

Las matemáticas y la covid-19

por

Renato Álvarez Nodarse, Francisco J. Esteban y Niurka R. Quintero

RESUMEN. A principios de 2020 apareció en la escena sanitaria internacional un nuevo patógeno: el virus *SARS-CoV-2* causante de la covid-19, enfermedad que se ha convertido en una pandemia mundial. En este trabajo vamos a explicar, desde el punto de vista de las matemáticas, el porqué de medidas como «*lávate las manos y no te toques la cara*» o «*mantén una distancia de seguridad de x metros*», recomendadas por las autoridades para controlar la propagación del virus. También discutiremos la importancia de usar correctamente los datos de contagio a la hora de tomar decisiones o de informar a la ciudadanía sobre la evolución de una pandemia.

1. INTRODUCCIÓN

En diciembre de 2019 las autoridades chinas informaron de una extraña neumonía, causada por un nuevo coronavirus denominado *SARS-CoV-2*, y que más tarde pasó a llamarse covid-19. El 11 de marzo de 2020 la Organización Mundial de la Salud (OMS) declaró a la covid-19 como una pandemia mundial. En un inicio se sabía muy poco sobre la enfermedad, e.g., cómo se transmitía, cómo tratarla, si era un *simple* resfriado que en algunos casos podía agravarse, etc. Casi un año después, aún estando lejos de poder decir que la comprendemos en su totalidad, gracias al esfuerzo de la comunidad científica conocemos mucho más sobre ella (consultar, e.g., la actualización del 9 de julio del resumen científico de la OMS [11]). Por ejemplo, uno de los hechos comprobados es que el virus se propaga con más facilidad en sitios con una mayor concentración de personas, aunque estén al aire libre. Esta conclusión no ha sido consecuencia de ningún experimento llevado a cabo por científicos en el laboratorio o en entornos controlados, sino que ha sido *descubierta* por las distintas autoridades sanitarias durante el seguimiento de los brotes en distintos países, incluido España. Entre las primeras medidas adoptadas por las autoridades para prevenir los contagios estaban la recomendación de mantener una distancia de seguridad interpersonal de entre uno y dos metros, así como el uso de mascarillas quirúrgicas.

¿A qué se debe ese empeño en que nos distanciamos y usemos mascarilla? Una de las razones es que al toser o estornudar, e incluso al hablar en voz alta o cantar, expulsamos gotitas de saliva de diámetro mayor de 5 micrómetros (las gotitas de Flügge) que pueden contener una gran cantidad de partículas virales y que recorren una determinada distancia antes de precipitarse al suelo.

Tampoco se puede descartar el contagio por aerosoles (gotitas de saliva de diámetro menor de 5 micrómetros), especialmente en entornos cerrados y con poca ventilación, dado que se sabe que, en este caso, las gotas pueden estar en suspensión durante horas manteniéndose activo el virus.

Todo lo anterior explica por qué las autoridades sanitarias insisten en la importancia de guardar la distancia de seguridad y llevar mascarillas, y por qué en muchos sitios se ha decidido restringir el horario de las actividades de ocio y reducir el número de personas en las reuniones, especialmente en locales cerrados.

En este trabajo, de carácter muy general, vamos a explicar, desde el punto de vista de las matemáticas, algunas de las medidas tomadas por las autoridades para controlar la propagación de la covid-19, medidas que también son aplicables a otras enfermedades como, por ejemplo, la gripe.

En particular, pretendemos justificar, de la forma más rigurosa posible, las afirmaciones «*lávate las manos y no te toques la cara*» y «*mantén una distancia de seguridad de x metros*». Para ello, en los apartados 2 y 3 discutiremos dos modelos sencillos para, por un lado, estimar el tiempo de vida medio de un virus fuera del organismo y, por el otro, la distancia a la que caen las gotitas de saliva cuando estornudamos o tosemos, respectivamente. Finalmente, en el apartado 4 mostraremos la importancia de usar correctamente los datos de contagios a la hora de tomar decisiones e informar a la ciudadanía.

2. ¿CUÁNTO PUEDE DURAR EL CORONAVIRUS FUERA DE NUESTRO ORGANISMO?

El 17 de marzo de 2020 apareció publicado en el *The New England Journal of Medicine* un artículo [3] sobre la estabilidad del coronavirus *SARS-CoV-2*, tanto en gotitas en suspensión como en diferentes superficies contaminadas. En dicho trabajo, cuyos resultados han confirmado estudios posteriores, se demostraba que la transmisión aérea y por contacto con superficies era teóricamente posible, ya que el virus podía mantener su capacidad infectiva durante varias horas en suspensión (en el aire) y varios días en distintas superficies. Concretamente, en el citado artículo se calculaba, a partir de los datos experimentales, la vida media del nuevo coronavirus en superficies de plástico, acero, cobre y cartón.

Dado que es imposible conocer el número de partículas virales presentes en cada muestra utilizada, lo que se suele usar es un método indirecto conocido como TCID₅₀. Dicho método indica cuál es la dosis de virus capaz de infectar al 50% de cultivos utilizados y, aunque no representa a un número concreto de partículas virales, sí muestra la capacidad de infección del virus, la cual sin duda está relacionada con el número de partículas virales presentes. En [1], el lector interesado puede encontrar más detalles sobre esta técnica. Nosotros aquí nos restringiremos a estimar, a partir de los datos experimentales, cuál es la vida media del *SARS-CoV-2* sobre las cuatro superficies antes mencionadas.

2.1. ESTIMACIÓN DEL TIEMPO DE VIDA MEDIO DEL SARS-CoV-2

Aunque el valor TCID50 no nos dice el número absoluto de partículas virales en una muestra dada, sí que nos permite calcular durante cuánto tiempo el virus se mantiene activo.

A continuación explicaremos cómo se pueden interpretar los resultados de dicho estudio usando un modelo matemático muy sencillo: *el modelo maltusiano para el crecimiento de una población*. Dicho modelo describe muy bien el crecimiento exponencial de una población de individuos que, como veremos, es el caso que nos ocupa.

La suposición inicial del modelo es muy simple: la velocidad de crecimiento de una población de individuos es proporcional al número de individuos. Así, si denotamos por $p(t)$ el número de individuos de la población en el momento de tiempo t , entonces la ecuación que modela la dinámica de la población es

$$p'(t) = ap(t)$$

donde a es cierta constante (denominada *tasa de crecimiento de la población*) que debemos deducir de los datos experimentales, y $p'(t)$ es la derivada de $p(t)$. La solución de la ecuación anterior es bien conocida:

$$p(t) = p_0 e^{at},$$

siendo p_0 el valor inicial de la población en el instante de tiempo inicial $t = 0$. Es conveniente, para los cálculos numéricos, escribir la solución en la forma

$$\log(p(t)) = \log(p_0) + at,$$

que es la ecuación de una recta con pendiente a .

