En recuerdo de un maestro y amigo, Antonio Ambrosetti

por

David Arcoya e Ireneo Peral

Parafraseando al poeta, sentimos comunicar que el 20 de noviembre de 2020 en Venecia, su pueblo y el mío, se nos ha muerto como del rayo Antonio Ambrosetti, a quien tanto queríamos.

Enraizado en la mejor tradición de la matemática italiana, puede considerársele un dignísimo heredero de Ennio De Giorgi, Guido Stampacchia y Giovanni Prodi, por citar unos ejemplos de los que él mismo se reconocía como seguidor v gran admirador. Junto a Prodi, fundó la escuela italiana del Análisis no Lineal, o, como él prefería llamarlo, Análisis Funcional no Lineal. Desarrolló diversos métodos topológicos y variacionales, como la teoría de la bifurcación y la teoría de puntos críticos, con una visión geométrica muy profunda.



Antonio Ambrosetti nació en Bari el 25 de noviembre de 1944. Al poco de su nacimiento, la familia trasladó su domicilio a Venecia, donde transcurrió la mayor parte de su infancia y juventud. Allí conoció a Donnatella, su compañera infatigable durante toda su vida. De su unión salieron dos teoremas, Luca y Brunella, y de Brunella han salido cuatro lindos corolarios, Tommaso, Michele, Sara y Cristiano, que, sin desvelar ningún secreto, eran la debilidad del Nonno.

En 1966 obtuvo la Laurea en Matemática en la Università degli Studi di Padova. Entre 1968 y 1970 fue becario de la prestigiosa Scuola Normale Superiore di Pisa. A la sazón, no existía en Italia la formalidad de la Tesis Doctoral como inicio de la carrera investigadora. Por consejo de De Giorgi, estudia inglés y comienza sus primeros pasos en la investigación matemática bajo la dirección de Prodi, profesor de la vecina Università di Pisa. Ambrosetti siempre considerará a Prodi como su maestro, y ambos mantuvieron una magnífica relación de amistad y una profunda admiración mutua.

En el año 1970 Antonio Ambrosetti es nombrado profesor ayudante de la Scuola, y en el periodo entre 1970 y 1974 interactuó provechosamente con el efervescente ambiente pisano, disfrutando, entre otras actividades, de larguísimas e inacabables veladas en su propia casa en las que se abordan no sólo temas de matemáticas, sino también de filosofía, religión, etc. En particular, crea un fuerte vinculo con De Giorgi, Stampacchia y los numerosos matemáticos de todo el mundo que en esos años visitaron Pisa. Fue entonces cuando comenzó la fructífera colaboración con Paul H. Rabinowitz que se vería plasmada en la publicación de uno de los trabajos de matemáticas más famosos y más citados de la segunda mitad del siglo XX:

A. Ambrosetti y P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 349–381.



Antonio y Donnatella Ambrosetti.

De todos es conocido que Euler estableció las bases de lo que hoy llamamos Cálculo de Variaciones y, lo que es más importante, su relación con la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales, al observar que los problemas de cálculo de máximos o mínimos se reducen a resolver una ecuación diferencial asociada. Posteriormente, de una manera recíproca, Dirichlet de forma fallida y después Hilbert lograron probar la existencia de solución de ciertas ecuaciones diferenciales mediante lo que se daría en llamar el Método Directo del Cálculo de Variaciones. La existencia de solución se basaba en la prueba directa de la existencia de máximos o mínimos de ciertas funciones, llamadas usualmente funcionales (energías, longitudes, áreas, curvaturas, etc.) definidas, a su vez, sobre espacios de funciones. En el desarrollo de esta teoría aparecen los grandes analistas matemáticos: Euler, La-

grange, Legendre, Jacobi, Weierstrass, Riemann, Bolza, Hilbert, Tonelli, Serrin, De Giorgi, etc. A medida que la comunidad matemática fue abordando el estudio de nuevos problemas, se constató la necesidad de ir más allá de la búsqueda de máximo o de mínimo. Los problemas de Geometría Riemanniana (curvatura escalar, problema de Yamabe, problema de Nirenberg, etc.), o los provenientes del estudio de reacciones químicas, de la dinámica de poblaciones o de la economía, entre otros infinitos

campos de aplicación, proporcionan soluciones interesantes que, en muchos casos, no corresponden ni a máximos ni a mínimos (ni siquiera locales) de los funcionales asociados por Euler o Hilbert.

