

Enseñanza de herramientas de combinatoria a través de actividades basadas en el ajedrez en Educación Primaria. Un estudio de caso

Alberto Arnal Bailera – Universidad de Zaragoza

 0000-0002-0516-0463

Dámaso Miguel Vera Sáez-Benito – Universidad de Zaragoza

 0000-0002-9749-6836

Recepción: 02.10.2020 | Aceptado: 03.02.2021

Correspondencia a través de **ORCID**: Alberto Arnal Bailera

 **0000-0002-0516-0463**

Citar: Arnal Bailera, A. y Vera Sáez-Benito, DM. (2021). Enseñanza de herramientas de combinatoria a través de actividades basadas en el ajedrez en Educación Primaria. Un estudio de caso. *REIDOCREA*, 10(7), 1-18. []

Financiación y agradecimientos: Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el MICINN de España (proyecto PID2019-104964GB-I00) y se llevó a cabo dentro del grupo “Investigación en Educación Matemática” (S60_20R) reconocido oficialmente por el Gobierno de Aragón.

Resumen: En Educación Primaria se trabaja poco la combinatoria, retrasándose su introducción hasta la secundaria. Nuestro objetivo es estudiar el efecto de implementar en tercer curso de Primaria una secuencia de actividades para la enseñanza de herramientas sencillas de resolución de problemas de combinatoria con ayuda del ajedrez para lo que llevamos a cabo un estudio de caso de alumno. A igual de dificultad, obtenemos mejores resultados con las actividades planteadas vía el ajedrez que con otros sistemas de representación como los movimientos dentro del plano de una vivienda. La estrategia del diagrama de árbol se muestra comprensible y adecuada para la resolución de estas actividades en este nivel.

Palabra clave: Matemática combinatoria

Teaching combinatorial mathematics tools thorough chess-based activities in primary education. A case study

Abstract: In Primary Education, little work has been done on combinatorial mathematics, as its introduction has been delayed until high school. We implement a sequence of combinatorial mathematics activities on a third-year Primary school student (case study) with the help of chess. We obtain better results in the activities proposed via chess than via different representation systems such as house plans. The tree diagram strategy is understandable and adequate for solving these activities at this level.

Keyword: Combinatorial mathematics

Introducción

Socialmente se suele aceptar una cierta relación, un tanto difusa, entre el aprendizaje del ajedrez y el de las matemáticas. Para avanzar en un mayor conocimiento de esta relación podemos, entre otras opciones, mirar con detalle cómo algunas actividades matemáticas están íntimamente relacionadas con cuestiones del juego del ajedrez o viceversa.

Desde el punto de vista de la motivación, Fernández (1990) se pregunta por qué utilizar el ajedrez como un recurso matemático: el ajedrez es considerado un juego, lo cual genera una actitud más receptiva por parte del alumno, este se muestra más motivado para aprender y más participativo en la propuesta de actividades, reduciéndose así los miedos que pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, Gairín Sallán y Fernández Amigo (2010) reconocen la dificultad que albergan las matemáticas para una gran parte del alumnado. Hay quienes logran superar esta materia tras mucha dedicación, e incluso los hay que disfrutan entre símbolos y teoremas, pero para la inmensa mayoría resulta una tarea tediosa y complicada, lo cual reduce en gran medida la motivación por esta asignatura. Posiblemente, un hecho que desencadena esta situación sea la desconexión de los contenidos trabajados con la vida

diaria de los estudiantes, a consecuencia de que los aprendizajes propuestos no están relacionados con sus intereses ni con su realidad más cercana, los alumnos la perciben como una asignatura descontextualizada e intrascendente. Para superar este escenario se hace necesario utilizar recursos más motivadores, como puede ser el ajedrez, ya que son varios los estudios que demuestran sus contribuciones al desarrollo cognitivo y a la mejora del rendimiento escolar (Djakow, Petrowski y Rudik, 1925; Frank, 1973; Ferguson, 1979; Adams y Pandolfini, 1986; García de la Rosa, 1988; Margulies, 1991; Rodríguez, 1996; Lobo, 1997, citados en Gairín y Fernández, 2010).

Desde el punto de vista del desarrollo del currículo, pudo comprobarse que el ajedrez es un recurso didáctico muy útil para trabajar los cinco bloques que componen el currículo de matemáticas (Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa, 2015). Para los números, puede utilizarse la actividad de contar granos de trigo o la de los cuadrados mágicos. En el caso de la geometría sirve para describir posiciones, recorridos, formas, giros y simetrías, además en este caso resulta interesante el recubrimiento de superficies con polimínos. Por ello, estos autores animan a los docentes de Educación Primaria a integrar el ajedrez en sus prácticas cotidianas, basándose en los beneficios que aporta a la enseñanza, entre los cuales enumeran el desarrollo de hábitos de trabajo individual, el incremento del esfuerzo y de la responsabilidad, la mejora de la concentración y de otras habilidades como la creatividad, la tenacidad o la confianza, así como el desarrollo del pensamiento lógico. Todos ellos objetivos orientados a desarrollar la competencia matemática. García (2013) también encuentra ciertos paralelismos entre las matemáticas y el ajedrez, como son el orden, la concentración o la anticipación, de ahí que aquellos niños que dominan el ajedrez tengan más posibilidades de progresar en el área de las matemáticas.

