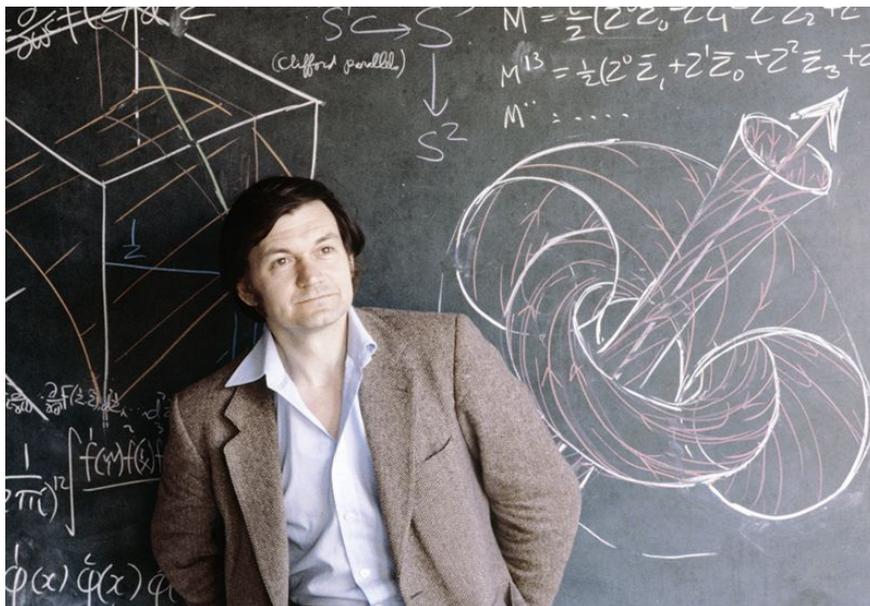


## Sir Roger Penrose: un Premio Nobel de Física para las Matemáticas

por

Óscar García-Prada

RESUMEN. El matemático y físico Roger Penrose es, sin duda, una de las mentes más singulares y originales de nuestro tiempo. Sus teoremas sobre la existencia de singularidades del espacio-tiempo revolucionaron la Cosmología y le han valido el Premio Nobel de Física 2020, compartido con los físicos Reinhard Genzel y Andrea Ghez. Otra de sus contribuciones fundamentales, con un gran impacto en el campo de las Matemáticas, es su Teoría de *Twistors*. Entre el público general, Penrose es universalmente conocido por sus figuras geométricas imposibles, que inspiraron varios diseños de M. C. Escher, sus teselaciones no periódicas del plano, así como sus investigaciones sobre el funcionamiento del cerebro humano.



Roger Penrose, 1980 (Anthony Howarth/Science Photo Library).

## 1. BIOGRAFÍA

Roger Penrose nació en Colchester (Inglaterra) el 8 de agosto de 1931. Su padre, Lionel Penrose, fue experto en genética humana, y tenía un gran interés por las Matemáticas, que supo comunicarle a su hijo. Su hermano mayor, Oliver, que se doctoraría en Física, le contagió muy pronto el interés por la Física. A su madre también la atraían las Matemáticas, pero su formación era médica, como la de su padre. La familia Penrose era, sin duda, una familia ilustre en la vida intelectual británica del siglo XX.

Penrose fue a la escuela en su ciudad natal hasta que la familia, motivada por la Segunda Guerra Mundial, se trasladó a London (Ontario, Canadá), para más tarde regresar a Londres y concluir sus estudios. El primer título universitario lo obtuvo en University College London, seguido del doctorado en la Universidad de Cambridge, bajo la supervisión inicial de Sir William Hodge y más tarde de John Todd (figura 1). Como estudiante de doctorado, Penrose coincidiría con Michael Atiyah que, inversamente a él, fue supervisado inicialmente por Todd para finalmente hacer su tesis doctoral con Hodge (ver [6, 9]). La tesis doctoral de Penrose, concluida en 1958, estuvo dedicada al estudio de métodos tensoriales en Geometría Algebraica. Ya antes de terminar su tesis, Penrose se interesó profundamente por la Física. A ello contribuyeron en gran medida su interacción con Dennis Sciama —físico amigo de su hermano Oliver, y que años más tarde sería el director de tesis de Stephen Hawking—, así como cursos que había seguido impartidos por Hermann Bondi (director de tesis de Sciama) y Paul Dirac.



Figura 1: Sir William Hodge (1903–1975) y John Todd (1908–1994).

Acabada la tesis, Penrose recibió una beca de investigación de la OTAN que le permitió pasar tres años en Estados Unidos, primero en Princeton y más tarde en la Universidad de Syracuse. A su regreso a Inglaterra, en 1962–1963 fue Investigador Asociado en el King’s College (Londres), antes de regresar a Estados Unidos como Profesor Visitante Asociado durante el curso 1963–1964 en la Universidad de Texas en Austin. En 1964 fue nombrado *Reader* en Birkbeck College (Londres), donde dos años más tarde sería promocionado a *Professor in Applied Mathematics*. En 1973 fue nombrado para ocupar la Cátedra Rouse Ball de la Universidad de Oxford, en la que continuó hasta convertirse en Profesor Rouse Ball Emérito en 1998. Su incorporación

a la Universidad de Oxford coincide con el regreso allí de Michael Atiyah, con quien iniciaría una larga interacción. En relación a esto, en [9, 10] Sir Michael diría:

«Cuando estuve en Princeton en aquella época, antes de volver a Oxford, hablé con Freeman Dyson y hablamos sobre Roger Penrose. Dijo: “¡Ah!, Roger Penrose ha hecho cosas muy buenas sobre los agujeros negros, que yo siempre he admirado, pero ha hecho algunas cosas curiosas sobre los *twistors* que yo no entiendo, quizás cuando regreses a Oxford entenderás lo que son los *twistors*” y tenía razón, toda la razón. Ese fue el nexo de unión.»

Durante el período 1983–1987, Penrose simultaneó su puesto en Oxford con el de Profesor Edgar Odell Lovett en la Universidad de Rice en Houston. Otros puestos ocupados por Penrose incluyen el de Profesor Gresham de Geometría en el Gresham College de Londres y el de Profesor Visitante Distinguido Francis and Helen Pentz de Física y Matemáticas en la Universidad del Estado de Pensilvania.

Además del Premio Nobel de Física 2020 compartido con los físicos Reinhard Genzel y Andrea Ghez [12], Roger Penrose ha recibido multitud de premios y honores. Entre ellos cabe señalar los siguientes: Dannie Heineman Prize for Astrophysics (1971); Fellow of the Royal Society (FRS) en 1972; Eddington Medal de la Royal Astronomical Society en 1975, conjuntamente con Stephen Hawking; Royal Society Royal Medal (1985); Wolf Foundation Prize for Physics en 1988, conjuntamente con Stephen Hawking; Dirac Medal y Prize of the British Institute of Physics (1989); Albert Einstein Medal (1990); Naylor Prize de la London Mathematical Society (1991). Durante el período 1992–1995 fue Presidente de la International Society on General Relativity and Gravitation. En 1994 recibió el título de *Sir* por sus servicios a la Ciencia. En 1998 fue elegido Asociado Extranjero de la National Academy of Sciences de Estados Unidos. En 2000 fue nombrado miembro de la Order of Merit del Reino Unido. Ha recibido numerosos doctorados *honoris causa* por prestigiosas universidades. En 2004 recibió la De Morgan Medal de la London Mathematical Society por sus numerosas y originales contribuciones a la Física Matemática. La LMS explicaba así la concesión de la medalla:

Su profundo trabajo en Relatividad General ha sido un factor esencial en nuestra comprensión de los agujeros negros. Su desarrollo de la Teoría de *Twistors* ha proporcionado un enfoque fructífero y de gran belleza para las ecuaciones clásicas de la Física Matemática. Sus teselaciones del plano subyacen a los recientemente descubiertos cuasicristales.

En cuanto a su vida personal, Penrose está casado con Vanessa Thomas, Directora de Desarrollo Académico en la Escuela Cokethorpe (cerca de Oxford) y antigua responsable de Matemáticas en la Escuela Abingdon, con la que tiene un hijo. Tiene otros tres hijos de un matrimonio anterior con Joan Isabel Wedge, con quien se casó en 1959.

