

LA CONJECTURA DE POINCARÉ

PROBLEMA RESOLT DESPRÉS D'UN SEGLE DE NOVES IDEES I TREBALL CONTINU

MARÍA TERESA LOZANO IMÍZCOZ

La conjectura de Poincaré és un problema topològic, establert el 1904 pel matemàtic francès Henri Poincaré, que caracteritza d'una manera molt senzilla l'esfera tridimensional. Es tracta d'utilitzar únicament el primer invariant de topologia algebraica –el grup fonamental– també definit i estudiat per Poincaré. La conjectura implica que si un espai no té forats essencials és que es tracta de l'esfera. Aquest problema va ser resolt entre 2002 i 2003 per Grigori Perelman, directament i com a conseqüència de la seua demostració de la conjectura de geometrització de Thurston, que culminava així el camí que havia marcat Richard Hamilton.

Paraules clau: topologia, esfera, grup fonamental, geometria riemanniana, flux de Ricci.

■ UN TREBALL RECONEGUT

La conjectura de Poincaré és l'únic problema del mil·lenni que s'ha resolt. El 18 de març de 2010 l'Institut Clay de Matemàtiques va anunciar la concessió del premi d'un milió de dòlars al matemàtic rus Grigori Perelman. Quatre anys abans, Perelman havia estat guardonat amb una Medalla Fields en el Congrés Internacional de Matemàtics de Madrid de 2006 per les seues contribucions a la geometria i la seua revolucionària visió de l'estructura analítica i geomètrica del flux de Ricci, però ni va arrebregar la seua Medalla Fields ni va acceptar el premi del mil·lenni.

Perelman va anunciar en tres edicions preliminars publicades entre 2002 i 2003 en la base de dades d'accés lliure *arXiv* la solució de la conjectura de geometrització de Thurston, que conté com a cas particular la conjectura de Poincaré. Els dos primers textos, juntament amb treball seu no publicat o treballs d'altres matemàtics publicats després del 2003, demostren la conjectura de geometrització. En el tercer, suposats els resultats essencials dels altres dos, es dona una demostració directa de la conjectura de Poincaré.

La solució de Perelman es basa en idees de Richard Hamilton usant el flux de Ricci, que relaciona mitjançant equacions diferencials la curvatura amb la vari-

ació de la mètrica. Justament Hamilton va rebre en 2003 el prestigiós Premi d'Investigació Clay pel seu descobriment i desenvolupament del flux de Ricci, una de les eines més potents dins de l'anàlisi geomètrica.

«LA CONJECTURA DE POINCARÉ S'EMMARCA EN UNA DE LES BRANQUES MÉS ABSTRACTES DE LES MATEMÀTIQUES, LA TOPOLOGIA»

■ MARC INICIAL DE LA CONJECTURA: TOPOLOGIA

La conjectura de Poincaré s'emmarca en una de les branques més abstractes de les matemàtiques, la topologia. El seu creador, el matemàtic francès Jules Henri Poincaré, la va denominar «*analysis situs*» i és la part de les matemàtiques que s'ocupa de caracteritzar algunes propietats qualitatives dels objectes, aquelles que hi

romanen per deformacions contínues, és a dir, suaus, sense ruptures, talls o identificacions. És una mena de geometria tova, no rígida. Aquesta idea tan original va ser fruit d'una ment amb una extraordinària capacitat d'abstracció espacial.

Podem dir que en topologia dos objectes –espais topològics– són iguals o homeomorfs si un s'obté de l'altre per una deformació contínua, és a dir, si existeix entre ells una correspondència biunívoca i bicontínua. Per a un topòleg una pilota continua essent una esfera encara que estiga més o menys inflada. Tampoc importa la dimensió que tinga, és una esfera ja siga de rugbi,



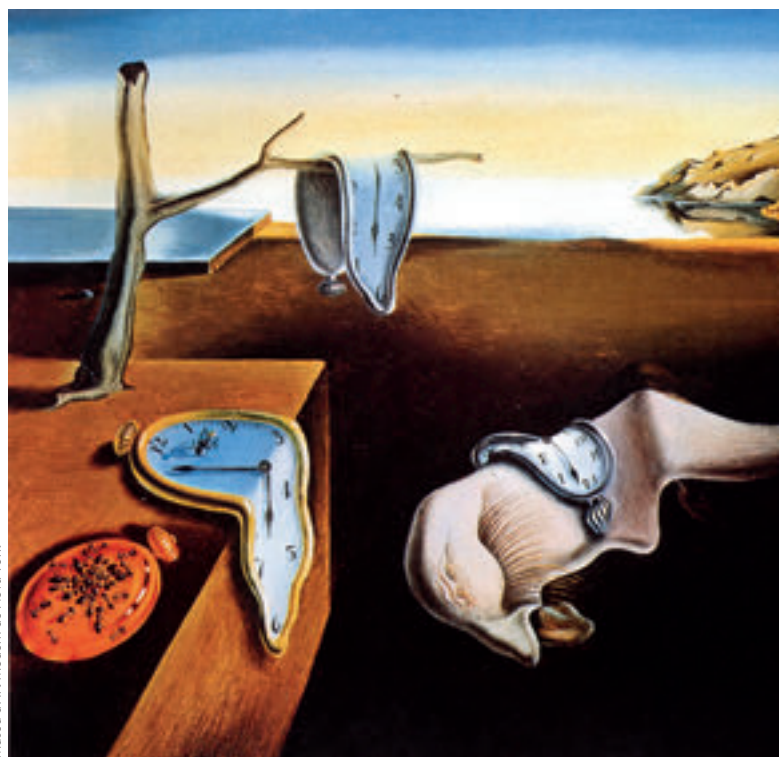
MÉTOE

El matemàtic francès Jules Henri Poincaré (1854-1912) va proposar en 1904 un dels problemes més famosos de la història de les matemàtiques, emmarcat en una de les seues branques més abstractes: la topologia.

tenis, tenis de taula o futbol. Però una pilota és topològicament diferent d'un pneumàtic o una rosca, que tenen un forat central essencial. Pensem que el pintor Salvador Dalí va actuar com un topòleg quan va pintar els seus rellotges tous.

