

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

INTRODUCCIÓN ÁS CADEAS DE MARKOV

LABRAÑA, Antón

Facultade de Ciencias da Educación-USC

Aínda admitindo que pode haber inferencia
ó que non se experimentou, esta pode ser tan
abstracta que dea menos información da que
se comunica coa linguaxe común.

Bertrand Russell

INTRODUCCIÓN

Hai uns anos, un grupo de profesores/as de Matemáticas de Secundaria desenvolvimos unha serie de actividades en torno ó Álgebra Linear¹. Preocupados, entre outras moitas cousas, por responder a esa pregunta crucial que de vez en cando nos formula algún alumno/a: “¿e isto para que serve?”, poñiamos moito afán en facer unha matemática social.

Dende esa óptica, no capítulo adicado ás aplicacións da álgebra linear pareceunos interesante presentar unha introducción ás cadeas de Markov.

A presente comunicación pode considerarse como unha recreación daquelas actividades, despreocupándome nesta ocasión do carácter social das mesmas en aras dunha simplificación inicial que permita estender a fase de “experimentación”, no sentido intelectual que Russell lle dá ó termo, de xeito que haxa un soporte para as abstractas inferencias que se pretenden realizar, *aínda admitindo* que fose posible que os estudantes de «Métodos Estatísticos e Numéricos» fosen capaces de dotalas de significado per se.

¹ LABRAÑA, A.; PLATA, A.; PEÑA, C.; CRESPO, E.; SEGURA, R. Algebra Lineal. Resolución de Sistemas Lineales. Editorial Síntesis, Madrid 1995.

A experimentación intelectual necesaria non sería realizable se non contasemos cun instrumento que nos permitese obter con rapidez, comodidade e fiabilidade os moitos cálculos rutineiros que precisamos. A cambio desta concesión á tecnoloxía (moi inferior, por certo, á que utilizan de cotío os matemáticos nas súas investigacións), terémo-la posibilidade de imaxinar e comprender novos conceptos e relacións, que irán xurdindo ó fío dunha investigación simulada nas aulas.

O PROBLEMA

No instituto orgaizáronse catro grupos de 30 alumnos cada un para a realización de actividades extraescolares.

Ó chega-lo terceiro trimestre os estudantes comezan a faltar a elas con certa frecuencia, ben pola presión dos temarios e exames, que esixen máis horas de estudio ou asistir a clases de reforzo, ben polo cansazo, ...

Tense comprobado estatisticamente que a partir desa data un 80% dos que asisten un día á súa actividade, asisten tamén ó día seguinte, mentres que soamente un 40% dos que faltaron un día volven ó día seguinte.

Ó comeza-lo trimestre, no grupo A asisten 25 alumnos, 21 no B, 28 no C, e 18 no D.

¿Como cres que estarán os grupos despois dunhas semanas? ¿Cantos asistirán e cantos non, previsiblemente, a cada actividade o quinto día?.

RESOLVÉNDOO

Como os cálculos resultarán tediosos aínda cunha calculadora que multiplique matrices (caso das gráficas), distribúese o traballo por filas: todos estudiamos o caso A, e ademais uns tamén o B, outros o C e outros o D.

A presentación de resultados pódese unificar proporcionando un formato inicial:

GRUPO A

Día	Asisten	Faltan
1º	25	5
2º	$0'8 \cdot 25 + 0'4 \cdot 5 = 22$	$0'2 \cdot 25 + 0'6 \cdot 5 = 8$
3º	$0'8 \cdot 22 + 0'4 \cdot 8 =$	$0'2 \cdot 22 + 0'6 \cdot 8 =$

1.- Que sería traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$
3º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix}$
4º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'32 \\ 9'68 \end{pmatrix}$
5º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'32 \\ 9'68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'128 \\ 9'872 \end{pmatrix}$

2.- E que nos permitiría percibir como se estabilizan os grupos en torno a 20 asistentes e 10 ausentes, con independencia da situación de partida, xa que era diferente en cada un dos casos (A, B, C, D) e todos conducen ó mesmo, aínda que con rapidez diferente.

3.- A continuación, indicando que respondan antes de calcular, para que se realice o esforzo de conxectar, continuámo-la investigación cunha sucesión de cuestións que se corresponden a outros tantos heurísticos que subliño:

(A comprobación):

¿Que sucedería nos días seguintes?

6º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'128 \\ 9'872 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'0512 \\ 9'9488 \end{pmatrix}$
7º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'0512 \\ 9'9488 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'02048 \\ 9'97952 \end{pmatrix}$

(Análise de situacións extremas):

¿Que sucedería se nun dos grupos o primeiro día asistisen todos á actividade?

1º	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$

(Xa é como as anteriores, a partir deste 2º día).

(Búsqueda dun contraexemplo):

¿Ocorreseche unha situación inicial onde isto poida resultar distinto?

1º	(Quizais falle neste:) $\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$

(Tamén é como as anteriores, a partir do 2º día).

(A conclusión):

Se os valores ós que evoluciona non dependen da situación inicial, ¿de que dependen entón?

“Da matriz $\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}$; pois é todo o que nos queda”.

(A curiosidade):

¿Que sucedería se o primeiro día viñesen precisamente 20 e faltasen 10?

1º	$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

(Non cambiaría nunca).