## 2. OBRA

Las principales contribuciones científicas de Penrose se enmarcan en los campos de la Física Matemática y la Geometría. Aunque, como ya se ha mencionado anteriormente, al inicio de su carrera Penrose se ocupó fundamentalmente de problemas en Geometría Algebraica, muy pronto su principal interés derivó hacia la Física Matemática y más concretamente a problemas matemáticos en la Teoría de la Relatividad General. Sus teoremas sobre la existencia de singularidades en modelos del espacio-tiempo derivados de la teoría de Einstein marcan un hito de enormes consecuencias en Cosmología en relación con la estructura global del universo. Otra de sus contribuciones fundamentales es la Teoría de Twistors, que Penrose introduce en su intento de unificar la Relatividad General con la Física Cuántica, y que ha resultado ser una herramienta enormemente poderosa en Física Matemática, Geometría y Teoría de Representaciones de Grupos de Lie.

Entre el público general, Penrose es universalmente conocido por muchas otras aportaciones, como las figuras geométricas imposibles (como las de la figura 2) que encontró con su padre Lionel Penrose, y que inspiraron varios diseños de M. C. Escher, sus teselaciones no periódicas del plano, una muestra de las cuales decora la entrada del actual Instituto de Matemáticas de la Universidad de Oxford (figura 3), así como sus investigaciones sobre el funcionamiento del cerebro humano.

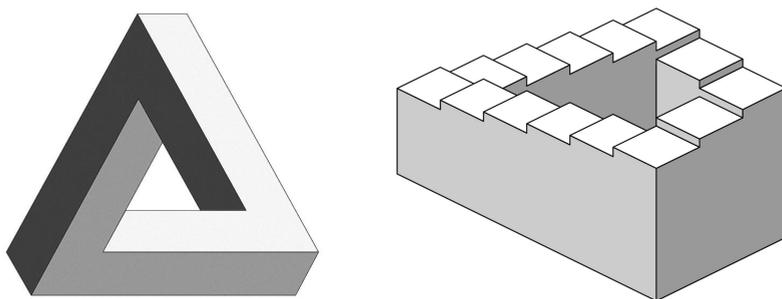


Figura 2: Triángulo y escalera de Penrose.

En lo que sigue, hemos seleccionado sólo algunas de las principales contribuciones de Penrose, centrándonos fundamentalmente en los aspectos matemáticos de las mismas, y en algunos de los desarrollos posteriores que estas contribuciones han motivado en el trabajo de otros matemáticos. El lector interesado en otros aspectos de su trabajo puede consultar la entrevista realizada por el autor a Penrose a finales de los años 1990 [6, 7, 8] y la reciente entrevista de Lionel Mason [16], así como el resto de la bibliografía ofrecida más abajo.

### 2.1. SINGULARIDADES DEL ESPACIO-TIEMPO EN RELATIVIDAD GENERAL

En Relatividad General, la estructura matemática del espacio-tiempo —la colección de todos los eventos— es la de una variedad diferenciable equipada con una



Figura 3: Entrada al Instituto de Matemáticas de Oxford con una teselación de Penrose.

métrica lorentziana. Así pues el lenguaje matemático de la Relatividad General es fundamentalmente el de la Geometría Diferencial: variedades diferenciables (espacios localmente modelados sobre el espacio afín  $\mathbb{R}^n$  con cambios de coordenadas diferenciables), campos vectoriales y tensoriales, formas diferenciales, métricas, conexiones y sus derivadas covariantes y tensores de curvatura asociados (tensores de Riemann, Ricci, Weyl...), etc.

Siendo más concretos, el espacio-tiempo es un par  $(M, g)$  formado por una variedad diferenciable conexa  $M$  de dimensión cuatro y una métrica de Lorentz  $g$  en  $M$  —adoptamos la convención de considerar  $g$  con signatura  $(+, +, +, -)$ —. Un vector  $v$  tangente a un punto de  $M$  se dice de *tipo temporal* si  $g(v, v) < 0$ , de *tipo espacial* si  $g(v, v) > 0$  y de *tipo nulo* si  $g(v, v) = 0$ .

El contenido de materia del espacio-tiempo viene descrito por varios campos sobre  $M$ , como el campo electromagnético, el campo de neutrinos, etc. Estos campos satisfacen ecuaciones diferenciales que pueden ser expresadas como relaciones entre tensores sobre  $M$  en las que todas las derivadas con respecto a la posición son derivadas covariantes definidas por la conexión afín simétrica determinada por  $g$ . Los campos de materia deben satisfacer dos postulados fundamentales que determinan las ecuaciones de la Relatividad General, y que de hecho se imponen también en la Relatividad Especial. El primero es el *principio de causalidad local* por el que, si  $p$  y  $q$  son dos puntos de un entorno convexo  $U$ , entonces una señal puede ser enviada en  $U$  entre  $p$  y  $q$  si y sólo si  $p$  y  $q$  pueden unirse mediante una curva diferenciable enteramente contenida en  $U$  cuyo vector tangente en cada punto sea

no nulo y de tipo temporal o de tipo nulo, es decir, no de tipo espacial. La estructura causal es muy importante llegando a determinar la estructura topológica de  $M$ . El segundo postulado que los campos de materia deben satisfacer es el *principio de conservación local de la energía y el momento*. Esto viene reflejado en la existencia de un tensor simétrico (una forma bilineal simétrica, si se prefiere)  $T$  denominado *tensor de energía-momento* que depende de los campos de materia, de sus derivadas covariantes y de la métrica, y que satisface determinadas propiedades.

El tercer postulado de la Teoría de la Relatividad es que  $g$  viene determinada por las *ecuaciones de Einstein*. Estas ecuaciones, obtenidas a partir de principios variacionales para un cierto lagrangiano, vienen dadas por

$$R - \frac{1}{2}sg + \lambda g = T,$$

donde  $R$  es el *tensor de Ricci* de  $g$ ,  $s$  es la *curvatura escalar* y  $\lambda$  es una constante denominada *constante cosmológica*. El tensor de Ricci es un tensor del mismo tipo que  $g$  y se puede pensar en él como una forma bilineal simétrica en cada punto de  $M$ . Puesto que ambos lados de la ecuación son simétricos, las ecuaciones de Einstein forman un conjunto de diez ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales acopladas para la métrica y sus primeras y segundas derivadas, de las cuales sólo seis son independientes.

Debido a la complejidad de estas ecuaciones, es muy difícil encontrar soluciones exactas excepto en espacios con mucha simetría. El espacio-tiempo vacío más simple de la Relatividad General es el *espacio-tiempo de Minkowski*  $M^4$ . En este caso,  $M = \mathbb{R}^4$  y  $g$  es la métrica de Lorentz plana, que en términos de las coordenadas naturales  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  puede expresarse en la forma

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 - (dx_4)^2.$$

Otras soluciones exactas en el vacío son el *espacio-tiempo de De Sitter*, con curvatura escalar constante  $s > 0$  y topología  $S^3 \times \mathbb{R}^1$ , y el *espacio-tiempo de anti De Sitter*, con curvatura escalar constante  $s < 0$  y topología  $\mathbb{R}^3 \times S^1$ .

Existen también soluciones exactas en presencia de materia en las que el espacio-tiempo es espacialmente homogéneo. Esto significa que hay un grupo de isometrías que actúa libremente en  $M$ , con subvariedades de transitividad de dimensión tres y cuyos vectores tangentes son de tipo espacial. En otras palabras, cualquier punto sobre cada una de estas hipersuperficies es equivalente a cualquier otro punto de la misma hipersuperficie. El *espacio-tiempo de Robertson-Walker* es un espacio con simetría esférica exacta, lo que implica que es espacialmente homogéneo y admite un grupo de isometrías de dimensión seis cuyas subvariedades de transitividad son hipersuperficies de tipo espacial con curvatura escalar constante (el espacio-tiempo de Minkowski, y los espacio-tiempo de De Sitter y de anti De Sitter son casos particulares de esta situación). Por supuesto, el universo no es exactamente espacialmente homogéneo, hay irregularidades locales como estrellas y galaxias, pero parece razonable suponer que el universo es espacialmente homogéneo a una escala suficientemente grande.

