

Huellas del análisis de Fourier en el Premio Princesa de Asturias de Investigación Científica y Técnica 2020*

por

Luz Roncal

RESUMEN. Este ensayo está dedicado a describir algunos de los hitos matemáticos más importantes en las trayectorias de Emmanuel Candès, Ingrid Daubechies, Yves Meyer y Terence Tao, receptores del Premio Princesa de Asturias de Investigación Científica y Técnica 2020. El punto de partida es el análisis de Fourier, que tan brillantemente han sabido desarrollar y aplicar en el contexto del procesamiento de datos y señales, permitiendo avances fundamentales en el tratamiento de imágenes, en la ingeniería y en el diagnóstico médico.

*Caminante, son tus huellas
el camino, y nada más;
caminante, no hay camino,
se hace camino al andar...*

ANTONIO MACHADO

1. INTRODUCCIÓN

El 23 de junio de 2020 se falló el Premio Princesa de Asturias de Investigación Científica y Técnica 2020. En esta edición fueron galardonados los cuatro matemáticos Emmanuel Candès, Ingrid Daubechies, Yves Meyer y Terence Tao. El jurado del Premio acordó su concesión¹

... por sus contribuciones pioneras y trascendentales a las teorías y técnicas matemáticas para el procesamiento de datos, que han ampliado extraordinariamente la capacidad de observación de nuestros sentidos y son base y soporte de la moderna era digital. [...] Este Premio subraya la contribución social de las matemáticas y su trascendencia como elemento transversal de todas las ramas de la ciencia.

*NOTA DE LA DIRECCIÓN DE LA GACETA: El presente artículo ha sido el ganador del concurso de ensayos Ciudad de Oviedo sobre «Las Matemáticas de los premiados Princesa de Asturias 2020». El jurado ha destacado, en concreto, que el trabajo ofrece «una versión precisa de las aportaciones de Yves Meyer, Ingrid Daubechies, Terence Tao y Emmanuel Candès que han llevado a la Fundación Princesa de Asturias a concederles el premio de Investigación Científica y Técnica en su edición de 2020».

¹El acta completa con el fallo del jurado se puede consultar en la página web de la Fundación Princesa de Asturias, <https://bit.ly/2EtFDch>



Figura 1: Yves Meyer, Ingrid Daubechies, Terence Tao y Emmanuel Candès. Fuente: Fundación Princesa de Asturias, <https://bit.ly/2QbQev1>.

Los cuatro premiados son grandes figuras en el ámbito mundial de las matemáticas. Basta con una búsqueda rápida de sus nombres en internet para ver la influencia e importancia de su investigación. Reseñaré brevemente la trayectoria profesional y los logros principales de cada uno de ellos en la sección 6, cuando pueda serle más claro al lector. Las bases de la convocatoria del Concurso de Ensayos Ciudad de Oviedo² me dan la oportunidad de hacer una descripción de algunas de las aportaciones matemáticas de los profesores premiados que menciona el fallo del jurado.

Mi ensayo, aunque va a presentar un contenido matemático de cierto nivel técnico dentro de una extensión necesariamente acotada, quiere mantener un carácter divulgativo. Arrancando las explicaciones en lo que en matemáticas se conoce como análisis de Fourier o análisis armónico (sección 2), en las secciones 3 a 5 posteriores abre una ventana sobre el trabajo de los premiados, de forma cronológica.

Vaya por delante una disculpa por las imprecisiones y omisiones que esta presentación pueda contener. No puede ser exhaustiva, limitada de hecho a mostrar una minúscula parte del inmenso trabajo de sus protagonistas.

2. EL ANÁLISIS DE FOURIER

Me parece oportuno empezar citando a I. Daubechies en [21, VII.3]³:

Una de las mejores maneras de entender una función es desarrollarla en términos de un conjunto bien elegido de funciones básicas, de las cuales las funciones trigonométricas son quizás el ejemplo más conocido.

²Se pueden consultar en <https://bit.ly/2Ek6fwG>

³*The Princeton Companion to Mathematics* es un voluminoso libro editado por Timothy Gowers junto con June Barrow-Green e Imre Leader, y publicado en 2008, que contiene, en palabras de su editor principal [21, pág. 1], «una buena idea de lo que son las matemáticas mediante una descripción de muchos de sus conceptos, teoremas y aplicaciones más importantes».

Consideremos una función periódica f de periodo 2π . Por ejemplo, f podría ser un polinomio trigonométrico, como $f(x) = \text{sen}(x) - 2\cos(3x)$. Nos preguntamos si, en general, podemos encontrar una serie de senos y cosenos de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)), \tag{1}$$

cuya suma coincida con $f(x)$ para cada x . Jean-Baptiste Joseph Fourier comunicó en 1807 al Instituto de Francia⁴ que, para esto, los coeficientes debían venir dados por las fórmulas $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ y $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx$. La serie (1) se denomina en su honor *serie de Fourier*. La *relación de Euler* $e^{ix} = \cos(x) + i \text{sen}(x)$ permite reescribir (1) como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}, \tag{2}$$

donde $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ son los *coeficientes de Fourier* y la sucesión $\{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es la *transformada de Fourier* de la función 2π -periódica f .

Si f es un polinomio trigonométrico, entonces todos salvo un número finito de los coeficientes $\widehat{f}(n)$ son cero, y el polinomio es idéntico a su serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}. \tag{3}$$

La cuestión es más sutil cuando f no es un polinomio trigonométrico, porque entonces hay que determinar en qué sentido es cierta la igualdad (3) o, dicho de otro modo, si la función f puede ser reconstruida o representada en algún sentido por la serie (2).

La principal característica de las funciones $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ cuyos múltiplos forman los sumandos de las series de Fourier es que son *ortonormales* en el intervalo $[-\pi, \pi]$, en el siguiente sentido:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ 1, & \text{si } n = m, \end{cases}$$

y esta propiedad es la que determina que los coeficientes $\widehat{f}(n)$ tomen la expresión dada. La familia (de *armónicos exponenciales*) $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ forma una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2((-\pi, \pi))$ ⁵.

⁴J.-B. J. Fourier, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. Consultar [21, VI.25] y las referencias de I. Grattan-Guinness allí.

⁵Una función f pertenece a $L^p(X)$, donde (X, μ) es un espacio de medida (por ejemplo, $X = (-\pi, \pi)$ o $X = \mathbb{R}$, con μ la medida de Lebesgue), $1 \leq p < \infty$, si $\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty$, donde $\|f\|_{L^p}$ es la norma L^p de f .