Aquesta branca de les matemàtiques, àmpliament coneguda i utilitzada pels físics teòrics, no ha estat justament valorada per la ciència en general fins al descobriment recent dels aïllants topològics. Es tracta d'un nou tipus de materials que són aïllants en l'interior però magnífics conductors en la vora. Aquestes propietats són degudes a la forma o estructura topològica, que es conserva davant de deformacions del material. Els físics teòrics David Thouless, Duncan Haldane i Michael Kosterlitz van rebre el Premi Nobel en 2016 per les aplicacions que van trobar a la topologia en la física quàntica dels nous materials. Aquest premi va posar més d'actualitat aquesta disciplina matemàtica.

Per a entendre el context de la conjectura, analitzem primer alguns conceptes bàsics. L'espai és el lloc on s'esdevenen els fenòmens físics, on es mouen els punts seguint les lleis de la física. No tots els espais permeten els mateixos fenòmens: la dimensió representa un paper important. Intuïtivament la dimensió d'un espai



Museu d'Art Modern de Nova York

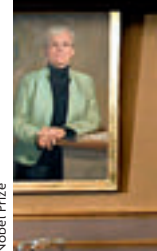
Per a un topòleg una pilota continua sent una esfera encara que estiga més o menys inflada. Tampoc importa la dimensió que tinga, és una esfera ja siga de rugbi, tennis, tenis de taula o futbol. Pensem que el pintor Salvador Dalí va actuar com un topòleg quan va pintar els seus rellotges tous.

es concep com el màxim nombre de direccions o coordenades independents. Així, una corba té dimensió 1, una superfície té dimensió 2 i el nostre espai ambient té dimensió 3. Podem imaginar una varietat de dimensió 4 si considerem com a nova coordenada el temps en un espai físic de dimensió 3.

Els objectes més interessants de la topologia són les varietats. El concepte matemàtic de varietat de dimensió n (o n -varietat) és l'abstracció de l'espai de dimensió n . Les varietats són espais amb característiques semblants en tots els punts. És a dir, que la situació local entorn d'un punt és anàloga a la situació local entorn de qualsevol altre punt, i anàloga a la situació local del clàssic espai físic n -dimensional; és a dir, cada punt és el centre d'una bola n -dimensional.

Localment una varietat de dimensió 1 és com un interval de la recta; una de dimensió 2, com un disc; una de dimensió 3, com una bola... Si localment totes les varietats de la mateixa dimensió són topològicament iguals, què podem dir globalment? Aquesta és la pregunta que porta a plantejar-se una classificació global de les varietats. Desitjaríem tenir una classificació completa en el sentit de disposar d'una llista completa sense repeticions, és a dir, aconseguir enumerar una

the mathematics that
 describes properties
 stable and only
 change in integer s
 1, 3, ...
 number of holes
 topological invarian
 says an integer, b
 thing in between



Nobel Prize

$$\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

l·lista de varietats tal que cada varietat és equivalent a una de la l·lista i només a una. Analitzem la resposta per ordre creixent de la dimensió.

Dimensió 1. Com és globalment una varietat de dimensió 1? Entenem fàcilment que la circumferència és diferent de la recta real perquè, per exemple, si ens movem des d'un punt P en una direcció amb velocitat constant, en el primer cas arribarem novament al punt P , però en el cas de la recta això no ocorrerà mai. La circumferència i la recta són representants de les dues possibles classes de varietats connexes de dimensió 1. Tota varietat de dimensió 1 està formada per la unió disjunta de línies tancades i línies obertes, és a dir, de circumferències i rectes.

Dimensió 2. Una demostració completa de la classificació de les varietats compactes de dimensió 2 (superfícies) és coneguda des del segle XIX. Una varietat és «compacta» si tota successió infinita de punts conté una subsuccessió convergent. Les superfícies compactes es classifiquen segons l'orientabilitat, el gènere i el nombre de circumferències que presenten en la vora o frontera. En les superfícies orientables, el gènere és el nombre de forats essencials. Així, l'esfera seria una superfície orientable tancada –compacta i sense vora– de gènere 0; el tor, de gènere 1 i el doble tor, de gènere 2.



D'esquerra a dreta, esfera (superfície orientable tancada de gènere 0), tor (gènere 1) i doble tor (gènere 2).

Per a nosaltres és fàcil entendre la diferència entre dues superfícies de distint gènere perquè les veiem des de fora gràcies al fet que el nostre camp de visió comprèn una dimensió més que ens permet veure globalment aquestes superfícies. Però un ésser pla, Bidi, vivint en la superfície, les visuals del qual estiguen limitades al seu món bidimensional, seria incapaç de distingir-les. La seua visió seria necessàriament local i localment totes les superfícies són iguals, igual com un disc. Una demostració rigorosa de la classificació de superfícies pot fer-se usant el grup fonamental, primer invariant de topologia algebraica definit per Poincaré. Donat un punt P sobre una varietat, considerem camins sobre la varietat que comencen i acaben en el punt P . Per als nostres propòsits, identificarem com iguals dos camins que es puguin deformar contínuament l'un en l'altre, com si d'una goma elàstica es tractara (es diu llavors que ambdós camins són «homòtops»). Alguns d'aquests llaços es poden contraure contínuament fins a quedar reduïts al punt P . Naturalment, si el llaç envolta un forat, això no és possible.

