

HOLOGRAMAS EN INTENSIDAD GENERADOS POR ORDENADOR
SIN RUIDO DE INTERMODULACION
COMPUTER GENERATED INTERMODULATION-NOISE-
FREE INTENSITY HOLOGRAMS

M.T. Navarro (*), J.J. Egozcue (*) y A. Fimia (+)

(*) Universidad Politécnica de Cataluña, Departamento de Matemática Aplicada III
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España.

(+) Universidad de Alicante, Departamento Interuniversitario de Optica
Ap. Correos 99, 03080 Alicante, España.

Resumen

En el estudio de hologramas generados por ordenador para visualización, cuando las hipótesis de Fresnel y Fraunhofer no se verifican, surge un gran número de problemas numéricos.

Para aplicaciones de visualización, la interferencia entre los distintos puntos del objeto se considera ruido de intermodulación, por lo que éste será eliminado. Se han utilizado tres métodos diferentes para generar hologramas de curvas alabeadas: punto a punto, una integración numérica específica y el de fase estacionaria. El más flexible es el método punto a punto que aprovecha la linealidad de los hologramas sin ruido de intermodulación pero conlleva un elevado tiempo de computación. Los métodos integrados son más económicos y permiten añadir fácilmente distintos elementos de curvas para construir figuras, aunque se necesitan algoritmos específicos para cada tipo de curva.

Se presentan ejemplos de hologramas sin ruido de intermodulación de objetos formados por segmentos.

Abstract

When we studying computer-generated-holograms for display, many numerical difficulties arise if the Fresnel and Fraunhofer hypotheses do not hold.

For display applications, interference between different points of the object can be considered as intermodulation noise, which will be remove. Three different numerical methods have been used to generate holograms of warped curves: point-to-point, a specific numerical integration and stationary-phase approach. The most flexible one is the point-to-point method that takes advantage of the linearity of intermodulation-noise-free holograms but very large computation times are attained. Integrated methods are more economic and different elements of curves can be easily added to build up figures but specific algorithms have to be devised for each kind of curve.

Some examples of computer generated intermodulation-noise-free holograms of objects compound by linear segments are presented.

1. Introducción

La generación de hologramas por ordenador ha experimentado un considerable desarrollo durante las tres últimas décadas^{1,2}. La utilización del ordenador para la generación de hologramas posibilita la evolución de las aplicaciones de la holografía, al permitir la obtención de frentes de onda que no

pueden construirse experimentalmente. Así, el uso de hologramas generados por ordenador (CGH) es especialmente apropiado para el diseño y la fabricación de elementos ópticos holográficos (HOE) con aplicaciones a las comunicaciones, al análisis de materiales de registro, etc. Además, los hologramas de objetos, que no existen necesariamente, generados por ordenador, podrán ofrecer en el futuro ventajas importantes en las aplicaciones del diseño asistido por ordenador (CAD).

La generación por ordenador de un holograma requiere la determinación de la amplitud compleja que proviene del objeto en el plano del holograma. La metodología más frecuentemente utilizada es el método de Fourier^{3,4} que nos permite calcular hologramas de objetos situados en el infinito. En este caso la amplitud compleja es la transformada de Fourier de la distribución de intensidad del objeto, que puede ser eficientemente calculada mediante la transformada rápida de Fourier (FFT). Sin embargo, esta técnica no es completamente adecuada para los hologramas destinados a la visualización de objetos tridimensionales (3D). No obstante, en los últimos años se ha producido el desarrollo de la generación por ordenador de estereogramas holográficos utilizando técnicas híbridas numérico-ópticas⁵.

El objetivo de este artículo es la generación numérica de hologramas de objetos 3D en posiciones arbitrarias con respecto a la placa holográfica. Si el objeto está situado muy próximo a la placa holográfica, las hipótesis de Fraunhofer, o incluso Fresnel, no se verifican; por tanto los métodos de Fourier directos no son los idóneos. Más aún, el diseño de HOE requiere una representación holográfica completa de los objetos 3D que no proporciona la estereografía holográfica. En consecuencia, se necesitan técnicas especiales para este tipo de CGH.

