$.*

(2) *Se verifican las siguientes condiciones para todo $a \in L$ y $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq L$, donde $|I| = \kappa$:*

  (i) $(L, \wedge, \top)$ *es un monoide idempotente conmutativo;*

  (ii) $a \wedge \bot = \bot \wedge a = \bot$*;*

  (iii) $a \wedge \bigvee_\kappa a_i = \bigvee_\kappa (a \wedge a_i)$*;*

  (iv) $a_i \wedge \bigvee_\kappa a_j = a_i$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Es inmediato demostrar que los supremos y los ínfimos verifican las condiciones del apartado (2) (nótese que (2)(iii) sigue de la ley de distributividad infinita).

(2) $\Rightarrow$ (1): Defínase el siguiente orden parcial en L: $x \leq y$ si y solo si $x \wedge y = x$. Entonces, es fácil demostrar que, por (2)(i), el conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ tiene ínfimos binarios, dados por la operación $\wedge$, y que $\top$ es el máximo. Demostremos que todos los supremos existen, dados por la operación $\bigvee_\kappa$. La definición del orden y (2)(ii) aseguran que el elemento $\bot$ es el mínimo. Sea la familia $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq L$ y supóngase que $|I| = \kappa$. Usando la definición del orden y (2)(iv), sigue que el elemento $\bigvee_\kappa a_i$ es una cota superior de la familia $\{a_i\}_{i\in I}$. Supóngase que $b \in L$ es otra cota superior, es decir, $a_i \leq b$ para todo $i \in I$. Ahora, por (2)(iii) y (2)(iv) se deduce que $\bigvee_\kappa a_i \leq b$. Finalmente, la ley de distributividad infinita entre supremos e ínfimos sigue de (2)(iii). $\square$

Observamos que el apartado (2)(i) de la Proposición 4.1 es una condición algebraica, luego es expresable con ecuaciones. Así, todas las condiciones para ser un local se pueden expresar mediante unas operaciones y varias ecuaciones con ellas.

Fijémonos ahora en los morfismos de Frm. Recuérdese que un morfismo en esta categoría es una aplicación que preserva ínfimos finitos y todos los supremos. Pero, entonces, un homomorfismo de marcos es una aplicación que preserva las operaciones de nuestra estructura algebraica, es decir, un homomorfismo en el sentido del álgebra universal. Esto es, utilizando la terminología de P. T. Johnstone (véase [11, Capítulo I, Sección 3.8]) la categoría Frm es *presentable por ecuaciones*. Para el lector interesado en categorías, diremos que Frm tiene carácter algebraico en un sentido aún más fuerte y constructivo, puesto que es una *categoría algebraica* en el sentido de P. T. Johnstone (véase [11, Capítulo I, Sección 3.8 y Capítulo II, Teorema 1.2]), es decir, una categoría monádica sobre Set.

Antes de analizar de forma precisa ese comportamiento, recordemos cuál es la situación: por un lado Frm es una categoría formada por álgebras y homomorfismos, y, por otro lado, tenemos su dual Loc, cuyos objetos se pueden pensar como *espacios* generalizados y los morfismos como *aplicaciones continuas* generalizadas. Por tanto, en este contexto, esta idea se puede resumir de forma elegante:

La topología y el álgebra son duales entre sí.

Nótese que esta dualidad no es solo una forma de pensar o una idea intuitiva; es una dualidad categórica (a saber, $\mathsf{Loc} = \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}}$), y permite estudiar topología utilizando herramientas propias del álgebra.

Ahora, como la categoría Frm tiene carácter algebraico, se puede estudiar mediante resultados generales de la teoría de categorías, y se pueden deducir varias propiedades muy útiles (véase [11, Capítulo I, Sección 3.8]).

(A1) La categoría Frm tiene todos los productos y coproductos. Además, los productos de Frm (es decir, los coproductos de Loc) se pueden calcular en Set, es decir, no son más que los productos cartesianos habituales.

(A2) Los monomorfismos de Frm son exactamente los homomorfismos inyectivos.

(A3) Los isomorfismos de Frm son exactamente los homomorfismos biyectivos.

(A4) Los sublocales de un local L, es decir, subobjetos extremos de L en Loc, corresponden a clases de isomorfismo de epimorfismos extremos en la categoría dual Frm con dominio L. Estos epimorfismos extremos son precisamente homomorfismos sobreyectivos (i.e., *cocientes*) en Frm y, por tanto, al ser esta una categoría algebraica, están en correspondencia biyectiva con congruencias sobre L (una congruencia sobre una estructura algebraica X es una relación de equivalencia cerrada respecto a las operaciones de X). Así, los sublocales se pueden estudiar desde el punto de vista algebraico.

