THÉMATA. REVISTA DE FILOSOFÍA. Núm. 24, 2000, págs. 335-342.

FILOSOFÍA MATEMÁTICA Y CONJUNTISMO
Comentarios a *El paraíso de Cantor*, de Roberto Torretti[1]

José Ferreirós. Universidad de Sevilla

La matemática moderna, caracterizada por sus planteamientos abstractos y estructurales, emergió en los entornos de 1900 (digamos, entre 1880 y 1920). Desde el comienzo, sus partidarios se enfrentaron a matemáticos que, favorables a una metodología más tradicional, intentaron mostrar la inadmisibilidad del nuevo enfoque abstracto. Así, frente a las veleidades conjuntistas de un Dedekind o un Cantor se alzaba, ya en 1880, la influyente voz de Kronecker, quien además de ser un magnífico algebrista capitaneaba la 'escuela de Berlín' (liderando la matemática alemana, europea y mundial por aquellos años). Hacia 1900, los escarceos logicistas de Russell y otros se enfrentarán, igualmente, a las críticas de una figura colosal del momento como era Poincaré. E incluso en 1920, cuando ya el conjuntismo y la abstracción irradiaban desde Alemania a todas partes del mundo, grandes voces como las de Weyl y Brouwer se alzarán contra la matemática moderna y la acusarán de incurrir en círculos viciosos.

Fue en ese contexto que Hilbert, cabeza visible de los matemáticos alemanes y depositario de la nueva tradición abstracta, pronunció en 1925, en el contexto de una famosa conferencia 'Sobre el infinito', estas aladas palabras:

> «Queremos investigar cuidadosamente, siempre que exista la menor perspectiva de éxito, las construcciones conceptuales y formas de inferencia fructíferas, cultivándolas, afianzándolas y haciéndolas susceptibles de aplicación. Del paraíso que Cantor creó para nosotros, nadie podrá expulsarnos.»[2]

El paraíso conjuntista de Cantor, que abría el campo a una matemática abstracta sumamente libre y poderosa, no sería —por más que Kronecker, Poincaré o Brouwer quisieran declararlo así— un paraíso prohibido. Es bien sabido que el tronco principal de la matemática del siglo XX es conforme con el aserto de Hilbert. Así, lo que muchas veces se califica de matemática «clásica» puede ser también descrito con más precisión —siguiendo al profesor Torretti— como la «tradición conjuntista» de la matemática actual.

---

[1] Roberto Torretti. *El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía matemática.* Santiago de Chile, Editorial Universitaria / Universidad Andrés Bello, 1998. xiv + 589 págs.

[2] Jean van Heijenoort, ed., *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931* (Harvard University Press, 1967), 376-77.

Tanto la elaboración de los nuevos planteamientos abstractos, como su defensa frente a los argumentos críticos, dieron lugar a consideraciones filosóficas de gran alcance. A ello se unieron elementos como la recuperación y superación del legendario *rigor geométrico* griego en todos los ámbitos de la matemática, y —en otro orden de cosas— la presencia de un notable número de autores (especialmente alemanes) que eran buenos conocedores de la tradición filosófica. La conjunción de estos motivos hace del período 1880-1930 una época particularmente rica en reflexiones matemático-filosóficas, y por tanto un momento de especial interés para filósofos interesados en enriquecer sus reflexiones con elementos provenientes de las ciencias. Hoy, más aún que en tiempos de Platón, la matemática es fuente de innumerables cuestiones y sugerencias de gran interés y alcance en lo relativo a la naturaleza del conocimiento humano. Sólo la escasez de filósofos 'que sepan geometría', como exigía el frontispicio de la Academia, y el ahínco con que se persiste en la separación entre las 'dos culturas', han podido lograr que este riquísimo filón quede en buena medida inexplorado.