Diversos autores han presentado métodos adecuados a la obtención de CGH de objetos 3D⁶⁻¹⁰. Recientemente, los autores han desarrollado técnicas numéricas nuevas con ese mismo objetivo¹¹. Se presentó un método de cálculo de hologramas de curvas alabeadas y superficies. Los hologramas se obtenían considerando arbitrarias la posición y el tamaño del objeto, con lo que se omitieron las hipótesis de Fraunhofer y Fresnel. Además, los efectos producidos por el ruido de intermodulación se eliminaron, al menos teóricamente, mediante la cancelación de los términos de interferencia entre los puntos de la curva o de la superficie^{11,12}. Por este procedimiento, idóneo para la visualización tridimensional y el diseño de HOE, se obtuvieron y reconstruyeron CGH.

La principal dificultad en el cálculo de CGH de objetos 3D es el elevado tiempo de ejecución requerido. De hecho, si los hologramas son de tamaño medio o grande (1-4 mm de long., 1-10 cm de long.), se necesita calcular una gran cantidad de puntos del holograma para preservar la resolución. Por tanto, nos interesa la búsqueda de métodos numéricos que sean rápidos, flexibles y precisos.

En este artículo se aplica un método numérico, basado en los desarrollos asintóticos de integrales. Se revisan también los métodos previos, incluyendo el concepto de holograma intensidad sin ruido de intermodulación.

2. Hologramas en intensidad sin ruido de intermodulación

Este apartado describe el procedimiento general de cálculo de hologramas en los cuales se ha eliminado el ruido de intermodulación. Consideramos una superficie paramétrica S (fig.1) uniformemente iluminada. La amplitud compleja producida por la luz proveniente de la superficie, puede obtenerse aplicando el principio de Huyghens³.

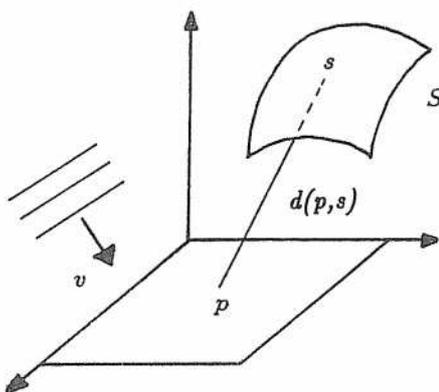


Figura 1. Esquema del holograma.

El holograma de la superficie S , calculado en cada punto p de la placa holográfica, es la suma de la amplitud compleja en p y una onda de referencia plana. Si $d(p,s)$ es la distancia entre el punto de la superficie s y el punto p y λ la longitud de onda de la luz, el holograma es

$$H(p) = \int_S \frac{A_0}{d(p,s)} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} d(p,s) \right] ds + A_r \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} v \cdot p \right] \quad (1)$$

donde A_0 es la densidad de amplitud de S , A_r la amplitud de la referencia y el vector unitario v determina la dirección de la onda de referencia.

La intensidad del holograma se obtiene elevando al cuadrado la ec.(1). En la expresión obtenida se está considerando la interferencia entre los puntos de la superficie S , lo cual produce los efectos del ruido de intermodulación. Estos efectos pueden evitarse cancelando los términos que producen la interferencia, no deseada, entre los distintos puntos de la superficie. De esta forma, obtenemos un holograma en intensidad sin ruido de intermodulación cuya expresión es

$$|H_F(p)|^2 = A_r^2 + \int_S \frac{A_0^2}{d^2(p,s)} ds + \int_S \frac{2A_0A_r}{d(p,s)} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (d(p,s) - v \cdot p) \right] ds \quad (2)$$

La integral de la ec.(2) representa, salvo constante aditiva, la integral sobre la superficie S del holograma en intensidad de cada punto de S . Por tanto, como consecuencia de la linealidad de las integrales, podemos obtener el holograma de un objeto compuesto sumando los hologramas sin ruido de intermodulación de las diferentes curvas o superficies que lo forman, simplificando así su cálculo.

3. Métodos numéricos

En el proceso de cálculo que hay que llevar a cabo para la obtención de hologramas en intensidad sin ruido de intermodulación, la principal dificultad consiste en el cálculo eficiente de la última integral de la ec.(2). Se necesitan técnicas numéricas específicas para resolver este tipo de integrales que se caracteriza por la gran frecuencia de oscilación de la función integrando. Presentamos tres métodos diferentes que pueden utilizarse para calcular hologramas sin ruido de intermodulación de objetos compuestos por curvas alabeadas.