Una función periódica no idénticamente nula no es de módulo integrable en \mathbb{R} . Cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$, se extiende la definición de la transformada de Fourier⁶, que ya no es una sucesión discreta sino una función, mediante la fórmula

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx. \quad (4)$$

A la variable x se la llama variable *espacial* y a la variable ξ , variable *frecuencia* o variable de Fourier. En la sección 3 utilizaremos t , representando una variable temporal, en lugar de x , y ω para la frecuencia, en lugar de ξ . Nos podemos preguntar ahora bajo qué condiciones se puede recuperar la función a partir de su transformada de Fourier, mediante

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} f(y) dy d\xi. \quad (5)$$

La rigorización y el desarrollo del análisis de Fourier ha sido un proceso largo, que se ha extendido en múltiples direcciones⁷. Mencionaremos solamente a Alberto P. Calderón y Antoni Zygmund, considerados los padres del análisis armónico clásico, destacando su histórico artículo *On the existence of singular integrals* en *Acta Mathematica* en 1952, por su influencia fundamental.

3. LAS ONDÍCULAS

Vamos a adaptar la formulación general de la sección anterior al fenómeno físico de la *transmisión de datos y señales*. Mediante la variación de algunas magnitudes eléctricas, como el voltaje o la intensidad de corriente por ejemplo, es posible producir *señales* que transmiten información. Una señal es una función $f(t)$ del tiempo. En un contexto de análisis de Fourier, podemos representar esa función por su transformada de Fourier (4).

La transformada proporciona información de la señal en el dominio de frecuencias: $\widehat{f}(\omega)$ es la densidad espectral de $f(t)$ en dicho dominio y esa información no es evidente de otro modo. Sin embargo, muchas señales de interés (voz, música, imágenes, pruebas médicas) requieren ser analizadas simultáneamente en pequeños intervalos de tiempo y de frecuencia. Se dice que hay que *localizar la señal en tiempo y en frecuencia*. Pero el *principio de incertidumbre* de Heisenberg hace imposible esa localización simultánea. De hecho, en su formulación habitual en el análisis armónico, si $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ se cumple [26, pág. 224]

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_m)^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_m)^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \right) \geq \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Las expresiones entre paréntesis de la izquierda son, respectivamente, σ_t^2 y σ_ω^2 , las varianzas de las variables tiempo y frecuencia con respecto a unas medidas de probabilidad de densidades $|f(t)|^2$ y $|\widehat{f}(\omega)|^2$ en sus respectivos espacios. La desigualdad

⁶En *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, 1811, aunque no fue publicada por primera vez hasta 1822, en el capítulo IX del libro *Théorie analytique de la chaleur*, de Fourier.

⁷Consultar la entrada «Harmonic Analysis» a cargo precisamente de Terence Tao en [21, IV.11].

implica que las desviaciones típicas del tiempo y de la frecuencia respecto a sus valores medios t_m y ω_m , respectivamente, no pueden ser simultáneamente pequeñas. Esto hace que la vieja transformada de Fourier no se adapte del todo bien, en general, al análisis de señales.

3.1. LAS ONDÍCULAS DE MEYER

Entre 1985 y 1987, Yves Meyer comenzó a desarrollar de manera sistemática los fundamentos de una nueva teoría que relacionaba herramientas analíticas del análisis armónico con algoritmos de procesamiento de señales que se usaban en exploraciones sísmicas: la teoría de las bases de *ondelettes*, u *ondículas*⁸. Remitimos a [16, 30, 31, 34] para un estudio de dicha teoría en sus primeros años. Una excelente exposición se puede leer en [25].

En realidad, históricamente, la primera ondícula conocida se debe a Alfred Haar [23]. Más adelante, aparecen ondículas en los trabajos del físico Alex Grossmann y del ingeniero geofísico Jean Morlet sobre las señales sísmicas registradas en los campos de exploración petrolíferos [22]. La irrupción de Meyer en el tema comienza con una conversación en la cola de la fotocopiadora de la Escuela Politécnica de Palaiseau que relata él mismo [33, pág. 22]⁹:

Mi interés por las ondículas empezó cuando J. Lascoux me convenció de que las llamadas «descomposiciones atómicas» estudiadas por Coifman y Weiss se podían conectar con cierto trabajo reciente de A. Grossmann y J. Morlet sobre ondículas¹⁰. Fui a Marsella y tuve la oportunidad de encontrar a I. Daubechies, A. Grossmann, J. Morlet y T. Paul. Después de algunas discusiones informales y amistosas¹¹, me quedé fascinado por el enfoque de este nuevo tema y comencé a dedicar mucho tiempo y esfuerzos a las ondículas.

Mi preparación matemática partía del libro *Trigonometric Series* de Antoni Zygmund y de varios artículos de A. Calderón. Con esa base, pude reconocer fácilmente que la fórmula de Morlet era similar a la «**identidad de reproducción de Calderón**», con un sutil cambio lingüístico. Para ser más preciso, en la fórmula de Calderón se empieza con dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ definidas en \mathbb{R}^n verificando la siguiente identidad:

$$\int_0^\infty \widehat{g}(tu)\widehat{h}(tu) \frac{dt}{t} = 1, \quad \text{para todo } u \neq 0.$$

Denotemos por G_t y H_t los operadores de convolución con las funciones $g_t(x) = t^{-n}g(t^{-1}x)$ y $h_t(x)$ definida similarmente. Finalmente se obtiene la fórmula

$$\int_0^\infty G_t H_t \frac{dt}{t} = I,$$

⁸El término *ondelette* fue introducido por Grossmann y Morlet, de los que hablaremos en un momento. Fue traducido al inglés como *wavelet* y en español como *ondícula* (que es el término que usaremos), *ondeleta* u *ondita*.

⁹Es muy recomendable también la lectura del bellissimo escrito [35] que reproduce la conferencia que Yves Meyer dio en la Real Academia de Ciencias el 29 de septiembre de 2001 con motivo de la inauguración del curso 2001–2002.

¹⁰Meyer se refiere aquí a [22].

¹¹De algunas de ellas surgiría el artículo [18].

que es la fórmula de reproducción de Calderón (si A y B son dos operadores, AB significa que A actúa sobre el resultado de la acción de B). [I es el operador identidad.]

En general, dada una función $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, las funciones dilatadas y trasladadas $g_{a,b}(x) = a^{-n/2}g(a^{-1}(x-b))$, donde $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$, se llaman ondículas. La función $g = g_{1,0}$ es la *ondícula madre*. Para cualquier función f , se define su *transformada (continua) de ondículas* por

$$W_g(f)(a, b) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g_{a,b}(x)} dx,$$

y se puede entonces *reconstruir* la función original $f(x)$ mediante la *fórmula de inversión*

$$f(x) = \iint_P W_g(f)(a, b) g_{a,b}(x) a^{-n-1} da db, \quad P = (0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Las ondículas de Grossmann-Morlet eran una de esas familias de funciones que resultan ser «buenos bloques de construcción» y se *parecían* mucho a una base ortonormal. Además, la transformada de ondículas permitía la localización en tiempo y frecuencia y se tenían fórmulas de reconstrucción análogas a (3) o (5). En ese momento, Meyer se preguntó si este enfoque podía conducirle a una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{R})$. De esta manera podría construir una nueva teoría para representar funciones usando bases ortonormales cuyos elementos tuvieran la propiedad de ser bien localizables en la variable tiempo t y en la variable frecuencia ω .

