Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2021.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 408 (Corrección). *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioclescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1([0,1])$ verificando que $|f'(x)| \leq 1$ para $x \in [0,1]$ y

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Probar que

$$\left| \int_0^1 x^n f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{n+2}, \qquad n \geq 1.$$

Problema 409. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Dados los radios a y b y la distancia entre los centros, c, de dos circunferencias intersecantes, encontrar el área del cuadrilátero formado por las rectas tangentes en los puntos de intersección de ambas.

PROBLEMA 410. *Propuesto por Pedro A. Pizá, San Juan, Puerto Rico.*

Para N y k enteros positivos, definimos $\left\{\sum^m [N]^k\right\}_{m\geq 0}$ mediante la relación

$$\sum^m [N]^k = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum^{m-1} [n]^k\right), \qquad m \geq 1,$$

siendo $\sum^0 [N]^k = N^k$. Probar que

$$\sum^m [N]^k = \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k+m-\ell}{k+m} P(k,\ell),$$

donde los números $P(r,s)$, para $r,s \geq 1$, están dados por la relación de recurrencia

$$P(r,s) = sP(r-1,s) + (r+1-s)P(r-1,s-1), \qquad r,s > 1,$$

con $P(1,1) = 1$.

PROBLEMA 411. *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Probar que en todo triángulo ABC, si las longitudes de los lados BC, CA y AB son, respectivamente, a, b y c, las longitudes de las alturas desde los vértices A, B y C son, respectivamente, h_a, h_b y h_c, y el área es F, se cumple la desigualdad

$$a^4(h_b^2 + h_c^2) + b^4(h_c^2 + h_a^2) + c^4(h_a^2 + h_b^2) \geq 32\sqrt{3}\, F.$$

PROBLEMA 412. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia.*

Sea

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$$

la función dilogaritmo. Probar que

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2} i\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2} i\right)\right) = \frac{11}{144}\pi^2.$$

PROBLEMA 413. *Propuesto por George Stoica, Saint John, New Brunswick, Canada.*

Probar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt\right) = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\log \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = -\sqrt{2\pi}.$$

Problema 414. *Propuesto por Lawrence Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tgh}(x/2))}{\operatorname{senh} x}\, dx = G,$$

donde $G = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ es la constante de Catalan.

Problema 415. *Propuesto por Vasile Cirtoaje y Leonard Giugiuc, Rumanía.*

Consideramos el conjunto

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 3,\ ab + bc + ca \geq 0,\ a, b, c \neq -1\}.$$

Determinar las soluciones en el conjunto S de la ecuación

$$\frac{a-1}{b+1} + \frac{b-1}{c+1} + \frac{c-1}{a+1} = 0.$$

Problema 416. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $c > a > 0$ y $b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Determinar todas las funciones continuas $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ tales que

$$\log(ax + b) \int_0^{cx} f(t)\, dt = \log(cx + b) \int_0^{ax} f(t)\, dt.$$

Soluciones

Nota. Por un descuido involuntario, entre las soluciones correctas recibidas al Problema 380 olvidamos citar la enviada por Brian Bradie. Asimismo, entre las soluciones al Problema 384 omitimos las remitidas por Brian Bradie y Pablo Fernández. Pedimos disculpas por ello.

Problema 385. *Propuesto por Pablo Fernández Refolio, Madrid.*

Probar la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n}^2}{2^{8n}(2n+1)^2} = \frac{8}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}(\Gamma(3/4))^2,$$

donde Γ es la función Gamma de Euler.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Si $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ son los números de Catalan, es conocido que

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \qquad |x| \le 1/4.$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^{2n}} x^n = \frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x}, \qquad |x| \le 1,$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n}}{2^{4n}(2n+1)} x^{2n} = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} - \frac{1-\sqrt{1+x}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \quad |x| \le 1.$$