Como explicamos antes, el número de virus es muy complicado de conocer, por lo que se suele usar otro indicador. Dado que lo que nos interesa es estimar la capacidad infectiva del virus tras depositarse este sobre una superficie, vamos a usar como indicador el valor numérico que proporciona el TCID50; es decir, en lugar de tomar a $p(t)$ como el número de partículas virales (que desconocemos) tomaremos el valor del TCID50. Supondremos que ambas cantidades, el TCID50 y la población de virus, son proporcionales, por lo que es de esperar que el comportamiento del TCID50 sea también exponencial (es decir, que siga la ley maltusiana o exponencial). Como datos usamos los publicados en [3] (gráficas del panel A de su figura 1). A continuación, resumimos los resultados del estudio en cuatro materiales: cobre, acero, cartón y plástico.

Los rombos de cada gráfica de la figura 1 corresponden a los datos experimentales extraídos de las figuras de [3], y la línea negra representa, en cada caso, la recta de regresión correspondiente a $\log(p(t)) = at + b$, obtenida por el método de los mínimos cuadrados.

La vida media de la población podemos definirla como el tiempo T que tarda la población en disminuir a la mitad. Como $p(T)/p(0) = 1/2 = e^{aT}$, tenemos $T = \log(2)/(-a)$. Entonces, a partir de las pendientes a de las rectas de regresión,

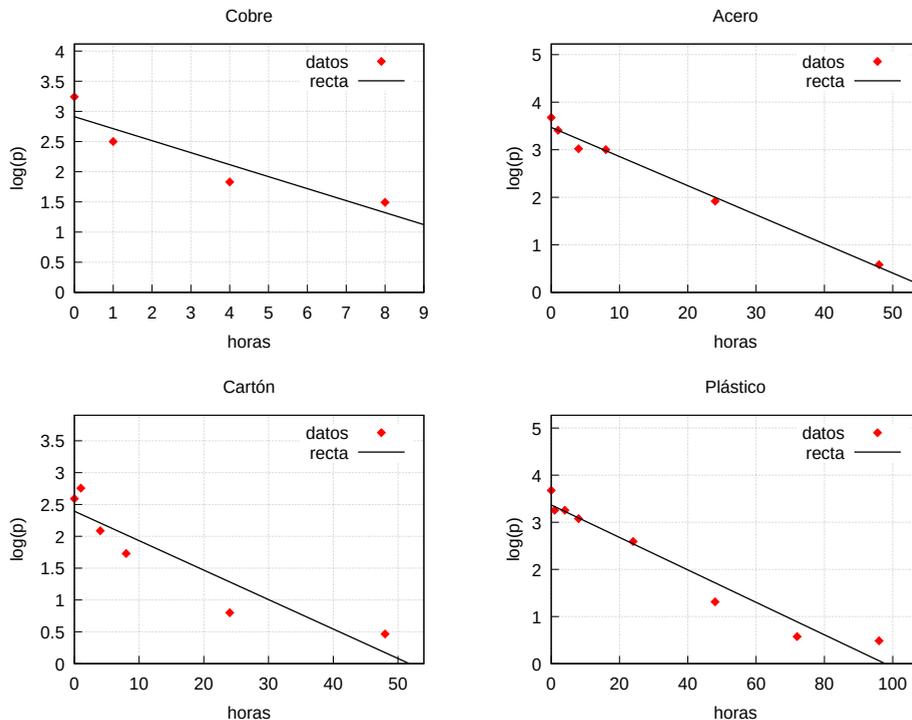


Figura 1: Rectas de regresión $y = \log(p(t)) = at + b$ para el cobre (arriba, izquierda), acero (arriba, derecha), cartón (debajo, izquierda) y plástico (debajo, derecha).

Material	Pendiente	Vida Media (horas)	Coefficiente de correlación
cobre	-0.198	3.5	0.92
acero	-0.061	11.3	0.99
cartón	-0.046	15.0	0.92
plástico	-0.034	20.1	0.97

Tabla 1: Vida media del *SARS-CoV-2* fuera del organismo.

podemos estimar la vida media (capacidad infectiva) del virus sobre las distintas superficies asumiendo que, como ya hemos dicho, esta se corresponda con la disminución a la mitad del valor TCID₅₀.

En la tabla 1 mostramos los valores de la pendiente a y del tiempo medio de vida T del virus para los distintos materiales, así como el coeficiente de correlación (dicho coeficiente da una idea de lo buena que es la estimación por mínimos cuadrados, siendo mejor cuanto más cercano a 1 sea este valor).

Como se observa en la tabla, el valor absoluto del coeficiente de correlación se encuentra muy próximo a 1, especialmente en el caso del acero y del plástico, lo que

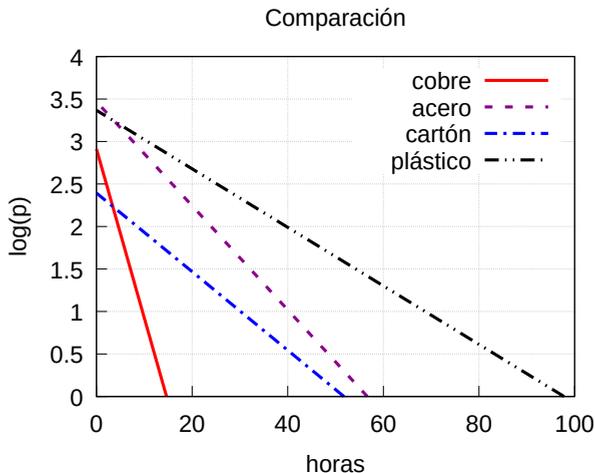


Figura 2: Las cuatro rectas de regresión: cobre (línea continua), acero (línea discontinua), cartón (guiones cortos y largos) y plástico (dos guiones cortos y uno largo).

efectivamente confirma la hipótesis de que la dinámica del TCID50 (y, por tanto, la de las partículas virales) sigue la ley maltusiana tal y como hemos supuesto, y podemos basarnos en ella para describir la durabilidad del virus sobre dichas superficies. Para el cobre y el cartón el coeficiente de correlación es peor, por lo que hubiese sido conveniente haber hecho, en general, más mediciones a lo largo del tiempo, que corroborasen, en estos dos casos, la dinámica maltusiana.