Es en este marco donde se encuadra el citado artículo conjunto de Ambrosetti y Rabinowitz en el que extendieron la teoría de Lusternik-Schnirelmann para funcionales no acotados. Como ejemplo simple de los resultados de este profundo trabajo, podemos destacar su famoso resultado para funcionales que presentan en un punto (por ejemplo, en u=0) un mínimo local estricto que no es global.

TEOREMA (Paso de la montaña). Sea $J:X\longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase \mathcal{C}^1 en un espacio de Banach reflexivo X que satisface

(H1) existen $r, \alpha > 0$ tales que $J(x) \ge \alpha + J(0)$ para todo $x \in X$ con |x| = r,

(H2) existe y_0 con $||y_0|| > r$ tal que $J(y_0) \le J(0)$.

Si, para $\Gamma = \{ \gamma : [0,1] \to X : \gamma \text{ continua, } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = y_0 \}, \text{ denotatos}$

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

y suponemos adicionalmente que J verifica la condición local de Palais-Smale,

(H3) cualquier sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset X$ tal que

(a)
$$\{J(x_k)\} \to c \ y$$

(b)
$$\{J'(x_k)\} \to 0$$
 en el espacio dual X^*

 $posee \ una \ subsucesi\'on \ \{x_{k_j}\} \ convergente \ en \ X,$

entonces c es un valor crítico de J; es decir, existe $x \in X$ tal que J(x) = c y J'(x) = 0.

Merece la pena señalar, en primer lugar, que este resultado se enlaza con las teorías de min-max de Von Neumann. En segundo lugar, hay que destacar que posteriormente, considerando el funcional J como la altura sobre el nivel del mar, Louis Nirenberg interpretó la hipótesis geométrica (H1) del teorema como la representación de un valle rodeado de una cadena montañosa. Así, el valor c se relaciona con la búsqueda del camino que une 0 con y_0 en el que subimos la menor altura posible, el puerto de montaña. El teorema del paso de la montaña es el nombre que ha quedado desde entonces para el resultado.

El lector puede vislumbrar la excepcionalidad del teorema del paso de la montaña si observa que, ya en el caso de dimensión finita superior a uno y para funciones que no han de poseer ningún tipo de simetría, proporciona la existencia de puntos críticos no cero que no tienen que corresponder con ningún máximo ni mínimo relativo. Éste y otros muchos resultados del trabajo referido sirvieron, y sirven aún hoy, como base para numerosísimos trabajos posteriores sobre la existencia y multiplicidad de puntos críticos generales en las más variadas ramas de la Matemática y la Física. Por ejemplo, en el problema de la curvatura escalar o problema de Nirenberg, para modelos de crecimiento epitaxial, entre otros.

También de esta época es el trabajo conjunto con su maestro Prodi sobre la inversión global de aplicaciones diferenciables entre espacios de Banach:

A. Ambrosetti y G. Prodi, On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **93** (1972), 231–246.

Este resultado generó un grandísimo impacto en la comunidad matemática dedicada al estudio de ecuaciones diferenciales, hasta el punto de que hoy se suele leer con frecuencia la frase problemas de tipo Ambrosetti-Prodi para referirse a una amplia gama de problemas relacionados con los resultados obtenidos por ambos.

Supongamos que tenemos espacios de Banach X e Y y una función $F: X \longrightarrow Y$, y que, dado un dato $y \in Y$, planteamos la ecuación consistente en la búsqueda de los $x \in X$ tales que

$$F(x) = y$$
.