(A5) Para el lector interesado en teoría de categorías mencionaremos que en Frm *(epimorfismos extremos, monomorfismos)* es un sistema de factorización.

(A6) Los locales se pueden definir usando generadores y relaciones, como es habitual en álgebra. Este proceso es muy útil y no tiene análogos en la categoría Top. Más precisamente, dados un conjunto A de *generadores* y un conjunto R de *relaciones* entre ellos (es decir, igualdades formales del tipo $\bigvee_{i\in I}\bigwedge F_i = \bigvee_{j\in J}\bigwedge G_j$ con F_i, G_j subconjuntos finitos de A para todo $i \in I$, $j \in J$), existen un local $\mathsf{Frm}\langle A \mid R\rangle$ y una aplicación entre conjuntos $\eta_A \colon A \to \mathsf{Frm}\langle A \mid R\rangle$ de manera que, para todo local L y toda aplicación entre conjuntos $f\colon A \to L$ que respeta las relaciones de R, existe un único morfismo $\hat{f}\colon \mathsf{Frm}\langle A \mid R\rangle \to L$ en Frm que cumple $\hat{f}\circ\eta_A = f$.

(A7) En particular, en la categoría Frm, existen locales libres, en el sentido del álgebra cotidiana, es decir, tomando $\mathsf{Frm}\langle A \mid \varnothing\rangle$.

Veamos ejemplos importantes de la utilidad de las anteriores propiedades:

Ejemplo 4.2 (Construcción de productos locálicos, véase [19, Capítulo IV, Sección 4]). Recordemos la construcción de los productos de espacios topológicos. Dados (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, su producto en Top es $(X\times Y, \tau_{\mathrm{Tych}})$. Es más, la topología τ_{Tych} está generada por la subbase

$$\{U\times V \mid U\in\tau_X, V\in\tau_Y\}.$$

Esta claro que esos generadores verifican estas relaciones:

$$\begin{gathered}U\times\varnothing = \varnothing\times U = \varnothing,\\ \bigcup(U\times V_i) = U\times\bigcup V_i,\\ \bigcup(U_i\times V) = \bigcup U_i\times V,\\ (U\times V)\cap(U'\times V') = (U\cap U')\times(V\cap V').\end{gathered}$$

Ahora, teniendo en cuenta la motivación del párrafo anterior y usando el punto (A6) construiremos los productos en la categoría Loc (nótese que por el punto (A1) sabemos la existencia de los productos, pero no cómo construirlos). Sean locales L y M; entonces es lógico definir el local $L\otimes M$ generado por los símbolos $a\otimes b$ (donde $a\in L$ y $b\in M$) y satisfaciendo las siguientes relaciones:

(1) $\top_L\otimes\top_M = \top_{L\otimes M}$,
(2) $a\otimes\bot_M = \bot_L\otimes b = \bot_{L\otimes M}$,
(3) $\bigvee(a\otimes b_i) = a\otimes\bigvee b_i$,
(4) $\bigvee(a_i\otimes b) = (\bigvee a_i)\otimes b$,
(5) $(a\otimes b)\wedge(a'\otimes b') = (a\wedge a')\otimes(b\wedge b')$.

Ahora es fácil demostrar que $L\otimes M$ es, en realidad, el producto de L y M en Loc.

El ejemplo anterior muestra claramente las ventajas de poder definir o presentar los espacios mediante generadores y relaciones. Hay otras muchas aplicaciones interesantes que se pueden desarrollar utilizando esta técnica, siendo una de las más sorprendentes la construcción de los números reales.

Ejemplo 4.3 (Construcción de los números reales, véase [4]). Consideremos el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual. Es fácil probar que $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a<b\}$ es una base de dicho espacio topológico. Queremos definir el local de números reales, $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, tal que $\Omega(\mathbb{R},\tau_{us}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Para ello se usarán generadores y relaciones. Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ el local generado por los símbolos $\langle a,b\rangle$ para todo $a,b \in \mathbb{Q}$, y cumpliendo las siguientes relaciones:

(1') $\langle a,b\rangle \wedge \langle a',b'\rangle = \langle a \vee a', b \wedge b'\rangle$;

(2') $\langle a,b\rangle \vee \langle a',b'\rangle = \langle a,b'\rangle$, cuando $a \leq a' < b \leq b'$;

(3') $\langle a,b\rangle = \bigvee \{\langle a',b'\rangle \mid a < a' < b' < b\}$;

(4') $\top = \bigvee\{\langle a,b\rangle \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