Pero, ¿por qué el ajedrez y no otro tipo de juego educativo? Pues bien, a diferencia de otros juegos, el ajedrez se fundamenta en la aplicación de competencias netamente matemáticas como la lógica o el estudio ordenado de posibilidades de resolución de un problema, asimismo cuenta con cierta dosis de imaginación y creatividad. Esto hace que el razonamiento lógico sea una herramienta imprescindible en el desarrollo del juego. Por otro lado, aunque existen multitud de juegos de lógica, algunos de ellos no requieren de la utilización excesiva de estrategias o razonamientos (otelo, alerque, yoté...), otros no son tan atractivos (backgammon) o populares (tablut) y otros no tienen unas reglas aceptadas mundialmente (damas chinas, damas polacas...) o son individuales (solitario, puzles, rompecabezas...), excluyendo así la dimensión social del individuo (Sáenz, 2014). Por eso, según este autor, el ajedrez reúne las características necesarias para convertirse en un recurso adecuado en el aprendizaje de las matemáticas:

- Razonamiento: no es un juego de azar, hace falta pensar antes de actuar.
- Sencillez a la vez que riqueza: cualquier persona puede practicarlo y si le dedica las horas necesarias puede llegar a ser un buen jugador, no es un juego exclusivamente para gente inteligente.
- Atractivo: variedad de piezas distribuidas en dos colores distintos. Además, la existencia del ajedrez de fantasía y del ajedrez viviente atrae todavía más a los niños.
- Socialización: una partida requiere de la presencia de dos personas, lo que favorece la comunicación y promueve las relaciones sociales. Aunque también cabe la posibilidad de enfrentarse a programas informáticos.
- Universalización: desde la creación de la Federación Internacional de Ajedrez (FIDE) en 1924, sus reglas son aceptadas y reconocidas mundialmente.

En el trabajo que nos ocupa, la parte informática cobra especial importancia al haberse realizado a distancia, aunque de forma sincrónica, durante el periodo de confinamiento

en España de 2020. Existen numerosos programas informáticos que pueden utilizarse para la enseñanza del ajedrez, algunos de ellos aparecen en la obra de Fernández Amigo y Pallarés Porcar (2009): *Chessmaster 3000*, disponible en dos y en tres dimensiones; *Virtual Chess 2*, informa de las jugadas legales, lo que lo convierte en una buena opción para aquellos que están iniciándose en su práctica; *Deep Fritz 8*, cuenta con una base de datos que alberga 500.000 partidas; *Combat Chess*, se puede programar para que el propio juego cometa errores; *Evajedrez*, dispone de cuatro programas de entrenamiento; *Chessbase 9*, permite comentar y archivar las partidas realizadas por el jugador; *Battle Chess*, las piezas toman la forma de personajes medievales y las capturas se realizan de forma animada; *Chess*, programa muy sencillo con bajo nivel de juego; *Ajedrez. Versión para niños*, programa para iniciarse en la práctica del ajedrez y *El pequeño Fritz*, guía para aprender a jugar al ajedrez tanto para niños como para adultos. Además de programas de ordenador como los citados, también cabe resaltar las aportaciones de páginas web como *ChessBase* y *Lichess*, dos de las más utilizadas en la enseñanza del ajedrez actualmente. Por su parte, Peñalvo, de la Torre, García y Carrasco (s.f.) han desarrollado un método de enseñanza-aprendizaje basado en el sistema web Ajedrez Tutor, el cual favorece el aprendizaje del ajedrez de forma grupal, a través de la colaboración y gracias al seguimiento de un Maestro de Ajedrez. Este proyecto cuenta con diversas herramientas de comunicación que posibilitan el intercambio de información entre el maestro y los alumnos. Una de ellas es *Paltalk*, que permite que el docente se dirija a todo el grupo, así como que un alumno interactúe con el resto de la clase. Otra de las herramientas utilizadas es el *streaming* de radio a través de internet, transformando así el ordenador del docente en una emisora de radio. De esta manera, los alumnos pueden escuchar los comentarios que realiza el profesor desde sus respectivos ordenadores. Si atendemos al periodo de confinamiento acontecido en el año 2020, muchos profesores de ajedrez impartieron sus sesiones mediante *Skype* haciendo uso de la opción que ofrece para compartir pantalla. El uso de todos estos recursos permite una enseñanza online del ajedrez, haciendo posible que se impartan sesiones a distancia e incluso de forma asincrónica, si así fuera necesario.

Centrándonos ahora en el campo de las matemáticas, este trabajo trata el área de la combinatoria. Es preciso comentar que el currículo español no recoge de forma explícita esta rama de las matemáticas. El Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, incluye el bloque de contenidos 4. Tratamiento de la información azar y probabilidad, para calcular la probabilidad de un suceso determinado es necesario recurrir, aunque sea de forma indirecta, a la Combinatoria. Además, la tarea de recuento también requiere de esta herramienta. En conclusión, podemos decir que a pesar de que las investigaciones realizadas por Piaget e Inhelder apuestan por la aplicación en el aula de la combinatoria, su presencia en el currículo español todavía sigue siendo inferior a la deseada (Fernández, 2013). En este sentido, Batanero (2016) considera que, a través de una serie de recursos como fichas, ruletas, bolas, dados, etc... puede iniciarse al alumnado en las tareas de probabilidad, de manera que al concluir la Educación Primaria sea capaz de actuar ante determinadas situaciones probabilísticas. Además, el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación aumenta las posibilidades de enseñanza de este tipo de situaciones, gracias a determinados materiales digitales pueden realizarse en cuestión de segundos gran cantidad de cálculos, lo cual favorece la comprensión de los alumnos.

Un diagrama del árbol es un tipo de grafo en el que de un vértice inicial o nodo raíz salen varios ejes (o ramas) cada uno de los cuales representa las diversas opciones a contar o revisar en una primera fase. En una segunda y siguientes fases, esos nuevos vértices pueden erigirse en vértices iniciales de otros ejes que completan el caso a contar o revisar. En la Figura 1 mostramos un diagrama de árbol que representaría cinco casos diferentes dados por las combinaciones: $A_1-B_1-D_1$, $A_1-B_1-D_2$, A_1-B_2 , A_1-B_3 , A_2-C_1 y A_2-C_2 .

$A_1, A_2...$ representarán en nuestro caso elementos propios del juego como piezas o escaques y sus combinaciones podrían representar, por ejemplo, que una determinada pieza que está se mueve desde el nodo raíz pasa primero por el escaque A_1 para ir después a B_1 . Una de las ventajas de esta representación es que hace sencillo recorrer todos los casos posibles o, en su caso, todos los casos que nos interesan y detectar más fácilmente si hemos olvidado alguno.