Cuando la ecuación es un $modelo\ lineal$, o, lo que es lo mismo, la aplicación F es lineal, y la dimensión es finita, el problema es muy sencillo y es parte del contenido del programa de Matemáticas que nuestros estudiantes superan para ingresar en la universidad. Cuando la dimensión no es finita o el problema no es lineal, la situación se complica considerablemente. Si concurren ambas circunstancias a la vez, se convierte en el caso más difícil y más interesante, ya que suele aparecer en las aplicaciones para resolver problemas del mundo real.

Para el caso no lineal, cuando se conoce la solución particular en un punto, $x_0 = F^{-1}(y_0)$, los resultados de carácter local, es decir, la búsqueda de la inversa en entornos de x_0 en X y de y_0 en Y, no son triviales, pero hay desarrollada una teoría clásica que es parte de la cultura matemática básica. La gran dificultad en los modelos no lineales respecto a los lineales es la obtención de la globalidad. No obstante, hay resultados de inversión global para funciones no lineales; por ejemplo, los debidos a Hadamard en el caso de dimensión finita, y a Caccioppoli y Levy para espacios de Banach generales.

En este punto, la aportación mencionada de Ambrosetti y Prodi es la resolución de ecuaciones cuando no hay unicidad, es decir, cuando no hay inversa en el sentido anterior (es lo que los autores llaman inversión global con singularidades). Además, tratan de contar el número exacto de las soluciones que hay para cada dato y, clasificando así el espacio Y en partes de acuerdo al número de soluciones. Merece la pena incidir en este cálculo exacto del número de soluciones pues son muchos los autores posteriores que únicamente determinan una cota inferior para dicho número.

Consideremos el conjunto Σ de los puntos $x \in X$ en los cuales F'(x) no es invertible. Se supone que Σ es conexo y además que F es propia y regular en el sentido de que F tiene segundas derivadas continuas. Por último, se supone que todo punto de Σ es un punto singular ordinario, es decir, las soluciones de F'(x)(z) = 0 son exactamente los múltiplos de un elemento dado ϕ y, además que, para tal ϕ , se verifica que $F''(x)(\phi,\phi)$ no está en el rango de F'(x). Esta última condición implica que existe una única solución de F(x) = y para cada $y \in F(\Sigma)$. Con estas hipótesis, Ambrosetti y Prodi probaron que el espacio Y se puede clasificar en tres partes

$$Y = Y_0 \cup F(\Sigma) \cup Y_2$$



Lectura de tesis doctoral de A. Zertiti, Granada, 4 de diciembre de 1996. De izquierda a derecha, M. de Guzmán, A. Ambrosetti, D. Arcoya, A. Zertiti, P. Drábek, A. Cañada, J. L. Gámez e I. Peral.

con Y_0 e Y_2 partes abiertas y conexas de forma que la ecuación

$$F(x) = y \text{ tiene exactamente } \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ soluciones} \\ 1 \text{ solución} \\ 2 \text{ soluciones} \end{array} \right\} \text{ si, respectivamente, } \left\{ \begin{array}{l} y \in Y_0 \\ y \in F(\Sigma) \\ y \in Y_2. \end{array} \right.$$

En 1975, Antonio Ambrosetti se convierte en *Professore Ordinario de Analisi Matematica*, ocupando cátedras primero en la Università di Bologna, después en la Università degli Studi di Ferrara, y a partir de 1978 en la Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, S.I.S.S.A. (Trieste), siendo uno de los tres primeros profesores de este organismo. En estos primeros años en la S.I.S.S.A., el papel de Antonio Ambrosetti fue decisivo para proporcionar a esta floreciente institución el carácter de excelencia que la ha distinguido. Tras una breve estancia en la Università Ca' Foscari Venezia —donde fue visitado por Antonio Cañada, en aquel entonces un joven matemático de la Universidad de Granada—, su probada calidad científica sirve para que la Scuola Normale di Pisa reclute en 1986 a su antiguo becario y profesor ayudante, esta vez como *Professore Ordinario de Analisi Matematica de la SNS di Pisa*.