Si dibujamos las cuatro rectas de regresión obtenemos las gráficas representadas en la figura 2. De lo anterior se deduce que el virus es capaz de seguir infectando durante más tiempo cuando se deposita sobre el plástico que cuando lo hace sobre el resto de las superficies, ya que su vida media es casi el doble que sobre acero o cartón, y casi 6 veces más que sobre el cobre. Hemos de decir que, en [3], los autores estiman la vida media por un método distinto (mediante inferencias bayesianas) por lo que, aunque los resultados numéricos no coinciden, sí que se observa la misma tendencia general: que el virus mantiene su capacidad infectiva varias horas fuera del organismo y depende del material donde este se adhiera, siendo sobre el plástico donde su vida media es mayor.

Como conclusión de todo lo anterior podemos afirmar que, efectivamente, el virus causante de la covid-19 se mantiene activo durante horas sobre algunas de las superficies más habituales en nuestro entorno como el plástico, el acero y el cartón. Si a eso le unimos el hecho de que su principal puerta de entrada en nuestro organismo, aparte del aire que respiramos, son las mucosas de la cara, es entendible lo de «*no te toques la cara*». Además de ello, se sabe que la envoltura del *SARS-CoV-2* está hecha de lípidos que no son más que grasas y el jabón las disuelve. Así que un simple lavado de manos, eso sí, bien hecho, basta para eliminar todos esos peligrosos agentes infectivos.

3. ¿HASTA DÓNDE LLEGA UN VIRUS AL ESTORNUDAR?

Si nos contagiamos con alguna de las tantas enfermedades respiratorias y tosemos o estornudamos, ¿hasta dónde llegan las gotitas de saliva? Esas gotitas son, en la mayoría de los casos, portadoras de una enorme cantidad de agentes patógenos que pueden infectarnos ya que sobreviven durante horas sobre distintas superficies (e incluso en el aire), como vimos en el apartado anterior.

Es bien conocido que el tamaño de las gotitas por las que se transmiten las infecciones respiratorias es muy diverso, desde menos de un micrómetro hasta, por lo general, alrededor de un milímetro [4, 9]. Según su diámetro, las gotitas se clasifican en dos grandes grupos. Las que se producen al hablar, toser o estornudar, casi todas son mayores de 5 micrómetros y se denominan gotitas respiratorias. Las menores de 5 micrómetros, denominadas aerosoles, suelen generarse al respirar y también por procedimientos a los que se somete a los pacientes, como intubarles y extubarles en la ventilación asistida, o por otras manipulaciones necesarias durante el tratamiento en el hospital. Como dato curioso, podemos decir que a dichas gotas, en su conjunto, se les conoce como *gotitas de Flüge* [7] desde finales del siglo XIX. En cuanto a su permanencia en el aire, las gotitas respiratorias caen y se depositan en la superficie en muy pocos segundos por efecto de la gravedad, y a una distancia que no suele ser mayor de dos metros. Por el contrario, los aerosoles pueden permanecer en el aire varias horas y desplazarse a distancias muy superiores.

3.1. UN MODELO SENCILLO DE LA CAÍDA DE LAS GOTAS DE SALIVA

Existe mucha bibliografía para modelar la caída de una gota de agua en el aire, especialmente de gotas muy pequeñas ya que, como hemos comentado, este problema está asociado a la transmisión de enfermedades infecciosas. Desde principios del siglo XX existen numerosos estudios sobre el tema, como por ejemplo los trabajos de W. F. Wells. A modo de ejemplo, en [10] Wells estudia cómo caen las gotitas pequeñas (en inglés, *droplets*) de saliva al suelo haciendo notar que, a lo largo de la caída, hay un proceso de evaporación, por lo que la gota pierde volumen y puede incluso llegar a convertirse en una gota diminuta, del tamaño del aerosol (*droplet nuclei*) que mencionamos antes.

Vamos a modelar la caída de las gotas de saliva, desde la boca, tras un estornudo o tos. Para ello asumiremos que, al estornudar o toser, expulsamos gotitas y que dichas gotitas caen en el aire. Dado el tamaño (y masa) de las mismas no se puede despreciar la resistencia del aire, por lo que hemos de considerar que las gotas caen en un fluido viscoso.

Así que supondremos que:

- La gota es esférica y no cambia su tamaño y peso (no hay evaporación).
- Asumiremos que se cumple la *Ley de Stokes*, que establece que la fuerza de rozamiento F_r es proporcional al diámetro de la gota y a la velocidad, y que actúa en sentido contrario al movimiento. Luego mejoraremos esta aproximación.

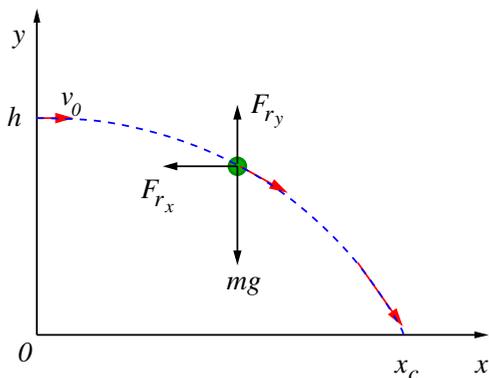


Figura 3: Esquema del movimiento de la gota de saliva.

Con estas suposiciones, y descomponiendo el movimiento de la gota en los ejes x e y , tenemos las siguientes ecuaciones (ver el esquema de la figura 3):

$$m \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -3\pi\eta d \frac{d}{dt}x(t), \tag{1}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -mg - 3\pi\eta d \frac{d}{dt}y(t), \tag{2}$$

respectivamente, donde m es la masa de la gota, g la aceleración de la gravedad, η es el coeficiente de viscosidad del aire, y d es el diámetro de la gota. Como la masa de la gota no cambia podemos calcularla a partir de la densidad ρ_s de la saliva, que es esencialmente la del agua; así, $m = \pi\rho d^3/6$.

Como condiciones iniciales, suponemos que las gotas salen horizontalmente de la boca con velocidad inicial v_0 , i.e. (ver foto de la figura 4),

$$x(0) = 0, \quad v_x(0) = \frac{d}{dt}x(0) = v_0, \quad y(0) = h, \quad v_y(0) = \frac{d}{dt}y(0) = 0. \tag{3}$$

Es decir, tenemos dos ecuaciones diferenciales que podemos resolver independientemente una de la otra. La solución es

$$x(t) = \frac{v_0(1 - e^{-\alpha t})}{\alpha}, \tag{4}$$

$$y(t) = h - \frac{g(e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)}{\alpha^2}, \tag{5}$$

donde $\alpha = 18\eta/(\rho d^2)$. La ecuación (5) nos permite encontrar el tiempo que tarda una gota en caer y, conociendo dicho tiempo, podemos determinar, a partir de la ecuación (4), la distancia x_c a la que cae. Para ello basta con disponer de las condiciones iniciales, es decir, de la altura h y la velocidad inicial de salida de las gotas.