Meyer presentó en [31] una colección de funciones suaves¹² que forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Estas funciones son traslaciones enteras y dilataciones diádicas de una función *madre* ψ , que se escriben como

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Como comentario aclaratorio [39, pág. 886], se puede hacer una analogía entre las ondículas y una observación por microscopio. El factor de escala 2^j corresponde al aumento o resolución del microscopio y el término de traslación $2^{-j}k$ se corresponde con la ubicación donde se hace la observación con el microscopio. Si queremos observar detalles muy finos, la resolución debe ser grande, es decir, j grande y positivo, correspondiendo a una ondícula muy concentrada, y a pasos de traslación pequeños. Para un valor de j negativo grande, la ondícula se ensancha en el eje temporal y los pasos de traslación, 2^{-j} , son también grandes. En particular, podremos hacer *zoom* para captar rasgos interesantes, como discontinuidades, o esquinas puntiagudas, si estamos analizando una imagen.

Meyer construyó su ondícula madre $\psi(t)$, de hecho toda una variedad de ellas, definiendo su transformada de Fourier por

$$\widehat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \text{sen}(\alpha(\omega)),$$

¹²Una función es de clase C^m , con $m \geq 1$, si existen todas sus derivadas parciales de orden m y son continuas. Una función es de clase C^∞ si existen las derivadas de todos los órdenes. A estas últimas funciones las llamamos *suaves*.

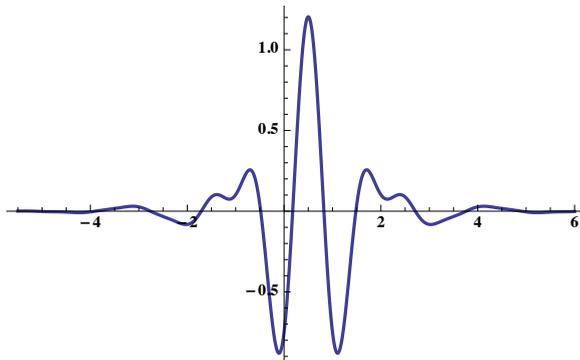


Figura 2: La primera ondícula de Meyer $\psi(x)$, dibujada con *Mathematica*, siguiendo la construcción en [27].

donde $\alpha(\omega)$ es la extensión par de una función campaniforme, suave y de soporte compacto, definida en el semieje positivo de frecuencias. Un ejemplo podría ser

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} \pi/2 \cos^2(3\omega/4), & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ \pi/2 \sin^2(3\omega/8), & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta elección, $\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \cos((t - \frac{1}{2})\omega) \text{sen}(\alpha(\omega)) d\omega$, ver la figura 2.

Las funciones ψ y $\hat{\psi}$ son de la clase de Schwartz¹³ y las ondículas generadas por ψ forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. De modo que cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede expresar como un desarrollo en serie de ondículas

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

donde la igualdad se entiende en el sentido de la norma de $L^2(\mathbb{R})$ y en casi todo punto, y los coeficientes del desarrollo son los productos escalares $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt$. Por supuesto, ψ y $\hat{\psi}$ cumplen el principio de incertidumbre (6): pero la resolución tiempo-frecuencia de la ondícula ahora queda también acotada superiormente, dependiendo del factor de escala de la ondícula $\psi_{j,k}$, y se puede jugar con ese factor de modo que la resolución en tiempo es arbitrariamente buena para frecuencias altas, y la resolución en frecuencia es arbitrariamente buena para frecuencias bajas.

El propio Meyer presentó la generalización de su construcción al espacio n -dimensional \mathbb{R}^n . Las series de ondículas de Meyer se adaptan mejor que la serie de Fourier

¹³Para abreviar, funciones tales que sus derivadas de cualquier orden decrecen rápidamente en el infinito.

clásica y que otras series de ondículas (la de Haar o la de Shannon¹⁴) a la hora de capturar fenómenos localizados en tiempo y en frecuencia. Las señales de audio y otras señales de comunicación admiten representaciones fieles con estas bases de ondículas.

Las ondículas de Meyer proporcionaban un marco matemático para entender un amplio abanico de aplicaciones científicas e industriales y abrían la posibilidad de utilizar herramientas del análisis armónico. Meyer devino en maestro de ceremonias de un vasto programa de nuevas conexiones entre las matemáticas y otras áreas de la ciencia, que regalaba a los investigadores un extenso campo donde realizar nuevas contribuciones.

3.2. EL ANÁLISIS MULTIRRESOLUCIÓN

El siguiente paso en ese programa consistió en tratar de formular un marco general que permitiese la construcción de nuevas bases ortonormales de ondículas, bien adaptadas a una representación fina de las señales, de una manera sistemática. Aparece el concepto de *análisis multirresolución* (AMR), desarrollado por Yves Meyer y Stéphane Mallat¹⁵ [28, 29, 32], y que vamos a describir brevemente siguiendo casi literalmente la explicación de Ingrid Daubechies en [15].

Un AMR consiste en una función ϕ (*función de escala* del AMR) y una descomposición del espacio $L^2(\mathbb{R})$ en una colección creciente de subespacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. La proyección ortogonal del espacio en V_j se corresponde con las aproximaciones de las señales a nivel de detalle j , o con resolución 2^j . Todos los V_j se obtienen a partir de V_0 mediante una dilatación apropiada, y V_0 está generado por las traslaciones enteras $\phi(x - k)$ de la función ϕ . Entonces existe una función ψ tal que $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, con j fijo, forman una base ortonormal del complemento ortogonal¹⁶ W_j de V_j en V_{j-1} . Esta función ψ se puede definir mediante la transformada de Fourier como $\widehat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega h} \overline{h(\omega + \pi)} \widehat{\phi}(\omega/2)$, donde h es un *filtro de paso bajo* ($h(\omega) = 0$ si $|\omega| \geq W$). Estos filtros eran otro de los elementos fundamentales en el AMR.

La familia $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de ondículas para $L^2(\mathbb{R})$, y los productos escalares $\{\langle \psi_{j,k}, f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ contienen toda la información que está presente en la aproximación a la señal f a nivel de detalle $j - 1$ pero que se pierde en el siguiente (menos fino) nivel j .

¹⁴En 1909, A. Haar construyó la primera base de ondículas, generada por $\psi = 2^{-1/2}(\mathbb{1}_{[0,1/2]} - \mathbb{1}_{[1/2,1]})$, que es discontinua. La ondícula de Shannon ψ es C^∞ y tiene un decaimiento lento. Se define por su transformada de Fourier: $\widehat{\psi} = \mathbb{1}_{[-2\pi, -\pi]} + \mathbb{1}_{[\pi, 2\pi]}$.

¹⁵Stéphane G. Mallat, matemático francés, profesor en la École normale supérieure. Otra de sus importantes contribuciones es la transformada *scattering*, que permite construir representaciones invariantes por traslaciones, útiles en el reconocimiento de objetos.