Ahora, por la identidad de Parseval,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n}^2}{2^{8n}(2n+1)^2} &= \int_{-1/2}^{1/2} \left|\sqrt{1+e^{2\pi i t}} - \sqrt{1-e^{2\pi i t}}\right|^2 dt \\
&= 2\int_0^{1/2} \left|\sqrt{1+e^{2\pi i t}} - \sqrt{1-e^{2\pi i t}}\right|^2 dt \\
&= 2\int_0^{1/2} \Big(\sqrt{2(1+\cos(2\pi t))} + \sqrt{2(1-\cos(2\pi t))} \\
&\qquad -\sqrt{\operatorname{sen}(2\pi t)}(\sqrt{2i}+\sqrt{-2i})\Big)\, dt \\
&= 2\int_0^{1/2} \Big(2(\cos(\pi t)+\operatorname{sen}(\pi t)) - \sqrt{\operatorname{sen}(2\pi t)}(\sqrt{2i}+\sqrt{-2i})\Big)\, dt \\
&= \frac{8}{\pi} - 4\int_0^{1/2} \sqrt{\operatorname{sen}(2\pi t)}\, dt.
\end{aligned}$$

Para concluir evaluaremos la última integral. Usando la expresión trigonométrica para la función Beta de Euler y la fórmula de los complementos para la función Gamma, deducimos que

$$\begin{aligned}
4\int_0^{1/2} \sqrt{\operatorname{sen}(2\pi t)}\, dt = 2\int_0^1 \sqrt{\operatorname{sen}(\pi t)}\, dt &= 4\int_0^{1/2} \sqrt{\operatorname{sen}(\pi t)}\, dt \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt = \frac{2}{\pi} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \\
&= \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

También resuelto por L. Glasser, Kee-Wai Lau, B. Salgueiro, S. Stewart y el proponente.

Problema 386. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Se lanza sucesivamente una moneda equilibrada. Diremos que ha habido una *repetición* cuando el resultado de un lanzamiento sea el mismo que el del lanzamiento anterior. Hallar:

a) La probabilidad de que en n lanzamientos haya exactamente r repeticiones ($r \leq n-1$).

b) El número esperado de repeticiones en n lanzamientos.

c) La probabilidad de que en n lanzamientos haya exactamente a repeticiones de «cara» y b repeticiones de «cruz».

Solución a los apartados a) y b) enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

a) La probabilidad de que haya una *repetición* justo después de la primera tirada, es decir, la probabilidad de que el resultado del segundo lanzamiento sea el mismo que el del primer lanzamiento, es $1/2$. Para $k > 1$, que haya una *repetición en la posición* k, con lo que queremos decir que el resultado del $(k+1)$-ésimo lanzamiento sea el mismo que el del k-ésimo lanzamiento, es un suceso independiente de que haya habido o no repeticiones en las posiciones anteriores. De manera que si la moneda se lanza en total n veces, el número X de *repeticiones* tiene una distribución binomial donde el número N de ensayos es $n-1$ y la probabilidad de éxito p, la misma para cada ensayo, es $1/2$. Se tiene

$$p(X=r) = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r} = \binom{n-1}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad 0 \leq r \leq n-1.$$

b) De acuerdo con el apartado anterior, y como es bien conocido,

$$E(X) = Np = \frac{n-1}{2}.$$

Solución al apartado c) enviada por el proponente.

c) Llamemos *bloque* a cada conjunto maximal de resultados consecutivos iguales, que puede estar formado por uno o más resultados, en la cadena de n lanzamientos. Denotemos por (C) un bloque de caras y por $(+)$ un bloque de cruces.

Si no hay ninguna repetición tendremos n bloques, cada uno de ellos formado por un solo elemento. Por cada repetición existente, el número de bloques disminuirá en una unidad. Si hay exactamente a repeticiones de «cara» y b repeticiones de «cruz», tendremos $n-a-b$ bloques que, de acuerdo con su definición, se presentarán alternados, o bien $(C)(+)(C)\cdots$, o bien $(+)(C)(+)\cdots$ (ya que no es posible, por ejemplo, $(+)(+)\cdots$).

Si $n-a-b$ **es par**, $n-a-b=2s$, entonces s de los bloques serán (C) y la otra mitad serán $(+)$. Imaginemos s bloques con una cara en cada uno de ellos. Para conseguir a repeticiones de cara tenemos que repartir a caras adicionales en estos s bloques, cosa que se puede hacer (combinaciones con repetición de s elementos tomados de a en a) de $\binom{a+s-1}{a}$ maneras distintas. Similarmente, deberemos repartir b cruces adicionales entre los s bloques (+), cosa que se puede hacer de $\binom{b+s-1}{b}$ maneras distintas.