Antes de continuar, hagamos notar que si tomamos $\eta = 0$ en (1)–(2), es decir, si suponemos que no hay viscosidad, lo que implica que $\alpha = 0$, entonces obtenemos las

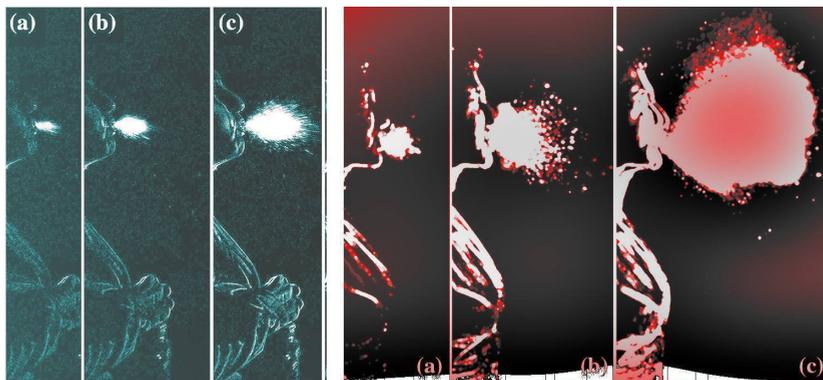


Figura 4: Foto de los primeros milisegundos de una tos (izquierda) y un estornudo (derecha). Tomado de [8].

ecuaciones de tipo tiro parabólico horizontal sin resistencia del aire, cuya solución se puede obtener de (4)–(5) tomando el límite $\alpha \rightarrow 0$:

$$x_c(t) = v_0 t, \quad y_c(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

De lo anterior se sigue que, si no hubiese rozamiento, el tiempo total de caída de la gota, t_c , y el alcance de la misma, x_c , vienen dados por las expresiones

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad x_c = v_0 t_c, \quad (6)$$

respectivamente.

En el caso real, cuando tenemos rozamiento, la situación es más complicada, pues para encontrar el tiempo que tarda la gota en caer hemos de resolver la ecuación

$$e^{-\alpha t} = \frac{h\alpha^2}{g} + 1 - \alpha t, \quad (7)$$

que no es resoluble analíticamente. Así que lo que haremos es encontrar la solución numérica de la ecuación (7), lo que nos dará el tiempo de caída y, una vez conocido el mismo, obtendremos la distancia usando (4). Nótese en cualquier caso que, si el tiempo de caída es muy largo, $t \gg 1/\alpha$, entonces la distancia a la que cae la gota será v_0/α , que solo depende de la velocidad inicial y del valor de α .

Como se ve, las ecuaciones son sencillas, así que solo nos resta fijar las condiciones iniciales. Para la altura podemos tomar, por ejemplo, 2 metros. Sin embargo, fijar la velocidad inicial no es tan fácil. Afortunadamente, en el año 2014, un equipo del MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) liderado por Lydia Bourouiba estudió meticulosamente el problema. Entre los muchos procedimientos que hicieron Bourouiba y su equipo se encontraba el filmar, a cámara lenta, toses y estornudos.

Dichas películas son impresionantes y se pueden ver en la red (desde la web personal de Bourouiba, por ejemplo¹).

En [8] se muestran dichos resultados. En el apartado 4 del artículo titulado «Anatomy of sneeze ejecta» (Anatomía de eyección de un estornudo) podemos encontrar muchos datos. La velocidad de salida depende de si son gotitas o filamentos (estos últimos son más complicados de tratar y los estudian en otros trabajos). Del análisis detallado de los vídeos, Bourouiba y su equipo encuentran que el tamaño de las gotitas oscila entre los 160 micrómetros y 1 milímetro de diámetro, y son expedidas a una velocidad de unos 14 m/s (aproximadamente 50 km/h). Hay que decir que, anteriormente al trabajo de Bourouiba, el tamaño de las gotitas se había estudiado extensivamente usando distintas técnicas (ver, por ejemplo, [4, 9]), y los resultados concuerdan con los experimentos posteriores del equipo del MIT. Aquí usaremos esencialmente los datos experimentales de [8].

Si fijamos los valores $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $h = 2$ metros y $v_0 = 14 \text{ m/s}$, y en el caso de que no hubiese rozamiento (o sea, si $\eta = 0$ y por tanto $\alpha = 0$), las ecuaciones (6) nos dicen que las gotas caen en 0.64 segundos y que recorren una distancia de 8.94 metros, independientemente del tamaño y de la masa de la gota.

Vamos a ver qué ocurre si tenemos en cuenta el rozamiento del aire. Para el coeficiente de viscosidad del aire tomaremos su valor a 25°C que es $\eta = 1.85 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$, y asumiremos, como ya dijimos, que la densidad de la saliva es $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$, la densidad del agua.

Caso 1. Gotas de 160 micrómetros de diámetro. Como $d = 1.6 \cdot 10^{-4}$ metros, entonces $\alpha = 13$. Si resolvemos la ecuación (7) obtenemos que la gota tarda en caer 2.73 segundos; al sustituirlo en la ecuación (4) nos da que la gota cae a 1.08 metros, que se aproxima a la distancia máxima a la que puede caer la gota ya que, como explicamos, dicha distancia para un tiempo de caída muy largo es v_0/α (véase la figura 5). Nótese que el valor tan grande del coeficiente α hace que la exponencial sea prácticamente cero incluso para tiempos cortos ($t \gg 1/\alpha$).

Caso 2. Gotas de 1000 micrómetros (1 milímetro) de diámetro. En este caso $\alpha = 0.333$, así que la gota tarda en caer 0.66 segundos y recorre 8.32 metros. Si comparamos dichos valores con los obtenidos sin rozamiento, vemos que son bastante parecidos. Es decir que, efectivamente, según este modelo hay gotas que llegan a sobrepasar los 8 metros como mostraba el vídeo del equipo del MIT (véase la figura 5).

Caso 3. El análisis de los experimentos que se llevaron a cabo en [4] mostraba que el tamaño de la mayoría de las gotitas era de alrededor de 100 micrómetros o de alrededor de 1 milímetro. Si como dato de nuestro modelo usamos que el diámetro de las gotas es de 100 micrómetros, entonces $\alpha = 33.3$ por lo que el tiempo de caída es 6.83 segundos y el alcance es de 42 centímetros.