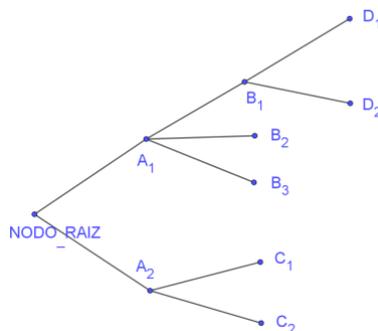


Figura 1. Ejemplo de diagrama de árbol.

A pesar de su aparente simplicidad, el diagrama de árbol se muestra como una herramienta un tanto compleja de utilizar (Batanero, Navarro-Pelayo, y Godino, 1997) bien sea debido a errores de construcción o de interpretación del mismo. Dichos errores de aprendizaje de esta herramienta han sido recopilados por Roldan López de Hierro, Batanero y Beltrán-Pellicer (2018), entre ellos estarían:

- dibujar ramas de menos o de más,
- dibujar solo una parte del diagrama (por ejemplo, una de las ramas) tratando luego de generalizar (incorrectamente)
- no considerar una raíz,
- no describir todas las ramas que salen de cada nudo,
- creer que de cada nodo debe salir el mismo número de ramas, o
- creer que el experimento siempre termina tras el mismo número de fases.

La investigación que ha tenido lugar en este trabajo consiste en un estudio de caso, Morra y Friedlander (2001) lo definen como “un método de aprendizaje acerca de una situación compleja; se basa en el entendimiento comprensivo de dicha situación el cual se obtiene a través de la descripción y análisis de la situación la cual es tomada como un conjunto” (p.2). Los casos útiles en el campo de la educación generalmente son personas y programas, los cuales guardan semejanzas entre sí y al mismo tiempo son únicos e irrepetibles (Stake, 1995). Este caso puede ser un niño o un grupo de alumnos, lo que está claro es que “el caso es uno entre muchos”, en el cual tenemos que centrarnos y analizar cada una de sus peculiaridades. El caso se caracteriza por ser específico en lugar de general, es algo complejo y en continuo funcionamiento. El estudio de casos no sirve para extraer generalizaciones, ya que tan solo se estudia a un sujeto o a un pequeño grupo. Sin embargo, siempre que se observa un comportamiento se extraen determinadas conclusiones, a estas generalizaciones de un caso o de unos pocos casos podemos llamarlas *generalizaciones menores*. El objetivo del estudio de casos es la particularización, se profundiza en un caso concreto para familiarizarnos con él. Atención, receptividad y disciplina son características que todo investigador debe cumplir a la hora de llevar a cabo un estudio de caso. Su cometido ha de ser el de formular las preguntas más correctas posibles, lo cual hace que esta tarea sea un tanto compleja. Por ello, conviene tener en cuenta tres tipos de preguntas que pueden utilizarse, como son las informativas, las evaluativas y las generales.

Objetivos o hipótesis

El objetivo de este estudio es estudiar la adquisición de la estrategia del diagrama de árbol por un alumno de 3º de Educación Primaria cuando esta es introducida mediante actividades basadas en el ajedrez trabajando a distancia de forma síncrona.

Métodos

Se ha diseñado una progresión de aprendizaje con el propósito de que alumnos de Educación Primaria desarrollen estrategias que les sean útiles en el proceso de resolución de problemas que requieran del recuento de diferentes caminos o combinaciones. Esta progresión está formada por tres tipos de actividades, en primer lugar, se realizan *actividades de ajedrez* en las que hay que obtener el mayor número de recorridos posible para desplazarse de una casilla a otra del tablero, a continuación, aparecen unas *actividades de matemáticas* que consisten en encontrar todas las opciones posibles para pasar de una sala a otra y finalmente se proponen al alumno *actividades de construcción de diagramas de árbol* basados en las soluciones obtenidas en las actividades previas.

Esta progresión de aprendizaje se ha llevado a cabo a lo largo de cuatro sesiones. En la primera sesión se trabaja con la pieza de la torre, en la segunda se introduce el alfil, en la tercera se utiliza la dama y en la cuarta y última sesión se proponen una serie de problemas de combinatoria para comprobar si el alumno es capaz de aplicar las estrategias aprendidas para resolver dichos problemas.

Nótese que las actividades de ajedrez y de matemáticas son isomorfas, en el sentido de que tienen el mismo número de soluciones y se pueden poner en correspondencia biyectiva. Esto se entiende bien si pensamos que cada escaque ha sido sustituido por una habitación y cada posible desplazamiento de la pieza en cuestión ha sido sustituido por una puerta que conecta dos habitaciones. En la figura 2 aparece un ejemplo para comprobar esta relación.

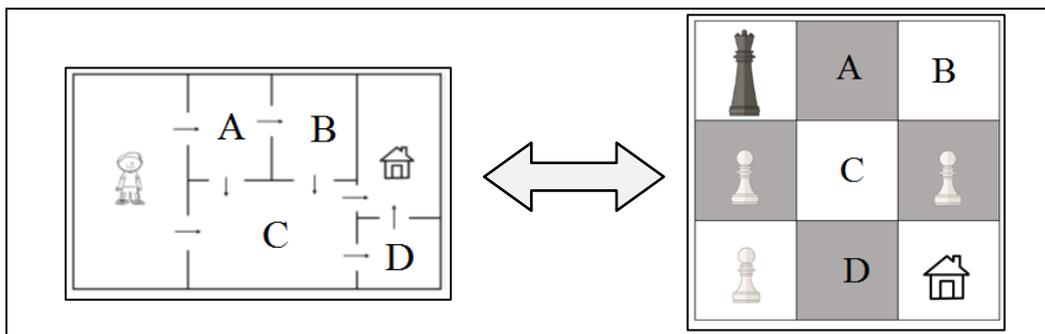


Figura 2. Actividades isomorfas.