Justo al poco de tomar posesión de este puesto, en julio de 1986 visita por primera vez el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada. Su ayuda fue inestimable para el desarrollo del incipiente grupo de Análisis no Lineal que en aquel tiempo tan solo contaba con el mencionado profesor Cañada y su doctorando,

David Arcoya. Desde el principio, su hospitalidad, compromiso y disponibilidad fue total, recibiendo, y financiando en algún caso, sucesivas estancias amplias de predoc y postdoc de cada uno de los jóvenes matemáticos que se fueron incorporando al grupo granadino: David Arcoya, José Luis Gámez, Salvador Villegas y David Ruiz. Hemos de reconocer que su inestimable guía y supervisión en las mutuas visitas mantenidas a lo largo del tiempo, tanto de él a Granada como de los miembros del grupo a Italia, es en gran medida responsable de la consolidación de este grupo granadino.

Asimismo, tras un contacto inicial de Ireneo Peral con Antonio Ambrosetti en una reunión de trabajo organizada en Roma en 1991 por nuestro común amigo Lucio Boccardo, y en la que tuvimos oportunidad de hablar de matemáticas y de tomar magnífica pasta, Antonio Ambrosetti realizó una primera estancia como Profesor Visitante en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM) en otoño de 1994, que tuvo continuación el año siguiente con dos visitas cortas para planificar el curso Recent trends in Elliptic Equations, que tuvo lugar en julio de 1996 en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander. La siguiente visita a la UAM de Antonio Ambrosetti, de mayor duración, se produjo con una Cátedra de la Fundación BBV en la primavera de 1998, justo en el periodo en el que se celebró la final de la Liga de Campeones jugada por el Real Madrid ante la squadra que tanto amaba Antonio: la Juventus de Turín. Siempre recordaremos su humanidad en aquel lamento ante la afición madridista celebrando el título en Cibeles, delante de su hotel. Más tarde, en el año 2001, fue Profesor Visitante Iberdrola en Ciencia y Tecnología. La colaboración con el Departamento de Matemáticas de la UAM comenzó con Ireneo Peral y Jesús García Azorero, se prolongó más tarde con Eduardo Colorado, y sin duda Antonio Ambrosetti influyó también en otros doctorandos y doctores del área de las Ecuaciones en Derivadas Parciales de dicha universidad.

Antonio Ambrosetti ejerció su magisterio durante doce años en la Scuola contribuyendo también allí a la excelencia y el reconocimiento internacional de la escuela italiana de Análisis no Lineal. La originalidad de sus enfoques ha influido en algunos casos en la creación de nuevas disciplinas. Así, a partir de sus estudios de los sistemas hamiltonianos a través de la teoría de los puntos críticos dio la topología simpléctica sus primeros pasos. En 1998, por motivos de índole familiar —Antonio siempre cuidó y valoró profundamente la familia—, regresa de nuevo a la S.I.S.S.A., cuyas actividades siempre había seguido de cerca. Allí profundiza sus resultados en la Teoría de Perturbaciones, que parte de trabajos clásicos de Poincaré y Lyapunov y permite reducir problemas en infinitas dimensiones a problemas de dimensión finita, es decir, problemas muy complicados a problemas razonablemente complicados. Por ejemplo, si se supone en el problema de curvatura escalar mencionado anteriormente que la curvatura prescrita es $S = 1 + \varepsilon K(x)$, para $\varepsilon > 0$ pequeño y K que verifica algunas hipótesis de forma y regularidad, se obtienen soluciones próximas a las conocidas para la ecuación con $\varepsilon = 0$. Este método permite dar solución a la dificultad de la llamada falta de compacidad del método variacional y descubrir soluciones que no son ni máximos ni mínimos (y, a veces, ni siquiera puntos críticos del tipo paso de la monta $\tilde{n}a$).



Santillana del Mar, julio de 1996. De izquierda a derecha, Magdalena Walias, Ireneo Peral, Djairo Guedes de Figueiredo, Donnatella y Antonio Ambrosetti, Anna y Michael Struwe, y James Serrin.