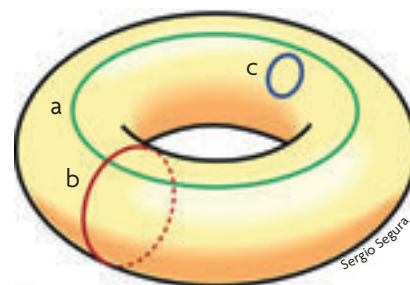


Figura 1. Tor T .

Per exemple, en el tor T de la figura 1, un llaç com c es pot contraure a un sol punt, però els llaços a i b , no. Observem que els llaços es poden juxtaposar posant l'un a continuació de l'altre: si P és el punt on s'uneixen els camins a i b , podem definir un camí que comença en P , segueix per a i quan torna a P segueix per b fins a tornar novament a P . Aquest llaç és la juxtaposició de a i b . Res impedeix juxtaposar a i a per a donar lloc a un llaç que fa dues voltes, i podem fer totes les voltes que desitgem juxtaposant més vegades el camí a . De la mateixa manera podem juxtaposar b i b per a obtenir un llaç que envolta dues vegades el tub del tor. No obstant això, en juxtaposar c i c no aconseguim un



En 2016 els físics teòrics David Thouless, Duncan Haldane i Michael Kosterlitz van rebre el Premi Nobel de Física per les seues aplicacions de la topologia a la física quàntica dels nous materials. Quan es van anunciar els guanyadors, el professor Thors Hansson, que formava part del comitè del Nobel de Física, va usar un rotllo de canella (sense forats), un *bagel* (amb un forat) i un brètzel (amb dos forats) per a explicar el concepte de topologia. El premi va posar d'actualitat aquesta disciplina matemàtica.

camí diferent, ja que el llaç obtingut pot col·lapsar en un punt. També de la juxtaposició de b i un llaç com c resulta un llaç que és homòtop a b .

Hi ha una qüestió important que encara no hem tingut en compte: un camí es pot recórrer en dos sentits. Direm llavors que un és l'invers de l'altre. Observem que si juxtaposem un camí i el seu invers, aconseguim un llaç que es pot contraure a un punt. En termes matemàtics, hem obtingut un grup, que denotarem per $\pi_1(T, P)$. Un grup és una estructura que consta d'un conjunt i una operació entre els elements del conjunt, i aquesta operació verifica tres propietats. El nostre conjunt consisteix en les classes de camins tancats i l'operació és la juxtaposició. La classe que es pot contraure a un punt és l'element neutre.



En topologia, els llaços són camins tancats que comencen i acaben en el punt P . En la figura s'observen exemples de llaços en l'esfera (esquerra) i en el tor (dreta).

En general, el grup fonamental $\pi_1(X, P)$ d'un espai topològic X basat en un punt P de l'espai X té per elements les classes de llaços, camins tancats que comencen i acaben en el punt P , i la seua llei de composició és la juxtaposició. L'element neutre és la classe dels camins α que es deformen contínuament contraient-se al punt P , sempre sense eixir-se de la varietat i conservant els seus extrems en el punt P . Un grup es diu que és trivial si es redueix a un únic element, el neutre. És fàcil observar que tots els camins tancats α en l'esfera representen el neutre perquè sempre es poden contraure al punt P . Hi ha prou d'imaginar que la imatge del camí és un fil elàstic que s'encongeix durant la deformació. Per tant, el grup fonamental de l'esfera és trivial. Però un camí β en una altra superfície F_g diferent de l'esfera que rodege un forat essencial no es pot contraure al punt P sense eixir-se de la superfície o sense trencar el camí.

Quan el grup fonamental d'una varietat és trivial, es diu que la varietat és «simplement connexa». Això és equivalent a dir que tot camí tancat es contrau contínuament a un dels seus punts. Amb aquest invariant, el grup fonamental, tenim caracteritzada l'esfera bidimensional: l'esfera S^2 és l'única superfície tancada simplement connexa.

Dimensió 3. Aquest tema interessa bàsicament al científic perquè la seua curiositat el porta a voler saber com és globalment el món que habitem, quina forma té l'univers. Vivim en un espai tridimensional, per tant la nostra

situació per a observar globalment la varietat que habitem està limitada a una observació local com succeïa a l'habitant Bidi de la superfície del paràgraf anterior. No podem visualitzar globalment les varietats tridimensionals, així doncs, hem de recórrer a l'estudi d'invariants per a distingir-les. Els invariants de varietats són objectes algebraics (nombres, polinomis, grups...) que associem a cada varietat de tal manera que en varietats equivalents un invariant pren el mateix valor.

En el cas de les superfícies, la més senzilla és l'esfera S^2 . Si busquem una representació en coordenades de l'esfera de dimensió n , S^n , la situem en l'espai euclidià $(n+1)$ -dimensional, espai ordinari de $n+1$ dimensions amb la mètrica euclidiana en la qual la distància més curta entre dos punts és la línia recta. En aquest espai euclidià l'esfera és l'espai topològic dels punts que equidisten d'un de donat, per exemple de l'origen de coordenades.