(O método):

¿Como poderías coñecer previamente a situación cara a cal se evoluciona?

(Se non soubese que era 20 e 10, chamaríalle x e y).

1º	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
----	--

(Como esa situación non cambiaría nunca:).

2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
----	---

$$\left. \begin{array}{l} 0'8 \cdot x + 0'4 \cdot y = x \\ 0'2 \cdot x + 0'6 \cdot y = y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0'4 \cdot y = x - 0'8 \cdot x \\ 0'2 \cdot x = y - 0'6 \cdot y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0'4 \cdot y = 0'2 \cdot x \\ 0'2 \cdot x = 0'4 \cdot y \end{array} \right\}$$

En realide é unha soa ecuación.

Necesitamos outra, xa que temos dúas incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 0'4 \cdot y = 0'2 \cdot x \\ x + y = 30 \end{array} \right\}$$

(A xeneralización):

- 1.- Poñede outras porcentaxes no problema. ¿Confírmase o anterior?
- 2.- Cambiade agora tamén o número de persoas dos grupos a ver qué sucede.

UNHA ESTRATEXIA MÁIS ECONÓMICA

Dado que o produto de matrices é asociativo, podemos reorienta-lo labor:

1º	$\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$
3º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix}$
4º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^3 \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'32 \\ 9'68 \end{pmatrix}$
5º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^4 \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'128 \\ 9'872 \end{pmatrix}$

(A comprobación):

¿Que sucedería nos días seguintes?

6º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^5 \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'0512 \\ 9'9488 \end{pmatrix}$
7º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^6 \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'02048 \\ 9'97952 \end{pmatrix}$

(A conclusión):

Se os valores ós que evoluciona non dependen da situación inicial, ¿de que dependen entón?

“Da matriz $\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}$; das súas potencias”.

(A exploración)

$$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0'72 & 0'56 \\ 0'28 & 0'44 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0'688 & 0'624 \\ 0'312 & 0'376 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0'6752 & 0'6496 \\ 0'3248 & 0'3504 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0'688 & 0'624 \\ 0'312 & 0'376 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0'6680 & 0'6496 \\ 0'3248 & 0'3504 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0'666... & 0'666... \\ 0'333... & 0'333... \end{pmatrix}$$

(A observación)

“As columnas veñen a resultar iguais e correspóndense a 2/3 e 1/3”.

(2/3 e 1/3 *do total* eran precisamente os que finalmente asistían e faltaban)

(A proba)

Proba que para calquera situación inicial, esta matriz leva ós 2/3 e 1/3 do total.

$$\begin{pmatrix} 0'666... & 0'666... \\ 0'333... & 0'333... \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0'666...x & + & 0'666...y \\ 0'333...x & + & 0'333...y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'666...(x+y) \\ 0'333...(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \cdot (x+y) \\ 1/3 \cdot (x+y) \end{pmatrix}$$

(A explicación)

A anterior ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

daba lugar a unha ecuación repetida: $\left. \begin{matrix} 0'4y = 0'2x \\ 0'2x = 0'4y \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{0'4}{0'2} = \frac{2}{1}$

A ecuación reflicte a proporción entre os coeficientes que indican os cambios de situación:

que faltaran e van asistir / que asistiran e van faltar

(A comprobación)

Comproba nos exemplos que ti propuxeches se tamén se estabiliza nos valores que corresponden á proporción:

que faltaran e van a asistir
que asistiran e vaian faltar

Busca a potencia n-ésima da matriz e próbaos para calquera situación inicial.

CONSTRUÍNDO A TEORÍA

Certamente non poderíamos falar de que “van a asistir” ou de que “van a faltar”, xa que non podemos ter certeza sobre o futuro; en realidade expresamos probabilidades de que asistan ou de falten.

A matriz, que se denominará *de transición*, fórmase coas probabilidades de cambio de un estado a outro, do seguinte xeito: $\begin{pmatrix} p_{A \rightarrow A} & p_{F \rightarrow A} \\ p_{A \rightarrow F} & p_{F \rightarrow F} \end{pmatrix}$ onde con A e F denotamos «asistir» e «faltar», respectivamente. En xeral denominaranse *matrices de probabilidade* aquelas matrices onde os termos son probabilidades e as columnas (ou filas, segundo se deseñe) suman 1.

(A xeneralización)

Proba que unha matriz de probabilidade calquera

$$\begin{pmatrix} p_{A \rightarrow A} & p_{F \rightarrow A} \\ p_{A \rightarrow F} & p_{F \rightarrow F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$

é estable para valores que estean na mesma proporción que os termos que

indican os cambios de situación: $\frac{b}{1-a}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ (1-a) \cdot x + (1-b) \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$a \cdot x + b \cdot y = x \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{b}{1-a} \quad (\text{¡ollo cos ceros!})$$

PARA REMATAR UN TEOREMA

Dado que os termos da matriz son probabilidades, se expresamos «asistencias» e «faltas» en termos relativos: 25/30 e 5/30, o vector columna pode ser tratado tamén como un vector de probabilidade.

Proba que unha matriz de probabilidade coas dúas columnas iguais é «invariante» respecto do produto por un vector calquera de probabilidade:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + a \cdot (1-x) \\ (1-a) \cdot x + (1-a) \cdot (1-x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot x + a - a \cdot x \\ x - a \cdot x + 1 - x - a + a \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}$$