3.1. Punto a punto

Cada curva del objeto se sustituye por un número de puntos. El holograma de cada curva es la suma de los hologramas en intensidad de cada punto y tiene la siguiente expresión:

$$|H_F(p)|^2 = A_r^2 + \sum_k \frac{A_0^2}{d^2(p, c_k)} + \frac{2A_0 A_r}{d(p, c_k)} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (d(p, c_k) - v \cdot p) \right] \quad (3)$$

donde $d(p, c_k)$ es la distancia entre un punto p de la placa holográfica y un punto c_k de la curva alabeada C del objeto, y A_0 es la amplitud de cada punto c_k .

Para obtener resultados idóneos, hay que considerar un gran número de puntos. Por tanto, este método requiere un tiempo de ejecución muy elevado, especialmente para objetos compuestos donde cada parte ha de estar suficientemente representada por puntos.

3.2. Integración numérica específica

Consideramos una parametrización de la curva alabeada $C(t)$, t perteneciente a $[t_1, t_2]$, y un punto p de la placa holográfica. De acuerdo con la ec.(2) el holograma en intensidad sin ruido de intermodulación de la curva $C(t)$ es:

$$|H_F(p)|^2 = A_r^2 + I_1(p) + I_2(p) \quad (4)$$

siendo

$$I_1(p) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{A_0^2}{d^2(p, C(t))} \left| \frac{dC}{dt} \right| dt, \quad (5)$$

$$I_2(p) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2A_0 A_r}{d(p, C(t))} \left| \frac{dC}{dt} \right| \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (d(p, C(t)) - v \cdot p) \right] dt \quad (6)$$

La integral I_1 se puede calcular analíticamente en la mayoría de los casos, y puede aproximarse eficientemente mediante la cuadratura de Gauss en los restantes. No obstante, la integral I_2 requiere una integración numérica específica. El procedimiento que seguimos consiste en dividir el intervalo de integración en subintervalos cuyos extremos son los valores t del intervalo (t_1, t_2) para los cuales la

función $d(t, C(t))$ tiene un extremo local, o bien, los extremos t_1 o t_2 . Cada subintervalo se divide a su vez en tres: un intervalo central que corresponde a periodos completos de la función coseno del integrando y otros dos, situados en los extremos, correspondientes cada uno a un periodo incompleto de la función coseno. La integral sobre estos últimos constituye la mayor contribución al holograma y se aproxima utilizando cuadraturas de Kantorovich¹³ y/o Gauss. La integral sobre el intervalo central constituye la parte menos importante puesto que su contribución a la intensidad del holograma es muy suave. Esta integral se aproxima por un procedimiento análogo al presentado por Navarro et al¹¹ que coincide esencialmente con el método de Filon¹⁴.

El procedimiento que presentamos puede aplicarse para curvas alabeadas cualesquiera, pero aquí se mostrarán únicamente ejemplos para segmentos lineales. En tales casos, y para objetos compuestos, se obtiene una significativa reducción del tiempo de cálculo en comparación con el método punto a punto. No obstante, el método es menos efectivo si la curva es paralela a la placa debido a que se aplica la cuadratura de Kantorovich para muchos puntos.

3.3. Método de la fase estacionaria

Consideramos de nuevo la integral $I_2(p)$ de la ec.(6), que puede escribirse como

$$I_2(p) = \text{Re} \left[2A_0 A_r \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} v \cdot p \right) \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left| \frac{dC}{dt} \right|}{d(p, C(t))} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} d(p, C(t)) \right] dt \right] \quad (7)$$

Para aproximar esta integral aplicamos el método de la fase estacionaria, que está basado en la teoría de los desarrollos asintóticos de integrales^{15,16}.

En nuestro caso, obtendremos desarrollos asintóticos de la siguiente integral:

$$J(k) = \int_{t_1}^{t_2} g(t) \exp[i k f(t)] dt \quad (8)$$

siendo

$$f(t) = d(p, C(t)), \quad g(t) = \left| \frac{dC}{dt} \right| f^{-1}(t), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9)$$

cuando k toma valores muy grandes.

El procedimiento general se fundamenta en el hecho de que las mayores contribuciones al desarrollo asintótico son debidas al comportamiento de las funciones del integrando en las proximidades de ciertos puntos del dominio de integración. A estos puntos se les llama puntos críticos.