Esto nos da un total de $2\binom{a+s-1}{a}\binom{b+s-1}{b}$ casos favorables. Como los casos posibles de cadenas de n lanzamientos son 2^n, la probabilidad requerida es

$$p(n,a,b) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{a+s-1}{a}\binom{b+s-1}{b}.$$

Si $n-a-b$ **es impar**, $n-a-b = 2s+1$, entonces o bien $s+1$ de los bloques son (C) y s bloques son (+) o, al contrario, s de los bloques son (C) y $s+1$ bloques son (+). Con el mismo razonamiento de antes tendremos, en el primer supuesto, un número $\binom{a+s}{a}\binom{b+s-1}{b}$ de «casos favorables», y en el segundo supuesto, un número $\binom{a+s-1}{a}\binom{b+s}{b}$ de casos favorables. La probabilidad requerida ahora es

$$p(n,a,b) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{a+s}{a}\binom{b+s-1}{b} + \binom{a+s-1}{a}\binom{b+s}{b}\right).$$

No se han recibido otras soluciones.

NOTA. En una diferente y no breve solución del apartado c), A. Stadler obtiene, partiendo de fórmulas recursivas, que la probabilidad $p(n,a,b)$ es el coeficiente de $x^a y^b$ en la expresión polinómica generatriz

$$\frac{1}{4^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n-1}{2k}(4+(x-y)^2)^k(x+y)^{n-2k-1}\right.$$
$$\left.+2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\binom{n-1}{2k+1}(4+(x-y)^2)^k(x+y)^{n-2k-2}\right).$$

De aquí resultan, por ejemplo, $p(7,2,3) = 1/2^6$ y $p(8,2,3) = 7/2^8$, resultados coincidentes con los que dan las expresiones cerradas de J. Nadal.

PROBLEMA 387. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $\alpha > 0$ un número real. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|^\alpha}{e^{(n+1)x} - e^{nx}}\, dx.$$

Solución enviada por Antonio R. Martínez Fernández, I. E. S. Ruiz de Alda, San Javier, Murcia.

Probaremos que el valor del límite solicitado es $\Gamma(\alpha)$.

Denotaremos por I_n la sucesión cuyo límite queremos evaluar. Por el teorema del valor medio de Lagrange, existe un valor $\theta_x \in (0,1)$ tal que $e^{(n+1)x} - e^{nx} = xe^{(n+\theta_x)x}$. Como $|\operatorname{sen} x| \leq x$, para todo $x \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} I_n &\leq n^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(n+\theta_x)x}\,dx \leq n \int_0^\infty (nx)^{\alpha-1} e^{-nx}\,dx \\ &= \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\,du = \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_n &= n^\alpha \int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|^\alpha}{x} e^{-(n+\theta_x)x}\,dx \\ &\geq n \int_0^\infty (nx)^{\alpha-1} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|^\alpha e^{-(n+1)x}\,dx = \int_0^\infty \phi_n(u)\,du, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_n(u) = u^{\alpha-1} e^{-(n+1)u/n} \left|\frac{\operatorname{sen}(u/n)}{u/n}\right|^\alpha.$$

Como ϕ_n es una función uniformemente acotada por una función integrable (en concreto por $u^{\alpha-1}e^{-u}$), podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para tener que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \phi_n(u)\,du = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\,du = \Gamma(\alpha).$$

Finalmente, aplicando la regla del sandwich se concluye el resultado.

También resuelto por Kee-Wai Lau, A. Stadler y los proponentes.

Problema 388. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

En un triángulo ABC sean a, b y c, respectivamente, las longitudes de los lados BC, CA y AB, s su semiperímetro y r el radio de su circunferencia inscrita. Probar que

$$\frac{(3a+b)(3b+c)(3c+a)}{\sqrt{(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3}} \leq \frac{1}{r\sqrt{s}}.$$

Solución enviada por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.