Afortunadamente, esa triste situación no es universal, y de cuando en cuando nos encontramos con autores como el profesor Torretti y obras como *El paraíso de Cantor*. Este libro, que glosaré en las páginas que siguen (sin pretensiones de exhaustividad), constituye una exposición precisa y detallada del desarrollo de la tradición matemática conjuntista, en su vertiente lógica o fundamentadora, a lo largo del medio siglo que va de 1880 a la década de 1930. El profesor Torretti no necesita presentación: su obra se encuentra entre lo más destacado y riguroso que ha dado la filosofía de habla hispana en el siglo XX. Son bien conocidos sus trabajos sobre Kant, sobre filosofía de la geometría y filosofía de la física, aderezados siempre con profundos conocimientos históricos. Ahora, se embarca en el proyecto de elaborar una «historia razonada» del conjuntismo y sus ramificaciones, o —lo que en su concepción viene a ser lo mismo— de los elementos centrales de la lógica matemática. El volumen que nos ocupa gira en torno a la teoría de conjuntos de Cantor (Parte 1, «Conjuntos») y al programa de formalización e investigación metamatemática de Hilbert (Parte 2, «Cálculos»). Un segundo volumen estará dedicado a desarrollos en el período 1930-1960, desde Gödel y Tarski hasta los famosos resultados metateóricos de Paul Cohen sobre la teoría axiomática de conjuntos (Parte 3, «Modelos»).

Antes que nada, hay que reconocer que *El paraíso de Cantor* cubre una importante laguna en el panorama editorial en castellano. Si apenas se han publicado trabajos sobre el desarrollo de la teoría de conjuntos,[3] no contamos con ninguno que informe detalladamente sobre el programa de Hilbert, su desarrollo y las dificultades que encontró (en particular, los tan mencionados como poco estudiados teoremas de incompletud de Gödel). Quien recorra con detenimiento las páginas de Torretti

[3] Cabe citar la magnífica compilación de I. Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos* (Alianza, 1984), la obra de Alejandro Garciadiego, *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos* (Alianza, 1994), y mi propio trabajo, *El nacimiento de la teoría de conjuntos* (Universidad Autónoma de Madrid, 1993).

saldrá de la empresa con sólidos conocimientos de teoría de conjuntos, lógica y filosofía de la matemática. Eso sí, el lector deberá estar dotado de una buena dosis de determinación y paciencia: como exponente de la tradición lógica, Torretti privilegia el rigor y la precisión por encima de concesiones que busquen la facilidad de lectura. Según él mismo dice (p. xii), esta obra requiere un lector acostumbrado a las definiciones y demostraciones matemáticas, o bien una persona habituada a leer —con rigor[4]— prosa filosófica y que tenga estudios de lógica elemental.

En nuestro breve comentario, comenzaremos aclarando el alcance del proyecto al que responde *El Paraíso de Cantor*, para luego dar indicaciones sobre algunos de sus contenidos, y terminar con anotaciones a los aspectos más filosóficos del trabajo.

Primero, es necesario aclarar un poco más el objetivo del profesor Torretti, a fin de evitar malos entendidos. La lectura del título, por sí solo, podría sugerir que estamos ante una obra sobre el desarrollo histórico de la teoría de conjuntos, pero en rigor no se trata de esto. El libro dedica, por cierto, unas 100 páginas muy instructivas a delinear la evolución que llevó de la obra de Cantor a los sistemas axiomáticos de teoría de conjuntos. Mas la teoría de conjuntos, como tal, no constituye su interés principal. En cambio, una comprensión adecuada del subtítulo sí que permite localizar el foco de interés, aunque de nuevo su lectura apresurada podría invitar a confusión. Torretti no hace una historia de la «tradición conjuntista» en matemáticas (una historia del surgimiento de la matemática moderna), sino —como bien dice— de dicha tradición *en la filosofía matemática*.

Filosofía matemática es el intento de resolver los problemas de fundamentación que plantea la matemática por medios esencialmente matemáticos; es una 'filosofía matemática de la matemática', idea que nace con Frege y Russell, pero cuyo principal impulsor fue Hilbert. Como dice un interesante texto citado por nuestro autor:

> «Con esta nueva fundamentación de la matemática [el llamado Programa de Hilbert] persigo un fin importante: Al hacer de cada enunciado matemático una fórmula que pueda exhibirse en concreto y derivarse con rigor, y al darle así a las conceptualizaciones e inferencias matemáticas una forma tal que resulten irrefutables y a la vez proporcionen una representación de esta ciencia entera, *yo quisiera eliminar definitivamente del mundo la cuestión de los fundamentos de la matemática.*»[5]

No se trataba, por cierto, de que Hilbert (no en vano admirador de Kant) quisiera eliminar las cuestiones filosóficas acerca de los orígenes del conocimiento matemático; sino de establecer con plenas garantías la certeza absoluta del conocimiento matemático (en el sentido de la ausencia de contradicción) frente a cualquier duda escéptica. Esto es filosofía matemática o meta-matemática, que no se identifica ni con matemática en sentido propio (ya sea tradicional o moderna), ni con filosofía

---

[4] Al modo pre-postmoderno, si se me permite la broma.