¹⁶Si S es un subespacio vectorial de M , el complemento ortogonal de S en M está formado por los vectores de M que son ortogonales a todos los vectores de S .

4. LOS FILTROS DE DAUBECHIES

El siguiente avance significativo en la teoría de ondículas se debió a Ingrid Daubechies. En su extraordinario trabajo [14], Daubechies, usando el concepto de AMR desarrollado por Meyer y Mallat, consiguió obtener ondículas ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$ con *soporte compacto* y de cualquier orden de suavidad prefijado. Para ello, logró diseñar filtros de paso bajo $h(\omega)$ que satisfacían las condiciones de los filtros descritos en el AMR, imponiéndoles la condición adicional de tener un cero de un cierto orden de multiplicidad m en $\omega = \pi$ [17]. Dando una espléndida construcción, Daubechies mostró en [14, 16] que dicho filtro, supuesto 2π -periódico, debía tener la forma

$$h(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^{m+1} \mathcal{L}(e^{i\omega}),$$

donde \mathcal{L} es un polinomio, deduciendo además que

$$|h(\omega)|^2 = \left(\cos^2 \left(\frac{1}{2}\omega \right) \right)^{m+1} P \left(\sin^2 \left(\frac{1}{2}\omega \right) \right),$$

donde

$$P(y) = \sum_{j=0}^m \binom{m+j}{j} y^j + y^{m+1} R(1/2 - y),$$

y R es un polinomio impar elegido de modo que sea $P(y) \geq 0$ para $y \in [0, 1]$.

Los *filtros de Daubechies* simplificaban cálculos, y la regularidad de las ondículas resultantes las hacían muy útiles en análisis numérico, en ingeniería y, especialmente, en la *compresión de imágenes*. La razón es que los coeficientes de la descomposición con este tipo de ondículas de una señal suave a trozos decaen rápidamente a cero.

Las imágenes digitales vienen dadas mediante una colección grande de *píxeles* (*píxel* es una abreviatura de *picture element*), siendo cada uno de ellos un número que representa las propiedades de color de un pequeño rectángulo dentro de la imagen. El almacenamiento de una imagen digital puede requerir mucha memoria, y por economía es deseable encontrar modos eficientes de *compresión*. Las ondículas de Daubechies proporcionan uno de ellos. La representación de la función (bidimensional) que expresa una imagen de N^2 píxeles tiene en principio N^2 coeficientes no nulos. Cuando muchos de estos coeficientes son pequeños, como va a ocurrir, su omisión *comprime* la imagen de una manera pertinente.

Daubechies, en colaboración con Albert Cohen y Christian Feauveau realizaron un refinamiento de esta descomposición, y diseñaron ondículas y filtros *simétricos* [12] introduciendo las *ondículas biortogonales* a partir de un par de AMR biortogonales $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ y $\{\tilde{V}_j : j \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Esto quiere decir que, si φ y $\tilde{\varphi}$ son sus respectivas funciones de escala, entonces, para $k, \ell \in \mathbb{Z}$,

$$\langle \varphi(\cdot - k), \tilde{\varphi}(\cdot - \ell) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = \ell, \\ 0, & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

Estas ondículas tenían la ventaja de que podían estar concentradas en un intervalo, lo que era imposible para otras bases de ondículas anteriores. La condición de simetría



Figura 3: A la izquierda, la imagen original. En cada imagen pequeña de la derecha, los puntos oscuros son los coeficientes de las ondículas con amplitud grande, en una escala y orientación particulares. La mayoría de los coeficientes son cero (blanco), que es por lo que la compresión se realiza con muchos menos bits que la cantidad de píxeles de la imagen original. Fuente: figura 2 en [13, pág. 1385].

es importante para la descomposición de imágenes, donde normalmente se utilizan ondículas bidimensionales que se derivan a partir de bases unidimensionales con una función simétrica ψ .

Los filtros de Cohen, Daubechies y Feauveau se han utilizado en la compresión de imágenes en el estándar JPEG-2000. El algoritmo JPEG (Joint Photographic Experts Group) se desarrolló en la década de los ochenta del siglo pasado y sus estándares se publicaron en 1992 [37] y se empezó a usar en muchos dispositivos. En aquella primera versión cada imagen se procesaba en bloques de 8×8 píxeles usando una base discreta de cosenos bidimensional. Para evitar las irregularidades resultantes en algunas imágenes comprimidas como consecuencia de la división en bloques de ese tamaño, el grupo elaborador comenzó a trabajar en unos nuevos estándares. Se trataba de conseguir mayor compresión sin pérdida de calidad. El informe final se publicó en agosto del año 2000 y el algoritmo diseñado es el JPEG2000.

Para una misma calidad de imagen, los archivos JPEG2000 pueden ser hasta un 50% más pequeños que los correspondientes archivos JPEG, dependiendo del tipo de imágenes. Además, el nuevo formato elimina uno de los principales problemas del JPEG: el de los *blocking artifacts*, que son ciertas distorsiones como la pérdida de claridad en los contornos y los tonos borrosos. Para el formato JPEG son fundamentales dos tipos de ondículas: las LT 5/3 y las CDF 9/7, estas últimas construidas según una variante de uno de los filtros biortogonales de Cohen-Daubechies-Feauveau, ver la figura 3. Una información más detallada se puede encontrar en [41, 42].

Las ondículas de Daubechies (y de Meyer, leer [38]) están también presentes en las técnicas que hicieron posible en 2015 la primera observación de ondas gravitacionales por la detección directa de una señal de tipo *chirp* [11], procedente de los últimos instantes de la fusión, a más de 10^9 años luz, de dos agujeros negros de 29 y 36 masas

solares [1]. Daubechies, Stéphane Jaffard y el tempranamente desaparecido Jean-Lin Journé [19] propusieron un algoritmo que formalizaba una base de ondículas sugerida por Kenneth Wilson (Premio Nobel de Física 1982). Fue precisamente este algoritmo el utilizado por *LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration* en su famosa detección [36].

5. LA PERCEPCIÓN COMPRIMIDA

El problema de la compresión de imágenes nos lleva al siglo XXI de la mano de Candès y Tao. Para situarnos en su contexto, tenemos que hablar en primer lugar del *teorema de muestreo* de Shannon¹⁷ [40], obtenido en su trabajo sobre la *teoría de la información*. Diremos que una señal $x(t)$ es *de banda limitada* por la frecuencia W (ciclos por segundo) cuando $\hat{x}(\omega) = 0$ si $|\omega| \geq 2\pi W$. Su transformada de Fourier es, por consiguiente, de soporte compacto, y de acuerdo con (5) se tiene

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7)$$

Por otra parte, un *muestreo* de la señal $x(t)$ con tasa $\tau > 0$ (muestras por segundo) es la sucesión de valores (*muestras*) $\{x(k/\tau)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

El teorema de Shannon, en la base de cuya demostración está la igualdad (7), afirma que: *Si $x(t)$ es de banda limitada por la frecuencia W , entonces queda completamente determinada por un muestreo de tasa $\tau \geq 2W$* . De hecho, se tiene

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2W}\right) \frac{\text{sen}(\pi(2Wt - k))}{\pi(2Wt - k)}. \quad (8)$$

Esa mínima tasa de muestreo $\tau_{\nu} = 2W$, necesaria para reconstruir completamente una señal a partir de la información contenida en sus muestras, se llama *tasa de Nyquist*.