Si bien las soluciones espacialmente homogéneas proporcionan buenos modelos del universo a gran escala, son inadecuadas para describir, por ejemplo, la geometría local del espacio-tiempo en el sistema solar. Esta geometría puede ser descrita de manera bastante aproximada por la *solución de Schwarzschild*, que representa el espacio-tiempo vacío esféricamente simétrico fuera de un cuerpo masivo esféricamente simétrico. Usando coordenadas espaciales polares y  $t$  para la coordenada temporal, la métrica puede darse en la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \quad (1)$$

con  $r > 2m$ , donde  $m$  es la masa del cuerpo que produce el campo.

Esta métrica es singular para  $r = 0$  y  $r = 2m$  (por supuesto, están también las singularidades triviales de las coordenadas polares cuando  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ ). No obstante, la singularidad en  $r = 2m$  no es una singularidad física real, sino resultante de la elección de coordenadas. En otras palabras, eligiendo coordenadas convenientes se comprueba que la métrica de Schwarzschild se puede extender a una variedad más grande. Por el contrario, en  $r = 0$  hay una verdadera singularidad.

Otras soluciones exactas interesantes que han sido consideradas en la literatura incluyen la *solución de Reissner-Nordström*, la *solución de Kerr*, el *universo de Gödel*, el *espacio-tiempo de Taub-NUT*, etc.

Una de las contribuciones científicas más importantes de Penrose es la demostración de la existencia de singularidades en el espacio-tiempo bajo ciertas hipótesis sin condiciones de simetría adicionales. De este resultado se deriva teóricamente la existencia de agujeros negros, regiones del espacio donde la gravedad es tan fuerte que ninguna partícula de materia, ni siquiera la luz ni señal alguna, puede escapar de ellas.

Para explicar qué se entiende por singularidad en el contexto de los teoremas de Penrose, recordemos que, si  $(M, g)$  es un espacio-tiempo, la conexión y derivada covariante asociada determinadas por  $g$  permiten definir la noción de *transporte paralelo* a lo largo de una curva en  $M$ . Esto es fundamental desde el punto de vista físico para relacionar la información obtenida por observadores situados en puntos distintos del espacio-tiempo. A su vez, el transporte paralelo permite definir la noción de *curva geodésica* en  $M$ , como una curva  $c(s)$  para la que el vector tangente  $\dot{c}(s)$  para cualquier valor del parámetro  $s$  coincide con el transporte paralelo de  $\dot{c}(s_0)$ , donde  $s_0$  es el valor inicial del parámetro.

Decir que  $(M, g)$  es *geodésicamente completo* significa que cualquier geodésica  $c(s)$  puede ser extendida a valores arbitrarios del parámetro  $s$ . En el caso de una variedad riemanniana, es decir, cuando se considera en  $M$  una métrica  $g$  definida positiva, la completitud geodésica es equivalente a la completitud métrica para la distancia definida por  $g$ . En el caso lorentziano,  $g$  no define una distancia y la única noción de completitud es la completitud geodésica. Ahora bien, se pueden distinguir diversos tipos de completitud geodésica dependiendo de si  $c(s)$  es una curva espacial, temporal o nula (lo que quiere decir que el campo vectorial tangente es del tipo correspondiente). Se podría pensar que el que un espacio-tiempo sea

geodésicamente completo para un tipo de curva debería implicar que lo fuera para los otros dos tipos, pero esto no es así.

La incompletitud geodésica de tipo temporal tiene un significado físico inmediato, ya que representa la posibilidad de que haya partículas u observadores moviéndose libremente cuyas historias dejan de existir después (o antes) de un intervalo finito de tiempo. Por tanto, parece razonable considerar un tal espacio-tiempo como singular. Por motivos similares aunque un tanto menos aparentes, un espacio-tiempo con incompletitud geodésica de tipo nulo también debería considerarse singular ya que las geodésicas de tipo nulo corresponden a las historias de partículas sin masa en reposo. Así pues, se adopta el punto de vista de que la completitud geodésica de tipos temporal y nulo son condiciones mínimas para que un espacio-tiempo esté libre de singularidades. Consecuentemente, *si un espacio-tiempo presenta incompletitud geodésica de tipos temporal o nulo se dirá que tiene una singularidad*. Este es el punto de vista que se toma en el teorema de singularidades de Penrose y posteriores teoremas de singularidades de Penrose y Hawking.

El primer teorema sobre singularidades en el que no se suponía ninguna hipótesis de simetría fue dado por Penrose [18]. Este teorema estaba diseñado para demostrar la existencia de una singularidad en una estrella que colapsa dentro de su radio de Schwarzschild. Penrose demostró que una vez que la estrella ha pasado dentro de la superficie de Schwarzschild (la superficie  $r = 2m$  en (1)) ya no puede salir de ella. Por supuesto, como se mencionó anteriormente, la solución de Schwarzschild tiene simetría esférica, pero Penrose encontró un criterio más general que se aplica a soluciones sin simetría exacta. Concretamente, que exista una *superficie cerrada atrapada*  $\mathcal{S}$ . Esto significa que  $\mathcal{S}$  es una superficie compacta sin borde de tipo espacial y tal que las dos familias de geodésicas de tipo nulo ortogonales a  $\mathcal{S}$  convergen a  $\mathcal{S}$ . Se puede pensar que  $\mathcal{S}$  esta inmersa en un campo gravitatorio tan fuerte que incluso los rayos de luz no pueden salir y, de hecho, convergen. Puesto que nada puede viajar más rápido que la luz, la materia dentro de  $\mathcal{S}$  queda atrapada entre dos superficies de área cada vez más pequeña. Y por lo tanto algo debe fallar. Esto es lo que se demuestra rigurosamente en el siguiente teorema.

TEOREMA (Penrose, 1965, [18]). *Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo que verifica las siguientes condiciones:*

- (i)  $R(v, v) \geq 0$  para todos los vectores de tipo nulo  $v$ ;
- (ii) existe una *hipersuperficie de Cauchy*  $\mathcal{H}$  no compacta en  $M$ ;
- (iii) existe una *superficie cerrada atrapada*  $\mathcal{S}$  en  $M$ .

*Entonces  $(M, g)$  es geodésicamente incompleto de tipo nulo.*

La condición (i), denominada *condición de convergencia nula*, tiene que ver con el tensor energía-momento. Por otro lado, una *hipersuperficie de Cauchy* es una hipersuperficie de tipo espacial que no es intersecada más de una vez por curvas que no son de tipo espacial. La existencia de una hipersuperficie de este tipo, estipulada en la condición (ii), está relacionada con el postulado de causalidad local mencionado anteriormente. El estudio de las relaciones de causalidad resulta ser equivalente al estudio de la geometría conforme de  $M$ , es decir, del conjunto de métricas  $g' = \lambda g$

donde  $\lambda$  es una función diferenciable con  $\lambda(p) > 0$  para todo punto  $p \in M$ . La estructura conforme de  $M$  determinada por  $g$  viene así descrita por la geometría, que sólo depende de  $g$  salvo múltiplo por una función  $\lambda$  como la indicada anteriormente.

En 1967 Stephen Hawking, utilizando las ideas y los métodos de Penrose, demuestra un teorema similar en el que, bajo ciertas condiciones, se obtiene un espacio-tiempo con incompletitud geodésica de tipo temporal. Más tarde, en 1970, Hawking y Penrose conjuntamente [14] demuestran un teorema de existencia de singularidades en el que, bajo determinadas condiciones, el espacio-tiempo presenta una incompletitud geodésica para geodésicas de tipo temporal y geodésicas de tipo nulo. En todos estos teoremas, las técnicas de demostración son las de la Geometría y Topología Diferencial (ver [21, 13, 15] para más detalles).