También aplicó estos resultados al estudio de soluciones semiclásicas de la ecuación de Schrödinger. A título de ejemplo, Ambrosetti, Malchiodi y Ni probaron que si $V \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ está acotada, satisface $\inf\{V(|x|): x \in \mathbb{R}^n\} > 0$, y p > 1, entonces la ecuación de Schrödinger

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(|x|)u = u^p, \quad u > 0$$

tiene soluciones que se concentran en esferas. Caracterizaron además dónde se produce la concentración en términos de las propiedades de V. Este tipo de problema aparece también transformando modelos de morfogénesis propuestos, entre otros, por Gierer y Meinhardt.

Antonio permanecería en la S.I.S.S.A. hasta su jubilación en diciembre de 2012. Tras ésta, proseguirá incansable su labor investigadora en la medida que se lo permita su débil salud, publicando numerosos libros y varios artículos de investigación. Su tesón fue constante durante toda su vida, como muestra el hecho de que la muerte le sorprendió con una revisión prevista de su último libro conjunto con Shair Ahmad y un trabajo de investigación más en colaboración con David Arcoya sobre la deducción de un modelo relativista de un péndulo.

A lo largo de su vida académica recibió numerosos premios y reconocimientos. En 1985 obtiene el Premio Caccioppoli y en 1988 es elegido Miembro Correspondiente de la Accademia Nazionale dei Lincei, institución fundada en el año 1603 y que tuvo como miembro, desde 1611 hasta su muerte, a Galileo Galilei. Fue también miembro del Istituto Veneto di Lettere, Scienze ed Arti, de la Accademia delle Scienze





Doctorado Honoris Causa, Universidad Autónoma de Madrid, junio de 2005. De izquierda a derecha y de delante a atrás: en la imagen de la izquierda, I. Peral, A. Ambrosetti, J. García Azorero y F. Soria; en la de la derecha, M. Walias, D. Ambrosetti, A. Ambrosetti, J. García Azorero, J. L. Gámez, D. Arcoya y D. Ruiz.

di Torino y de la European Academy of Science. En 1991 la Societé Mathèmatique de France le concede la *Chaire Lagrange*, que disfrutó en la Université Paris IX (Dauphine). En 2003 es elegido Socio Nazionale dell'Accademia Nazionale dei Lincei. En 2005 es investido Doctor Honoris Causa por la Universidad Autónoma de Madrid, hecho que le produjo una enorme satisfacción porque ¡al fin era Doctor!, y así bromeaba con él nuestra común amiga la profesora Patrizia Pucci.

En el mismo año recibe el premio Ferran Sunyer i Balaguer por la monografía *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, escrita en colaboración con Andrea Malchiodi. En 2007 obtiene el premio Amerio.

Fue conferenciante invitado en numerosos eventos del máximo nivel. Hay que destacar, en especial, la conferencia que impartió en el International Congress of Mathematicians en Varsovia (Polonia) en 1983, las conferencias plenarias de los congresos Equadiff de 1982, 1995, 1999 y 2001, así como el Congresso Nazionale dell'UMI de 1987.

Antonio Ambrosetti publicó numerosos trabajos de investigación de gran impacto en la comunidad matemática. Además de con los autores mencionados anteriormente, en estos trabajos colaboró tanto con sus numerosos alumnos (italianos y extranjeros), como con otros matemáticos ya consagrados de la talla de H. Amann, H. Brezis, I. Ekeland, S. Fučik, P. Hess, W. M. Ni, M. Struwe, R. E. L. Turner... Permítasenos seguir su ejemplo y, al igual que él hacía en su curriculum vitae, resumir toda esta actividad en la lista de libros escritos por Antonio:

- Giovanni Prodi y Antonio Ambrosetti, Analisi non lineare, Scuola Normale Superiore di Pisa, 1973.
- Antonio Ambrosetti y Vittorio Coti Zelati, Periodic solutions of singular Lagrangian systems, Birkhäuser, 1993.
- Antonio Ambrosetti y Giovanni Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.

■ Antonio Ambrosetti y K. C. Chang, *Variational Methods in Nonlinear Analysis*, Gordon and Breach Publishers, 1995.