En primer lugar, es una comprobación inmediata ver que la desigualdad

$$\frac{3a+b}{\sqrt{(a+b)^3}} \leq \sqrt{\frac{2}{b}} \tag{1}$$

equivale a

$$a^2b \leq \frac{2a^3+b^3}{3},$$

que es la desigualdad que se cumple entre las medias geométrica y aritmética de los tres números positivos a^3, a^3 y b^3.

De (1) se obtiene

$$\prod_{\text{cíclico}} \frac{3a+b}{\sqrt{(a+b)^3}} \leq \sqrt{\frac{8}{abc}}$$

y para terminar basta probar que se cumple la desigualdad

$$\frac{8}{abc} \leq \frac{1}{r^2s}. \tag{2}$$

Pero, si se denota por F el área del triángulo ABC y por R su circunradio, se tiene $F = rs = \frac{abc}{4R}$, y así (2) equivale a $8rF \leq 4RF$, es decir, a $2r \leq R$, que es la conocida desigualdad de Euler (véase, por ejemplo, [1, pág. 48]), en la que la igualdad se alcanza si y sólo si el triángulo es equilátero.

Solución enviada por Kevin Soto Palacios, Huarmey, Perú.

Es bien conocido que $rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, de donde resulta $r\sqrt{s} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$. Usando esto vemos que la desigualdad propuesta es equivalente a

$$\left(1+\frac{2a}{a+b}\right)\left(1+\frac{2b}{b+c}\right)\left(1+\frac{2c}{c+a}\right) \leq \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(s-a)(s-b)(s-c)}}. \tag{3}$$

Usando sucesivamente la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética y la de Cauchy-Schwartz se tiene

$$\begin{aligned} \prod_{\text{cíclico}} \left(1+\frac{2a}{a+b}\right) &\leq \prod_{\text{cíclico}} \left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \qquad (4) \\ &\leq \prod_{\text{cíclico}} \sqrt{2\left(1+\frac{a}{b}\right)} = \sqrt{\frac{8(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}. \end{aligned}$$

Por otra parte es conocido que (ver, por ejemplo, la desigualdad 1.3 en [1, pág. 12])

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c). \tag{5}$$

Usando (5), de (4) ya se obtiene (3).

REFERENCIAS

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Pub., Groningen, 1969.

También resuelto por C. Beade, Kee-Wai Lau, J. Nadal, B. Salgueiro, A. Stadler, D. Văcaru, T. Zvonaru y el proponente.

Problema 389. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño, La Rioja.*

Consideramos las sucesiones $c_1 = \sqrt{2}/2$ y $2c_{n+1}^2 = 1 + c_n$ para $n \geq 1$, $p_0 = 1$ y $p_n = c_1 \cdot c_2 \cdots c_n$ para $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{\pi}{2p_n} < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^n} - t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\left(\frac{1}{2^n} - t\right) t} < \frac{1}{p_{n+1}^2},$$

para $0 < t < 1/2^n$ y $n \geq 0$.

Solución enviada por Brian Bradie, Christopher Newport University, Newport News, Virginia, EE.UU.

Asumimos que c_{n+1} es la raíz positiva de la ecuación $2c_{n+1}^2 = 1+c_n$. Mediante un sencillo procedimiento de inducción, usando identidades trigonométricas apropiadas, se puede probar que

$$c_n = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{p_n} = 2^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Tomando las funciones

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t} \qquad \text{y} \qquad g(t) = f(t) f\left(\frac{1}{2^n} - t\right),$$

para concluir las desigualdades propuestas basta probar que

$$\frac{\pi}{2p_n} < g(t) \leq \frac{1}{p_{n+1}^2}, \qquad 0 < t \leq \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{1}$$

Notar que, como $f\left(\frac{1}{2^n} - t\right) = f(t)$, las desigualdades también se verifican, de manera inmediata, para $1/2^{n+1} \leq t < 1/2^n$.

Resulta sencillo comprobar que f es una función positiva, decreciente y cóncava para $0 < t \leq 1/2^{n+1}$ y que, por tanto,

$$f(t) > f\left(\frac{1}{2^n} - t\right) > 0 \qquad \text{y} \qquad 0 > f'(t) > f'\left(\frac{1}{2^n} - t\right).$$

De este modo, puesto que

$$g'(t) = f'(t) f\left(\frac{1}{2^n}\right) - f(t) f'\left(\frac{1}{2^n}\right) > 0,$$

podemos deducir que g es una función creciente. Observando que

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \frac{\pi}{2} 2^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2p_n}$$

y

$$g\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 4^{n+1} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{p_{n+1}^2}$$

finalizamos la prueba de (1).