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

$$S^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1\}$$

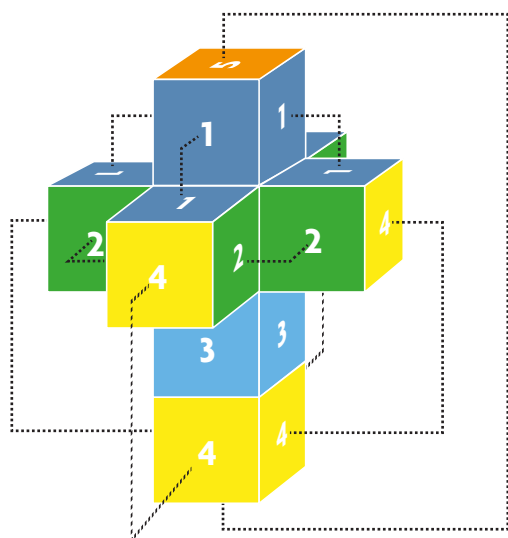
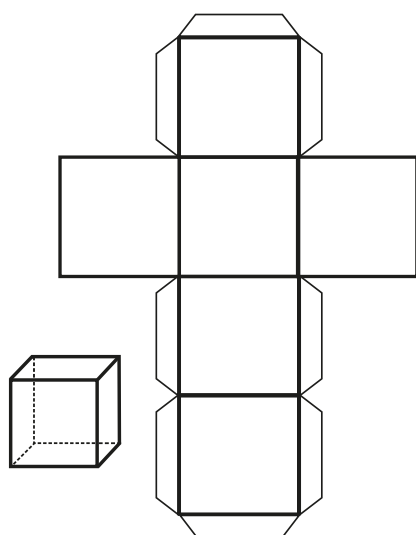
Amb aquesta introducció ja podem entendre l'enunciat de la conjectura de Poincaré: l'esfera S^3 és l'única varietat de dimensió 3 tancada simplement connexa.

És fàcil comprovar que efectivament el grup fonamental de l'esfera tridimensional és el grup trivial. El problema és trobar una varietat tridimensional amb grup fonamental trivial que no siga l'esfera (un contraexemple a la conjectura de Poincaré), o bé demostrar que tota varietat tridimensional amb grup fonamental trivial és topològicament equivalent a l'esfera (confirmar la conjectura de Poincaré).

Un enunciat tan senzill va passar un segle sense ser refutat o demostrat. Però no va ser un temps perdut, ni de bon tros. El segle XX va ser fructífer en l'estudi de tècniques topològiques, geomètriques i diferencials aplicables a 3-varietats que han portat a una comprensió profunda de les varietats. Com hem fet en superfícies, considerarem ací només 3-varietats orientables. Si bé el marc inicial de la conjectura de Poincaré era exclusivament el de la topologia, la seua solució involucra la geometria riemanniana i les equacions diferencials del flux de Ricci.

En el segle XX va haver-hi interessants descobriments entorn de la conjectura de Poincaré. Poincaré va definir també el primer grup d'homologia, que és l'abe-

$$\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = 0$$



Sergio Segura

Sempre és difícil imaginar un objecte tridimensional en un espai de dimensió 4, però podem actuar per analogia. De la mateixa manera que ens fem una idea d'un objecte tridimensional com el cub per mitjà del seu desenvolupament pla, es pot intentar imaginar un cub 4-dimensional a través del seu desenvolupament espacial. Dalt, desenvolupament d'un cub en un pla; a sota, desenvolupament d'un hipercub en l'espai tridimensional (o més aviat, de la projecció sobre el pla del seu desenvolupament espacial). Per a obtenir la figura hem d'unir les cares que tenen el mateix color, quelcom impossible d'aconseguir en el nostre espai de tres dimensions.

**«EN LA DÈCADA DELS VUITANTA
IRROMPEN LES TÈCNIQUES
GEOMÈTRIQUES DE LA MÀ DEL
MATEMÀTIC WILLIAM THURSTON, QUE VA
SER MEDALLA FIELDS EN 1982»**

lianitzat del grup fonamental, és a dir, el grup obtingut del grup fonamental en afegir-hi la commutativitat de tots els seus elements. El mateix Poincaré, en el seu *Cinquième complément à l'analysis situs* (Poincaré, 1904), contesta en negatiu la seua primera pregunta d'aproximació a la conjectura de Poincaré: hi ha prou de saber que el primer grup d'homologia d'una 3-varietat és trivial per a assegurar que és la 3-esfera? En aquest article obté un interessant i bell contraexemple a aquesta qüestió: la seua famosa varietat dodecaedral.

Aquesta varietat, avui coneguda com a «esfera homològica de Poincaré» o «espai dodecaèdric de Poincaré», es pot definir com el conjunt de dodecaedres regulars (o alternativament icosaedres regulars) inscrits en una esfera bidimensional. És la varietat resultant d'identificar en un dodecaedre sòlid cada cara amb la seua oposada per un gir de $\pi/5$. Aquesta varietat té un grup fonamental finit de 120 elements, l'abelianitzat del qual és el grup trivial, i el seu recobriment universal és l'esfera S^3 . La varietat dodecaedral s'obté com a quocient de l'esfera S^3 per l'acció d'un grup d'isometries de 120 elements. Es tracta de veure l'esfera com la vora del politop regular de dimensió 4 anomenat «la 120 cel·la». És a dir, veure l'esfera S^3 tessellada per 120 dodecaedres esfèrics regulars amb angles dièdrics de 120° , adossats per les seues cares (720 pentàgons) on cada aresta és comuna a tres dodecaedres. En total hi ha 600 vèrtexs i 1.200 arestes. Aquests dodecaedres són intercanviats per un grup d'isometries. El quocient és l'esfera homològica de Poincaré.