Como puede observarse, en ambos escenarios se dan las mismas soluciones, una de ellas es: A – B – C – casa. Con esto se pretende favorecer la transmisión de las estrategias aprendidas mediante ajedrez a la resolución de problemas. En los dos casos el diagrama de árbol resultante quedaría tal y como se muestra en la Figura 3.

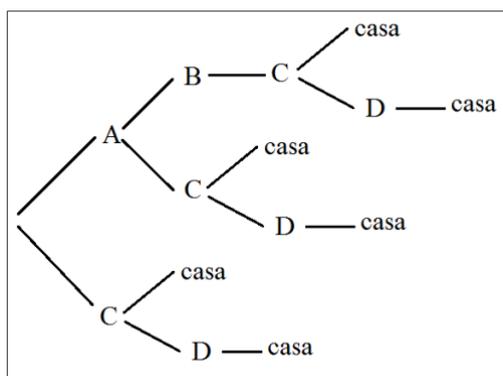


Figura 3. Diagrama de árbol resultante.

Participantes

Para comprobar la utilidad de la progresión diseñada, se ha llevado a cabo un estudio de caso en el que participó un estudiante de 3º de Educación Primaria, dicho estudiante no había tenido ninguna experiencia previa con el ajedrez. El motivo de que se solicitase su presencia en el estudio se debió a la imposibilidad de implementar la secuencia de manera presencial en un aula, a causa del confinamiento generado por la crisis del virus Covid-19. Es preciso comentar que las actividades habían sido diseñadas en un primer momento para alumnos de 2º, debido a esto es probable que algunas actividades hayan resultado más sencillas para el alumno en cuestión. Por otro lado, haber impartido las sesiones en un aula con varios alumnos habría permitido que se ayudasen unos a otros y que trabasen de forma cooperativa.

Instrumentos

A continuación, se muestran los tres tipos de actividades mencionados anteriormente, distribuidos a lo largo de las sesiones impartidas:

1ª sesión:

En la primera sesión se realiza una introducción del ajedrez para que el alumno conozca en qué consiste este juego. A continuación, se presenta la primera pieza con la que se va a trabajar: la torre y se explican sus movimientos permitiéndose al alumno que los practique sobre un tablero de ajedrez ordinario.

Actividades de ajedrez

En la Figura 4 puede verse la primera actividad que se entregó al alumno, acompañada del siguiente enunciado: *“La torre quiere volver a casa sin capturar ningún peón. Dibuja todos los caminos que puede seguir”*.

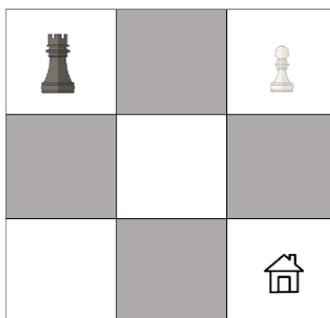


Figura 4. Primera actividad de ajedrez.

Al terminar, se formula la siguiente pregunta: “¿Cuántos caminos has obtenido?”, para comprobar si se ha alcanzado la respuesta correcta. Después se pide lo siguiente: “Elige un camino y explícaselo a un amigo”, lo que se pretende es promover la aparición de estrategias como, por ejemplo, poner nombre a cada una de las casillas e ir diciendo por las que hay que pasar.

Una vez finalizada esta primera actividad, se propone otra similar, pero introduciendo variantes en el tablero propuesto. En este caso, el tablero también es de tamaño 3x3, manteniendo la posición de la torre y de la casilla de llegada pero cambiando la posición del peón para dar lugar a una solución distinta.

Actividades de matemáticas

Después de haber realizado las actividades de ajedrez, se entrega al alumno la actividad que se muestra en la Figura 5 con el siguiente enunciado: “Pablo quiere volver a casa. Dibuja todos los caminos que puede seguir”.

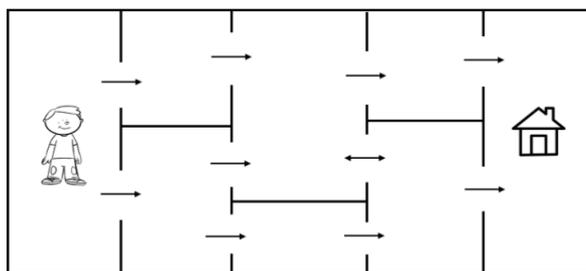


Figura 5. Primera actividad de matemáticas.

Tras completarla se pregunta, al igual que en el caso anterior, por el número de caminos obtenidos y se pide que escoja uno de ellos y lo explique. De esta manera, se pretende comprobar si era capaz de utilizar las estrategias aprendidas con el ajedrez en un contexto distinto. Es importante recordar el isomorfismo entre el tablero y el plano y sus respectivos conjuntos de soluciones lo que nos permite focalizar el trabajo en el sistema de representación del problema, dado que la dificultad intrínseca no cambia.

Actividades de construcción de diagramas de árbol

Una vez que el alumno ha practicado ambos tipos de actividades, se propone realizar un diagrama de árbol que recoja las soluciones obtenidas. Si previamente ha utilizado letras para nombrar las casillas o las salas, le resultará más sencillo elaborar dicho diagrama. Este tipo de actividad podrá realizarse en la primera sesión o más adelante si el docente considera que el alumno todavía no es capaz de llevar a cabo dicha estrategia.

2ª sesión:

En esta sesión se presenta la segunda pieza con la que se va a trabajar: el alfil. En primer lugar, se explicará cuáles son los movimientos que puede realizar, después de esto se llevarán a cabo una serie de actividades para familiarizarse con esta pieza. Las actividades propuestas son análogas a las realizadas anteriormente con la torre. Primero, encontrar todos los caminos que puede seguir el alfil para llegar a casa en una situación concreta y a continuación, encontrar todos los posibles recorridos en una actividad de matemáticas similar a la que aparece en la figura 5.