Tambien resuelto por Kee-Wai Lau, J. Nadal, A. Stadler y el proponente.

NOTA. Como se observa en todas las soluciones recibidas, las desigualdades propuestas en este problema son falsas si se toma c_{n+1} como la raíz negativa de la ecuación $2c_{n+1}^2 = 1 + c_n$.

El caso $n = 0$ de este problema se reduce a las bien conocidas desigualdades

$$\pi < \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{t(1-t)} < 4, \qquad 0 < t < 1.$$

(véase el Ejemplo 21 del Capítulo VI, pág. 256, del libro de G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, tercera edición, 1921).

PROBLEMA 390. *Propuesto por Lawrence Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, EE.UU.*

Sea $(c)_j = c(c+1)\cdots(c+j-1)$, para $j \geq 1$, y $(c)_0 = 1$ el símbolo de Pochhammer. Probar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n)_k}{k!} \frac{(a)_k(b)_n + (a)_n(b)_k}{(a+b)_{n+k}} = 1, \qquad a, b > 0.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Si Γ y B denotan, respectivamente, las funciones Gamma y Beta de Euler, usando las relaciones

$$(c)_j = \frac{\Gamma(c+j)}{\Gamma(c)} \qquad \text{y} \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

la identidad propuesta es equivalente a $S(n) = B(a,b)$, donde

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{n-1} \big(B(a+k, b+n) + B(a+n, b+k)\big).$$

De la relación

$$B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1) \tag{1}$$

se sigue, inmediatamente, que $S(1) = B(a,b)$. Veamos ahora que $S(n+1) = S(n)$, para todo entero $n \geq 1$, y habremos finalizado. Usando (1), tenemos que

$$\begin{aligned} S(n+1) = &\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} \big(B(a+k, b+n) + B(a+n, b+k)\big) \\ &- \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} \big(B(a+k+1, b+n) + B(a+n, b+k+1)\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} (B(a+k,b+n) + B(a+n,b+k)) \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k-1}{n} (B(a+k,b+n) + B(a+n,b+k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n+k}{n} - \binom{n+k-1}{n} \right) (B(a+k,b+n) + B(a+n,b+k)) \\
&\qquad - \binom{2n}{n} (B(a+n+1,b+n) + B(a+n,b+n+1)).
\end{aligned}
$$

De este modo, usando (1) y las identidades

$$
\binom{n+k}{n} - \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{n-1} \qquad \text{y} \qquad \binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1},
$$

llegamos a que

$$
\begin{aligned}
S(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{n-1} (B(a+k,b+n) + B(a+n,b+k)) \\
&\qquad - 2\binom{2n-1}{n-1} B(a+n,b+n) \\
&= S(n) + \binom{2n-1}{2n} (B(a+n,b+n) + B(a+n,b+n)) \\
&\qquad - 2\binom{2n-1}{n-1} B(a+n,b+n) \\
&= S(n),
\end{aligned}
$$

y la prueba está concluida.

También resuelto por J. Nadal, A. Stadler y el proponente.

Nota. En las soluciones de A. Stadler y del proponente se obtiene la identidad

$$
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n)_k}{k!} (x^k (1-x)^n + (1-x)^k x^n) = 1
$$

que, multiplicada por $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ e integrada en el intervalo $[0,1]$, implica el resultado propuesto.

Problema 391. *Propuesto por Perfetti Paolo, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia.*

Evaluar la integral

$$
\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t\sqrt{1+4t^2}}\, dt.
$$

Solución enviada por Alfonso Álamo Zapatero, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Si denotamos por I la integral a evaluar, probaremos que $I = \pi^2/20$.