En la entrevista realizada por el autor a finales de los años 1990 [6] (véase [7, 8] para la versión original en inglés), ante la pregunta de cuáles son las implicaciones más espectaculares de los teoremas de existencia de singularidades, Penrose respondería lo siguiente:

«Las singularidades nos dicen que las leyes de la Física, las leyes de la relatividad clásica, son, en cierto sentido, limitadas. Siempre he considerado las singularidades como una virtud particular de la Relatividad General. Nos marcan las limitaciones de la teoría, algo inusual. Hay quien piensa, por el contrario, que se trata de una debilidad de la teoría, porque tenía esos defectos. Pero quiero resaltar que realmente nos marcan el punto donde se hace precisa otra Física. Creo que este es un potente ingrediente de la teoría. Se trata de un punto de encuentro de la Teoría Cuántica con la Relatividad General, un punto donde intervienen juntas: las cosas son a la vez pequeñas y masivas o, si prefieres, en lo pequeño es donde los efectos cuánticos son importantes mientras que en lo masivo es donde la Relatividad General predomina. De manera que cuando se presentan juntas, y ese es el caso de las singularidades, los efectos de ambas, Relatividad General y Mecánica Cuántica, deben ser analizados agregadamente. Esto se aplica al Big Bang y se aplica a las singularidades en los agujeros negros, y podría ser aplicable a todo el universo si fuese a colapsar, y es que el universo es, si se quiere, simplemente un gran conglomerado de agujeros negros: un único, enorme agujero negro, si así lo prefieres. Al comienzo, el estudio de las singularidades de los agujeros negros estaba justificado porque de partida ya se sabía que había una singularidad en el Big Bang. Las singularidades en los agujeros negros son exactamente lo mismo, pero el tiempo fluye en ella en la dirección contraria. De manera que si se tiene una se debería tener la otra.»

## 2.2. TEORÍA DE TWISTORS

En un intento de unificar la Relatividad General y la Teoría Cuántica, Penrose introduce en [19] la Teoría de Twistors en 1967, apenas dos años después de sus resultados sobre la existencia de singularidades del espacio-tiempo. La idea básica de esta teoría es remplazar el espacio-tiempo usual, en el que muchos de los fenómenos

de la Física moderna se presentan, por el espacio de twistors —el espacio proyectivo complejo de dimensión tres—. En particular, los fenómenos físicos, y las ecuaciones que los describen, deben ser reinterpretados en este nuevo espacio, con el objetivo de obtener nueva información sobre los mismos. La filosofía esencial de la Teoría de Twistors es que ecuaciones diferenciales en el espacio-tiempo de la Física puedan ser tratadas como problemas algebraicos en Geometría Compleja. Un aspecto básico de la Teoría Cuántica es que los números complejos remplazan a los números reales en la descripción de los procesos físicos. La superposición lineal cuántica se desarrolla siempre con coeficientes complejos, pero no se considera que esto tenga una conexión íntima con la estructura del espacio y el tiempo. En la Teoría de Twistors los números complejos juegan un papel básico en la determinación de la propia estructura del espacio-tiempo. Así que se puede decir que los mismos números complejos gobiernan tanto el espacio-tiempo como la Mecánica Cuántica.

La Teoría de Twistors involucra matemáticas que son al tiempo muy clásicas y muy modernas. Incluye la geometría clásica del siglo XIX, como los estudios de Grassmann, Plücker y Felix Klein sobre la Geometría Algebraica Proyectiva —la geometría de rectas, planos, etc. en el espacio proyectivo—. Por otro lado, hace uso de la teoría de haces, cohomología de haces y sucesiones espectrales desarrollada por Jean Leray en los años 1940, y que se convirtió en una herramienta básica en Topología Algebraica, Varias Variables Complejas y Geometría Algebraica gracias al trabajo de Jean-Pierre Serre y Henri Cartan.

Uno de los grandes éxitos de la Teoría de Twistors tiene lugar en el estudio de varias ecuaciones diferenciales de campo no lineales, proporcionando importante información sobre las mismas, al tiempo que da un nuevo punto de vista sobre las ecuaciones lineales de campo clásicas más estudiadas. Por ejemplo, se han encontrado nuevas familias de soluciones a ecuaciones no lineales, en muchos casos proporcionando una clasificación completa de las mismas, que no eran tratables mediante los métodos clásicos. Entre las ecuaciones que se han podido tratar con las nuevas técnicas twistoriales se incluyen las ecuaciones de Maxwell, Dirac, Yang-Mills, y diversas versiones acopladas.

El lenguaje matemático básico de la Teoría de Twistors es el de la Geometría Diferencial Compleja y la Geometría Algebraica. Los objetos centrales de estudio son las variedades diferenciables complejas. En analogía con las variedades diferenciables reales consideradas anteriormente, una variedad diferenciable compleja es una variedad topológica dotada de una estructura local determinada por abiertos de  $\mathbb{C}^n$ , donde los cambios de coordenadas ahora vienen descritos por funciones holomorfas. Alternativamente, se puede pensar en una variedad diferenciable compleja como una variedad diferenciable real equipada de un endomorfismo  $J$  del espacio tangente en cada punto con  $J^2 = -\text{Id}$ , lo que se denomina una estructura casi-compleja, verificando cierta condición de integrabilidad que permite justamente recuperar el punto de vista anterior en términos de coordenadas. Bajo determinadas condiciones, una variedad diferenciable compleja puede expresarse como el lugar de anulación de varios polinomios complejos adquiriendo la estructura de una variedad algebraica compleja, o variedad algebraica compleja proyectiva si puede inyectarse en un espacio proyectivo complejo.

Las variedades complejas que juegan un papel central en la Teoría de Twistors son las denominadas variedades de banderas. Se trata de generalizaciones naturales del espacio proyectivo y de las grassmannianas. Para explicar en qué consisten, consideremos un espacio vectorial complejo  $V$  de dimensión  $n$  y una sucesión  $\{d_1, \dots, d_m\}$  de números enteros positivos que satisfacen

$$1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_m < n.$$

La *variedad de banderas*  $F_{d_1, \dots, d_m}(V)$  de tipo  $(d_1, \dots, d_m)$  está definida por

$$\{(V_1, \dots, V_m) : V_j \text{ subespacio de } V \text{ de dimensión } d_j, V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m\}.$$

Las variedades de banderas son variedades diferenciables complejas compactas, de hecho variedades algebraicas complejas proyectivas. Asimismo, son *variedades homogéneas* para el grupo  $GL(V)$  de automorfismos del espacio vectorial  $V$ . Es decir,  $GL(V)$  actúa de manera transitiva sobre ellas, pudiéndose expresar estas como cocientes  $GL(V)/P$  donde  $P$  es el grupo de automorfismos que deja fija una determinada bandera —lo que se denomina un subgrupo parabólico de  $GL(V)$ —.

El *espacio de twistors*  $\mathbb{T}$  es un espacio vectorial complejo de dimensión 4. Asociadas a  $\mathbb{T}$  consideraremos las siguientes variedades de banderas:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &:= F_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{P}_3(\mathbb{C}), \\ \mathbb{M} &:= F_2(\mathbb{T}) \cong \mathbb{G}_{2,4}(\mathbb{C}), \\ \mathbb{F} &:= F_{12}(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  es el espacio proyectivo complejo de dimensión 3 y  $\mathbb{G}_{2,4}(\mathbb{C})$  es la grassmanniana de planos en  $\mathbb{C}^4$ . Estos espacios se denominan

- $\mathbb{P}$  — *espacio proyectivo de twistors,*
- $\mathbb{M}$  — *complejificación del espacio de Minkowski compactificado,*
- $\mathbb{F}$  — *espacio de correspondencia entre  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{M}$ .*

La variedad compleja  $\mathbb{M}$ , de dimensión compleja 4, se denomina de este modo porque, en efecto, el espacio de Minkowski real  $M^4$  que vimos anteriormente se puede realizar de modo natural en  $\mathbb{M}$  como un subconjunto real. De hecho, lo mismo sucede con el espacio euclídeo real  $E^4$  de dimensión 4, como veremos posteriormente.

Existe una fibrición doble

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{F} & \\ \mu \swarrow & & \searrow \nu \\ \mathbb{P} & & \mathbb{M} \end{array} \tag{2}$$

definida por  $\mu(V_1, V_2) = V_1$  y  $\nu(V_1, V_2) = V_2$ . Esta fibrición doble permite transferir información del espacio de twistors  $\mathbb{P}$  (o subconjuntos de  $\mathbb{P}$ ) al espacio de Minkowski  $\mathbb{M}$  (o subconjuntos de  $\mathbb{M}$ ). Si  $A$  es un subconjunto de  $\mathbb{P}$ , la correspondencia de  $A$

es  $\nu \circ \mu^{-1}(A) \subset \mathbb{M}$ ; y, de modo similar, si  $A$  es un subconjunto de  $\mathbb{M}$ , la correspondencia inversa de  $A$  es  $\mu \circ \nu^{-1}(A) \subset \mathbb{P}$ . El objetivo básico de la geometría twistorial es la comprensión de esta transferencia de información.