El *Cinquième complément à l'analysis situs* acaba amb l'enunciat correcte de la conjectura de Poincaré establert com una afirmació. Assegura que la propietat que caracteritza l'esfera tridimensional és la de tenir grup fonamental trivial. L'última frase d'aquest escrit és: «*Mais cette question nous entraînerait trop loin*» («Però aquesta qüestió ens portaria massa lluny»).

Han estat diversos els matemàtics que han confesat dedicar part dels seus esforços a demostrar-la o a trobar un contraexemple, encara que s'ha dit que segurament tots els topòlegs ho hem intentat en algun moment. La necessitat de trobar nous arguments ha fet que s'hagen descobert interessants procediments per a construir totes les 3-varietats tancades, en analogia amb els procediments coneguts per a construir totes les superfícies tancades orientables.

■ NOVES IDEES: THURSTON

Fins a 1980 les tècniques usades eren topològiques o combinatòries, però en la dècada dels vuitanta irrompen les tècniques geomètriques de la mà del matemàtic William Thurston, que va ser medalla Fields en 1982.



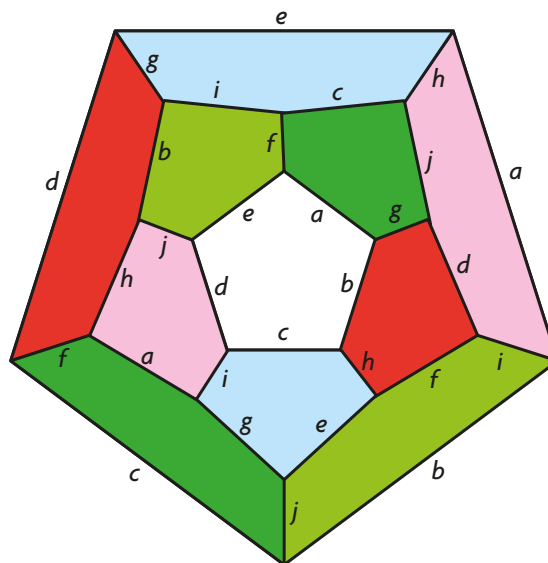
Bill Wiggall, The New York Times

Fins a 1980 les tècniques usades eren topològiques o combinatòries, però en la dècada dels vuitanta irrompen les tècniques geomètriques de la mà del matemàtic William Thurston.

La introducció d'una geometria riemanniana en una varietat consisteix a definir localment una mètrica de manera coherent que permeti mesurar distàncies, angles, àrees... La idea intuïtiva és endurir la varietat topològica donant-li forma rígida per a poder usar les tècniques de la geometria. Si això es fa en una superfície, és possible fer-ho de manera homogènia i que en cada punt de la superfície la curvatura siga la mateixa. Així l'esfera bidimensional té curvatura positiva; el tor (o F_1), curvatura 0 i les superfícies F_g , $g > 1$, curvatura negativa. És a dir, les tres geometries riemannianes –esfèrica (de curvatura constant positiva), euclidiana (de curvatura zero) i hiperbòlica (de curvatura negativa)– són necessàries i suficients per a geometritzar totes les superfícies tancades.

Per a portar aquesta idea a les 3-varietats és necessari primer partir la varietat en peces. El procés té una certa analogia amb la descomposició de nombres enters en factors primers. La idea és dividir la varietat en peces més simples; aquestes peces bàsiques també es denominen «primeres». La divisió consisteix a seccionar la varietat i a enganxar-hi esferes a fi d'obtenir varietats més simples. Per exemple, en superfícies, el doble tor es pot seccionar per una circumferència central, afegir dos discos que cancel·len els forats creats i obtenir dos tors. Les

**«LES TRES GEOMETRIES
 RIEMANNIANES –ESFÈRICA,
 EUCLIDIANA I HIPERBÒLICA–
 SÓN NECESSÀRIES
 I SUFICIENTS PER A
 GEOMETRITZAR TOTES LA
 SUPERFÍCIES TANCADES»**



Maria Teresa Lozano Imizcoz

L'esfera homològica de Poincaré és el resultat d'identificar en un dodecaedre sòlid cada cara amb la seua oposada per un gir de $\pi/5$, com en aquesta figura, on se suposa que el plànol del dibuix és la vora del dodecaedre i les cares oposades tenen el mateix color.

superfícies primeres orientables són l'esfera i el tor. Les varietats primeres són les que no es poden dividir més per aquest procediment. En dimensió 3, una varietat és primera si és $S^2 \times S^1$, o bé tota esfera encaixada voreja una bola.

Hellmuth Kneser va provar que cada 3-varietat compacta diferent de S^3 conté un nombre màxim finit d'esferes S^2 tal que divideixen la varietat en diverses peces de manera que si en cadascuna d'aquestes peces s'enganxen boles a les esferes de tall s'obtenen varietats primeres (Kneser, 1929). Més tard John Milnor va provar que aquesta descomposició en peces primeres és única excepte l'ordre (Milnor, 1962). Sembla raonable llavors restringir l'estudi a les varietats primeres. Una modificació dels arguments de Kneser permet tallar una varietat primera al llarg d'un nombre finit de tors encaixats incompressibles i obtenir peces simples que no contenen més tors incompressibles no perifèrics.