Usando el cambio de variable $t = 1/(2 \operatorname{senh} u)$, la integral se transforma en

$$I = -\int_0^\beta \log(2 \operatorname{senh} u)\, du,$$

donde $\beta = \log\phi$ y $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ es la razón áurea. Ahora, puesto que

$$-\log(2\operatorname{senh} u) = -\log(e^u - e^{-u}) = -u - \log(1-e^{-2u}) = -u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2un}}{n},$$

y usando la positividad de los términos de la serie (lo que nos permite intercambiar la suma y la integral), tenemos

$$I = -\frac{\beta^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\beta \frac{e^{-2un}}{n}\, du = -\frac{\beta^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-2n\beta}}{2n^2} = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-2\beta})^n}{n^2}.$$

En la última suma reconocemos el desarrollo en serie de potencias de la función dilogaritmo, generalmente denotada por Li_2, dado para cada $z \in \mathbb{C}$, con $|z| < 1$, por

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Para concluir el resultado nos bastaría probar que

$$\mathrm{Li}_2(e^{-\beta}) = \frac{\pi^2}{15} - \beta^2,$$

que resulta ser equivalente a

$$\mathrm{Li}_2(\phi^{-2}) = \frac{\pi^2}{15} - (\log\phi)^2,$$

y precisamente esta es una bien conocida propiedad de la función dilogaritmo (véase, por ejemplo, `https://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html`).

También resuelto por B. Bradie, L. Glasser, Kee-Wai Lau, J. Nadal, B. Salgueiro (dos soluciones), A. Stadler, S. Stewart y el proponente.

PROBLEMA 392. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, ADA University, Bakú, Azerbaiyán.*

Supongamos que las bases de un trapecio circunscriptible tienen longitudes a y b y que su circunferencia inscrita tiene radio r. Probar que $ab \geq 4r^2$.

Solución compuesta por los editores a partir de las enviadas por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña; Antonio M. Oller Marcén, Centro Universitario de la Defensa, Zaragoza; Albert Stadler, Herrliberg, Suiza; y Daniel Văcaru, Piteşti, Rumanía.

Un cuadrilátero se dice circunscriptible cuando se puede circunscribir a una circunferencia. Sea el trapecio circunscriptible $ABCD$ con los vértices etiquetados en orden cíclico, de modo que las bases sean $AB = a$ y $CD = b$. Podemos suponer que el radio de la circunferencia inscrita es $r = 1$. Si llamamos $\alpha = \frac{1}{2}\angle BAD$ y $\beta = \frac{1}{2}\angle CBA$, entonces

$$a = \cot\alpha + \cot\beta$$

y dado que, por el paralelismo de las bases, se tiene

$$\angle DCB = \pi - 2\beta, \quad \angle ADC = \pi - 2\alpha,$$

entonces

$$b = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta.$$

Así que

$$ab = \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = 2 + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \geq 4,$$

ya que $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\beta > 0$ y $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} - 2 = \left(\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}} - \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}\right)^2 \geq 0$. La igualdad se cumple si y sólo si el trapecio es isósceles ($\alpha = \beta$).

Solución enviada por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.

Designemos por $ABCD$ el trapecio considerado y supongamos $AD = b$, $BC = a$. Siendo $a \neq b$, sin pérdida de generalidad, suponemos que $b < a$ y designamos por P el punto de intersección de las semirrectas BA y CD. Si H y H' son los pies de las perpendiculares desde P a AD y BC repectivamente, entonces $HH' = 2r$. Pongamos además $PH = h$, $AH = m$ y $HD = n$ (véase la figura 1).