Esta correspondencia se conoce clásicamente como *correspondencia de Klein*. En este contexto  $\mathbb{M}$  se denomina *cuádriga de Klein*, y puede identificarse vía la aplicación de Plücker como la cuádriga de  $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$  dada en coordenadas homogéneas por la ecuación

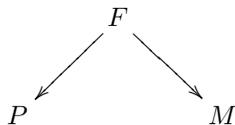
$$\sum_{i=1}^5 z_i^2 = z_6^2.$$

La cuádriga de Klein parametriza rectas proyectivas complejas en  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ : cada punto de la cuádriga corresponde a una recta proyectiva de  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ .

Para recuperar el espacio-tiempo de Minkowski real se dota a  $\mathbb{T}$  de una forma cuadrática hermitica  $Q$  de signatura  $(2, 2)$  y se considera

$$M := \{V_2 \in \mathbb{M} : Q(V_2) = 0\}. \quad (3)$$

El conjunto  $M$  es una subvariedad real de  $\mathbb{M}$ , es decir, es el lugar de puntos fijos de  $\mathbb{M}$  bajo una conjugación (una involución antiholomorfa), y resulta ser la compactificación conforme del espacio-tiempo de Minkowski real  $M^4$  considerado anteriormente, que topológicamente es  $S^3 \times S^1$ . Recordemos que la compactificación conforme de una variedad equipada de una métrica (lorentziana o riemanniana) es una variedad compacta con una métrica, de modo que la variedad inicial se inyecta en un abierto de la compactificación a través de una aplicación conforme. La correspondencia twistorial dada por (2) se puede restringir a



donde  $P \subset \mathbb{P}$  y  $F \subset \mathbb{F}$  se definen de modo análogo a (3).

La Teoría de Twistors es, en parte, un estudio geométrico de la física conformemente invariante en el espacio-tiempo de Minkowski  $M^4$ , es decir, la física que resulta invariante bajo la acción del grupo de transformaciones que preservan la estructura conforme de  $\mathbb{M}^4$ . Las ecuaciones de Maxwell son conformemente invariantes, del mismo modo que lo son las ecuaciones que describen campos sin masa con espín arbitrario, entre las que se incluyen las ecuaciones de Dirac de los neutrinos, las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Einstein linealizadas. Inicialmente Penrose [20] (ver [23, 24] para los detalles), explotando la correspondencia (2), mostró cómo soluciones de estas ecuaciones en  $M^4$  se pueden expresar como integrales de contorno de funciones holomorfas libres sobre curvas en el espacio proyectivo de twistors  $\mathbb{P}$ . Más tarde se dio cuenta de que la libertad en la elección de la función para una solución dada era exactamente la libertad en elegir un representante de Čech de una clase de cohomología de haces. El isomorfismo resultante entre el grupo de cohomología de haces en una región de  $\mathbb{P}$  y soluciones a las ecuaciones de masa

nula en reposo en  $M^4$  se conoce como *transformada de Penrose*. Esquemáticamente, esta transformada establece la correspondencia siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soluciones a las ecuaciones de onda,} \\ \text{ecuaciones de Dirac,} \\ \text{ecuaciones de Maxwell, y} \\ \text{ecuaciones de Einstein linealizadas} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Cohomología de haces} \\ \text{en abiertos de } \mathbb{P} \cong \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \end{array} \right\}.$$

Pero es en el estudio de las ecuaciones de Yang-Mills donde la Teoría de Twistors se revela especialmente potente, gracias a la *correspondencia de Ward*, desarrollada inicialmente por Richard Ward, estudiante de Penrose. Nos centraremos en el caso del espacio euclídeo  $E^4$ , ya que es en esta situación en la que esta correspondencia ha tenido las aplicaciones más importantes. No obstante, la correspondencia es igualmente válida en el caso del espacio-tiempo de Minkowski  $M^4$ .

Recordemos algunas nociones básicas de la Teoría de Yang-Mills. Su objeto de estudio son las conexiones (correspondientes a los potenciales *gauge* en la teoría física) en fibrados principales sobre una variedad diferenciable equipada de una métrica. Por ahora supondremos que la variedad es el espacio euclídeo  $E^4$ . Como en este caso la variedad diferenciable subyacente es  $\mathbb{R}^4$ , un fibrado principal  $P$  es simplemente el producto  $P = \mathbb{R}^4 \times G$ , donde  $G$  es un grupo de Lie. Para centrar ideas, supondremos que  $G$  es el grupo de matrices unitarias  $U(n)$ , es decir, el grupo de transformaciones de  $\mathbb{C}^n$  que preserva el producto hermítico definido positivo estándar. Como en el caso de la conexión determinada por una métrica sobre una variedad mencionado anteriormente, una conexión en  $P$  permite hablar de transporte paralelo, de derivadas covariantes y de curvatura. Desde el punto de vista matemático, una *conexión*  $A$  en  $P$  es una 1-forma a valores en el álgebra de Lie de  $U(n)$  —las matrices antihermíticas  $n \times n$ , donde recordemos que una matriz  $n \times n$  es antihermítica si su traspuesta conjugada es menos la matriz—. En términos de las coordenadas naturales  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $\mathbb{R}^4$ ,  $A$  se puede escribir como

$$A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4,$$

donde los elementos  $A_i$  son matrices antihermíticas. Asociada a la conexión está el tensor de *curvatura*  $F_A$ , definido por

$$F_A = dA + A \wedge A,$$

donde  $\wedge$  es el producto exterior de 1-formas, combinado con el corchete de Lie en la parte matricial. En coordenadas,  $F_A = \sum_{i < j} F_{ij} dx_i \wedge dx_j$ , donde

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + [A_i, A_j] \tag{4}$$

y  $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$  es el corchete de Lie. Así pues,  $F_A$  es una 2-forma a valores en el álgebra de Lie de las matrices antihermíticas.

Un ingrediente fundamental de la teoría es el operador  $*$  de Hodge, que actúa sobre una 2-forma  $\alpha = \sum_{i < j} \alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j$  produciendo otra 2-forma  $*\alpha$ , dual de  $\alpha$ ,

con componentes  $(*\alpha)_{12} = \alpha_{34}$ , etc. Este operador satisface  $*^2 = 1$  y permite definir un producto  $L^2$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \alpha \wedge * \beta,$$

ya que  $\alpha \wedge * \beta$  es una 4-forma y por lo tanto una forma de volumen en  $\mathbb{R}^4$ . El *funcional de Yang-Mills* en el espacio de conexiones se define como

$$\|F_A\|^2 = \langle F_A, F_A \rangle = - \int_{\mathbb{R}^4} \text{Traza}(F_A \wedge * F_A), \quad (5)$$

donde el operador de Hodge aplicado a  $F_A$  actúa sobre las dos formas  $dx_i \wedge dx_j$  sin hacer nada a las matrices antihermíticas  $F_{ij}$ . Aplicando los principios variacionales usuales se derivan las *ecuaciones de Yang-Mills*, que concisamente se pueden escribir como

$$d_A(*F_A), \quad (6)$$

donde  $d_A = d + A$  es la derivada covariante definida por la conexión  $A$ . Escritas en coordenadas estas ecuaciones son un sistema, en general no lineal, de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden para las funciones matriciales  $A_i$ . Es interesante observar que, cuando  $G = U(1)$ , las ecuaciones de Yang-Mills son lineales y coinciden con las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo en el espacio vacío. La no linealidad de las ecuaciones de Yang-Mills aparece justamente cuando el grupo  $G$  es no abeliano.

Existen soluciones especiales a las ecuaciones de Yang-Mills denominadas instantones. Un *instantón* es una conexión  $A$  que satisface la condición

$$*F_A = \pm F_A,$$

es decir, que  $F_A$  es autodual o antiautodual. Una conexión de este tipo es una solución de (6) por el simple motivo de que toda conexión  $A$  verifica la identidad de Bianchi  $d_A F_A = 0$ . Nos centraremos en el caso en el que  $F_A$  es antiautodual, reservando la denominación de instantón para esta situación. Así pues,  $A$  es un instantón si satisface el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden para las funciones matriciales  $A_i$

$$\begin{aligned} F_{12} + F_{34} &= 0, \\ F_{14} + F_{23} &= 0, \\ F_{13} + F_{42} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $F_{ij}$  viene dado por (4).