¹<https://lbououiba.mit.edu>

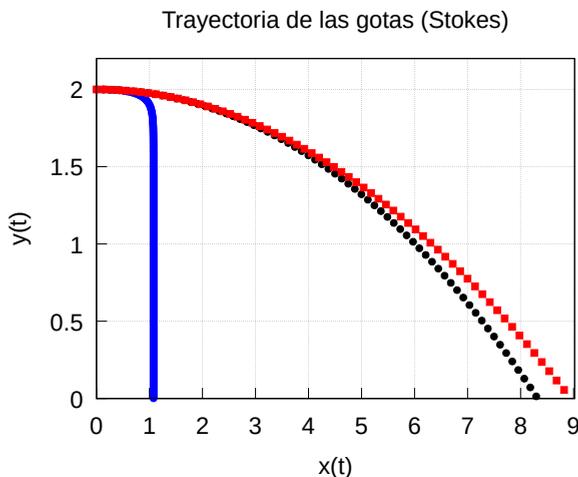


Figura 5: Trayectoria de una gotita de 160 micrómetros (línea azul de la izquierda) y de 1 milímetro (línea con puntos redondos negros) si usamos la aproximación (1)–(2) comparada con la de un proyectil que cae sin rozamiento (a la derecha, línea con cuadrados rojos).

3.2. EL CASO CUANDO EL NÚMERO DE REYNOLDS ES GRANDE

Está claro que el modelo anterior es demasiado simple, pues la suposición de que la fuerza de rozamiento sigue la *Ley de Stoke* es cierta solo si el número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho_a v d}{\eta}, \quad (8)$$

es mucho más pequeño que la unidad, donde $\rho_a = 1.29 \text{ kg/m}^3$ es la densidad del aire y $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, donde $v_x = dx/dt$ y $v_y = dy/dt$. En general, la fuerza de rozamiento es igual a

$$\vec{F}_r = - \left(\frac{\pi d^2 \rho_a}{8} \right) C_d(v) v \vec{v}, \quad (9)$$

donde el coeficiente de arrastre $C_d(v)$ se puede expresar como [2, 6]

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\delta_0} \right)^2,$$

siendo la constante $\delta_0 = 9.06$ (nótese que C_d depende de v pues Re , tal como aparece en (8), depende de v).

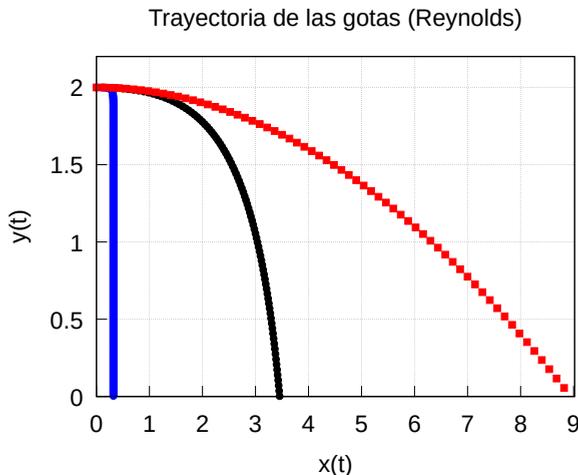


Figura 6: Trayectoria de una gotita de 160 micrómetros (línea azul de la izquierda) y de 1 milímetro (línea con puntos redondos negros) si usamos la aproximación no lineal (10)–(11) comparada con la de un proyectil que cae sin rozamiento (a la derecha, línea con cuadrados rojos).

Si descomponemos la fuerza (9) en los ejes coordenados x e y , las ecuaciones que describen el movimiento del tiro parabólico en este caso serían

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \left(\frac{\pi d^2 \rho_a}{8} \right) C_d(v) v v_x, \tag{10}$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \left(\frac{\pi d^2 \rho_a}{8} \right) C_d(v) v v_y. \tag{11}$$

Estas ecuaciones son no lineales y no son resolubles analíticamente. Si tomamos como condiciones iniciales las expresiones (3), la resolución numérica del sistema (10)–(11) está representada en la figura 6, donde se muestra la trayectoria de la partícula. En este caso concreto hemos obtenido que el tiempo de vuelo es igual a 4.2 segundos y el alcance máximo es de 32 centímetros para las gotas de 160 micrómetros. Si las gotas son más grandes y su diámetro es $d = 1$ milímetro, entonces caen más rápido, $t_v = 0.9$ segundos; sin embargo su alcance es mayor, 3.45 metros. Finalmente, para las gotitas de 100 micrómetros se obtiene un tiempo de vuelo de 8.9 segundos y una distancia de apenas 14 centímetros.

Para concluir este apartado incluimos en la figura 7 dos gráficas que muestran cómo varían el tiempo de caída y la distancia alcanzada en función del diámetro de la gota.

Desde un punto de vista formal, nos surge la pregunta natural de qué ocurre si tenemos en cuenta la evaporación (ver [10]). En este caso, en el modelo se debería incluir la variación de la masa de la gota con el tiempo, lo cual complicaría los cálculos. Otra cuestión que nos podemos plantear es qué ocurriría si el tamaño de la

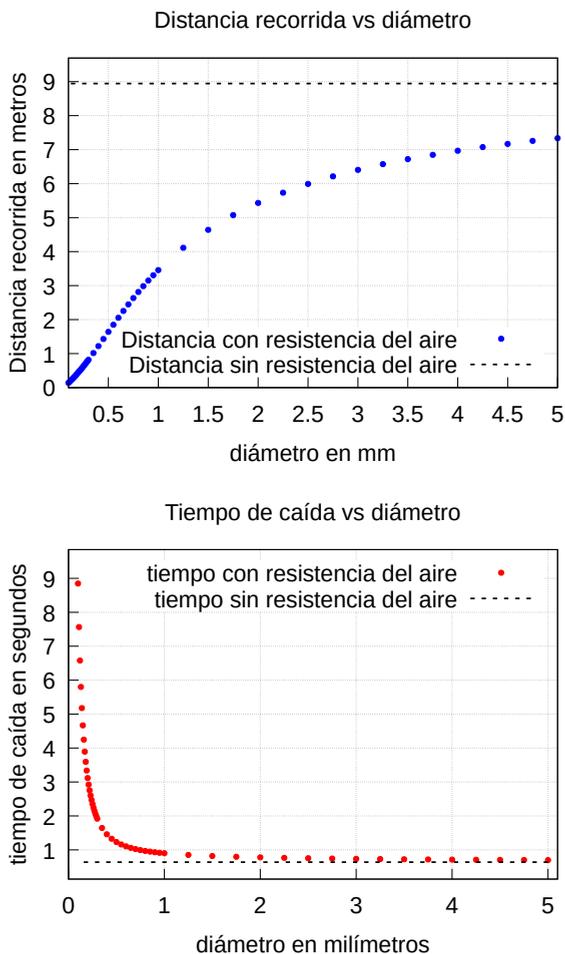


Figura 7: Distancia recorrida (arriba) y tiempo de caída (debajo) en función del diámetro de la gota.

gota es mucho más pequeño, como es el caso de los aerosoles que tienen un diámetro inferior a 5 micrómetros. En este caso, las gotitas dejan de ser, en relación con el aire, partículas microscópicas, y pasan a convertirse en partículas brownianas donde nuestro modelo deja de ser válido. De hecho, el comportamiento browniano de los aerosoles permite que las gotitas puedan mantenerse en suspensión durante mucho tiempo, lo cual es importante ya que muchas enfermedades respiratorias se contagian por esta vía y no solo mediante las gotitas de Flügge. Esta es una de las razones por las que conviene ventilar adecuadamente las habitaciones cerradas, especialmente aquellas donde se encuentren muchas personas y por tanto haya una mayor cantidad de aerosoles.