(aunque estos generadores $\langle a,b\rangle$ sean meros símbolos formales, intuitivamente podemos pensar que son los intervalos abiertos (a,b)). Como los intervalos abiertos (a,b) satisfacen esas relaciones, existe un único homomorfismo sobreyectivo $\varphi\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \Omega(\mathbb{R},\tau_{us})$ en la categoría Frm que verifica $\varphi(\langle a,b\rangle) = (a,b)$. Si asumimos PET, se puede demostrar con algo más de trabajo que φ es inyectivo (véase [19, Capítulo XIV, Corolario 3.2.2]), luego un isomorfismo. Esto tiene ventajas y consecuencias:

(i) En matemática constructiva, ya hemos justificado que el contexto adecuado para hacer topología es la teoría de locales. Por tanto, el objeto a estudiar es $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, y no el espacio $(\mathbb{R},\tau_{us})$.

(ii) Aunque en la lógica clásica se tiene el isomorfismo $\Omega(\mathbb{R},\tau_{us}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R})$, esto no significa que la construcción de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sea redundante en un contexto donde se asuma PET. Es interesante por al menos las siguientes dos razones:

   (a) Hemos podido construir el retículo de la topología usual de los números reales formalmente, *partiendo tan solo de los números racionales*. Una vez hecho esto, no es difícil obtener los números reales ya que, bajo la notación de la demostración del Teorema 3.6, se puede demostrar que hay un homeomorfismo $\psi\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \to \Sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R})) = (X_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}, \tau_{X_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}})$. De hecho, partiendo del cuerpo ordenado de los números racionales, uno puede dotar de estructura de cuerpo ordenado a $\Sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}))$ de manera que la aplicación subyacente $\psi\colon \mathbb{R} \to X_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}$ es también un isomorfismo entre anillos ordenados (véase [4, Capítulo 4]). Así, podemos tomar $\Sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}))$ como definición de los números reales, pues su estructura topológica, ordenada y algebraica son las que deben ser. Nótese que hemos dado una construcción formal de los números reales utilizando herramientas de la topología sin puntos, del algebra universal y la teoría de categorías.

   (b) La representación de los números reales mediante generadores y relaciones es extremadamente útil. Así, para definir un homomorfismo $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \to L$, no hace falta definirlo en todo $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, basta definirlo sobre los generadores, y demostrar que respeta las relaciones.

4.2. Topología sin puntos y matemática constructiva

Uno de los aspectos más atractivos de la teoría de locales es el hecho de que las definiciones y resultados de este campo son intrínsecamente independientes al principio de exclusión del tercero, es decir, la mayoría son completamente constructivos. El principal ejemplo es el teorema de Tychonoff, el cual, como ya se ha mencionado en la Introducción, equivale al axioma de elección en topología clásica.

El teorema de Tychonoff tiene dos componentes principales: la compacidad y los productos. Analicémoslos brevemente en locales. Es fácil generalizar la compacidad a Loc: diremos que el local L es *compacto* si siempre que $\bigvee_{i\in I} a_i = \top$ existe un subconjunto $F \subseteq I$ finito tal que $\bigvee_{i\in F} a_i = \top$. Es evidente que un espacio topológico X es compacto en el sentido habitual si y solo si el local $\Omega(X)$ es compacto.

Los productos son un aspecto interesante (pero no trivial) de la categoría Loc. Como hemos visto en el punto (A1), la categoría Loc posee productos arbitrarios, y el Ejemplo 4.2 muestra cómo construirlos de forma muy instructiva (aunque, en realidad, no del todo explícita). Es conocido (véase [11, Capítulo II, Proposición 2.14]) que el funtor $\Omega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Loc}$ generalmente no preserva productos, es decir,

en general, se tiene $\Omega(X \times Y) \ncong \Omega(X) \otimes \Omega(Y)$

(aquí, se entiende que $X \times Y$ está equipado con la topología producto tradicional, y que la notación $\otimes$ representa el producto de la categoría Loc, como en Ejemplo 4.2).

La diferencia entre los productos en las categorías Top y Loc no debe interpretarse como una desventaja o imperfección. Es más, hay varios motivos para afirmar que el comportamiento de los productos en Loc es mejor, por ejemplo:

Teorema 4.4 (Tychonoff locálico). *Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ una familia de locales compactos. Entonces, el producto $\bigotimes_{i\in I} L_i$ es compacto y se puede demostrar constructivamente.*

P. T. Johnstone fue el primero en demostrar este teorema sin el axioma de elección (véase [10]), y posteriormente J. J. C. Vermeulen lo demostró de forma completamente constructiva, es decir, sin usar PET (véase [22]). En cualquier caso, debemos mencionar que la demostración locálica es mucho más intrincada que la clásica (debido en parte a la complejidad de los productos en Loc).