La correspondencia de Ward relaciona instantones sobre el espacio euclídeo  $E^4$  con ciertos objetos holomorfos en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  identificado con el espacio proyectivo de twistors  $\mathbb{P}$ . En el caso que nos ocupa, en el que  $G = U(n)$ , estos objetos son fibrados vectoriales holomorfos de rango  $n$  sobre  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Un *fibrado vectorial holomorfo* de rango  $n$  sobre una variedad compleja se identifica en términos de una colección de abiertos  $\{U_i\}$  de la variedad compleja que la recubren con el producto  $U_i \times \mathbb{C}^n$ , de modo que en la intersección de los abiertos  $U_i$  y  $U_j$  ambas

identificaciones se relacionan por funciones holomorfas de  $U_i \cap U_j$  al grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{C})$ .

Para dar una idea de cómo se llega a la correspondencia de Ward es interesante comprender cómo se puede realizar el espacio euclídeo  $E^4$  dentro de la variedad compleja  $\mathbb{M}$  descrita anteriormente, de un modo análogo a la realización en  $\mathbb{M}$  del espacio-tiempo de Minkowski  $M^4$  y su compactificación conforme. De hecho, como veremos, en  $\mathbb{M}$  vive la esfera  $S^4$  con su métrica natural, que es la compactificación conforme de  $E^4$ . Es importante observar que el funcional de Yang-Mills es invariante bajo transformaciones conformes de  $E^4$  y que el requisito natural para que la integral (5) converja es que la conexión  $A$  se pueda extender a  $S^4$ .

Para explicar esto, recordemos la definición y algunas propiedades básicas de los *cuaterniones*. Del mismo modo que los números complejos  $\mathbb{C}$  se forman a partir de los números reales  $\mathbb{R}$  adjuntando el símbolo  $i$  con  $i^2 = -1$ , así los cuaterniones  $\mathbb{H}$  (en honor de Hamilton) están formados por  $\mathbb{R}$  adjuntando tres símbolos  $i, j, k$  que satisfacen las identidades siguientes:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{aligned} \tag{7}$$

Así pues, un cuaternión general tiene la forma

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, \tag{8}$$

donde  $x_1, x_2, x_3, x_4$  son números reales. El conjugado de un cuaternión  $x$  se define como

$$\bar{x} = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k$$

y la conjugación es una antiinvolución, es decir,  $\overline{\overline{xy}} = xy$ . Gracias a las relaciones (7) se obtiene

$$x\bar{x} = \bar{x}x = \sum_{i=1}^4 x_i^2.$$

Esta cantidad se denota  $|x|^2$  y es cero si y sólo si  $x = 0$ . Un elemento  $x \neq 0$  tiene un único inverso dado por

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}.$$

Los cuaterniones  $x$  con norma 1, es decir  $|x| = 1$ , forman así un grupo multiplicativo que geoméricamente es la esfera 3-dimensional

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1.$$

En analogía de nuevo con los números complejos, nos referimos a la componente  $x_1$  en (8) como la parte real de  $x$  y al resto  $x - x_1$  como la parte imaginaria.

Si identificamos  $i$  con el número complejo usual podemos considerar los números complejos  $\mathbb{C}$  como contenidos en  $\mathbb{H}$  (tomando  $x_3 = x_4 = 0$ ). Además, todo cuaternión  $x$  como en (8) tiene una única expresión

$$x = z_1 + z_2j, \text{ donde } z_1 = x_1 + x_2i \text{ y } z_2 = x_3 + x_4i,$$

lo que permite identificar  $\mathbb{H}$  con  $\mathbb{C}^2$ . Esto a su vez proporciona la identificación  $\mathbb{T} \cong \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{H}^2$ , donde  $\mathbb{T}$  es el espacio de twistors, dada por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1 + jz_2, z_3 + jz_4).$$

Sea ahora  $\sigma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  la multiplicación por  $-j$ . Esto induce una conjugación (es decir, una aplicación antilineal)  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  de la forma

$$\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\bar{z}_2, -\bar{z}_1, \bar{z}_4, -\bar{z}_3).$$

La aplicación  $\sigma$  induce una conjugación  $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ . En contraste con la conjugación usual de  $\mathbb{T}$  que envía  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  a  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ , la conjugación  $\sigma$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{P}$  en absoluto. No obstante, tiene rectas proyectivas complejas invariantes bajo  $\sigma$ . Estas se denominan *rectas reales* con respecto a la involución  $\sigma$ .

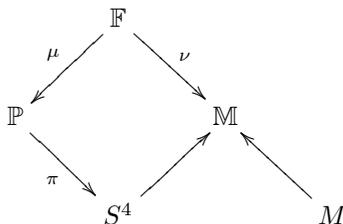
La aplicación  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}^2$  induce una aplicación de espacios proyectivos

$$\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}^2),$$

donde definimos  $\mathbb{P}(\mathbb{H}^2)$  como los múltiplos cuaterniónicos (por la izquierda) de un vector en  $\mathbb{H}^2$ , es decir,

$$\mathbb{P}(\mathbb{H}^2) \cong (\mathbb{H}^2 \setminus \{0\})/\sim,$$

donde  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a, b) = \lambda(c, d)$ ,  $0 \neq \lambda \in \mathbb{H}$ . De un modo análogo a como  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \cong S^2$ , se puede ver que  $\mathbb{P}(\mathbb{H}^2) \cong S^4$ . También se puede comprobar que las fibras de la aplicación  $\pi$  son rectas proyectivas en  $\mathbb{P}$ . De hecho estas son las rectas reales mencionadas anteriormente. Ahora bien, sabemos por la correspondencia twistorial de Penrose que  $\mathbb{M}$  parametriza *todas* las rectas proyectivas de  $\mathbb{P}$ . Así pues, tenemos una proyección  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow S^4$  cuyas fibras constituyen una familia distinguida de rectas proyectivas de  $\mathbb{P}$ , con lo que tenemos una inyección natural de la esfera de dimensión cuatro en el espacio  $\mathbb{M}$  de todas las rectas proyectivas como indica el siguiente diagrama:



Vemos entonces que tanto  $M$  ( $\cong S^3 \times S^1$ ) como  $S^4$  están incluidos de modo natural en la complexificación de la compactificación del espacio-tiempo de Minkowski  $\mathbb{M}$ . De hecho, esta inclusión realiza  $M$  y  $S^4$  como *subvariedades totalmente*

reales de  $\mathbb{M}$ , es decir, que localmente el espacio tangente en cada punto de  $M$  o de  $S^4$ , isomorfo a  $\mathbb{R}^4$  en ambos casos, se inyecta del modo natural en  $\mathbb{C}^4$ , el espacio tangente de  $\mathbb{M}$ . En otras palabras, de un modo distinto para cada uno de ellos,  $\mathbb{M}$  es a la vez la complexificación de  $M$  y de  $S^4$ .

En  $\mathbb{M}$  se puede elegir una carta local  $\mathbb{M}^I$  isomorfa a  $\mathbb{C}^4$ , de modo que  $M^4 = M \cap \mathbb{M}^I$  y  $E^4 = S^4 \cap \mathbb{M}^I$ . La aplicación  $\mathbb{M}^I \rightarrow \mathbb{M}^I$  definida por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1, z_2, z_3, iz_4)$$

induce en  $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{M}^I$  la denominada *rotación de Wick* de la Física

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, ix_4) \tag{9}$$

que pasa de la geometría de Minkowski ( $M^4$ ) a la geometría euclídea ( $E^4$ ).