[5] Citado por Torretti en p. 115; cursiva suya.

de la matemática. Su herramienta principal será la investigación de los sistemas axiomáticos formalizados mediante la lógica moderna.

Así, lo que propiamente centra la atención de Torretti son toda una serie de desarrollos *en metamatemática*, y ello hace comprensible que su obra recorra muchos de los principales hitos en la evolución de la lógica moderna, desde los cálculos lógicos de Frege, Peano y Russell, hasta el estudio de las propiedades metateóricas de sistemas axiomáticos formalizados (dentro de la teoría de la demostración en el volumen que nos concierne, y dentro de la teoría de modelos en el segundo volumen proyectado). Así pues, a título orientativo, el lector hará bien en considerar esta obra como una presentación histórica razonada y detallada de casi todo el material que se encuentra en la famosa compilación de artículos originales realizada por Jean van Heijenoort.[6]

El prof. Torretti sigue la norma de presentar las distintas ideas y resultados al modo del autor original, de manera que el transcurso de su narración nos va llevando desde una matemática decimonónica informal, hasta enfrentarnos con métodos cada vez más formalizados. Las ideas básicas de la teoría de conjuntos de Cantor —desde la inexistencia de una correspondencia uno-a-uno entre los números naturales y los números reales hasta la aritmética transfinita,[7] y también el teorema del Buen Orden de Zermelo— se discuten a nivel informal, en lugar de deducirlos en el marco de una teoría axiomática. En cambio, los resultados metamatemáticos que ocupan la parte principal del texto pertenecen, en su mayoría, a la *Beweistheorie* o teoría de la demostración (o prueba formal), siendo de carácter estrictamente formal o sintáctico. Por eso puede sorprender un poco que el título sea *El paraíso de Cantor*, cuando la mayor parte del texto abandona aquél para instalarse en el 'purgatorio de Hilbert', que, sin duda, fue ideado por éste con vistas a garantizar la entrada de los matemáticos en el paraíso, justificando su admisibilidad lógica. Sin embargo, ese título resultará más natural a la vista del prometido volumen segundo.

Entre los resultados avanzados que Torretti discute, el lector encontrará el célebre Teorema de Herbrand, central en la lógica cuantificacional, los celebérrimos Teoremas de Incompletud de Gödel, las grandes contribuciones de los años 1930 sobre computabilidad, y la demostración transfinita de consistencia para la aritmética de Peano, ofrecida por Gentzen. Vale la pena indicar que la discusión (§ 2.10) sobre la incompletud de la aritmética formalizada, y «sistemas afines», se ha concebido como una utilísima guía para acompañar la lectura del texto original de Gödel (1931). El lector que recorra estas páginas, si venía acompañado de ideas sobre el alcance filosófico de dichos resultados, no dejará de advertir cómo se oscurece su supuesta comprensión de esas presuntas implicaciones. Torretti presenta los teore-

---

[6] *From Frege to Gödel* (1967), citado en nota 1. Torretti aclara que ha decidido excluir la corriente alternativa al conjuntismo: la tradición intuicionista o constructivista.

[7] El resultado cantoriano de la no numerabilidad de los números reales (1874) constituye una aportación importantísima al estudio del infinito (tema tradicionalmente filosófico), y debía ser mejor conocida en nuestras Facultades de Filosofía.

mas de Gödel como lo que son: resultados en teoría de la demostración, puramente constructivistas y combinatorios, concernientes a las limitaciones deductivas que inevitablemente aquejan a una amplia clase de sistemas matemáticos formalizados. De ahí a sacar conclusiones sobre los límites de nuestro conocimiento matemático, y no digamos ya sobre las limitaciones de la mente humana (e incluso de las máquinas), median una enorme cantidad de supuestos adicionales, pocas veces explicitados. Y, naturalmente, ninguno de esos supuestos disfruta de las garantías de verdad que Gödel logró en su obra metamatemática. El prof. Torretti podría haber abundado más en el espinoso asunto de los abusos pseudo-filosóficos y pseudo-científicos de los teoremas de Gödel, pero lo que dice (pp. 346, 351-52) es suficiente para el buen entendedor. También se encuentran en la obra indicaciones sobre los retoques al programa de Hilbert, no muy convincentes, que se han ido proponiendo con la esperanza de que éste escape a las implicaciones —rigurosas esta vez— del Segundo Teorema de Gödel (que establece la imposibilidad de demostrar la consistencia de cualquiera de aquellos «sistemas afines», usando los medios del propio sistema).[8]

