

Números y realidad

Utilizando las matemáticas para modelar nuestro entorno

Unos de los secretos que esconde el cálculo de ecuaciones es la capacidad para diseñar planes de prevención antes catástrofes medioambientales. El grupo EDANYA ha elaborado un modelo de previsión para zonas de riesgo como el Estrecho de Gibraltar a partir de su análisis matemático.

>> Carlos Parés Madroñal y José Manuel González Vida

Ocurre con las matemáticas algo que no sucede con otras disciplinas científicas o, al menos, no en el mismo grado: al mencionar que uno es estudiante o profesor de matemáticas se suele producir un cambio de expresión en el gesto del interlocutor acompañado, quizás, de la exclamación “¡Matemáticas!”. Esta reacción instantánea, que se agudiza si uno dice además que investiga en dicha disciplina, puede preceder a una declaración espontánea sobre los sentimientos que despierta y/o un resumen de la experiencia académica en la materia. Lamentablemente, en la mayor parte de los casos, entre estos sentimientos no se encuentra el entusiasmo... Aparte de las razones académicas que puedan llevar a muchos a no tener un especial aprecio por las matemáticas, en el trasfondo de las reacciones de rechazo hay también una visión estereotipada y muy extendida de esta área que la presenta como ciencia exacta, difícil, abstracta... y completa-

mente inútil. La tira cómica que acompaña a este artículo y que encontré en la página web de XKCD ilustra acertadamente este estereotipo.

La finalidad de este artículo no es discutir las causas o las consecuencias de esta percepción social, ni mucho menos debatir en cómo mejorar la imagen de las matemáticas, lo que escapa de la extensión del texto y de nuestras posibilidades. Nuestro propósito (o nuestra intención) es afirmar que, en lo que se refiere a las matemáticas como ciencia, este estereotipo es radicalmente falso: las matemáticas son una disciplina esencialmente útil. Sus relaciones con la física, la informática, la química, la biología, la economía, la medicina, la arquitectura, las distintas ingenierías, las ciencias sociales, la música, etc... Son tantas que, cuando se conocen, más que preguntarse ¿dónde se usan las matemáticas? uno se pregunta ¿dónde no se usan las matemáticas?.

La utilidad de las matemáticas se debe fundamentalmente a que éstas proporcionan herramientas muy poderosas para, entre otros fines: resolver problemas prácticos, tratar grandes masas de datos y comprender, predecir y controlar, en la medida de lo posible, el funcionamiento de muchos sistemas reales de muy distinta naturaleza.

Nos centraremos en este último aspecto, desarrollado por el grupo EDANYA del departamento de Análisis Matemáticos de la Universidad de Málaga, y que es, probablemente, el bloque de utilidades menos conocido de los tres señalados. El concepto clave es el de modelo matemático. Para que un sistema real pueda ser objeto de modelado matemático es necesario que su estado pueda ser representado mediante variables numéricas y que la ley que rige su evolución pueda ser expresada como relaciones entre dichas variables. Son muchos los sistemas reales con estas características y, de hecho, cada vez es más frecuente el uso de modelos matemáticos en las distintas ingenierías, las ciencias físicas (en particular en meteorología, climatología, oceanografía, astronomía), las químicas, las biológicas, la medicina o la propia economía, entre otras.

A modo de ejemplo, en la Figura 2 se muestra una simulación de la famosa riada tóxica de Aznalcóllar: aunque la imagen tenga la apariencia de una presa que se desborda, en realidad se trata de una



Figura 1. El estereotipo del matemático (XKCD: <http://xkcd.com/435>)

Figura 2. Simulación de la rotura de la presa de lodos tóxicos de Aznalcóllar.