En muchas aplicaciones (imágenes digitales, videocámaras...), la tasa de Nyquist puede ser tan alta que terminamos recopilando cantidades ingentes de muestras o datos y tenemos que comprimirlas para almacenarlas o transmitir las. En otras aplicaciones, como escáneres médicos, radares y conversores de analógico a digital de alta velocidad, aumentar la tasa de muestreo es muy *caro*, es decir, requiere mucho tiempo y recursos.

Por otro lado hay situaciones que involucran funciones de un número muy grande de variables. Sobreviene entonces la denominada *maldición de la dimensionalidad*: la complejidad computacional de los métodos habituales crece exponencialmente con el número de variables y, por ejemplo, las representaciones con bases de ondículas

¹⁷Debido esencialmente al matemático inglés E. T. Whittaker (1915). El resultado fue redescubierto, de manera independiente, por V. Kotel'nikov (URSS, 1933) y C. E. Shannon (EE.UU., 1949). La verdadera importancia de este resultado surgió a partir de su aplicación por Shannon a la teoría de la información.

pierden su fidelidad. Esto ocurre de un modo natural en teoría del aprendizaje, ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) y modelos numéricos estocásticos.

Para superar estas dificultades, aparece una nueva técnica en la que Candès y Tao (junto con Justin Romberg y David Donoho, entre otros) tendrán un papel fundamental: el *compressed sensing*, o *compressed sampling*, o *compressive sensing*, que traduciremos por *percepción comprimida*¹⁸. El objetivo es *adquirir*¹⁹ ciertos tipos de señales con una tasa de muestreo significativamente menor que la de Nyquist, reduciendo el número de mediciones necesarias para describir fielmente esas señales y reemplazando las operaciones de reconstrucción convencionales por cierto proceso de optimización. Pasemos a detallar esta técnica, nuestra exposición en esta sección está basada en [2, 3, 4, 5, 7, 10, 20]²⁰.

5.1. SEÑALES DISPERSAS

Supongamos que la señal $x(t)$, que toma valores reales, queda completamente determinada por N muestras x_1, x_2, \dots, x_N , que forman el vector columna $x \in \mathbb{R}^N$. Si $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^N , formando la matriz $\Psi := (\psi_1 | \psi_2 | \dots | \psi_N)$ con los vectores ψ_i como columnas tenemos la representación

$$x = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i \quad \text{o} \quad x = \Psi s, \quad (9)$$

donde $s \in \mathbb{R}^N$ es el vector columna de las coordenadas $s_i = \langle x, \psi_i \rangle = \psi_i^* x$. Los vectores x (muestras en el dominio t) y s (muestras en el dominio Ψ) son representaciones equivalentes de la señal (se tiene $s = \Psi^* x$)²¹.

En muchas ocasiones la señal es *compresible*, lo que significa que en alguna base Ψ la mayor parte de las coordenadas son nulas o de tamaño despreciable. Nos centraremos en un tipo específico de señales: las *sparse* o *dispersas*. Una señal x tiene una representación K -dispersa en la base Ψ (*base de dispersión*) cuando, con K mucho menor que N , sólo K de las coordenadas s_i son distintas de cero.

Hemos adelantado como ejemplo típico de señal dispersa el de las imágenes. Por ejemplo, una imagen podría estar formada por 10^6 píxeles y por tanto requerir un vector de 10^6 componentes para adquirirla con total fidelidad, y sin embargo ser 10^4 -dispersa respecto de una base de ondículas adecuada. En esto se basaban las compresiones JPEG o JPEG-2000 mencionadas en la sección anterior.

La idea de adquirir la señal x completa a partir de N muestras, calcular el conjunto completo de coeficientes $\{s_i\}_{i=1}^N$ mediante $s = \Psi^* x$, localizar los K coeficientes más grandes y obtener la señal comprimida descartando los $N - K$ más pequeños, no

¹⁸Otros autores usan las traducciones *adquisición comprimida* para *compressed sensing*, o *muestreo reducido* para *compressive sampling*.

¹⁹Aquí el término *adquirir* significa, con precisión, recoger un conjunto de datos de ciertas magnitudes físicas.

²⁰Se puede encontrar una presentación más extensa de algunos aspectos en el artículo *Una breve introducción a la adquisición comprimida*, de Carlos Fernandez-Granda, que aparece en este mismo número de LA GACETA.

²¹El operador \cdot^* denota transposición y conjugación.

es muy afortunada. Hay que procesar un número potencialmente grande de muestras N incluso si K es pequeño, y además hay que calcular los N coeficientes s_i aunque luego se vayan a descartar casi todos.

Hay una idea genial, que es aprovechar el conocimiento previo de la compresibilidad de la señal x para diseñar un procedimiento inverso de adquirirla, reconstruyéndola a partir de $m < N$ observaciones indirectas o *mediciones*, obtenidas calculando los $m < N$ productos escalares, $\langle x, \phi_j \rangle = y_j$, de x con una cierta familia ortonormal $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ de vectores de \mathbb{R}^N (*vectores de medición*). Escribiendo las mediciones y_j como un vector columna y de \mathbb{R}^m , y los vectores de medición ϕ_j^* como las filas de una matriz Φ (*matriz de muestreo*) de tamaño $m \times N$, a partir de (9) se puede escribir

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = U s, \quad (10)$$

donde $U := \Phi \Psi$ es otra matriz $m \times N$. Se entiende que la matriz Φ es fija, independiente de la señal x de entrada²².

¿Cómo de grande debe ser m para que a partir de la información provista por el vector $y \in \mathbb{R}^m$ se pueda reconstruir aproximadamente la señal $x \in \mathbb{R}^N$? Un vector x que tenga una representación K -dispersa tiene, en cierto modo, sólo K grados de libertad, así que x se debería poder reconstruir utilizando solamente K mediciones. El objetivo pasa a ser diseñar una matriz de muestreo Φ y un algoritmo de reconstrucción (el paso de $y \in \mathbb{R}^m$ a $s \in \mathbb{R}^N$) para señales K -dispersas que requieran sólo $m \approx K$ muestras de información. Este es el esquema general del proceso que se llama *percepción comprimida*, basado en el principio de que el número de mediciones necesarias para adquirir una señal con buena precisión debería ser comparable con el tamaño de la señal comprimida. En la percepción comprimida, el propio muestreo está comprimido. Y la reconstrucción de la señal, como veremos a continuación, consiste en la resolución de un problema de ℓ^p -optimización²³, usualmente con $0 \leq p \leq 2$.