Ya hemos apuntado que, al tratar mucho material propio de la lógica matemática, el texto del profesor Torretti adquiere una gran densidad. Quizá por este motivo, el autor no se ha concedido alegrías a la hora de entrar en excursos o disquisiciones filosóficas. No faltará quien piense que es una pena, aunque resulta comprensible que Torretti no quisiera alargar su texto de 600 páginas en otras 50 o 100. Lo que sí me parece de lamentar es que la moraleja filosófica que se va desgranando a lo largo de las páginas —que naturalmente la hay— no se haya reflejado de una manera compacta y explícita en algún lugar del texto. Intentaré aquí esbozar cuál me parece ser esta moraleja, lo que me permitirá de camino indicar algunos pasajes de la obra que tienen especial interés para filósofos.

A mi entender, el profesor Torretti es un partidario declarado de la matemática conjuntista y estructural, en la tradición clásica de Cantor, Dedekind y Hilbert (y también Zermelo, Gödel, Tarski o los Bourbaki). Son muy representativas en este sentido las críticas de nuestro autor a la concepción fregueana de la aritmética y la geometría,[9] contrapartida de los elogios que dedica al enfoque estructural de Dedekind y Hilbert,[10] así como las críticas a Russell que van apareciendo a lo largo de las páginas que dedica a su teoría de los tipos.[11] Dicho de otro modo, Torretti encuentra plenamente satisfactorio el empleo de la teoría de conjuntos, en la forma del sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel, como fundamento para la matemática, por mucho que carezcamos de una demostración de consistencia. En su opinión (que comparto), la ausencia y aparente imposibilidad de una demostración formal de no-contradicción es un buen reflejo del carácter creativo de la actividad matemática, que se

---

[8] Véanse las p. 125-27, 316-19, 357-58, 421.

[9] No quiero dejar sin mencionar que la exposición de la escritura conceptual fregueana (sección 2.2) es muy recomendable.

[10] Sección 2.3, p. 145, 159-60, 164-67.

[11] Sección 2.4; véase por ejemplo la nota en p. 185.

caracteriza —como nos dice en el prefacio— por aunar «libertad y rigor, fantasía ubérrima y precisión pedante». Esta idea resurge en la sección 1.6, a propósito de un importante texto en el que el mismo Cantor llegaba a decir que «la esencia de la matemática radica justamente en su libertad» (p. 56-59). Libertad de transgredir con rigor las fronteras del pensamiento recibido, como ilustró a la perfección el gran matemático alemán al introducir lo *transfinito* en tanto elemento intermedio entre lo finito y lo absolutamente infinito.

La defensa del conjuntismo por parte de Torretti se extiende también al campo de la metamatemática. En el ambiente intelectual de entreguerras, la discusión sobre los fundamentos de la matemática estuvo muy marcada por las críticas escépticas del intuicionismo y por el programa de Hilbert; ambas corrientes recomendaban importantes restricciones en los medios de demostración (cuando menos los metamatemáticos) a emplear. Gödel y Tarski fueron los primeros lógicos que impulsaron la explotación de todos los medios propios de la tradición conjuntista *también* al nivel metateórico, llevando la metamatemática a un terreno claramente ajeno al programa de Hilbert.[12] El impacto de los teoremas de Gödel se discute (en p. 316-19) para terminar diciendo:

> «...si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito [con la regla ω y con Gentzen], ¿por qué tantos melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?»

Esta es la vía que ha seguido buena parte de la lógica matemática en la segunda mitad del siglo, y es de esperar que el tema se ampliará en el segundo volumen proyectado. Al igual que la matemática *tout court*, la metamatemática se ha instalado en el paraíso sin tener previas garantías de certeza, en buen uso de la enorme libertad conceptual que caracteriza a esta disciplina.