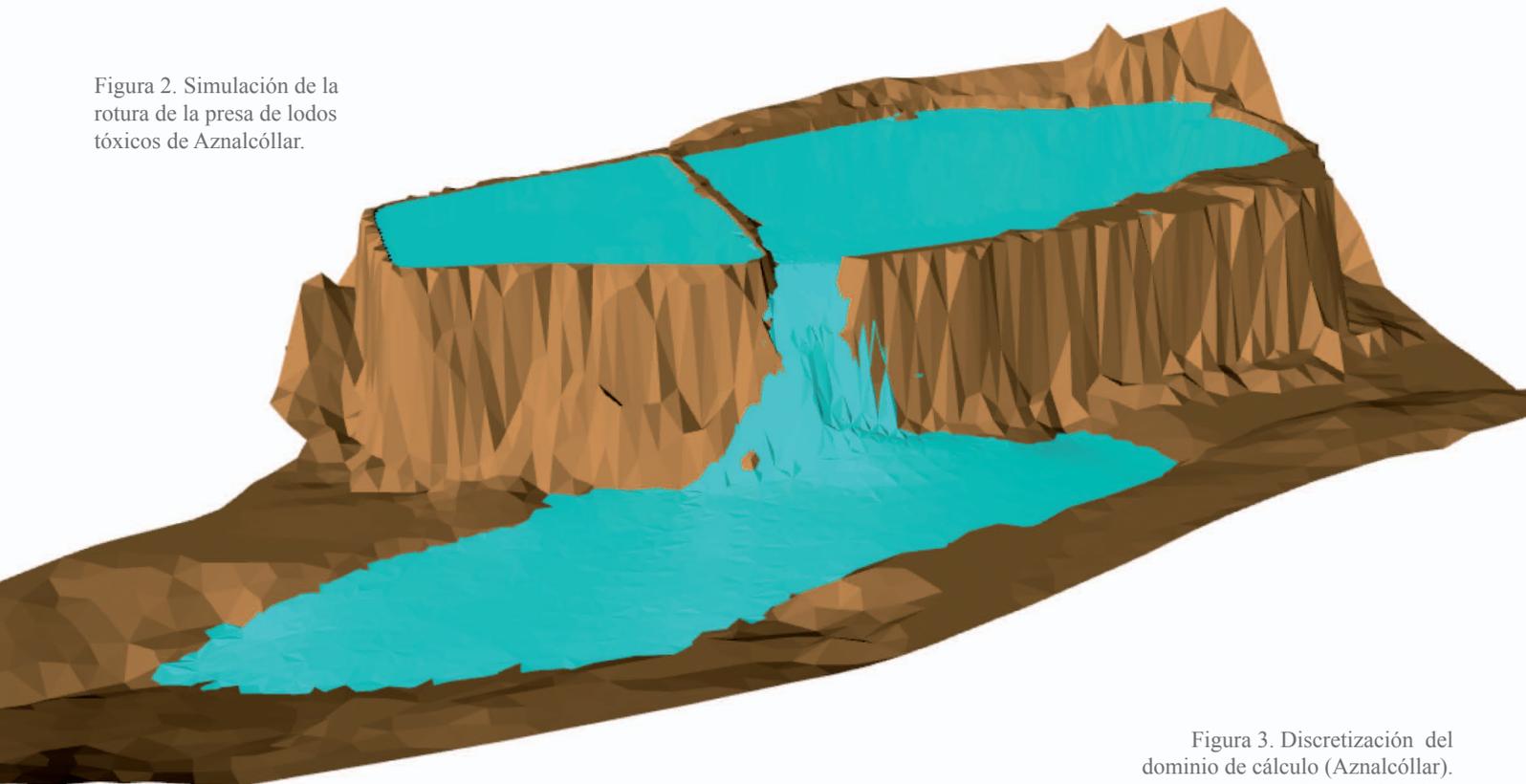


Figura 3. Discretización del dominio de cálculo (Aznalcóllar). (Imagen inferior)