En el caso de la integral J , las funciones g y f son infinitamente diferenciables en $[t_1, t_2]$. Así, los puntos críticos del desarrollo asintótico son los extremos de $[t_1, t_2]$ y los puntos pertenecientes a (t_1, t_2) en los cuales f' se anula. Un punto τ es estacionario de orden m de la función f , si se verifica que $f'(\tau) = f''(\tau) = \dots = f^{(m)}(\tau) = 0$ y $f^{(m+1)}(\tau) \neq 0$.

Para obtener desarrollos asintóticos de la integral J , calculamos los puntos estacionarios de f en $[t_1, t_2]$, $t_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} < \alpha_p = t_2$, de órdenes $m_0, m_1, \dots, m_{p-1}, m_p$, donde $m_0 \geq 0$, $m_p \geq 0$ y $m_j \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, p-1$. Entonces la integral se descompone como

$$J(k) = \sum_{j=0}^{p-1} J_j(k) = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} g(t) \exp[i kf(t)] dt \quad (10)$$

y a su vez cada J_j puede escribirse

$$J_j(k) = J_j^{\alpha_j}(k) + J_j^{\alpha_{j+1}}(k), \quad (11)$$

$$J_j^{\alpha_j}(k) = \int_{\alpha_j}^b g(t) q(t, a, b) \exp[i kf(t)] dt, \quad (12)$$

$$J_j^{\alpha_{j+1}}(k) = \int_a^{\alpha_{j+1}} g(t) [1 - q(t, a, b)] \exp[i kf(t)] dt \quad (13)$$

siendo $q(t, a, b)$, $\alpha_j < a < b < \alpha_{j+1}$, una función infinitamente diferenciable tal que

$$q(t, a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq a \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases} \quad (14)$$

De esta forma hemos descompuesto la integral J en suma de integrales cada una de las cuales tiene un único punto crítico, y obtendremos un desarrollo asintótico para cada integral adecuado a las características de cada punto crítico^{15,16}.

Para la integral $J_j^{\alpha_j}$, considerando el cambio de variable $u = [\sigma(f(t) - f(\alpha_j))]^{1/(m_j+1)}$, siendo σ el signo de $f''(\alpha_j)$ y t perteneciente a $[\alpha_j, b]$, y sustituyendo en la ec.(12) obtenemos:

$$J_j^{\alpha_j}(k) = \exp[i kf(\alpha_j)] \int_0^{u(b)} G(u) \exp[i \sigma k u^{m_j+1}] du \quad (15)$$

siendo $G(u) = g(t(u)) q(t(u), u(a), u(b)) t'(u)$ y $t(u)$ la función inversa de $u(t)$ con t de $[\alpha_j, b]$.

Integrando por partes N veces en la ec.(15) obtendremos que:

$$J_j^{\alpha_j}(k) = \exp[i kf(\alpha_j)] \left[\sum_{n=0}^{N-1} -\frac{1}{n!} \left[G^{(n)}(u) H_n(u) \right]_0^{u(b)} + R_N(k) \right], \quad (16)$$

$$H_n(u) = \int_u^\infty (z-u)^n \exp[i \sigma k z^{m_j+1}] dz, \quad (17)$$

$$R_N(k) = o(k^{-N/(m_j+1)}) \quad (18)$$

Puesto que se verifica que $G^{(n)}(u(b)) = 0$, para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, resolviendo $H_n(0)$ y sustituyendo en la ec.(16) obtendremos un desarrollo asintótico de $J_j^{\alpha_j}$ de N términos cuando k tiende a infinito, que viene dado por:

$$J_j^{\alpha_j}(k) \sim \exp[i k f(\alpha_j)] \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \frac{1}{m_j + 1} G^{(n)}(0) \Gamma\left(\frac{n+1}{m_j + 1}\right) \left[\frac{\sigma i}{k}\right]^{\frac{n+1}{m_j + 1}} \quad (19)$$

donde Γ representa la función gama de Euler.

A pesar de la aparente simplicidad de este método, frecuentemente surgen problemas que son debidos a la dependencia existente entre los puntos estacionarios y su orden, y la posición del punto p de la placa holográfica. Así, en algunas zonas de la placa holográfica puede suceder que dos o más puntos estacionarios estén muy próximos. En tales casos, las aproximaciones numéricas llegan a ser muy inestables, y si estos puntos se tratan como un único punto, se producen fenómenos tales como perdida de precisión, efectos de collage, etc. La figura 2 muestra los efectos de collage que se pueden producir en la placa holográfica cuando se utilizan este tipo de desarrollos asintóticos.