La correspondencia de Ward, también conocida en el contexto euclidiano como *correspondencia de Atiyah-Ward* [1, 4, 24], establece la siguiente biyección:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Instantones en } S^4 \\ \text{con grupo } U(n) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{fibrados holomorfos de rango } n \text{ sobre } \mathbb{P} \cong \mathbb{P}^3 \\ \text{compatibles con la conjugación } \sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \end{array} \right\}.$$

Tanto en el caso de instantones como en el de fibrados holomorfos existen nociones naturales de isomorfismo y esta correspondencia debe entenderse como una biyección entre clases de isomorfismos. La condición de compatibilidad del fibrado holomorfo con la conjugación  $\sigma$  implica una cierta condición de *realidad* para el fibrado holomorfo en el sentido de que  $\sigma$  en  $\mathbb{P}$  se pueda extender de un modo compatible a todo el fibrado y verifique ciertas condiciones sobre las rectas proyectivas reales de  $\mathbb{P}$  definidas por  $\sigma$ . El ingrediente fundamental en la demostración de esta correspondencia es, naturalmente, la proyección  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow S^4$ . Más concretamente, si tenemos un fibrado con grupo  $U(n)$  sobre  $S^4$  este se puede llevar a  $\mathbb{P}$  por medio de la aplicación  $\pi$ ; la compatibilidad con  $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  es necesaria para invertir este proceso. Si ahora consideramos una conexión  $A$  en el fibrado principal, esta induce otra conexión en el fibrado sobre  $\mathbb{P}$ . Pues bien, si  $A$  es un instantón, es decir, si satisface la condición de antiautodualidad  $*F_A = -F_A$  estudiada anteriormente, entonces la conexión en el fibrado sobre  $\mathbb{P}$  dota a este de una estructura holomorfa. Del mismo modo que el operador diferencial de De Rham en una variedad diferenciable compleja se puede descomponer como  $d = \partial + \bar{\partial}$ , donde  $\bar{\partial}$  es el operador de Cauchy-Riemann que satisface  $\bar{\partial}^2 = 0$ , la derivada covariante  $d_A$  definida por  $A$  en el fibrado sobre  $\mathbb{P}$  admite la descomposición  $d_A = \partial_A + \bar{\partial}_A$ , donde  $\bar{\partial}_A$  se denomina *operador de Dolbeault*. Pues bien, si  $A$  es un instantón, el operador de Dolbeault satisface  $\bar{\partial}_A^2 = 0$ , definiendo una estructura holomorfa.

Una correspondencia análoga se puede demostrar también para el caso del espacio-tiempo de Minkowski  $M^4$  mediante continuación analítica utilizando la rotación de Wick (9). De hecho, la correspondencia se puede establecer para instantones sobre toda la variedad compleja  $\mathbb{M}$ . Correspondencias análogas existen de modo más general cuando el grupo de matrices unitarias  $U(n)$  viene remplazado por otro grupo de Lie (ver [1, 24]).

Una de las aplicaciones más espectaculares de la correspondencia de Atiyah-Ward es la denominada *construcción ADHM* de Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin [2] (ver también [1, 24]). Este trabajo da una construcción explícita de los instantones sobre  $S^4$ , obtenida haciendo uso de la correspondencia de estos con fibrados holomorfos sobre  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  y de la *construcción de Horrocks* de los mismos a mediados de los años 1960, que básicamente reduce el problema a uno de álgebra lineal. Uno de los ingredientes fundamentales en la construcción ADHM es el uso de los cuaterniones. Baste como ejemplo el instantón dado en  $\mathbb{R}^4$  (para el grupo  $SU(2)$ ) por

$$A(x) = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{x} dx}{1 + |x|^2} \right\}, \quad (10)$$

donde se usa la identificación  $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ , dada para  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  por

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k,$$

y  $dx = dx_1 + dx_2 i + dx_3 j + dx_4 k$ . En (10),  $\text{Im}\{\cdot\}$  corresponde a tomar la parte imaginaria cuaterniónica, donde también se está utilizando la identificación del álgebra de Lie de  $SU(2)$  (matrices  $2 \times 2$  antihermíticas de traza nula) con los cuaterniones imaginarios.

La Teoría de Twistors ha sido también útil en el estudio de otras ecuaciones de tipo *gauge* como las de Yang-Mills, en particular de ecuaciones que se obtienen por reducción dimensional de las ecuaciones de Yang-Mills, entre las que cabe mencionar las *ecuaciones de Bogomolny* para monopolos magnéticos, ecuaciones sobre  $\mathbb{R}^3$  obtenidas a partir de instantones sobre  $\mathbb{R}^4$  invariantes en una dirección. La relación entre la Teoría de Twistors, ecuaciones obtenidas por reducción dimensional de instantones y sistemas integrables se estudia en detalle en [17].

Tras el éxito de la correspondencia twistorial de Penrose para el espacio-tiempo de Minkowski y el espacio euclídeo, inmediatamente surgió la pregunta sobre la existencia de una correspondencia similar para un espacio-tiempo y una variedad riemanniana  $(M, g)$  de dimensión 4 curvos. El primer resultado en esta dirección en el caso lorentziano es el trabajo de Penrose [22] en su construcción del *gravitón no lineal*. En el caso riemanniano este problema fue estudiado por Atiyah-Hitchin-Singer [3]. En ambas situaciones se puede asociar un espacio de twistors a  $(M, g)$  si la parte antiautodual del tensor de Weyl  $W$  definido por  $g$  es nula. Cuando  $W = 0$  se dice que la variedad es conformemente plana. En general  $W = W^+ + W^-$ , donde  $*W^\pm = \pm W^\pm$  y  $*$  es el operador de Hodge. El teorema [22, 3] nos dice que para que exista un espacio de twistors análogo al caso plano se precisa que  $W^- = 0$ .

A lo largo de los años la correspondencia twistorial se ha ido ampliando a otra clase de espacios como las variedades hiperkähler o las variedades cuaternionas, variedades estas de dimensión superior. Por otro lado, como hemos visto anteriormente, la transformada de Penrose describe la física invariante bajo transformaciones conformes del espacio-tiempo. Otra dirección importante ha sido la generalización de la transformada de Penrose cuando el grupo conforme se reemplaza por un grupo semisimple complejo arbitrario  $G$  y el espacio-tiempo y los espacios de la correspondencia twistorial vienen sustituidos por determinados abiertos de variedades complejas homogéneas compactas (generalizaciones de las variedades de banderas). La

transformada de Penrose en este contexto es una potente herramienta en el estudio de las representaciones de  $G$  (ver [5]). Desde el punto de vista de la Física esta generalización supone estudiar twistors para un espacio-tiempo de dimensión mayor que cuatro, lo cual resulta interesante desde el punto de vista de la Teoría de Kaluza-Klein, la Teoría de Supergravedad y la Teoría de Cuerdas, donde se consideran espacios de mayor dimensión.

En la entrevista [6] a finales de los años 1990, el autor hacía a Penrose la siguiente pregunta: «la Teoría de Twistors ha tenido un gran éxito en cuanto a su aplicación dentro de las Matemáticas; ¿ha sido también de gran ayuda en la comprensión del mundo físico?». A esto Penrose respondía lo siguiente:

«Diría que no mucho. Puede resultar curioso que yo diga esto. Esto no ocurre sólo en la Teoría de Twistors, también sucede con la Teoría de Cuerdas, por ejemplo. En esta se comenzó con grandes ambiciones de resolver problemas de Física y en lugar de esto surgieron ideas que tienen implicaciones dentro de las Matemáticas. Este es también el caso de la Teoría de Twistors, sus aplicaciones y su interés. Si reunieras a todas aquellas personas que afirman que trabajan en la Teoría de Twistors, verías que en su mayoría son matemáticos sin ningún interés concreto en Física, interesados en Geometría Diferencial o en Teoría de Representaciones, pero entre los que muy pocos tienen en la Física su interés primordial. Un poco irónico, ¿no? Al menos a mí así me lo parece: nos encontramos ante una teoría que se supone va a ser la respuesta a los problemas de la Física, y nadie tiene interés en el aspecto físico de la teoría.»