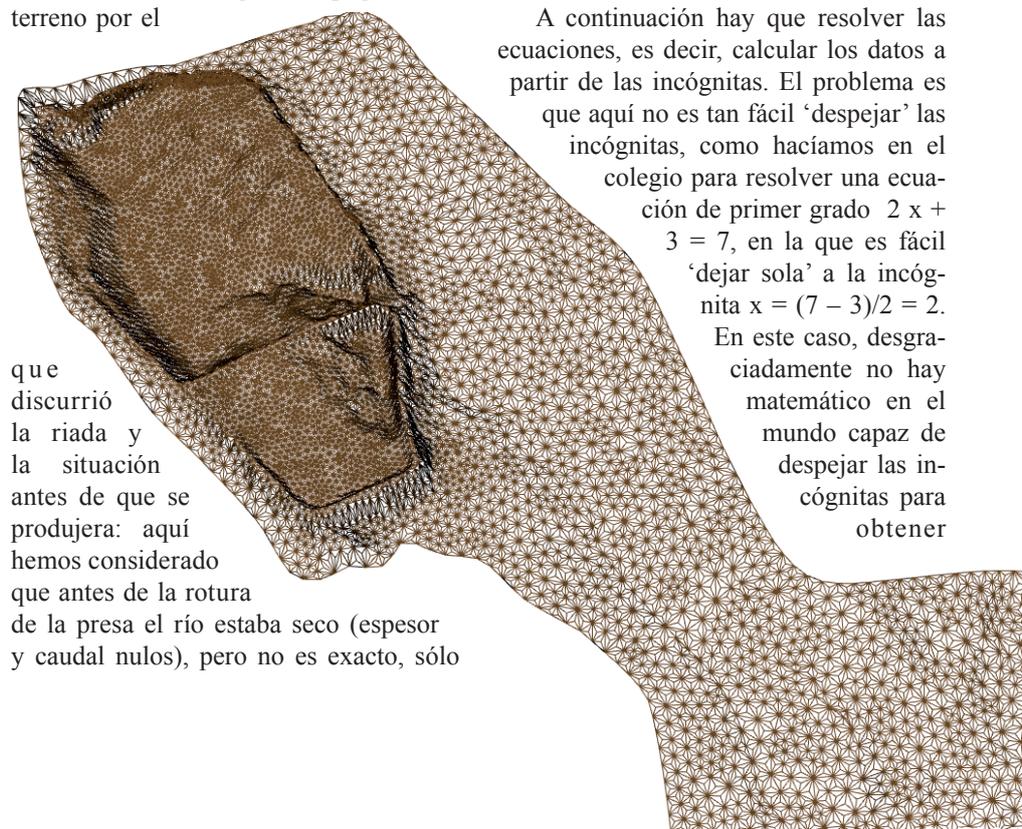
interpretación con colores de una masa de números obtenidos con un ordenador. A continuación y de forma simplificada, veamos las etapas que se han seguido para obtener esta imagen. Estas mismas fases son las utilizadas para el modelado de otros muchos sistemas reales como las predicciones meteorológicas.

El primer paso es elegir los números que representan el estado del sistema físico, en este caso la riada. En este modelo, dichos números son el espesor de la lámina de agua y el caudal (volumen de agua por unidad de tiempo). Estos datos varían de un punto a otro del terreno, e incluso en un mismo punto cambian con el tiempo, por eso se le denominan variables. Por ejemplo, en un punto del terreno al que todavía no ha llegado la riada, el valor de ambas variables es 0, sin embargo cuando recibe agua, sus valores cambian de forma brusca.

A continuación se expresan matemáticamente las leyes que rigen la evolución de las variables, que en nuestro caso, son la ley de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento (2ª ley de Newton). La expresión matemática de estas leyes da lugar a un conjunto de fórmulas

en las que aparecen unas cuantas de las temidas derivadas. Estas fórmulas constituyen el modelo matemático.