Nótese que, a partir de modelos sencillos como los aquí propuestos, podemos estimar la distancia a la que se desplazan las gotitas respiratorias cuando son expulsadas al toser o al estornudar. Los resultados obtenidos están en concordancia con las indicaciones que, en tiempos de pandemia, recomiendan las autoridades: mantener una distancia de seguridad de entre 1 y 2 metros, usar mascarillas o taparnos la boca cuando estornudamos o tosemos, para impedir que, especialmente las gotas más grandes, alcancen mayores distancias.

4. ¿CÓMO ENTENDER EL DATO DEL NÚMERO DE CONTAGIOS PUBLICADO DIARIAMENTE?

Para tener una idea acertada de la evolución de una epidemia no basta con tener datos fiables de los contagios, sino también saber utilizarlos correctamente. En esta última sección vamos a tratar este tema tomando como ejemplo la pandemia de covid-19, aunque el análisis aquí expuesto es aplicable a una epidemia en general.

Diariamente, la Junta de Andalucía publica una lista con el número de contagios detectados y confirmados [5]. Vamos a denotar por $N(d, d_p)$ el número de contagiados el día d publicado el día d_p . Así, $N(28/10, 29/10)$ es el número de contagios del 28 de octubre publicado el 29 de octubre, mientras que $N(28/10, 9/11)$ es el número de contagios del propio 28 de octubre según los datos publicados (es decir, actualizados) el 9 de noviembre.

Dicho número $N(d, d_p)$ fluctúa, tal y como se observa en la figura 8, por lo que se suelen usar otros indicadores más *uniformes* como, por ejemplo, los índices de contagios acumulados en 7 y 14 días por cien mil habitantes. Nuestro análisis tiene en cuenta este último índice, el índice de contagios acumulados en 14 días por cien mil habitantes, que denotaremos por $N14(d, d_p)$, y que está definido por la fórmula²

$$N14(d, d_p) = \frac{10^5}{P} \sum_{k=d-13}^d N(k, d_p), \quad (12)$$

donde P es la población total de Sevilla (1 949 860 habitantes) o Andalucía (8 414 400 habitantes).

Si se cuentan los casos detectados y confirmados de covid-19, es decir, los positivos tras haber sido sometidos a alguna de las pruebas diagnósticas *fiables*, las conocidas por PDIA (Pruebas Diagnósticas de Infección Activa), se necesita un tiempo hasta tener los resultados de las mismas (no solo hay que hacer dichas pruebas, también hay que procesarlas y luego comunicar los resultados a las autoridades pertinentes). Así que es esperable que haya una diferencia entre el número *oficial* que se comunica diariamente y el número *real* de contagios. Es decir, que para dar la cifra oficial diaria como mínimo se han de recopilar los datos de todos los laboratorios y hospitales donde se han realizado dichas pruebas, y eso requiere su tiempo (especialmente

²En el caso de la provincia de Sevilla, por ejemplo, se suman los contagios detectados y confirmados en los últimos 14 días contando desde el día en que se quiera saber y se divide por el número de habitantes de la provincia.

para las pruebas PCR, i.e., las de «Reacción en Cadena de la Polimerasa»). En este apartado vamos a estimar de cuánto tiempo estamos hablando en el caso de Andalucía y de la provincia de Sevilla.

Vamos a analizar la evolución de los contagios detectados y confirmados (el número real de contagiados es imposible de saber, únicamente se puede estimar) en toda Andalucía y, en particular, en la provincia de Sevilla. Primero, representamos en una gráfica los casos detectados y confirmados por PDIA diarios en Sevilla y Andalucía entre el 31/8/2020 y el 9/11/2020, y que han sido notificados el 10 de noviembre. Por razones que se verán más adelante, vamos a presentar dos gráficas (véase la figura 8). La gráfica de la izquierda muestra los contagios hasta el día 2 de noviembre (una semana antes del día que se han consultado los datos) y la de la derecha hasta el día 9 de noviembre (un día antes de ser consultados los datos).

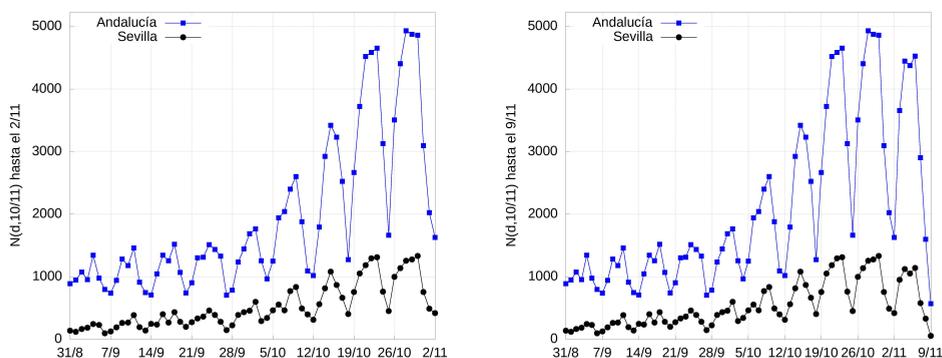


Figura 8: Evolución del número $N(d, 10/11)$ de los contagios diarios detectados y confirmados por PDIA (según los datos publicados el día 10 de noviembre) hasta el 2 de noviembre (izquierda) y el 9 de noviembre (derecha), respectivamente, para Andalucía (cuadrados azules) y Sevilla (círculos negros).

Ambas gráficas de la figura 8 muestran una clara oscilación semanal aunque hay una diferencia fundamental entre ambas. La gráfica de la izquierda muestra una tendencia al alza semana tras semana (especialmente si nos fijamos en los máximos), mientras que la de la derecha parece mostrar, tras el último máximo del 28 de octubre, una tendencia a la baja que se podría interpretar como una disminución de los contagios o una estabilización de los mismos.

A continuación, observamos que las fluctuaciones desaparecen en la figura 9, donde se representa el número de casos acumulados en 14 días por cada cien mil habitantes (incidencia acumulada) definido en (12).