- Antonio Ambrosetti y Andrea Malchiodi, Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on \mathbb{R}^n , Birkhäuser, 2006.
- Antonio Ambrosetti y Andrea Malchiodi, Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 104, Cambridge University Press, 2007.
- Antonio Ambrosetti, La matematica e l'esistenza di Dio, Lindau, 2009.
- Antonio Ambrosetti, Il fascino della matematica: Un viaggio attraverso i teoremi, Bollati Boringhieri, 2009 (que fue uno de los cinco finalistas del Premio Galileo).
- Antonio Ambrosetti y David Arcoya, An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems, Birkhäuser, 2011.
- Antonio Ambrosetti, Appunti sulle Equazioni Differenziali Ordinarie, Springer, 2012.
- Shair Ahmad y Antonio Ambrosetti, A Textbook on Ordinary Differential Equations, Springer, 2014.
- Shair Ahmad y Antonio Ambrosetti, Differential Equations: A first course on ODE and a brief introduction to PDE, De Gruyter, 2019.

Fue director de al menos¹ 28 doctorandos, fundador de la revista matemática Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA) y editor de numerosas revistas internacionales de prestigio reconocido, entre ellas la Revista Matemática Iberoamericana.

La gama de áreas de interés de Antonio Ambrosetti fue muy amplia. Con un excelso gusto por la buena matemática, se interesó por el análisis profundo de métodos variacionales y topológicos, estableciendo resultados generales y abstractos, pero ocupándose simultáneamente en su trabajo de investigación de aplicaciones a los Sistemas Dinámicos, Teoría del Caos, problemas de la Física Matemática y de la Mecánica Clásica, estudio de vórtices en modelos de fluidos, ecuaciones de tipo Schrödinger, Óptica no Lineal, problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales provenientes de la Geometría Riemanniana y de otras áreas, métodos de perturbaciones, existencia de concentraciones en modelos originados en Biología, estados estacionarios de pequeñas oscilaciones transversales de una cuerda elástica sujetada y no homogénea (ecuación de Kirchhoff), el péndulo relativista, etc.

Antonio Ambrosetti fue y será unánimemente considerado como uno de los mayores exponentes del Análisis no Lineal. Una de las características más sobresalientes de su excelente aportación científica es el profundo impacto que han tenido sus resultados en este campo, así como las numerosas aplicaciones de los mismos a la resolución de diversos problemas.

¹No es fácil establecer la cifra exacta porque no todos leyeron una tesis doctoral ya que, como se ha indicado anteriormente, en Italia no era necesario presentarla para iniciar la carrera investigadora.

En conclusión, Antonio fue gran maestro, profundo matemático y hombre de excepcional rectitud moral con fuertes convicciones cristianas.

Era gran conocedor de las personas, entreviendo inmediatamente la naturaleza de cualquiera que tuviera ante sí. Como hombre altamente inteligente, tenía la sencillez de los grandes. Así, poseía un gran corazón que mostraba con su disposición permanente para ayudar con extraordinaria generosidad a quien lo requiriera. Damos fe de que trabajar con Antonio era una experiencia excelente, indudablemente por lo científico, pero no menos por el aspecto humano, con su sentido del humor inagotable, su energía, y a la vez con su placentera forma de entender el duro oficio de investigar. Trabajar al lado de Antonio siempre fue una tarea fascinante de la que extrajimos continuas enseñanzas de su magisterio matemático y humano. No podemos más que agradecerle su leal amistad, que supo que era correspondida de corazón por nuestra parte. Deja un vacío enorme en su familia, en el mundo científico y entre sus innumerables amigos, ante el que no nos queda más que concluir otra vez con unos versos del poeta que ha abierto esta nota:

A las aladas almas de las rosas del almendro de nata te requiero, que tenemos que hablar de muchas cosas, compañero del alma, compañero.

Extracto de «Elegía a Ramón Sijé» (Miguel Hernández).

DAVID ARCOYA, DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE GRANADA Correo electrónico: darcoya@ugr.es

IRENEO PERAL, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID Correo electrónico: ireneo.peral@uam.es