3ª sesión:

En la tercera sesión se va a presentar la tercera y última pieza que se introduce en esta secuencia de actividades: la dama. Se realizarán las actividades a las que ya está acostumbrado el alumno y que consisten en encontrar los caminos posibles para

completar un recorrido, primero utilizando el recurso del ajedrez y después haciendo uso de las actividades de matemáticas.

4ª sesión:

En la cuarta y última sesión se pretende comprobar la utilidad de las estrategias aprendidas mediante las actividades de ajedrez en la resolución de problemas. Para ello, se proponen al alumno una serie de problemas de combinatoria, que consisten en la creación de banderas a partir de un patrón dado y unos colores determinados.

El enunciado de uno de estos problemas dice así: “¿Cuántas banderas diferentes se pueden formar con los colores: rojo, verde y azul? Tienes que utilizar los tres colores en cada bandera”. Para facilitar el proceso de resolución, se entregan banderas recortadas en número indeterminado pero mayor que el número total de posibilidades. El motivo por el que no se le entregue una ficha con las banderas dibujadas es para que no le condicione el número de banderas que pudiera aparecer en dicha ficha. De esta forma, al contar con un número indeterminado de banderas, no sabe cuántas opciones diferentes hay.

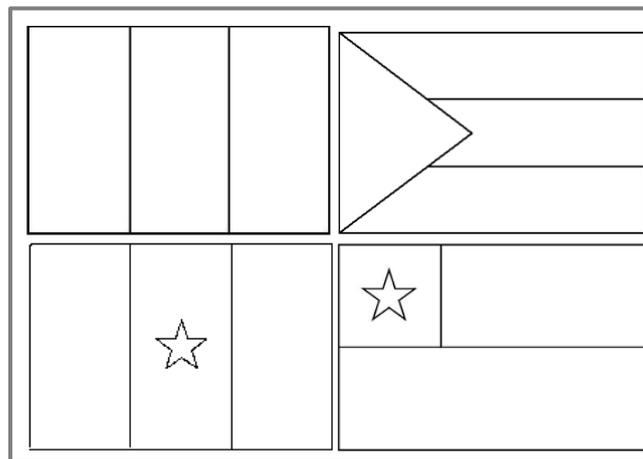


Figura 6. Banderas de los problemas de combinatoria.

La bandera que aparece en la esquina superior izquierda de la Figura 6 es la que corresponde al problema mencionado anteriormente. El diagrama de árbol que se muestra en la Figura 7 pertenece a dicho problema resolviéndolo de forma parcial. Tal y como puede observarse, si la primera franja se pinta de color rojo se obtienen dos opciones diferentes, por lo que si se comenzara con el color verde o el azul también habría otras dos posibilidades con cada uno. Esto nos da como resultado 6 banderas diferentes.

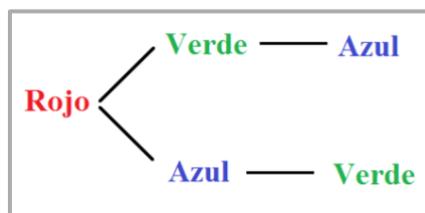


Figura 7. Fragmento de la solución del problema.

Un aspecto que se ha tenido en cuenta a la hora de diseñar estos problemas, es que cuantos más colores se ofrecen para completar la bandera, más opciones diferentes surgen y por tanto más complicado se hace el problema. Aquellos que tienen pocas soluciones, como es el caso del ejemplo mostrado, pueden resolverse incluso sin aplicar ninguna estrategia. En cambio, cuando el número de soluciones aumenta, se hace

necesario poner en práctica alguna estrategia que facilite su resolución. Una manera de hacerlo es recurrir al diagrama de árbol.

Procedimiento

El estudio de caso se realizó a distancia a través de la aplicación de vídeo llamadas *Hangouts Meet*. Las sesiones tuvieron lugar entre los días 9 y 18 de abril de 2020. Para que el alumno pudiera realizar las actividades, el docente se encargaba de enviárselas en formato digital por correo electrónico.

Análisis de los datos

El docente a lo largo de la sesión contaba con la posibilidad de formular al alumno las preguntas que considerase oportuno para obtener todos los datos necesarios. Tras la realización de la sesión, el alumno enviaba las actividades al docente para que este las pudiese corregir y analizar.

El análisis de los datos obtenidos se ha realizado prestando especial atención a la corrección de las respuestas finales del alumno y a la aparición y evolución de estrategias de resolución de las actividades que acercaran al alumno a la comprensión de la estrategia del diagrama de árbol y a su construcción.

Resultados

Dado que trabajamos con un estudio de caso, presentamos aquí los resultados obtenidos en la realización de las diferentes actividades por el alumno junto con un análisis de los mismos sesión por sesión:

1ª sesión:

La primera sesión de la progresión de aprendizaje tuvo lugar el día 9 de abril de 2020. En primer lugar se explica brevemente al alumno en qué consiste el ajedrez y se le indican cuáles son los movimientos que puede realizar la torre, este los practica con la pieza sobre un tablero de ajedrez.

Actividades de ajedrez

El alumno procede a realizar la primera actividad, cuyo enunciado es el siguiente: “*La torre quiere volver a casa sin capturar ningún peón. Dibuja todos los caminos que puede seguir*”. Antes de dibujar los caminos, prueba con la pieza desplazándola por encima del tablero. Cuando ya considera que tiene la solución, comienza a dibujar los distintos recorridos, el docente le insta a que coloree cada uno de un color diferente para facilitar su posterior recuento. La Figura 8 muestra la solución obtenida por el alumno.