Sin ninguna duda, las gráficas de la figura 9 (especialmente la de la derecha) inducen a pensar que los contagios realmente están disminuyendo, lo que sería una buena noticia. Nada más lejos de la realidad. En la figura 10 representamos la evolución del índice $N14(d, 11/12)$ entre el 12 de octubre y el 9 de noviembre, pero ahora con los datos actualizados el 11 de diciembre. Como se ve, si bien en Sevilla hay un ligero descenso, en Andalucía la curva sigue creciendo.

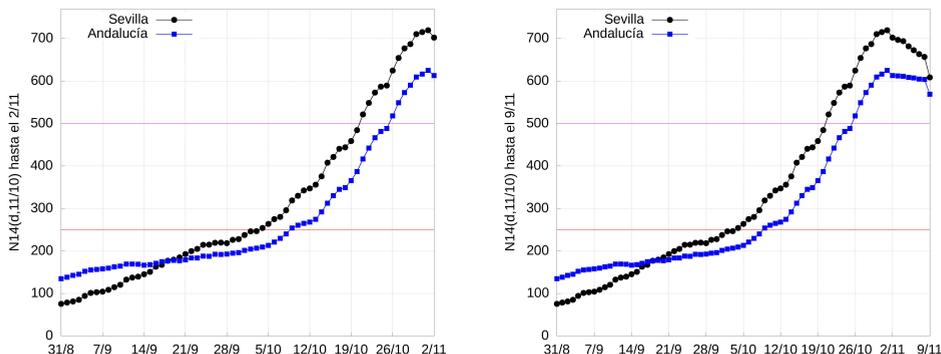


Figura 9: Evolución del índice $N_{14}(d, 10/11)$ de los contagios diarios detectados y confirmados por PDIA (según los datos publicados el 10 de noviembre) hasta el 2 de noviembre (izquierda) y el 9 de noviembre (derecha), respectivamente, para Andalucía (cuadrados azules) y Sevilla (círculos negros).

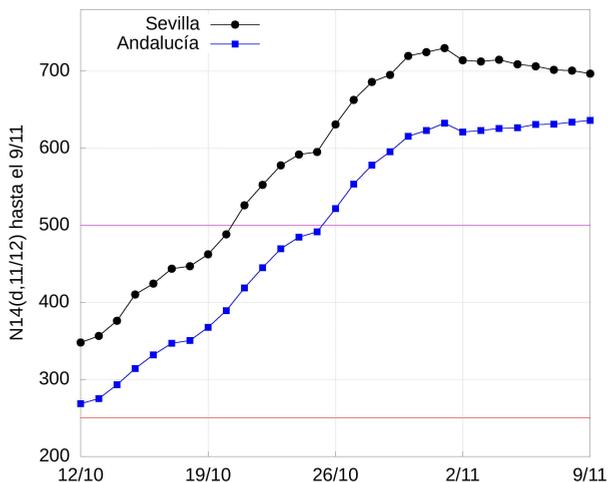


Figura 10: Evolución del índice $N_{14}(d, 11/12)$ de los contagios diarios detectados y confirmados por PDIA (según los datos publicados el 11 de diciembre) para Andalucía (cuadrados azules) y Sevilla (círculos negros).

Dado que el número $N(d, d_p)$ se actualiza cada día, es necesario esperar un tiempo hasta que los datos se *consoliden*. Para estimar cuánto tiempo es necesario esperar, vamos a comparar los valores de $N_{14}(d, d_p)$ para dos fechas distintas d_p . A modo de ejemplo, representamos en la figura 11 los valores de $N_{14}(d, 10/11)$ y $N_{14}(d, 11/12)$ para ver la evolución de la pandemia en Andalucía y Sevilla entre el 27 de octubre y el 9 de noviembre. Es obvio que hay una diferencia notable entre los índices calculados con los datos publicados el 10 de noviembre y los publicados el 11 de diciembre.

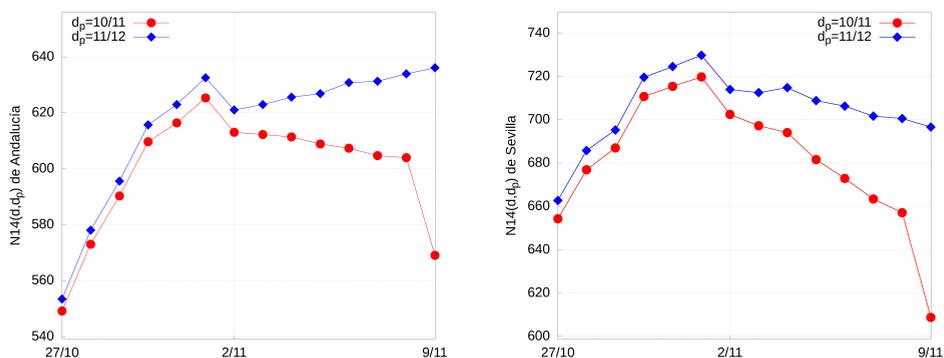


Figura 11: Evolución del índice de incidencia acumulada en 14 días por cien mil habitantes según los datos recogidos el 10/11 (círculos rojos) y el 11/12 (rombos azules) en Andalucía (izquierda) y Sevilla (derecha).

Con el objetivo de cuantificar esta diferencia, en la tabla mostramos la evolución del error relativo (en tanto por ciento) del índice acumulado en 14 días por cien mil habitantes en Andalucía y Sevilla calculado mediante la expresión

$$e_r = \frac{|N14(d, 11/12) - N14(d, 10/11)|}{N14(d, 11/12)},$$

que representaremos en la figura 12.

Día (d)	Error (%) Andalucía	Error (%) Sevilla
27/10	0.78	1.26
28/10	0.88	1.29
29/10	0.89	1.18
30/10	0.98	1.23
31/10	1.05	1.26
1/11	1.14	1.36
2/11	1.31	1.61
3/11	1.74	2.14
4/11	2.32	2.9
5/11	2.95	3.83
6/11	3.86	4.73
7/11	4.4	5.45
8/11	4.96	6.2
9/11	11.78	12.61

Tabla 2: Evolución del error e_r del índice acumulado en 14 días.