Para evitar este tipo de problemas se ha desarrollado la teoría de desarrollos asintóticos uniformes^{17,18} en los cuales no se utiliza la descomposición descrita en las ecuaciones (11) a (14). No obstante, estos desarrollos uniformes sólo pueden aplicarse para casos muy simples y, además, el tiempo de ejecución es superior al que se produce utilizando desarrollos no uniformes.

Hemos estudiado dos casos sencillos de desarrollos uniformes: segmentos lineales y parabólicos. En el primer caso tenemos dos o tres puntos estacionarios: los extremos (de orden cero) y otro, de orden uno, que en ocasiones puede coincidir con uno de los extremos. Los segmentos parabólicos plantean una mayor casuística y complejidad puesto que, además de los extremos, pueden aparecer hasta un total de tres puntos estacionarios cuyos órdenes varían de uno a tres.

En el caso particular de segmentos lineales, consideramos el cambio de variable $v = [\sigma(f(t) - f(\alpha))]^{1/2}$, siendo σ el signo de $f''(\alpha)$, α el punto estacionario de orden uno de la función f y t perteneciente a $[t_1, t_2]$. Sustituyendo en la ec.(8) obtenemos:

$$J(k) = \exp[i k f(\alpha)] [A_1(k) + A_2(k)], \quad (20)$$

$$A_1(k) = \int_{v(t_1)}^0 H_1(v) \exp[i \sigma k v^2] dv, \quad (21)$$

$$A_2(k) = \int_0^{v(t_2)} H_2(v) \exp[i \sigma k v^2] dv \quad (22)$$

donde $H_i(v) = g(t_i(v))t_i'(v)$, $i = 1, 2$, siendo $t_1(v)$ la función inversa de $v(t)$ cuando t pertenece a $[t_1, \alpha]$ y $t_2(v)$ la función inversa de $v(t)$ cuando t pertenece a $[\alpha, t_2]$.

Integrando por partes N veces en las ecuaciones (21) y (22) pueden obtenerse los desarrollos asintóticos uniformes de las integrales $A_1(k)$ y $A_2(k)$ cuando k toma valores muy grandes:

$$A_1(k) \sim \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \left[H_1^{(n)}(v(t_1)) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} [v(t_1)]^{n-j} F_j(v(t_1)) - H_1^{(n)}(0) F_n(0) \right] \quad (23)$$

$$A_2(k) \sim \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \left[H_2^{(n)}(0) F_n(0) - H_2^{(n)}(v(t_2)) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} [v(t_2)]^{n-j} F_j(v(t_2)) \right] \quad (24)$$

siendo

$$F_n(v) = \int_v^\infty z^n \exp[i \sigma k z^2] dz \quad (25)$$

cuyo valor es:

$$F_{n+2}(v) = \frac{i\sigma}{2k} [v^{n+1} \exp(i\sigma k v^2) + (n+1) F_{n+1}(v)], \quad n \geq 2, \quad (26)$$

$$F_0(v) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \exp\left(i\sigma \frac{\pi}{4}\right) \text{ fcer} \left[v\sqrt{k} \exp\left(-i\sigma \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (27)$$

$$F_1(v) = \frac{1}{2k} \exp\left[i\sigma \left(\frac{\pi}{2} + kv^2\right)\right] \quad (28)$$

donde fcer representa la función complementaria de error.

Si utilizamos estos desarrollos asintóticos uniformes, el tiempo de cálculo para todos los puntos de la placa holográfica, es significativamente mayor al requerido por los desarrollos asintóticos no uniformes. Así, para evitar un tiempo de ejecución excesivamente largo, se han establecido unas pautas que permitan decidir, dependiendo del punto de la placa holográfica y de las distancias entre los puntos estacionarios, el tipo de aproximación asintótica (estándar o bien uniforme) que ha de aplicarse.

En el caso los segmentos parabólicos se produce un aumento del número de puntos estacionarios y de sus órdenes con respecto al de los segmentos lineales. En el caso más desfavorable (un punto estacionario de orden tres), las expresiones prácticas de los desarrollos asintóticos uniformes serían de muy difícil manejo, con lo que se pierde velocidad de cálculo. Por tanto, este método no es conveniente para el cálculo de hologramas de segmentos parabólicos. Para curvas alabeadas más complejas se presentarían problemáticas similares, sino mayores, que para segmentos parabólicos.