Este programa fue desarrollado brillantemente por Candès, Romberg y Tao, e independientemente por Donoho, en una serie de trabajos fundamentales: [3]–[10], [20]. En 2008 se concedió el premio al mejor artículo de la *Sociedad de Teoría de la Información* a los artículos [8] y [20]. En la *IEEE Information Theory Society Newsletter*, Vol. 58, No. 4, diciembre de 2008, se lee:

El comité determinó que estos dos revolucionarios artículos se pueden considerar introductorios a la nueva área de la percepción comprimida, que abre grandes expectativas en el procesamiento de cantidades masivas de datos, y que ya ha tenido un amplio impacto en campos diversos, como el procesamiento de señales, la teoría de la información, la aproximación de funciones, la obtención de imágenes de resonancia magnética (IRM), el diseño de radares y la modulación sigma-delta²⁴.

²²El proceso de obtener muestras de x con la matriz Φ es *no adaptativo*.

²³Para $p > 0$ se define $\|s\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i=1}^N |s_i|^p\right)^{1/p}$ y, para $p = 0$, $\|s\|_{\ell^0} := \#\{s_i \neq 0 : 1 \leq i \leq N\}$, es decir, el número de componentes no nulas de s .

²⁴La *modulación sigma-delta* es un procedimiento usado para convertir señales analógicas en digitales y viceversa.

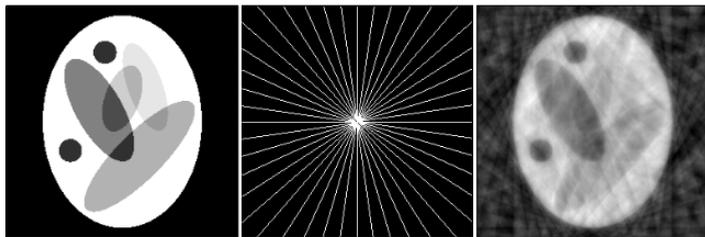


Figura 4: El *fantasma Shepp-Logan*, una imagen estándar de prueba en IRM, y su reconstrucción por mínimos cuadrados mediante un muestreo de Fourier a lo largo de veintidós rectas radiales en el plano de frecuencias ($m/N \approx 0.05$). Fuente: T. Tao, Mahler Lecture Series, <https://bit.ly/3fNkpU1>

El comité también reconocía la importancia que había tenido el artículo [5] en el desarrollo de las ideas previas que constituían el germen de la percepción comprimida.

5.2. LA MAGIA DE CANDÈS Y DE TAO (Y DE DONOHO)

Volvamos a (10); como m es menor que N , este sistema de ecuaciones lineales es *indeterminado* y tiene infinitas soluciones s contenidas en un hiperplano $(N - m)$ -dimensional. Un método para individualizar una solución s consiste en encontrar la que haga la cantidad $\|s\|_{\ell^2}$ lo más pequeña posible, resolviendo un problema de ℓ^2 -optimización que podemos presentar abreviadamente así:

$$\|s\|_{\ell^2} \rightarrow \text{mínimo}, \quad Us = y.$$

Este método se conoce como *reconstrucción por mínimos cuadrados*. La solución es única y viene dada por una fórmula cerrada. Pero normalmente esta solución no es dispersa, y cuando el vector s que buscamos tiene que ser K -disperso, la reconstrucción por mínimos cuadrados no es satisfactoria. De hecho, cuando m es pequeño, esta reconstrucción de la señal x original puede ser muy pobre, ver la figura 4.

Ante este primer intento infructuoso, nos podríamos preguntar si será siempre posible una percepción comprimida, y resulta que la respuesta es afirmativa. Supongamos que la matriz U es tal que cada conjunto de $2K$ columnas de U son linealmente independientes. Entonces el vector K -disperso $s \in \mathbb{R}^N$ se puede reconstruir de manera única a partir de $y = Us \in \mathbb{R}^m$, si $m \geq 2K$. Esta afirmación se puede demostrar de una manera sencilla, y las líneas de esa demostración nos llevan a un segundo intento de individualizar una solución apropiada de (10) en el que podríamos buscar la solución más dispersa, resolviendo el problema

$$\|s\|_{\ell^0} \rightarrow \text{mínimo}, \quad Us = y.$$

Pero este problema es computacionalmente muy caro en general. Candès, Tao y Donoho propusieron solucionar esta dificultad reemplazando la «norma» *no convexa*

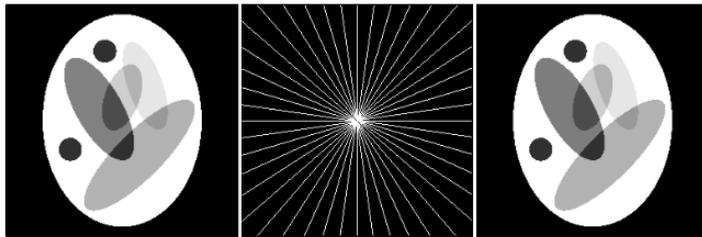


Figura 5: El fantasma Shepp-Logan y su reconstrucción exacta por *basis pursuit* (más precisamente, por ℓ^1 -minimización del gradiente) mediante un muestreo de Fourier a lo largo de veintidós rectas radiales en el plano de frecuencias ($m/N \approx 0.05$). Fuente: T. Tao, Mahler Lecture Series, <https://bit.ly/3fNkpU1>

$\|\cdot\|_{\ell^0}$ por la norma *convexa* $\|\cdot\|_{\ell^1}$, y resolviendo el correspondiente problema de ℓ^1 -minimización (*basis pursuit*):

$$\|s\|_{\ell^1} \rightarrow \text{mínimo}, \quad Us = y. \tag{11}$$

Este es un problema de *optimización convexa*, que se resuelve usando herramientas de programación lineal y cuya complejidad computacional es baja. La solución de (11) proporciona además una reconstrucción exacta para muchas elecciones de la matriz U , ver la figura 5.

Interesa saber qué matrices U son apropiadas para que funcionen estas ideas. Candès, Romberg y Tao [6, 9, 8] dieron la siguiente condición, para una matriz $m \times N$: U satisface la *propiedad de isometría restringida* (PIR) de orden k entero ($1 \leq k \leq N$) con parámetro δ ($0 < \delta < 1$) si, y sólo si, para cada submatriz U_k de tamaño $m \times k$ y para todo vector $v \in \mathbb{R}^k$, se cumple

$$(1 - \delta) \leq \frac{\|U_k v\|_{\ell^2}^2}{\|v\|_{\ell^2}^2} \leq (1 + \delta).$$

Candès y Tao demostraron que si la matriz U cumplía la propiedad PIR de orden $k = 2K$ y $\delta < 1/3$, se podía reconstruir una señal K -dispersa a partir de m mediciones, resolviendo un problema de tipo *basis pursuit*.