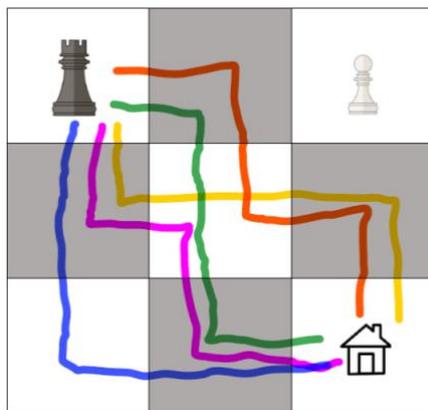


Figura 8. Solución de la primera actividad de ajedrez.

Tras haber dibujado los recorridos, los cuenta y anota el resultado que ha obtenido (5), después lee la segunda parte de la actividad: *“Elige un camino y explícaselo a un amigo”*. Escoge uno de ellos, concretamente el de color verde, y narra los pasos que ha seguido para completar este recorrido, tras ello los escribe diciendo: *“Avanza una casilla, luego baja dos casillas y luego avanza una casilla”*.

A continuación realiza la siguiente actividad, similar a la primera, pero con el peón colocado en una casilla diferente, lo cual produce soluciones distintas. En este caso no se le solicita que explique cómo ha efectuado los recorridos. En la Figura 9 aparece la solución obtenida por el alumno.

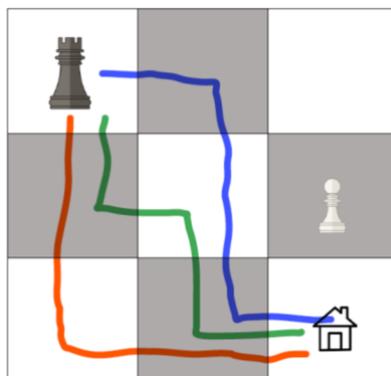


Figura 9. Solución de la segunda actividad de ajedrez.

Actividades de matemáticas

En este tipo de actividades el alumno tiene que dibujar todos los caminos posibles para poder completar un desplazamiento de una sala a otra, para ello ha de respetar las flechas de dirección.

La Figura 10 muestra los resultados obtenidos en la primera actividad. Uno de los aspectos más llamativos de esta es que el alumno no utiliza la flecha de doble dirección (rodeada en color rojo), la cual ofrece una solución más. El motivo de este error pudo ser que no entendiera su utilidad o que no se diera cuenta de su presencia.

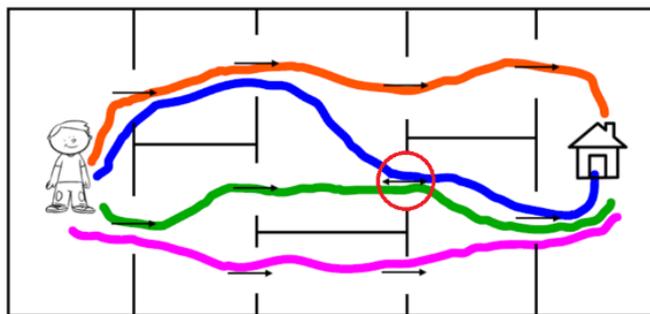


Figura 10. Solución de la primera actividad de matemáticas.

Una vez completados los caminos, escribe el resultado obtenido (4) y se dispone a responder a la segunda parte, en la que debe explicar uno de esos caminos. Elige el azul y lo detalla con estas palabras: “*Primero vas arriba, luego avanzas a la siguiente, luego vas a la de abajo y luego llegas a casa.*”

En la siguiente actividad vuelve a prescindir del uso de la flecha de doble dirección, tal y como puede comprobarse en la Figura 11. Por ello, tras su realización, el docente se interesa al respecto. Su argumentación fue que no consideraba que esa flecha permitiera más opciones posibles, por lo que se puede deducir que el alumno había supuesto que la flecha era un distractor, cuando en realidad no era así.

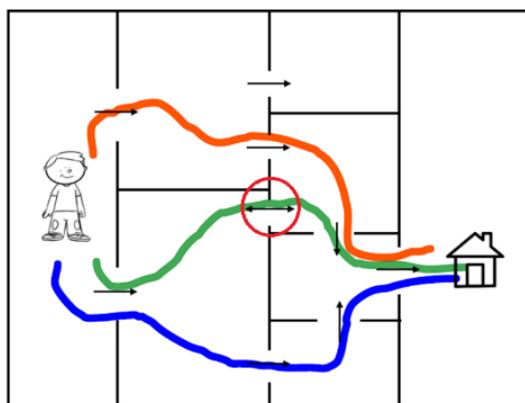


Figura 11. Solución de la segunda actividad de matemáticas.

Es preciso comentar que el alumno obtuvo mejores resultados en las actividades de ajedrez que en las de matemáticas. Si nos fijamos en las Figuras 8 y 10, las cuales representan actividades isomorfas, podemos comprobar como en la actividad de ajedrez el alumno es capaz de obtener un recorrido más que en la de matemáticas.

2ª sesión:

La tercera sesión tuvo lugar el día 11 de abril de 2020. En primer lugar, se presenta al alumno la nueva pieza con la que va a trabajar, el alfil, y se le explica cómo puede moverse por el tablero. El alumno practica estos movimientos con un alfil y un tablero de ajedrez.

Actividades de ajedrez

El alumno lee el enunciado de la actividad y reconoce que es similar a las que ya había realizado en la sesión anterior, en este caso también debe regresar a casa con la pieza en cuestión sin capturar ningún peón. En la Figura 12 puede observarse el resultado obtenido por el alumno.

explique uno de ellos utilizando la técnica de nombrar con letras que había aprendido en la sesión anterior.

En esta actividad llama la atención el hecho de que no utilice la casilla superior derecha (marcada con una cruz roja en la Figura 14) en ninguno de los recorridos. Además de los dos caminos que podía haber realizado pasando por dicha casilla, el alumno también olvida el $B - C - \text{casa}$. Estos fallos probablemente se deban a despistes que comete el alumno, no obstante no se ha considerado que hayan podido interferir de forma negativa en el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas.