Asimismo, B. Banaschewski (véase [3]) demostró que la versión clásica del teorema se puede demostrar de forma sencilla a partir de la versión locálica; obviamente, utilizando el axioma de elección de manera adecuada. En este sentido, se puede argumentar que el resultado locálico es la verdadera versión del teorema, y el resultado de espacios topológicos puede verse como un resultado incidental. Esta idea se repite frecuentemente en la teoría de locales; el autor lo resumió en [3] de esta manera:

$$\begin{array}{c} \textit{argumento locálico constructivo} \\ + \\ \textit{forma adecuada del axioma de elección} \end{array} = \textit{resultado clásico para espacios.}$$

En consecuencia, los principios no constructivistas son solamente utensilios que sirven para *ver los puntos* de los espacios; y renunciando a los puntos, los resultados se pueden demostrar igualmente sin necesidad de esos principios (por ejemplo, el teorema de Tychonoff, la compactificación de Stone-Čech, el teorema de Heine-Borel…).

4.3. El Teorema de Isbell

Uno de los resultados más conocidos de la teoría de locales es el hecho de que cada local tiene un sublocal denso mínimo. Obviamente, no existe un resultado análogo en topología clásica (considérese, por ejemplo, la intersección vacía de los números racionales $\mathbb{Q}$ e irracionales $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$). Este teorema tiene diversas sorprendentes aplicaciones; en particular, el hecho de que la teoría de la medida locálica tiene un comportamiento muy conveniente (véase [21]).

Antes de enunciar el teorema, necesitamos definir con precisión el concepto de sublocal denso. Según el punto (A4) los sublocales de un local L están en correspondencia biyectiva con las clases de isomorfismo de homomorfismos sobreyectivos $f\colon L \to S$ en la categoría Frm. Como es de esperar, si (X, τ_X) es un espacio topológico, sus subespacios dan lugar a sublocales del correspondiente local $\Omega(X, \tau_X)$. En efecto, cada subconjunto $A \subseteq X$ determina un homomorfismo sobreyectivo $f_A\colon \Omega(X, \tau_X) \to \Omega(A, \tau_A)$ en Frm, dado por $f_A(U) = U \cap A$ para todo $U \in \tau_X$. Diremos que f_A es el *cociente inducido por el subespacio* (A, τ_A), y denotaremos por $s_A\colon \Omega(A, \tau_A) \to \Omega(X, \tau_X)$ el subobjeto extremo (o sublocal) correspondiente en Loc.

Observamos que A es un subespacio denso de X si y solo si $f_A(U) = \varnothing$ implica $U = \varnothing$ para todo $U \in \tau_X$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.5. Un sublocal de L se dice *denso* si el cociente $f\colon L \to S$ asociado en Frm verifica que, para todo $a \in L$, $f(a) = \bot_S$ implica $a = \bot_L$.

Recordemos que los sublocales de un local L están naturalmente ordenados (véanse la Nota 2.6 y la Subsección 3.2). Ahora, estamos en posición de poder enunciar el teorema de Isbell:

Teorema 4.6 (véase [8, Teorema 1.5]). *Todo local posee un sublocal denso mínimo.*

En particular, ambos $s_{\mathbb{Q}}$ y $s_{\mathbb{I}}$ contienen el sublocal denso mínimo de $\Omega(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Como cabe esperar, el sublocal denso mínimo es generalmente un local no espacial. Más precisamente, se puede demostrar que para todo espacio topológico Hausdorff (X, τ_X) sin puntos aislados, el sublocal denso mínimo de $\Omega(X, \tau_X)$ no contiene ningún punto generalizado y no es espacial (véase [13, Ejemplos C1.2.6(c)]).

4.4. Otras ventajas

Además de las mencionadas en las subsecciones anteriores, la topología locálica puede evitar otras patologías de la topología clásica. Finalizaremos enumerando brevemente algunas:

Subgrupos locálicos. Los grupos topológicos son estructuras matemáticas que combinan grupos abstractos y espacios topológicos. De esta forma, se espera cierta compatibilidad entre sus subestructuras. No obstante, aunque los subgrupos topológicos sean cerrados respecto al producto y a la inversión, puede que no sean topológicamente cerrados. Sin embargo, si generalizamos el concepto de grupo topológico a la categoría Loc, los subgrupos locálicos son cerrados. Este resultado se demostró por primera vez en el artículo [9] y posteriormente P. T. Johnstone dio una demostración completamente constructiva (véase [12]).