Un tor (F_1) és «incompressible» si no es pot comprimir, és a dir, si cap corba simple tancada essencial en F_1 es deforma contínuament a un punt en la varietat. Aquesta col·lecció de tors també és única, com assegura el teorema de Jaco-Shalen-Johannson (Jaco i Shalen, 1978; Johannson, 1979).

Una varietat és «geomètrica» si és el quocient d'una geometria per a un grup discret d'isometries actuant

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$$

lliurement i discontinuament, i té volum finit. Thurston va comprovar que eren necessàries vuit geometries per a geometritzar l'interior de les peces simples i va conjecturar que eren suficients. En concret va establir la conjectura de geometrització de 3-varietats: cada 3-varietat primera M és geomètrica o els interiors de les seues peces simples són varietats geomètriques amb només vuit varietats geomètriques.

Les vuit geometries de Thurston –necessàries i suficients per a geometritzar 3-varietats– perfectament descrites per Peter Scott (1983) i que agrupem en tres tipus, són:

Curvatura seccional constant	Geometries producte	Productes torçats
Esfèrica S^3 (positiva)	$S^2 \times R$	Nil
Euclidiana E^3 (zero)	$H^2 \times R$	Sol
Hiperbòlica H^3 (negativa)		El recobridor universal de $SL(2;R)$

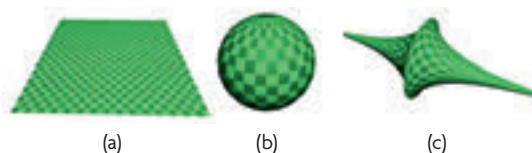


Figura que il·lustra les superfícies amb curvatura constant en l'espai tridimensional. Són el pla (a), que té curvatura zero; l'esfera (b), que té curvatura positiva; i la pseudoesfera (c), que és la superfície generada per una tractriu i té curvatura negativa.

Totes les varietats geomètriques amb geometria diferent de la hiperbòlica estan classificades. Per tant, després de la demostració de la conjectura de geometrització, només falta classificar les varietats hiperbòliques.

La conjectura de Poincaré és un cas especial de la conjectura de geometrització. Observeu que, de les vuit geometries de Thurston, només és compacta S^3 , la de curvatura seccional positiva. Si una varietat compacta és simplement connexa, no conté tors incompressibles ni esferes essencials, per tant la varietat és geomètrica i només pot ser S^3 .

La descomposició en peces simples té un procés invers, una vegada que es dota de geometria les peces simples. Hi ha dues maneres d'unir 3-varietats geomètriques per a obtenir varietats compostes. La primera, «suma connexa», consisteix a llevar una bola en cadascuna i unir els complements identificant les dues esferes que han quedat com a vora. La segona, que uneix varietats amb vora, tracta d'identificar sengles components de la vora per un homeomorfisme. Aquestes unions es coneixen com a «forats de cuc» que connecten peces geomètriques. En la suma connexa es tracta d'un forat de cuc amb secció esfèrica, i en el segon cas, d'un forat

de cuc que té com a secció la superfície que serveix d'enganxat. En teoria, un forat de cuc en l'univers que unira dues zones de l'espai temps permetria viatjar en l'espai i en el temps. Aquesta idea ha suggerit relats, novel·les i pel·lícules on els seus habitants són capaços de passar d'un món a un altre a través d'aquestes fronteres, més o menys invisibles, que els connecten.

Thurston va demostrar la seua conjectura per a una àmplia classe de varietats (varietats Haken) que tenen prou complexitat per a usar els seus mètodes, mètodes que no poden aplicar-se a les varietats simplement connexes.

EL FLUX DE RICCI: HAMILTON

Si es pretén geometritzar una 3-varietat, es pot començar definint una mètrica riemanniana en la varietat i fer que la mètrica canvie amb el temps tractant d'obtenir una mètrica homogènia en tota la varietat. Si pensem en superfícies, dimensió en què és més fàcil entendre els conceptes, la idea és pensar, per exemple, en una esfera topològica deforme amb la seua mètrica corresponent i aconseguir que el pas del temps la convertesca en una esfera perfecta i redona. Les tècniques adequades per a desenvolupar aquestes idees exigeixen l'ús d'equacions diferencials, inventades per Isaac Newton per a expressar com es mouen els cossos sota la influència d'una força externa. En particular, al geometa li interessa un anàleg a l'equació de la calor de Fourier, que és l'equació diferencial que governa el canvi de la temperatura, ja que amb el temps assoleix una distribució homogènia de la temperatura. Volem usar una equació que relacione el canvi de la geometria amb una qualitat geomètrica com és la curvatura per a aconseguir una geometria amb una distribució homogènia de la curvatura. Hamilton (1982) va definir una equació per al flux de Ricci que conté, d'una banda, la derivada del tensor mètric i, d'una altra, el tensor de Ricci (relacionat amb la curvatura): $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$.

És a dir, l'equació del flux de Ricci és l'anàloga a l'equació de la calor de Fourier però en un context ge-



L'equació del flux de Ricci és l'anàloga a l'equació de la calor de Fourier però en un context geomètric. Es pretén que homogeneïtze la curvatura de la mateixa manera que la de la calor homogeneïtza la temperatura. La idea és pensar, per exemple, en una esfera topològica deforme amb la seua mètrica corresponent i aconseguir que el pas del temps la convertesca en una esfera perfecta i redona.

omètric. Es pretén que homogeneïtze la curvatura de la mateixa manera que la de la calor homogeneïtza la temperatura. Si es parteix d'una varietat amb geometria mètrica arrugada, s'espera que el flux corregesca gradualment les anomalies i que arribi a una varietat amb una geometria regular.