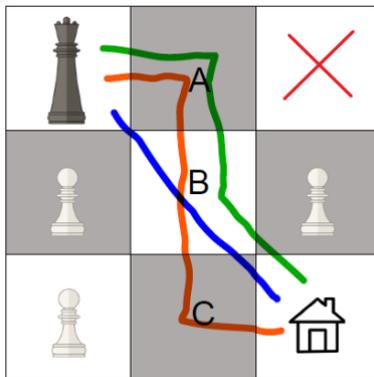


Figura 14. Solución de la cuarta actividad de ajedrez.

Actividades de construcción de diagramas de árbol

Después de haber realizado esta actividad, se le solicita al alumno que realice un diagrama de árbol que represente uno de los recorridos efectuados. Previamente ya se le ha explicado en qué consiste esta estrategia y se le ha mostrado algún ejemplo de la misma.

En la Figura 15 puede observarse el primer diagrama que realizó el alumno. Todavía se trata de un esquema sencillo e incompleto, ya que no recoge la totalidad de recorridos posibles para el supuesto dado, dibujando menos ramas de las necesarias. Además, tampoco tiene en cuenta la raíz, ya que comienza a elaborar el diagrama por la casilla nombrada con la letra A, en lugar de empezar por la casilla en la que se sitúa la pieza de la dama.

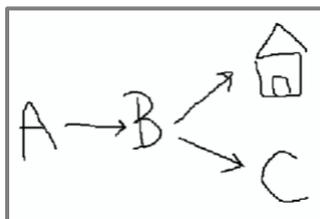


Figura 15. Primer diagrama de árbol del alumno.

Actividades de matemáticas

El alumno continúa con la siguiente actividad y realiza los caminos que conectan el lugar de partida con la meta. En este caso olvida dos de ellos, que son el $A - C - D - \text{casa}$ y el $A - B - C - D - \text{casa}$, tal y como puede verse en la Figura 16. Casualmente estos son los dos caminos más largos y los que implican pasar por un mayor número de salas. Tras haber dibujado los caminos, se sigue el mismo procedimiento que en la actividad anterior, es decir el docente le dice que explique uno de ellos con letras.

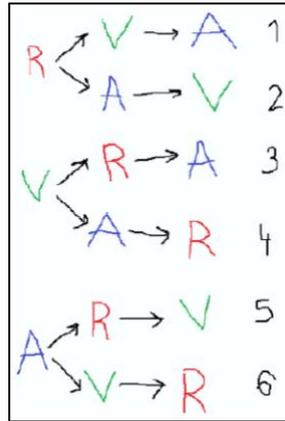


Figura 18. Solución del primer problema de combinatoria.

El segundo problema es similar al anterior, solo que en este caso se añade un cuarto color: el negro, y la bandera cuenta con otro espacio que colorear, se trata de una estrella de cinco puntas situada en la franja central. El alumno comienza a obtener las posibles soluciones de igual modo que ha hecho en la primera actividad. En la Figura 19 aparecen todas las posibles combinaciones en las que la primera franja es de color rojo, entonces se le explica que va a obtener el mismo número de banderas que comiencen con el color verde, el azul y el negro. Para lo comprenda el docente le pide que observe la solución del problema anterior y compruebe como hay el mismo número de banderas cuya primera franja es roja, verde y azul. De manera que lo que tiene que hacer es multiplicar las banderas que ha obtenido con la primera franja roja por el número de colores que hay en total, en este caso cuatro, lo que da como resultado final 24 banderas diferentes. De esta manera, evita tener que realizar otros tres diagramas de árbol iguales que el primero, recurriendo a una estrategia multiplicativa.

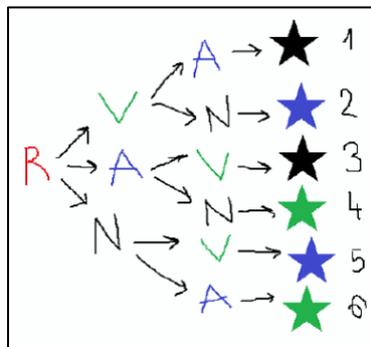


Figura 19. Solución del segundo problema de combinatoria.

En el tercer problema se cambia el diseño de la bandera que debe completar. En este caso el modelo ofrecido cuenta con tres franjas horizontales y una con forma de triángulo equilátero colocada en el lado del asta. Para colorearla deben utilizarse los cuatro colores de la actividad anterior. El alumno utiliza las mismas estrategias que ha seguido anteriormente, es decir una vez que tiene completo el diagrama de árbol con la primera franja de color rojo (ver Figura 20), recurre a la estrategia multiplicativa y obtiene el mismo número de posibles banderas que en el segundo caso, 24.

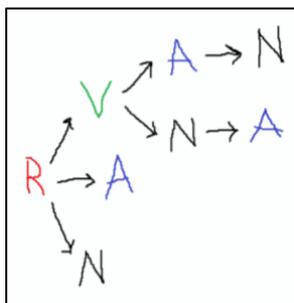


Figura 20. Solución del tercer problema de combinatoria.

Finalmente, procede a realizar el último problema. Este lo resolvió comenzando a colorear la estrella, después la franja que contiene dicha estrella y por último las otras dos franjas. Una vez hubo obtenido las dos primeras banderas, aplicando la estrategia multiplicativa calculó el resto de posibilidades con la estrella del mismo color y después con el resto de colores. En la Figura 21 puede verse el diagrama de árbol realizado por el alumno.

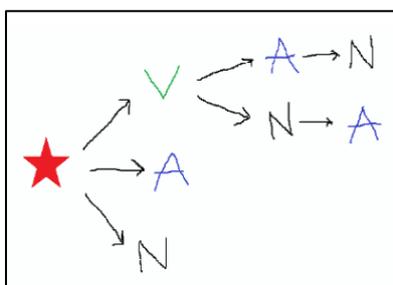


Figura 21. Solución del cuarto problema de combinatoria.

