

Ejercicio viejo visto un siglo después

El «ejercicio elemental» n.º 44 de la *Revista Matemática Hispano-Americana* de la RSME [propuesto en volumen III (1921), p. 160] dice así:

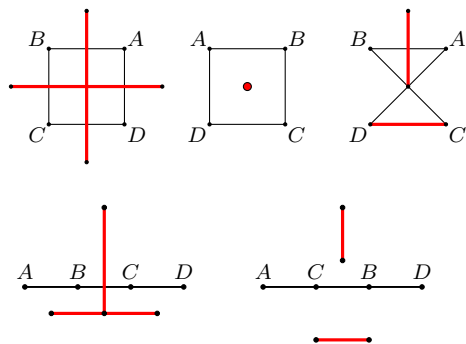
Sobre cada lado de un cuadrilátero se construye un cuadrado. Demostrar que las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los centros de estos cuadrados son iguales y perpendiculares.

Manuel Vázquez Vázquez —quien en 1931 sería el primer director de la otra revista de la RSME, *Matemática Elemental*— lo resolvió [IV (1922), p. 170–173] con largos cálculos trigonométricos que se corresponden con lo que entonces se aprendía en la asignatura *Geometría métrica* del primer curso de la Licenciatura en Ciencias Exactas. Dejó escrito que su solución, apoyada en la figura de uno convexo, era válida «cualquiera que fuera el cuadrilátero propuesto (convexo, cóncavo o cruzado)» siempre que los cuadrados se tomaran de un modo orientado. Afirmó también, sin dar detalles, que «resulta muy curiosa» la extensión del resultado a triángulos con un punto marcado en uno de sus lados (cuadriláteros con tres vértices alineados).

El álgebra de $\mathbb{C}$ da una respuesta general considerando cuadriláteros $ABCD$ dados, fijada una referencia, por números complejos $A(a)$, etc. La operación binaria $a * b = \frac{1}{2}(au + b\bar{u})$, siendo $u = 1 + i$, representa la asignación del centro del cuadrado sobre el lado AB del cuadrilátero orientado. El ejercicio n.º 44 corresponde a:

*Dados $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, demostrar que $(a * b) - (c * d) = i((d * a) - (b * c))$.*

SOLUCIÓN. Ya que $(a * b) - (c * d) = (a - c) * (b - d)$, basta aplicar la relación $i(z * w) = w * (-z)$, que resulta por ser $iu = -\bar{u}$. $\square$



La figura muestra en trazo grueso/rojo los segmentos iguales y perpendiculares correspondientes a cuadriláteros $ABCD$ sencillos: dos cuadrados con diferentes orientaciones, uno no convexo y dos degenerados (puntos alineados). Dibujar otros casos, por ejemplo los triángulos propuestos por Vázquez, quizás entretenga a algún lector curioso. Comparar la solución compleja con la métrica es un interesante proyecto de aprendizaje en geometría plana con $\mathbb{C}$.