4. Resultados experimentales

Presentamos hologramas en intensidad sin ruido de intermodulación de un tetraedro. Los hologramas intensidad se han generado en la pantalla de un ordenador con un rango de 10 tonalidades de gris. Los tonos blanco y negro están asociados, respectivamente, a los valores máximo y mínimo del holograma intensidad. Los hologramas se dibujaron en una pantalla de ordenador de dimensiones

$400 \times 400 \text{ mm}^2$, a través de 1000×1000 píxeles, que representan un holograma del tamaño de 1 mm^2 .

Consideramos un tetraedro de vértices $(x_1, y_1, z_1) = (0.5, 0.3, 20.)$, $(x_2, y_2, z_2) = (0.2, 0.8, 20.)$, $(x_3, y_3, z_3) = (0.8, 0.8, 20.)$ y $(x_4, y_4, z_4) = (0.5, 1.2, 23.)$ (en mm). La placa holográfica es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano xy . Los hologramas del tetraedro se han calculado utilizando los tres métodos numéricos expuestos en el apartado 3. Los resultados en la pantalla son similares para los tres métodos, no siendo distinguibles los correspondientes a los métodos integrados. Además, los métodos integrados reducen tiempo de ejecución en un factor de diez con respecto al método punto a punto.

La figura 3 muestra el holograma intensidad en eje del tetraedro obtenido con el método punto a punto, en el cual se consideraron 1101 puntos de las aristas del tetraedro. La figura 4 muestra el mismo holograma generado por el procedimiento de la fase estacionaria, el cual no se distingue del obtenido mediante el método de integración específico. Aquí, el holograma se ha calculado sumando los hologramas correspondientes a cada arista del tetraedro. La figura 5 muestra el holograma intensidad del tetraedro con una inclinación de la onda de referencia de 30° con respecto a la placa holográfica, y calculado por el mismo procedimiento que el de la fig.4.

Las imágenes de la pantalla del ordenador fueron debidamente fotorreducidas con el fin de conseguir hologramas de tamaño $2.5 \times 2.5 \text{ mm}^2$ en una emulsión fotográfica 8E56 HD. Debido a que los cálculos se realizaron para una placa holográfica de 1 mm^2 , se producen cambios en el tamaño del tetraedro así como alguna distorsión del mismo. Las reconstrucciones se obtuvieron iluminando la placa holográfica con un laser HeNe de 633 nm orientado en la dirección de la onda de referencia. Se construyeron dos hologramas de segunda etapa por reflexión con el fin de permitir reconstrucciones con luz blanca.

5. Conclusiones

El ruido de intermodulación puede eliminarse teóricamente en los hologramas generados por ordenador de curvas o superficies parametrizadas. Se pueden obtener hologramas de objetos compuestos por segmentos o curvas paramétricas simples, mediante la suma de los hologramas sin ruido de intermodulación de cada uno de los elementos que forman el objeto.

El método estándar de fase estacionaria plantea problemas incluso en los casos más sencillos de curvas. Pueden solucionarse mediante los desarrollos asintóticos uniformes, pero incrementan la complejidad algorítmica, han de estudiarse para cada tipo de curva y pueden ser impracticables en muchos casos.

El método punto a punto requiere un tiempo de ejecución muy elevado, que puede reducirse en un factor de diez utilizando los métodos integrados. Cuando comparamos el método de fase estacionaria con el método previo de integración numérica específica, obtenemos resultados similares en la pantalla del ordenador y pueden considerarse equivalentes para segmentos lineales. No obstante, el método de

integración mediante cuadraturas Gaussianas o de Filon es fácilmente generalizable a situaciones de mayor complejidad.

6. Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a J. Julve su colaboración en los trabajos de fotorreducción.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la C.I.R.I.T. (Generalitat de Catalunya).