Con todo, surge aquí un problema que, en mi opinión, no puede dejar de interesar a un filosófo. Con el giro post-hilbertiano, la investigación de fundamentos deja de ser tal, en la medida en que ya no se centra en el proyecto de garantizar al modo cartesiano la seguridad absoluta del edificio matemático. Autores como Weyl, Quine o Putnam han explorado el alcance y el significado de esta 'carencia de fundamento' en la —en tiempos llamada— reina de las ciencias. Pero entiéndase bien: no se trata de que el conocimiento matemático carezca de cualquier tipo de fundamento (biológico por ejemplo), sino más bien de la imposibilidad de garantizar un fundamento seguro por la vía discursiva o demostrativa; por así decir, 'desde dentro'. No es, por decirlo en tono heideggeriano, un des-fondamiento de la *mathesis*, sino sólo (y ya es mucho) un decidido fracaso del *fundacionalismo*, heredero del proyecto cartesiano de una filosofía primera. Pero a lo que íbamos:

---

[12] Por cierto, son muy recomendables para todo tipo de lectores las aclaraciones generales acerca de este programa que se presentan en las secciones 2.1 y 2.9.

El giro conjuntista que la metamatemática dio después de Hilbert es perfectamente natural a la vista de un resultado tan cierto como es el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel (cuya demostración es constructiva y por tanto aceptable desde puntos de vista incluso más restrictivos que el intuicionista). La metamatemática hilbertiana no logró establecer la no-contradictoriedad (consistencia) de los sistemas axiomáticos formales, pero sí —paradójicamente— asegurar que una demostración de consistencia no es posible con determinados medios.[13] Ante esta situación, por un lado queda claro que la verdad matemática no es reducible a deducibilidad en un sistema formal (idea que al parecer sirvió de inspiración heurística a Gödel), y por otro se plantea la cuestión siguiente: si en todo caso el objetivo de seguridad plena no es alcanzable, ¿por qué no introducir medios de investigación más potentes en el ámbito metamatemático?[14]

Ese paso resulta perfectamente sensato si se lo observa con ojos de matemático, pero tiene un efecto colateral nada desdeñable para la 'filosofía matemática'. Ésta deja de ser autosuficiente, pues parece imposible dar garantías previas de aceptabilidad lógica, y con ello «eliminar definitivamente del mundo la cuestión de los fundamentos de la matemática» (véase la cita de Hilbert más arriba). Resulta así indispensable complementar los estudios metamatemáticos con una filosofía (o teoría, que da igual) *de la* matemática en sentido estricto. Si el conjuntismo supuso la conquista de una inmensa libertad conceptual en matemática, su invasión del ámbito metamatemático bien puede verse como una invitación a filosofar y como una garantía de libertad para la especulación teórica. Queda así claro que, como decíamos al comienzo, la matemática es hoy, más aún que en tiempos de Platón, fuente de innumerables cuestiones y sugerencias de gran alcance en lo relativo a la naturaleza del conocimiento humano. Esperemos que el profesor Torretti decida abordar estas implicaciones de su «historia razonada» en la prometida continuación de *El paraíso de Cantor*.

* * *

Addendum.

En interés del lector, incluyo las informaciones que siguen. La obra de Torretti que nos ha ocupado incluye una larga sección de Apéndices (p. 459-539) sobre distintos puntos de la teoría de conjuntos —contribuciones de Cantor, Zermelo, Fraenkel, von Neumann— y las paradojas conjuntistas —a propósito de Frege—, sobre la lógica de predicados y sus propiedades metateóricas, sobre fundamentos de la aritmética (Dedekind), sobre el Primer Teorema de Gödel en versión abstracta, sobre el cálculo de secuentes de Gentzen, y sobre algunas ideas de Brouwer. Se incluye también una extensa bibliografía de obras citadas (p. 551-71), un muy útil

---

[13] Para precisiones técnicas sobre dichos medios, que evitaré aquí, véase la p. 322 de Torretti y su apéndice XVI.

[14] Tarski fue especialmente decidido a la hora de seguir esta estrategia.

glosario con aclaraciones detalladas sobre los principales términos matemáticos, una lista de abreviaturas y símbolos empleados, y un índice de nombres y conceptos, práctica esta última que ojalá fuera habitual en la literatura académica en castellano. El texto principal apenas presenta erratas de importancia —aunque sí se ha colado alguna en las notas—, lo que al parecer es mérito del propio Torretti (véase la nota en p. 469). Las únicas erratas significativas que he advertido están en: p. 301, donde el axioma 4 debería rezar, al final, '$ux = uy$'; p. 329, donde el axioma V.1 debe poner 'x_1' en lugar de 'y_1'. ¡Bien poca cosa es, para un texto plagado de fórmulas!

* * *

José Ferreirós
Departamento de Filosofía y Lógica
Universidad de Sevilla
Avda. S. Francisco Javier, s.n.
41005 Sevilla