Discusión

Tras haber analizado los resultados obtenidos, se puede concluir que los distintos recorridos que ofrece el tablero de ajedrez para desplazarse de una casilla a otra son útiles para introducir la combinatoria en alumnos sin conocimientos previos. En líneas generales, puede establecerse que esta progresión de aprendizaje concreta llevada a cabo con el alumno en cuestión ha servido para que éste aprendiera determinadas estrategias de resolución de problemas como la codificación de los elementos que intervienen en un problema de combinatoria o la representación de las distintas soluciones del mismo mediante un diagrama de árbol. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que, al tratarse de un estudio de caso, Stake (1995) no recomienda generalizar los resultados obtenidos. Además, los únicos estímulos proporcionados al alumno los emitía el docente que impartía la sesión, es decir el alumno no podía comunicarse con ningún igual para comparar sus respuestas o preguntar acerca del modo de resolución. Por lo tanto, si esta secuencia de actividades se volviera a realizar en el futuro, sería interesante que tuviera lugar en un aula con varios alumnos, de manera que se pudiera comprobar la interacción entre los mismos.

Las actividades propuestas del tipo “*cierta pieza quiere volver a casa*” pueden utilizarse para que el alumno aprenda a resolver problemas de combinatoria. Otros autores, como Nortes Martínez-Artero y Nortes Checa (2015) han propuesto antes actividades en las que resulta necesario contar casos como “¿De cuántas maneras el rey blanco en d1 puede desplazarse hasta la casilla del rey negro en d8?”, si bien no proponen el uso de ninguna herramienta de combinatoria que permita facilitar su resolución. Con las actividades mencionadas, el alumno comienza a reconocer las distintas opciones que

pueden darse en una situación concreta, por ejemplo, en el caso de la torre, esta pieza continuamente puede elegir entre dos direcciones (horizontal o vertical). Algo similar ocurre cuando el alumno se enfrenta a las actividades de las salas, continuamente tiene que escoger entre las opciones que se le ofrecen para pasar de una sala a otra hasta llegar a la meta. Esta constante toma de decisiones se traduce en el diagrama de árbol en las diferentes ramificaciones. El recuento de las opciones totales se simplifica cuando el alumno percibe el efecto multiplicativo de dichas ramificaciones lo que será la base de la resolución de problemas de combinatoria (Roldan López de Hierro, Batanero y Beltrán-Pellicer, 2018). Gracias a este tipo de actividades, el alumno va desarrollando estrategias que le hacen ser más eficiente a la hora de obtener la solución, de manera que cuando tiene que resolver los problemas de banderas ya es capaz de hacerlo con cierta autonomía. En estos problemas tiene que elegir entre varios colores con los que completar las franjas de cada bandera, cuantos más colores se ofrecen al alumno, más banderas pueden formarse. Ocurre lo mismo con las piezas de ajedrez, cuantos más movimientos se permite a una pieza, más recorridos podrá realizar para desplazarse de una casilla a otra del tablero.

Es preciso alertar de las posibles dificultades que pueden surgir cuando se aprende a elaborar diagramas de árbol. Roldan López de Hierro, Batanero y Beltrán-Pellicer (2018) han recogido los errores que con más frecuencia se dan en esta tarea, de los cuales el más común en este estudio de caso ha sido el de dibujar menos ramas de las necesarias. En la última sesión, el alumno recurrió a una estrategia multiplicativa para evitar que los diagramas que iba construyendo fueran excesivamente extensos, por lo que, aunque estos no recojan todas las opciones posibles para el supuesto dado, el resultado final es correcto gracias a la aplicación de una estrategia complementaria.

Por otra parte, de cara a cursos posteriores, la tarea de contar caminos a la que se hacía referencia anteriormente podría servir para introducir la regla de Laplace, la cual establece que la probabilidad de que un suceso ocurra depende del cociente entre los casos favorables (casos en los que ocurre el suceso en cuestión) y los posibles. Batanero (2016) propone utilizar materiales manipulativos cuando se comienza a trabajar la probabilidad con alumnos de Educación Primaria, en este caso en lugar de recurrir a dados o ruletas, se ha optado por hacerlo a través del ajedrez, si bien no introduciendo explícitamente todavía conceptos probabilísticos. No obstante, la introducción de la probabilidad debe ser llevada a cabo con cierta precaución para tratar de que los alumnos superen la creencia de en todas las ocasiones, todos los sucesos que se presentan (en nuestro caso los diferentes caminos) son equiprobables (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016).

Referencias

- Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática, Montevideo: SEMUR.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, HS., y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer Nature.
- Batanero, C., Díaz Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, JD. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 181-199.

- Fernández Amigo, J. y Pallarés Porcar, MR. (2009). TIC para enseñar y jugar al ajedrez. *DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia*, (14).
- Fernández, E. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 539-545). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.
- Fernández, S (1990). El ajedrez, un recurso en el aula de matemáticas. *Suma*, 7, 53-60.
- Gairín Sallán, J. y Fernández Amigo, J. (2010). Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. *Tendencias pedagógicas*, 15, 57-90.
- García, L. (2013). *Ajedrez y ciencia, pasiones mezcladas*. Barcelona: Crítica.
- Morra, LG. y Friedlander, A. C. (2001). *Evaluaciones mediante estudios de caso*. Washington: Banco Mundial.
- Nortes Martínez-Artero, R. y Nortes Checa, A. (2015). El ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. *Números*, 89, 9-31.
- Peñalvo, FJG., de la Torre, FJG., García, J. y Carrasco, FJ. Ajedrez Tutor. Software Colaborativo para el Proceso de Enseñanza/Aprendizaje del Ajedrez. Disponible en: <https://aipo.es/articulos/5/1227.pdf>
- Roldan López de Hierro, AF., Batanero, C. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon*, 100, 49-63.
- Sáenz, DB. (2014). *Utilización del ajedrez para la enseñanza de las matemáticas*. Universidad de la Rioja, España.
- Stake, RE. (1995). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata, 1995.