7. Referencias

- [1] G. Tricoles, "Computer generated holograms: an historical review", *Appl. Opt.*, vol 26, 20, 4351-4360, 1987.
- [2] O. Bryngdahl and F. Wyrowski, "Digital Holography, Computer-Generated Holograms", *Progress in Optics*, vol. XXVIII, 3-86, 1990.
- [3] M. Born and E. Wolff, *Principles of Optics*, 6th ed., Pergamon Press, Oxford (UK), 1986.
- [4] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw Hill, San Francisco, 1968.
- [5] K. Haines and D. Haines, "Computer Graphics for Holography", *IEEE Computer Graphics*, vol. 12, 1, 37-46, 1992.
- [6] D. Leseberg, "Computer-generated holograms: display using one-dimensional transforms", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 3, 11, 1846-1851, 1986.
- [7] D. Leseberg, "Modified Fresnel holograms generated by computer", *Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.*, vol. 1026, 146-149, 1988.
- [8] D. Leseberg, "Sizable Fresnel-type hologram generated by computer", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 6, 2, 229-233, 1989.
- [9] D. Leseberg and Ch. Frère, "Computer-generated holograms of 3-D objects composed of tilted planar segments", *Appl. Opt.*, vol. 27, 14, 3020-3024, 1988.
- [10] Ch. Frère, D. Leseberg and O. Bryngdahl, "Computer-generated holograms of three-dimensional objects composed of line segments", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 3, 5, 726-730, 1986.
- [11] M.T. Navarro, J.J. Egozcue and A. Fimia, "Computer generated holograms of linear segments", *Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.*, vol. 1507, 142-148, 1991.
- [12] A. Fimia, M.T. Navarro and J.J. Egozcue, "Computer generated holograms of diffused objects", *Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.*, vol. 1507, 153-157, 1991.
- [13] B.D. Demidovich and I.A. Maron, *Computational Mathematics*, Mir, Moscow, 1981.
- [14] F.B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1974.
- [15] N. Blestein and R.A. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, New York, 1986.
- [16] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover, New York, 1956.
- [17] J.J. Stamnes, *Waves in Focal Regions*, Adam Hilger, Bristol (UK), 1986.
- [18] N. Blestein, "Uniform Asymptotic Expansions of Integrals with Many Nearby Stationary Points and Algebraic Singularities", *J. Math. Mech.*, vol. 17, 533-560, 1967.

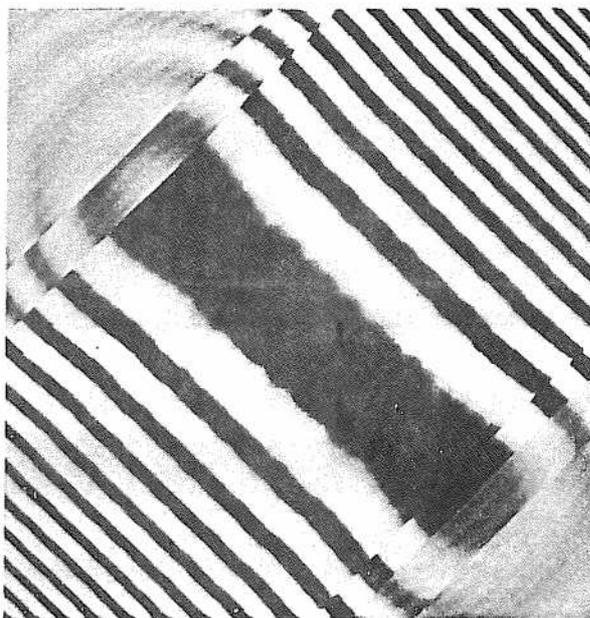


Figura 2. Efectos de collage en el holograma en eje de un segmento lineal, utilizando desarrollos no uniformes.

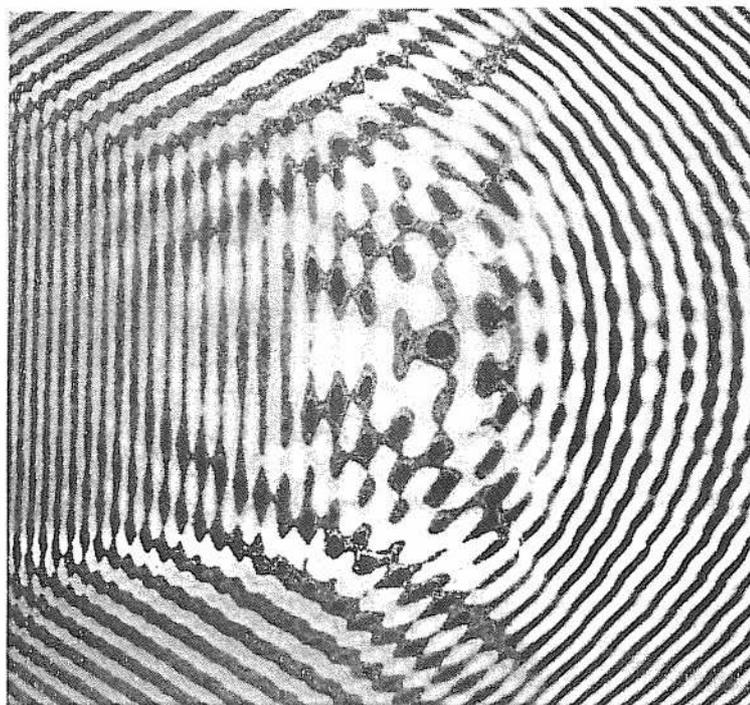


Figura 3. Holograma en intensidad sin ruido de intermodulación de un tetraedro, calculado por el método punto a punto, representado en la pantalla de un ordenador. La referencia esta en eje.