Pero, dada una base Ψ , ¿se puede encontrar una matriz de muestreo Φ tal que la matriz $U = \Phi\Psi$ satisfaga PIR de orden $2K$? La respuesta es de nuevo afirmativa. Dependiendo de la naturaleza de la señal, Φ podría ser una *matriz aleatoria*, cuyos elementos sean valores de ciertas variables gaussianas independientes idénticamente distribuidas o, por ejemplo, una matriz obtenida seleccionando m filas de la matriz F_N de tamaño $N \times N$ cuyos elementos son armónicos exponenciales asociada a la *transformada de Fourier discreta*²⁵. Una matriz de este tipo es la usada en la percepción comprimida mostrada en la figura 5 (más detalles en [7]).

²⁵La transformada de Fourier discreta es un análogo computacional de la transformada de Fourier. El elemento (r, s) de la matriz F_N es $e^{-2\pi i(r-1)(s-1)/N}$, $r, s = 1, \dots, N$ (ver, por ejemplo, [39, 2.4.5]).

La teoría de la percepción comprimida ha experimentado un rápido desarrollo en los últimos años y ha encontrado variadas e importantes aplicaciones. Destacamos por ejemplo su uso en la resolución de ciertos problemas inversos en EDPs que aparecen en ámbitos de técnicas nuevas de diagnóstico médico, como la *tomografía fotoacústica* [24].

6. LO QUE NO HEMOS CONTADO

El futuro está en camino, y las teorías propuestas por nuestros protagonistas evolucionan a gran velocidad, entrelazándose con otras áreas. Muy destacable es el rápido desarrollo, entre la comunidad de *machine learning*²⁶, de la descripción de modelos del mundo real que involucran una enorme cantidad de datos. Para el mundo digital en que vivimos es esencial que se trabaje desde todas las comunidades en favor de un entendimiento que permita que el rigor del análisis ayude a mejorar la elaboración de modelos empíricos basados en datos. Así lo han hecho, y siguen haciéndolo, Candès, Daubechies, Meyer y Tao.

Lo relatado en este ensayo ha sido una pequeña exposición de las matemáticas de los cuatro premiados. Prometimos al principio una breve reseña de cada uno de ellos:

- **Emmanuel J. Candès**, <https://statweb.stanford.edu/~candes/>, profesor de Matemáticas y Estadística y codirector del Instituto de Ciencia de Datos en la Universidad de Stanford. Además de la percepción comprimida, su investigación se extiende al análisis armónico computacional, el análisis multiescala y la estimación estadística. Ha recibido, entre otros, los premios Alan T. Waterman (2006), George Pólya (2010), ICIAM Collatz (2011) y AMS/SIAM George D. Birkhoff (2015).
- **Ingrid Daubechies**, <https://math.duke.edu/people/ingrid-daubechies>, profesora de Matemáticas y de Ingeniería Eléctrica e Informática en la Universidad de Duke. Su investigación interdisciplinar, enfocada en el procesamiento de señales y datos y problemas inversos, ha dado lugar a aplicaciones en ámbitos muy variados: biología evolucionaria, geofísica, astrofísica, IRMF, incluso en el estudio y restauración de obras maestras de la pintura. Se puede visitar una bonita semblanza en <https://bit.ly/2H1lw1H>, donde además están disponibles muchos de sus trabajos. Conferenciante plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de Zurich (1994). Ha sido la primera mujer matemática en presidir la Unión Matemática Internacional (2011–2014). Ha recibido los premios BBVA Foundation Frontiers of Knowledge (2012) y Simons Foundation Math+X (2016).
- **Yves Meyer**, profesor en varias de las grandes universidades de Francia, emérito desde el año 2008. Conferenciante plenario en el ICM de Niza (1970). Ha

²⁶El *machine learning* es una rama de la inteligencia artificial cuyo objetivo es proporcionar a una máquina la capacidad de aprender automáticamente y mejorar a partir de la experiencia, sin ser programada explícitamente.

mantenido una relación estrecha con nuestro país. La Universidad Autónoma de Madrid lo nombró en 1997 doctor *honoris causa* (junto con Alberto Calderón), y es miembro extranjero de la Real Academia Española de Ciencias desde 2018. Ha recibido los premios Salem (1970), Gauss (2010) y Abel (2017). Aquí no hemos tenido ocasión de hablar de sus trabajos en teoría de números y con los cuasicristales, ni de contribuciones suyas esenciales al análisis armónico, entre las que podemos citar el estudio de la integral de Cauchy, de los conmutadores, los operadores pseudo-diferenciales, los de Calderón-Zygmund generalizados y el análisis multilineal (y su enfoque desde las ondículas, cómo no).

- **Terence C.-S. Tao**, <https://www.math.ucla.edu/~tao/>, profesor de Matemáticas en la Universidad de California en Los Ángeles. Referente mundial en análisis armónico, su investigación lidera también otros campos: EDPs, combinatoria algebraica, aritmética y geométrica, y teoría analítica de números. Premio Salem (2000) y George Pólya (2010) —junto con Candès—, recibió la Medalla Fields en el ICM de Madrid (2006). Magistral comunicador, su blog <https://terrytao.wordpress.com/> se hace casi de presencia obligada entre los favoritos del navegador del investigador matemático.

7. A HOMBROS DE GIGANTES

Un matemático de profesión hace frente a diario a un dilema existencial. Por un lado trabaja para seguir profundizando en una teoría hasta llegar a la generalidad y la abstracción, y por otro para encontrar esa aplicación que consiga suavizar la impresión que siente de no ser útil ni necesario para la sociedad. Se remueve en ocasiones con ansiedad e impotencia, sabiendo que tiene el método pero no encuentra la pregunta adecuada, como aquel que avanza a través de la selva abriéndose paso a golpes de machete pero sin brújula.

A veces aparecen gigantes como Candès, Daubechies, Meyer y Tao, que desarrollan teorías matemáticas profundas, intrincadas. Ellos se encaramaron a hombros de otros gigantes, nosotros nos podemos encaramar a los suyos. Abren el cofre del tesoro, ponen el matiz en el sitio oportuno, y un nebuloso problema que había surgido de alguna parte de la realidad, de pronto empieza a tener solución. Y gracias a ellos nuestros ordenadores son más eficientes, los diagnósticos médicos son más precisos y los teléfonos móviles hacen mejores fotografías.

Que el Premio Princesa de Asturias de Investigación Científica y Técnica reconozca el valor de las matemáticas para la mejora de la tecnología es una excelente noticia para las matemáticas en general, y para las matemáticas en España en particular. Es un orgullo contar con estos referentes, y en cierto modo es casi como si nos hubiese tocado un poquito de premio a cada uno de los matemáticos de aquí.

El reconocimiento público que supone este galardón ha de servir para alentar el trabajo de los matemáticos jóvenes, en muchas ocasiones atrapados en la incertidumbre y la precariedad. A pesar de todo, el esfuerzo, el rigor, la constancia, la creatividad y la imaginación tienen que ser los fundamentos (únicos) para promover

la cultura científica. Hay que seguir trabajando para conseguir una sociedad bien concienciada del valor de la ciencia que vea como una demanda justa e ineludible que sus investigadores y académicos trabajen en mejores condiciones.