Usando los teoremas de Tales y de Pitágoras se obtiene

$$\frac{CD}{2r} = \frac{\sqrt{h^2 + n^2}}{h},$$

de donde

$$CD = \frac{2r}{h}\sqrt{h^2 + n^2}, \tag{1}$$

y análogamente

$$AB = \frac{2r}{h}\sqrt{h^2 + m^2}. \tag{2}$$

Por otra parte, de la semejanza de los triángulos PAD y PBC, se sigue que

$$\frac{h + 2r}{h} = \frac{a}{b},$$

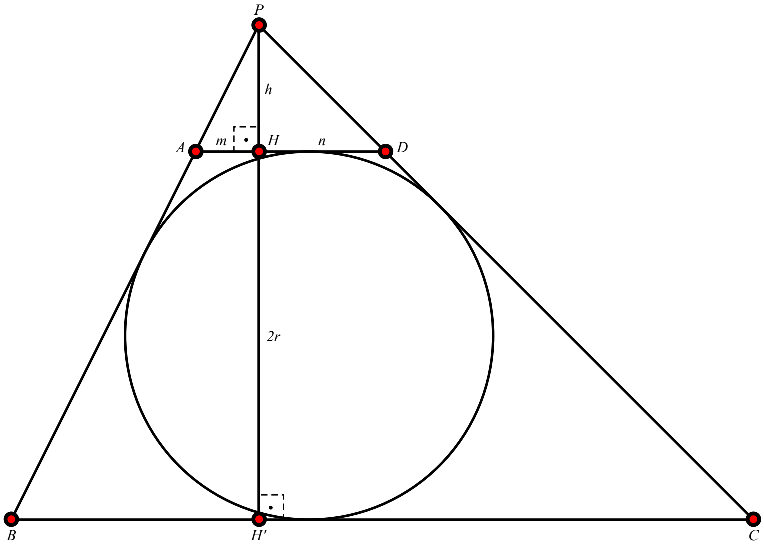

Figura 1: Esquema para la segunda solución al Problema 392.

y esto implica

$$\frac{2r}{h} = \frac{a-b}{b}. \tag{3}$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} a+b &\overset{(\mathrm{i})}{=} AB+CD \overset{(\mathrm{ii})}{=} \frac{2r}{h}\left(\sqrt{h^2+m^2}+\sqrt{h^2+n^2}\right) \\ &\overset{(\mathrm{iii})}{\geq} \frac{2r}{h}\sqrt{4h^2+b^2} \overset{(\mathrm{iv})}{\geq} \sqrt{16r^2+(a-b)^2}, \end{aligned}$$

donde se han usado, sucesivamente, (i) el teorema de Pitot para cuadriláteros circunscriptibles, (ii) las ecuaciones (1) y (2), (iii) la desigualdad triangular y (iv) la ecuación (3).

Pero la desigualdad resultante,

$$a+b \geq \sqrt{16r^2+(a-b)^2},$$

es equivalente a la propuesta. Y se puede comprobar que la igualdad se verifica si y sólo si el trapecio es isósceles.

También resuelto por J. Nadal, B. Salgueiro, C. Sánchez y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. El proponente basa su solución, en el estilo de la segunda anterior, en el siguiente lema geométrico: *Sean, en el* $\triangle ABC$, $a = BC$, h_a *la longitud de la altura* *desde A y r el inradio. Se cumple entonces*

$$a\sqrt{h_a - 2r} \geq 2r\sqrt{h_a}.$$

Y completa su propuesta con el siguiente comentario: «Se puede probar que la desigualdad sigue siendo cierta para los lados opuestos a, b de un cuadrilátero convexo cualquiera que tenga una circunferencia inscrita de radio r. Será cierta también entonces para los otros dos lados, $cd \geq 4r^2$, y multiplicando ambas se obtiene una prueba diferente de la bonita desigualdad $abcd \geq 16r^4$ sobre los lados de un cuadrilátero circunscriptible, que por otra parte es un corolario inmediato de las desigualdades que se mencionan en `https://en.wikipedia.org/wiki/Tangential_quadrilateral#Inequalities`. Hay una desigualdad similar, pero sólo para trapecios rectángulos, en [1, pág. 404]».

Por su parte, A. M. Oller comenta también que, en el artículo [2], «se prueban numerosas propiedades de cuadriláteros circunscriptibles en términos de las longitudes de las tangentes desde cada vértice a la circunferencia inscrita. En concreto, el Lema 2 prueba que

$$r^2 = \frac{a_1a_2b_1 + a_1a_2b_2 + b_1b_2a_1 + b_1b_2a_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}$$

(donde $a = a_1 + a_2$ y $b = b_1 + b_2$). Esta desigualdad puede utilizarse para resolver el problema».

Referencias

[1] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić y V. Volenec, *Recent advances in geometric inequalities*, Kluwer, 1989.

[2] M. Hajja, A condition for a circumscriptible quadrilateral to be cyclic, *Forum Geometricorum* **8** (2008), 103–106.