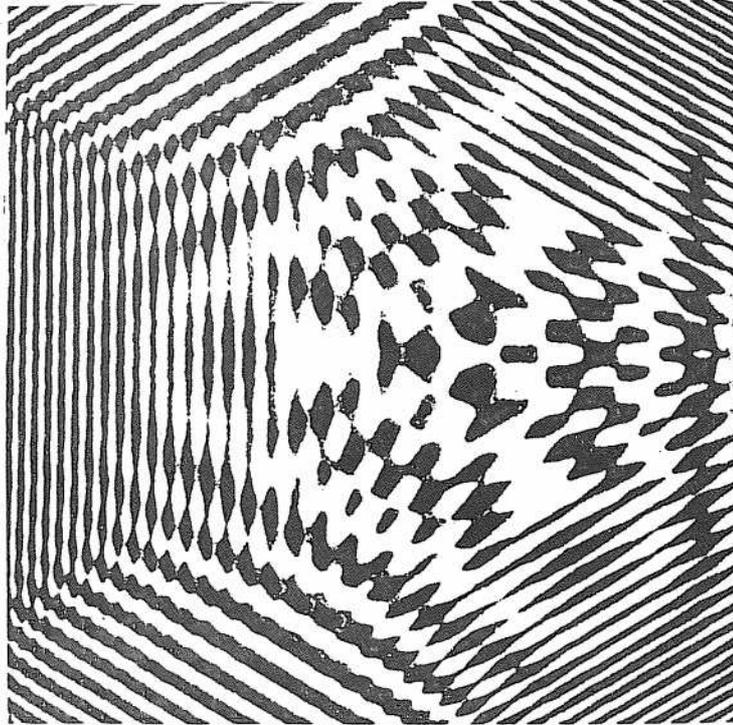


Figura 4. Holograma en intensidad sin ruido de intermodulación de un tetraedro, calculado por el método de fase estacionaria, representado en la pantalla de un ordenador. La referencia esta en eje.

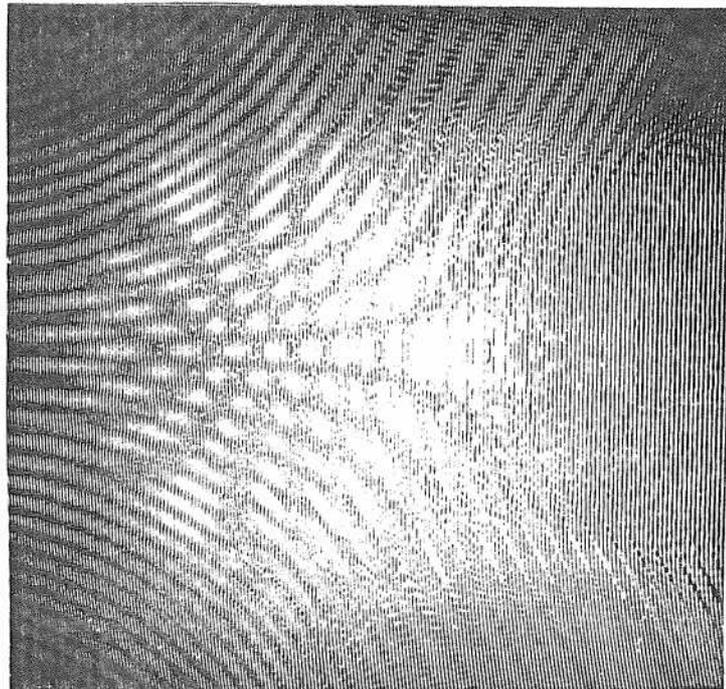


Figura 5. Holograma en intensidad sin ruido de intermodulación de un tetraedro, calculado por el método de fase estacionaria, representado en la pantalla de un ordenador. La referencia esta fuera de eje.