Conexión. La topología cofinita sobre los números naturales muestra que los espacios conexos y localmente conexos no son generalmente conexos por caminos (aunque en espacios métricos completos la afirmación es cierta). Formular el concepto de conexión en Loc es inmediato, y la conexión por caminos, aunque sea más costoso, se puede definir. Sorprendentemente, I. Moerdijk y G. C. Wraith demostraron en [17] que en Loc los locales conexos y localmente conexos son conexos por caminos.

Propiedad Lindelöf y productos. Recuérdese que un espacio topológico es Lindelöf cuando todo recubrimiento abierto puede ser refinado a un recubrimiento abierto numerable. En particular, todo espacio compacto es Lindelöf; pero, a diferencia de la compacidad, el producto de espacios topológicos Lindelöf puede no ser Lindelöf. Por ejemplo, la *recta de Sorfrengey* es Lindelöf, pero el *plano de Sorfrengey* no lo es. No obstante, los locales Lindelöf constituyen una subcategoría reflectiva, por lo que, según el Teorema 2.17, son cerrados respecto al producto (véase [16]).

Agradecimientos. Agradecemos al revisor la lectura y el detallado informe sobre el artículo. Sus sugerencias han mejorado notablemente la exposición y el contenido del mismo. Los autores agradecen además la ayuda del proyecto IT974-16 del Gobierno Vasco. Finalmente, el primer autor agradece la beca predoctoral PRE-2018-1-0375 del Gobierno Vasco y el proyecto Centre for Mathematics of the University of Coimbra-UIDB/00324/2020 del Gobierno de Portugal y el FCT/MCTES; y el segundo autor agradece el proyecto MTM2017-86802-P del Gobierno de España-FEDER y la beca predoctoral FPU17/04822 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Referencias

[1] J. Adámek, H. Herrlich y G. E. Strecker, *Abstract and concrete categories: The Joy of Cats*, Wiley, Nueva York, 1990. Disponible en `http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf`.

[2] S. Banach y A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fund. Math.* **6** (1924), 244–277.

[3] B. Banaschewski, On proving the Tychonoff product theorem, *Kyungpook Math. J.* **30** (1990), 65–73.

[4] B. Banaschewski, *The real numbers in pointfree topology*, Textos de matemática, Dpto. de Matemáticas de la Universidad de Coimbra, Coimbra, 1997.

[5] A. Bauer, Five stages of accepting constructive mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (2017), 481–498.

[6] R. Diaconescu, Axiom of choice and complementation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **51** (1975), 176–178.

[7] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, manuscrito sin publicar, 1986. Traducción de J. A. Navarro disponible en `http://matematicas.unex.es/~navarro/res/preludio.pdf`.

[8] J. R. Isbell, Atomless parts of spaces, *Math. Scand.* **31** (1972), 5–32.

[9] J. R. Isbell, I. Kříž y J. Rosický, *Remarks on localic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1348, pp. 154–172, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[10] P. T. Johnstone, Tychonoff's theorem without the axiom of choice, *Fund. Math.* **113** (1981), 21–35.

[11] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[12] P. T. Johnstone, A constructive "closed subgroup theorem" for localic groups and groupoids, *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **30** (1989), 3–23.

[13] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: a Topos Theory Compendium*, vol. 2, Oxford Logic Guides, vol. 44, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[14] J. L. Kelley, The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, *Fund. Math.* **37** (1950), 75–76.

[15] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer, Berlin, 1971.

[16] J. J. Madden y J. Vermeer, Lindelöf locales and realcompactness, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **99** (1986), 473–480.

[17] I. Moerdijk y G. C. Wraith, Connected locally connected toposes are path-connected, *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986), 849–859.

[18] G. Nöbeling, *Grundlagen der Analytischen Topologie*, vol. 72, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.

[19] J. Picado y A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, vol. 28, Springer, Basel, 2012.

[20] J. Picado, A. Pultr y A. Tozzi, Locales (Capítulo 2), *Categorical Foundations: Special Topics in Order, Topology, Algebra and Sheaf Theory*, pp. 49–101, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 97, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Disponible en `http://www.mat.uc.pt/~picado/publicat/Chapter2.pdf`.

[21] A. Simpson, Measure, randomness and sublocales, *Ann. Pure Appl. Logic* **163** (2012), 1642–1659.

[22] J. J. C. Vermeulen, *Constructive techniques in functional analysis*, Tesis doctoral, Universidad de Sussex, Sussex, 1987.

Igor Arrieta, CMUC, Universidade de Coimbra, y Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Correo electrónico: `iat@student.uc.pt`

Andoni Zozaya, Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Correo electrónico: `andoni.zozaya@ehu.eus`