Tanto las gráficas de la figura 11 como la tabla 2 muestran una gran diferencia entre los valores del índice acumulado en 14 días de contagios detectados y confirmados $N14(d, d_p)$ notificados el 10 de noviembre y los actualizados varios días más

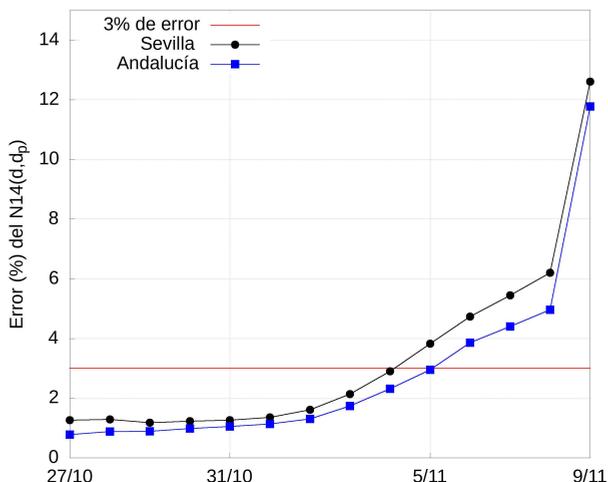


Figura 12: Evolución del error e_r del índice $N14(d, d_p)$ en Andalucía y Sevilla.

tarde (en este ejemplo usamos los datos actualizados un mes después, pero resultados similares se obtienen si en vez de usar la actualización del 11 de diciembre usamos, por ejemplo, las del 17 o 18 de noviembre). Como se muestra en la tabla 2, el día 5 de noviembre, o sea 5 días antes de la primera fecha de publicación utilizada, el error del índice acumulado en 14 días por 100 000 habitantes en Sevilla es igual a 3.83%. De hecho, análisis del mismo tipo de los datos recogidos entre el 16 de septiembre y el 12 de diciembre conducen a resultados cualitativamente similares.

Todo lo anterior muestra que no se deben usar los datos el mismo día en que son publicados pues estos no reflejan realmente la evolución de la pandemia. En el ejemplo analizado queda claro que, al menos, debemos dejar pasar entre seis y siete días en Andalucía si queremos tener un error menor que un 3%, aproximadamente, en el índice acumulado en 14 días por 100 000 habitantes. En otras palabras, necesitamos esperar una semana para que los datos se *consoliden*, es decir, para que se aproximen al número real de contagios confirmados (todo esto asumiendo que se estén rastreando y haciendo las correspondientes pruebas de diagnóstico fiables). Este hecho debería ser tenido en cuenta por las autoridades sanitarias, políticas y, en especial, por los medios de comunicación que, en la mayoría de los casos, suelen usar el último dato oficial publicado cuando nos informan sobre la evolución de la pandemia.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado cómo el uso de las matemáticas puede ayudar a explicar muchas de las medidas sanitarias recomendadas por las autoridades para intentar controlar los contagios durante una epidemia. También mostramos la im-

portancia que tiene interpretar correctamente los datos oficiales, tanto a la hora de tomar medidas como a la hora de informar a la ciudadanía sobre la evolución de la epidemia.

NOTA DE LOS AUTORES: Los distintos programas de MAXIMA usados se pueden descargar desde la web <https://renato.ryn-fismat.es/papers/otras/>.

AGRADECIMIENTOS: R.A.N. ha sido parcialmente financiado por los proyectos de investigación PGC2018-096504-B-C31 (FEDER-EU y Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación), FQM-262 y Feder-US-1254600 (FEDER-EU y Junta de Andalucía). F.J.E. ha sido parcialmente financiado por los proyectos PGC2018-096540-B-I00 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades), BIO-302, US-1254251 (Junta de Andalucía) y PAIUIJA-EI_CTS02 (Universidad de Jaén). N.R.Q. ha sido parcialmente financiada por el proyecto FIS2017-89349-P (Ministerio de Economía y Competitividad).

REFERENCIAS

- [1] R. ÁLVAREZ-NODARSE Y F. J. ESTEBAN, ¿Cuánto puede durar el coronavirus fuera de nuestro organismo?, *Blog del IMUS*, 30 de marzo de 2020, <https://institucional.us.es/blogimus/2020/03/cuanto-puede-durar-el-coronavirus-fuera-de-nuestro-organismo/>
- [2] F. F. ABRAHAM, Functional dependence of drag coefficient of a sphere on Reynolds number, *Phys. Fluids* **13** (1970), 2194–2195.
- [3] N. VAN DOREMALEN ET AL., Aerosol and surface stability of *SARS-CoV-2* as compared with SARS-CoV-1, *The New England Journal of Medicine* **382** (2020), 1564–1567.
- [4] Z. Y. HAN, W. G. WENG Y Q. Y. HUANG, Characterizations of particle size distribution of the droplets exhaled by sneeze, *J. R. Soc. Interface* **10** (2013), no. 88, 20130560.
- [5] JUNTA DE ANDALUCÍA, *Informe COVID-19 en Andalucía*, Consejería de Salud y Familias en colaboración con el Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía, <http://www.juntadeandalucia.es/institutodeestadisticaycartografia/salud/COVID19.html>
- [6] L. D. LANDAU Y E. M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, A Course of Theoretical Physics, Vol. 6, 2.^a edición, Pergamon Press, 1987.
- [7] G. MURILLO-GODÍNEZ, Las gotitas de Flügge, *Revista Médica del Instituto Mexicano del Seguro Social* **47** (2009), no. 3, 290.
- [8] B. E. SCHARFMAN, A. H. TECHET, J. W. M. BUSH Y L. BOUROUBA, Visualization of sneeze ejecta: steps of fluid fragmentation leading to respiratory droplets, *Experiments in Fluids* **57** (2016), art. núm. 24.
- [9] X. XIE, Y. LI, H. SUN Y L. LIU, Exhaled droplets due to talking and coughing, *J. R. Soc. Interface* **6** (2009), Suppl. 6, S703–S714.

- [10] W. F. WELLS, On air-borne infection: II. Droplets and droplet nuclei, *Am. J. Hyg.* **20** (1934), 611–618.
- [11] WORLD HEALTH ORGANIZATION, *Transmission of SARS-CoV-2: implications for infection prevention precautions: Scientific Brief*, 9 de julio de 2020, ref. WHO/2019-nCoV/Sci_Brief/Transmission_modes/2020.3, <https://apps.who.int/iris/handle/10665/333114>

RENATO ÁLVAREZ-NODARSE, IMUS & DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE SEVILLA, C/ TARFIA S/N, 41012 SEVILLA

Correo electrónico: ran@us.es

Página web: <https://renato.ryn-fismat.es>

FRANCISCO J. ESTEBAN, DEPARTAMENTO DE BIOLOGÍA EXPERIMENTAL, UNIVERSIDAD DE JAÉN, CAMPUS LAS LAGUNILLAS S/N, 23071 JAÉN

Correo electrónico: festeban@ujaen.es

Página web: <http://blogs.ujaen.es/festeban/>

NIURKA R. QUINTERO, DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA I, ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR, UNIVERSIDAD DE SEVILLA, 41011 SEVILLA

Correo electrónico: niurka@us.es

Página web: <https://niurka.ryn-fismat.es>