Amb aquestes tècniques Hamilton va demostrar potents teoremes, però va trobar obstacles per a demostrar la conjectura de Poincaré. Va trobar que es podien produir singularitats en el flux que no va saber resoldre i va tenir problemes per a analitzar la situació en el límit en alguns casos. Les persones interessades a estudiar el flux de Ricci poden consultar *Lecture on the Ricci flow*, publicat per Peter Topping en 2006 i disponible en línia.¹

■ LA SOLUCIÓ: PERELMAN

Va ser una sorpresa l'anunci de Perelman donant una solució positiva a la conjectura de geometrització de Thurston en els dos primers articles i una demostració directa de la conjectura de Poincaré en el tercer article (Perelman, 2002, 2003a, 2003b). El seu treball es basa en el flux de Ricci i conté noves idees per a resoldre els problemes de singularitats i pas al límit. Entendre i validar aquests resultats ha estat el treball de diversos grups de matemàtics que han anat publicant articles i llibres amb exposicions detallades del treball de Perelman, com Brosse Kleiner i John Lott en *Geometry and Topology*, publicat en 2008. Encara que la seua publicació definitiva és posterior a altres articles, va ser el primer que va aparèixer en *arXiv*, de manera que va poder ser consultat lliurement per la resta d'equips. Entre 2006 i 2009 cal destacar també els treballs de John Morgan i Gang Tian, Huai-Dong Cao i Xi-Ping Zhu, i Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot i Joan Porti.

■ LA CONJECTURA DE POINCARÉ EN DIMENSIONS SUPERIORS

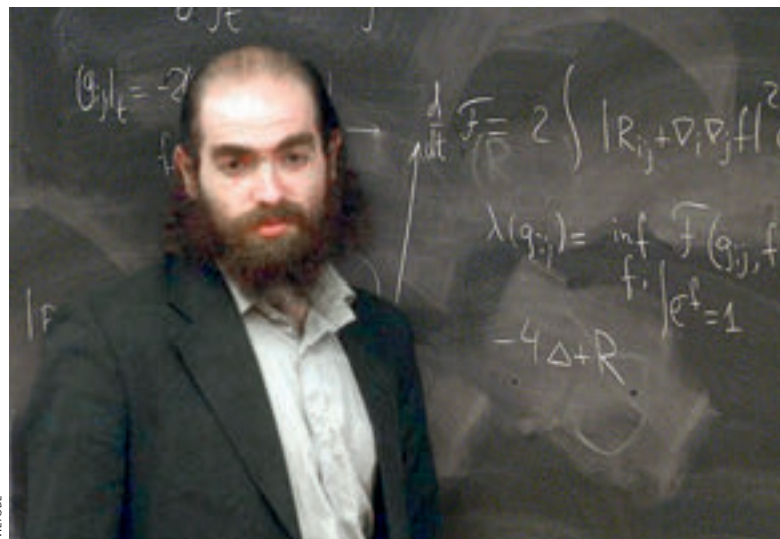
Fins ara hem parlat de S^1 , S^2 y S^3 , però res ens impedeix augmentar la dimensió i considerar S^4 , S^5 , i així successivament. En general, la n -esfera S^n es defineix com el conjunt dels vectors

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

que compleixen

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$$

¹ http://homepages.warwick.ac.uk/~maseq/topping_RF_mar06.pdf.



El matemàtic rus Grigori Perelman no va recollir la seua Medalla Fields en 2006, ni va acceptar en 2010 el premi del milió de dòlars per resoldre la conjectura de Poincaré, un dels problemes del mil·lenni.

Per tant, en qualsevol dimensió $n > 1$ cal plantejar-se un problema anàleg al de la conjectura de Poincaré, si bé ara la intuïció espacial desapareix.

No podem enunciar en dimensió n la conjectura de Poincaré com que l'esfera S^n és l'única varietat de dimensió n tancada i simplement connexa perquè sabem que hi ha n -varietats tancades i simplement connexes ($n > 3$) que no són homeomorfes a l'esfera de dimensió n (per exemple, $S^2 \times S^{n-2}$). Per tant, en dimensió $n > 3$ hem de generalitzar el grup fonamental. Una classe de camins que comencen i acaben en un punt P és una classe d'aplicacions de S^1 en la varietat X que contenen al punt P i pot imaginar-se com una goma elàstica circular en la varietat i que conté el punt P . Ho hem denotat $\pi_1(X; P)$. Amb una dimensió més, podem prendre membranes elàstiques esfèriques (com globus) que contenen el punt P : són classes d'aplicacions de S^2 en X que contenen el punt P i que denotem $\pi_2(X; P)$. Podem continuar augmentant la dimensió i definir el grup d'homotopia $\pi_i(X; P)$ com les classes d'aplicacions de S^i en X que contenen el punt P .

Dos espais X, Y són del mateix tipus d'homotopia si tenen tots els seus respectius grups d'homotopia isomorfs: $\pi_i(X; P) \cong \pi_i(Y; Q)$. L'enunciat de la conjectura en dimensió n (CP^n) és: tota n -varietat tancada del tipus d'homotopia de l'esfera S^n és equivalent a l'esfera S^n .