### 3. UNA NOTA PERSONAL

Mi primer encuentro con Penrose tuvo lugar en el curso 1986–1987 en la Universidad de Rice (Houston) donde yo había comenzado ese año estudios doctorales bajo la supervisión de Raymond Wells, trabajando en una posible correspondencia twistorial (similar a la de Atiyah-Ward) para las ecuaciones vorticiales de la superconductividad, ecuaciones que se obtienen como reducción dimensional de instantones. Como ya se ha mencionado en la sección 1, Penrose estuvo ligado a la Universidad de Rice durante el período 1983–1987 compaginando este puesto con el de profesor en la Universidad de Oxford. Penrose había sido invitado por Wells, reconocido experto en Geometría Compleja, que se había interesado años atrás en la Teoría de Twistors, y en la que colaboraría con Penrose y otros expertos (ver [24]). Antes de viajar a Rice, en mi último año de universidad en España, había estado preparándome en la Teoría de Twistors y su relación con la Teoría de Yang-Mills. Así pues, la posibilidad de interactuar con Penrose en los meses que estuvo en Rice representó una verdadera oportunidad de oro para mí. Además, tuve la inmensa fortuna de que Penrose me invitase a visitar el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Oxford durante los tres meses de verano de 1987 con fondos de un programa de colaboración de la Royal Society de Londres con el CSIC (institución de la que formo parte desde

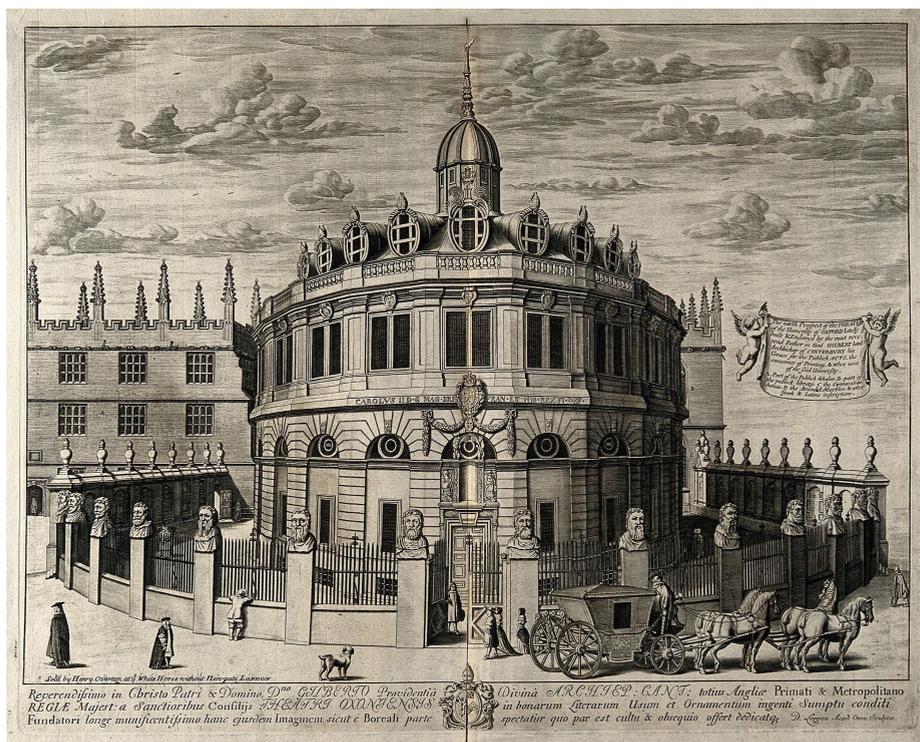


Figura 4: Teatro Sheldonian.

2002). No sólo pude interactuar con Penrose y su grupo, sino también con otros matemáticos allí presentes como Michael Atiyah, Nigel Hitchin y Simon Donaldson. Esta experiencia fue muy enriquecedora y, de hecho, cambió el rumbo de mi carrera, ya que al año siguiente me trasladaría a la Universidad de Oxford para realizar la tesis doctoral bajo la dirección de Hitchin y Donaldson.

En mis visitas regulares a Oxford a lo largo de los años, he coincidido en numerosas ocasiones con Penrose, no sólo en el Instituto de Matemáticas, sino también en los conciertos ofrecidos en el Teatro Sheldonian de Oxford, obra del genial arquitecto Christopher Wren (figura 4). Ya en mi primera estancia en el verano de 1987, coincidí con él en varios de los conciertos ofrecidos bajo el título de *Haendel at Oxford*, en conmemoración de la primera visita de Haendel a Oxford en 1733 y del estreno de su tercer oratorio *Athalia* en el Teatro Sheldonian. Tanto las matemáticas de Penrose como la música de Haendel produjeron un fuerte y duradero impacto en mí. La última vez que coincidí con Sir Roger fue en el concierto de clausura del congreso *Science and Beauty*, organizado por Sir Michael Atiyah en 2015 en Edimburgo, en el que tuve el honor de ofrecer un recital de canto acompañado al laúd por mi amigo el laudista británico Din Ghani (ver [11]).

## REFERENCIAS

- [1] MICHAEL ATIYAH, *Geometry of Yang-Mills Fields*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.
- [2] MICHAEL ATIYAH, VLADIMIR DRINFELD, NIGEL HITCHIN Y YURI MANIN, Construction of instantons, *Phys. Lett. A* **65** (1978), 185–187.
- [3] MICHAEL ATIYAH, NIGEL HITCHIN Y ISADORE SINGER, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **362** (1978), 425–461.
- [4] MICHAEL ATIYAH Y RICHARD WARD, Instantons and algebraic geometry, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977), 111–124.
- [5] ROBERT BASTON Y MICHAEL EASTWOOD, *The Penrose Transform: Its Interaction With Representation Theory*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford, 1989.
- [6] ÓSCAR GARCÍA-PRADA, Entrevista a Roger Penrose, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **2** (1999), no. 1, 13–39.
- [7] ÓSCAR GARCÍA-PRADA, Interview with Roger Penrose (I), *Newsletter of the European Mathematical Society* **38** (2000), 17–21.
- [8] ÓSCAR GARCÍA-PRADA, Interview with Roger Penrose (II), *Newsletter of the European Mathematical Society* **39** (2001), 12–17.
- [9] ÓSCAR GARCÍA-PRADA, Entrevista a Sir Michael Atiyah, Medalla Fields 1966 y Premio Abel 2004, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **19** (2016), no. 2, 275–291
- [10] ÓSCAR GARCÍA-PRADA, Interview with Sir Michael Atiyah, *Newsletter of the European Mathematical Society* **102** (2016), 22–30.
- [11] ÓSCAR GARCÍA-PRADA, Sir Michael Atiyah, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **22** (2019), no. 1, 171–187.
- [12] ÓSCAR GARCÍA-PRADA, Roger Penrose, una mente singular para investigar los agujeros negros, *El Mundo*, 10 de octubre de 2020.
- [13] STEPHEN HAWKING Y GEORGE ELLIS, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [14] STEPHEN HAWKING Y ROGER PENROSE, The singularities of gravitational collapse and cosmology, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **314** (1970), 529–548.
- [15] STEPHEN HAWKING Y ROGER PENROSE, *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, Princeton, 1996.
- [16] LIONEL MASON, Roger Penrose, entrevista que aparecerá en *The Golden Age of Relativity* (D. Malafarina y S. Scott, eds.), Springer.
- [17] LIONEL MASON Y NICHOLAS WOODHOUSE, *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory*, London Mathematical Society Monographs, New Series, 15, Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [18] ROGER PENROSE, Gravitational collapse and space-time singularities, *Phys. Rev. Lett.* **14** (1965), 57–59.

- [19] ROGER PENROSE, Twistor algebra, *J. Math. Phys.* **8** (1967), 345–366.
- [20] ROGER PENROSE, Solutions of the zero-rest-mass equations, *J. Math. Phys.* **10** (1969), 38–39.
- [21] ROGER PENROSE, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1972.
- [22] ROGER PENROSE, Nonlinear gravitons and curved twistor theory, *Gen. Relativity Gravitation* **7** (1976), 31–52.
- [23] ROGER PENROSE Y WOLFGANG RINDLER, *Spinors and Space-Time*, Vols. I y II, Cambridge University Press, Cambridge, 1984 y 1986.
- [24] RICHARD WARD Y RAYMOND O. WELLS JR., *Twistor Geometry and Field Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

ÓSCAR GARCÍA-PRADA, INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, C/ NICOLÁS CABRERA 13–15, CAMPUS DE CANTOBLANCO, 28049 MADRID

Correo electrónico: [oscar.garcia-prada@icmat.es](mailto:oscar.garcia-prada@icmat.es)

Página web: <https://www.icmat.es/miembros/garcia-prada>