Para concluir servirá una cita de Yves Meyer, que queda transcrita literalmente²⁷:

A last advice to young mathematicians is to simply forget the torturing question of the relevance of what they are doing. It is clear to me that the progress of mathematics is a collective enterprise. All of us are needed.

AGRADECIMIENTOS

La autora quiere agradecer al Ayuntamiento de Oviedo, a la Cátedra de Inteligencia Analítica de la Universidad de Oviedo, a la Real Sociedad Matemática Española, y a la Real Academia Española de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, la iniciativa de la convocatoria de este concurso, así como al jurado, representado por su presidente el profesor Juan Luis Vázquez Suárez y su secretario el profesor Santos González Jiménez, el tiempo dedicado a la lectura de este ensayo.

También quiere agradecer a Emilio Fernández y a Santiago Mazuelas su cuidadosa lectura y los muchos comentarios que le han permitido mejorar el texto. En su elaboración se han usado numerosas fuentes, fundamentalmente las citadas en las referencias y a lo largo del artículo, además de *MathSciNet* y *Wikipedia*.

REFERENCIAS

- [1] B. P. ABBOTT *ET AL.* (LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION Y VIRGO COLLABORATION), Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016), 061102.
- [2] R. G. BARANIUK, Compressive sensing [Lecture Notes], *IEEE Signal Processing Magazine* **24** (2007), no. 4, 118-120, 124.
- [3] E. J. CANDÈS, Compressive sampling, *International Congress of Mathematicians*, Vol. III, 1433–1452, European Mathematical Society, Zürich, 2006.
- [4] E. J. CANDÈS Y J. K. ROMBERG, Sparsity and incoherence in compressive sampling, *Inverse Problems* **23** (2007), 969–985.
- [5] E. J. CANDÈS, J. K. ROMBERG Y T. TAO, Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** (2006), no. 2, 489–509.
- [6] E. J. CANDÈS, J. K. ROMBERG Y T. TAO, Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements, *Comm. Pure Appl. Math.* **59** (2006), no. 8, 1207–1223.
- [7] E. J. CANDÈS Y T. TAO, The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n , *Ann. Statist.* **35** (2007), no. 6, 2313–2351.

²⁷De la presentación de John Rognes, presidente del Comité que le concedió el Premio Abel: <https://www.mm.uio.no/math/personer/vit/rognes/papers/meyerkoll.pdf>

- [8] E. J. CANDÈS Y T. TAO, Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies?, *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** (2006), no. 12, 5406–5425.
- [9] E. J. CANDÈS Y T. TAO, Decoding by linear programming, *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** (2005), no. 12, 4203–4215.
- [10] E. J. CANDÈS Y M. B. WAKIN, An introduction to compressive sampling, *IEEE Signal Processing Magazine* **25** (2008), no. 2, 21–30.
- [11] E. CHASSANDE-MOTTIN Y P. FLANDRIN, On the time-frequency detection of chirps, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **6** (1999), 252–281.
- [12] A. COHEN, I. DAUBECHIES Y J. C. FEAUVEAU, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), 485–560.
- [13] R. R. COIFMAN, S. MALLAT, S. JAFFARD, A. OLEVSKII Y A. COHEN, Ad honorem Yves Meyer, *Notices Amer. Math. Soc.* **65** (2018), no. 11, 1378–1396.
- [14] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909–996.
- [15] I. DAUBECHIES, The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. Inform. Theory* **36** (1990), no. 5, 961–1005.
- [16] I. DAUBECHIES, *Ten lectures on wavelets*, CBS-NSF Regional Conferences in Applied Mathematics, 61, SIAM, 1992.
- [17] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets: II, Variations on a theme, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), no. 2, 499–519.
- [18] I. DAUBECHIES, A. GROSSMAN E Y. MEYER, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.* **27** (1986), no. 5, 1271–1283.
- [19] I. DAUBECHIES, S. JAFFARD Y J.-L. JOURNÉ, A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay, *SIAM J. Math. Anal.* **22** (1991), no. 2, 554–572.
- [20] D. L. DONOHO, Compressed sensing, *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** (2006), no. 4, 1289–1306.
- [21] T. GOWERS (EDITOR), J. BARROW-GREEN Y I. LEADER (EDITORES ASOCIADOS), *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [22] A. GROSSMANN Y J. MORLET, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), no. 4, 723–736.
- [23] A. HAAR, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Ann.* **69** (1910), 331–371.
- [24] M. HALTMEIER, M. SANDBICHLER, T. BERER, J. BAUER-MARSCHALLINGER, P. BURGHOLZER Y L. NGUYEN, A sparsification and reconstruction strategy for compressed sensing photoacoustic tomography, *J. Acoust. Soc. Amer.* **143** (2018), 3838–3848.
- [25] E. HERNÁNDEZ, Ondículas: historia, teoría y aplicación, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **21** (2018), no. 2, 275–299.
- [26] B. B. HUBBARD, *The world according to wavelets. The story of a mathematical technique in the making*, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.

- [27] P. G. LEMARIÉ Y Y. MEYER, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), no. 1–2, 1–18.
- [28] S. MALLAT, A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* **11** (1989), 674–693.
- [29] S. MALLAT, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69–87.
- [30] S. MALLAT, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [31] Y. MEYER, Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs, *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1985/86, *Astérisque* **145-146** (1987), no. 2, 209–223.
- [32] Y. MEYER, Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **45** (1987), no. 1, 1–42.
- [33] Y. MEYER, Orthonormal wavelets, *Wavelets* (Marseille, 1987), 21–37, Inverse Probl. Theoret. Imaging, Springer, Berlin, 1989.
- [34] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs. I: Ondelettes*, Hermann, Paris, 1990. [Traducción al inglés: *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, 1992.]
- [35] Y. MEYER, ¿Por qué y cómo se hace investigación en matemática?, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **5** (2002), no. 1, 57–61.
- [36] V. NECULA, S. KLIMENKO Y G. MITSELMARKHER, Transient analysis with fast Wilson-Daubechies time-frequency transform, *J. Phys. Conf. Ser.* **363** (2012), 012032.
- [37] W. B. PENNEBAKER Y J. L. MITCHELL, *JPEG: Still image data compression standard*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [38] I. PERAL ALONSO, Entrevista a Yves Meyer, Premio Abel 2017, un excepcional matemático, itinerante y visionario, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **20** (2017), no. 3, 493–512.
- [39] A. D. POULARIKAS, *The transforms and applications handbook*, 2.^a ed., CRC Press, Boca Raton, 2000.
- [40] C. SHANNON, Communication in the presence of noise, *Proceedings of the I.R.E.* **37** (1949), 10–21.
- [41] D. TAUBMAN Y M. MARCELLIN, JPEG2000: Standards for interactive imaging, *Proceedings of the IEEE* **90** (2001), no. 8, 1336–2002.
- [42] D. TAUBMAN Y M. MARCELLIN, *JPEG2000 Image Compression Fundamentals, Standard and Practice*, Springer, 2002.