La conjectura es va resoldre primer per a dimensió $n > 4$. A partir de 1960 diversos matemàtics van provar per diferents mètodes distintes versions de la conjectura de Poincaré en dimensió n . En dimensió menor o igual que 3 és indiferent treballar amb varietats topològiques, combinatòries o diferenciables, però això no succeeix en dimensió superior. La categoria de varie-

LA RENÚNCIA COM A PROTESTA

Un dels requisits per a obtenir el premi de l'Institut Clay és l'aparició de la solució del problema en una revista especialitzada en la qual publicar depenga d'una revisió per experts en el tema –*peer review*–. Però el matemàtic rus Grigori Perelman es va limitar a posar els seus treballs durant els anys 2002 i 2003 en *arXiv*, el conegut lloc web de manuscrits científics de la Universitat de Cornell. En aquests textos ni tan sols es menciona la conjectura de Poincaré, si bé aquesta és una conseqüència dels seus resultats. Quan els seus articles van ser contrastats per la comunitat matemàtica i es va fer evident que eren correctes, la Unió Matemàtica Internacional li va concedir una Medalla Fields, que li havia de ser lliurada en el Congrés Internacional de Matemàtics celebrat a Madrid a l'agost de 2006. Però Perelman va refusar el prestigiós guardó.

És difícil saber les raons del seu rebuig. Perelman sempre ha evitat la premsa, i pocs periodistes han aconseguit trobar-se i parlar amb ell. Ni tan sols la seua biògrafa, Masha Gessen, ha pogut entrevistar-lo. Potser el reportatge més extens i documentat sobre ell va ser publicat en el *New Yorker* a l'agost de 2006¹. Els seus autors, Sylvia Nasar i David Gruber, expliquen la conjectura de Poincaré, analitzen diversos aspectes de la resolució (entre ells, un intent d'apropiar-se de la solució) i descriuen una trobada amb Perelman.

Sembla que les claus de la seua negativa són fonamentalment ètiques. Així, assenyala que la Medalla Fields «és completament irrellevant per a mi. Tots entenen que si la demostració és correcta, no cal cap altre reconeixement». Però hi ha també un retret generalitzat a la professió: Perelman diu que «hi ha molts matemàtics que són més o menys honestos. Però quasi tots són conformistes. Són més o menys honestos, però toleren els que no ho són». Afegeix que «no són les persones que trenquen els estàndards ètics les que són considerades com *aliens*, sinó que són les persones com jo les que són aïllades».

Perelman no va indicar en aquell moment si la seua objecció als guardons s'estenia al premi del milió de dòlars de l'Institut Clay: «No decidiré si acceptar el premi fins que me l'ofereixen.» No obstant això, quan al març de 2010 li'l van oferir, també el va rebutjar.

SERGIO SEGURA

tats utilitzada i els seus corresponents mètodes és el que distingeix les diverses demostracions.

La prova en dimensió 4 va ser obtinguda vint anys més tard per Michael Freedman. En el mateix article va classificar totes les 4-varietats tancades i simplement connexes. Freedman va rebre també una Medalla Fields en 1986.

■ A LA RECERCA DE LA FORMA DE L'UNIVERS

Avui disposem d'alguns llibres que presenten un desenvolupament històric del tema amb contingut accessible a un estudiant universitari. Per exemple, *The Poincaré conjecture: In search of the shape of the universe* (O'Shea, 2007) desenvolupa la història total de la geometria, començant en l'escola de Pitàgores en el 500 aC, però sense oblidar Euclides, la geometria hiperbòlica de Gauss, Lobatxevski i Bolyai, les idees de Riemann i Poincaré. Analitza els avenços en el segle xx i explica amb detall la conjectura de geometrització de Thurston. El subtítol del llibre serveix per a estimular la curiositat del lector i motivar l'estudi de varietats tridimensionals. ☺

REFERÈNCIES

- Hamilton, R. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255–306.
- Jaco, W., & Shalen, P. B. (1978). A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds. En J. Milgram (Ed.), *Algebraic and geometric topology* (pp. 71–84). Providence: American Mathematical Society. doi: 10.1090/pspum/032.2
- Johannson, K. (1979). *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*. Berlín: Springer-Verlag.
- Kneser, H. (1929). Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 38, 248–260.
- Milnor, J. (1962). A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *American Journal of Mathematics*, 84(1), 1–7.
- O'Shea, D. (2007). *The Poincaré conjecture: In search of the shape of the universe*. Nova York: Walker Publishing Company.
- Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *ArXiv*. Consultat en <https://arxiv.org/abs/math/0211159>
- Perelman, G. (2003a). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *ArXiv*. Consultat en <https://arxiv.org/abs/math/0307245>
- Perelman, G. (2003b). Ricci flow with surgery on three-manifolds. *ArXiv*. Consultat en <https://arxiv.org/abs/math/0303109>
- Poincaré, H. (1904). Cinquième complément à l'analyse situs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 18(1), 45–110.
- Scott, P. (1983). The geometries of 3-manifolds. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 15(5), 401–487.

AGRAÏMENTS

Suport parcial d'MTM2013-45710-c2-1-p, MTM2016-76868-c2-2-p i DGA/ Fons Social Europeu: Grup Consolidat E15.

Maria Teresa Lozano Imízcoz. Llicenciada i doctora en Matemàtiques per la Universitat de Saragossa (Espanya), és especialista en geometria i topologia. La seua investigació inclou resultats sobre invariants de nusos, estructures geomètriques en varietats tridimensionals, enllaços universals i temes relacionats amb aquests. És catedràtica emèrita de la Universitat de Saragossa, acadèmica numerària de la Reial Acadèmia de Ciències Exactes, Físiques, Químiques i Naturals de Saragossa i acadèmica corresponent de la Reial Acadèmia de Ciències Exactes, Físiques i Naturals.

¹ www.newyorker.com/magazine/2006/08/28/manifold-destiny