El siguiente paso consiste en distinguir entre datos e incógnitas. En las fórmulas del modelo hay algunos términos que se conocen y otros que no: los que se conocen (los datos) son la aceleración de la gravedad, la densidad del agua, la topografía del terreno por el

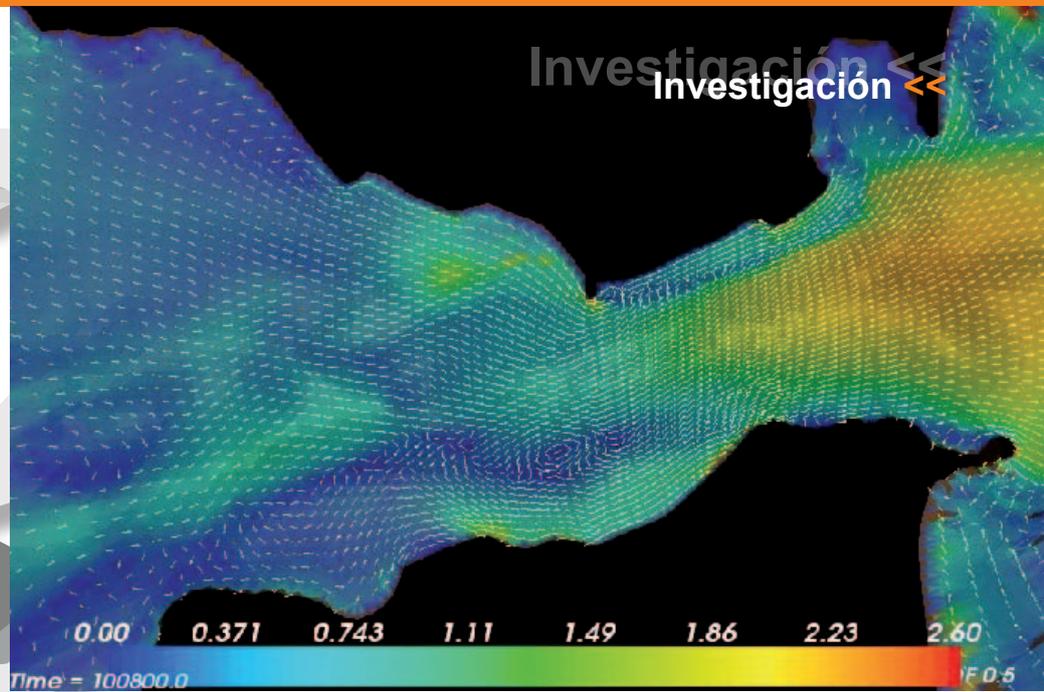


que discurrió la riada y la situación antes de que se produjera: aquí hemos considerado que antes de la rotura de la presa el río estaba seco (espesor y caudal nulos), pero no es exacto, sólo

es una aproximación razonable. Lo que no se conoce, y que es justamente lo que se desea predecir con el modelo (las incógnitas) son los valores del caudal y del espesor de la lámina tras la rotura de la presa. Y ya se sabe: en matemáticas, una fórmula en la que se mezclan varios datos y varias incógnitas se denomina sistema de ecuaciones.

A continuación hay que resolver las ecuaciones, es decir, calcular los datos a partir de las incógnitas. El problema es que aquí no es tan fácil ‘despejar’ las incógnitas, como hacíamos en el colegio para resolver una ecuación de primer grado $2x + 3 = 7$, en la que es fácil ‘dejar sola’ a la incógnita $x = (7 - 3)/2 = 2$. En este caso, desgraciadamente no hay matemático en el mundo capaz de despejar las incógnitas para obtener

Figura 4. Simulación de corrientes de marea en el Estrecho de Gibraltar.



unas fórmulas que nos digan con toda precisión qué valor van a tomar el caudal y el espesor de la lámina en cada punto del terreno y en cada tiempo posterior al instante en el que se produce la rotura de la presa. No obstante lo que se puede hacer, usando las técnicas de la disciplina matemática denominada ‘análisis numérico’, es considerar un modelo más sencillo que aproxime adecuadamente al anterior y que sea más fácil de resolver. A esto se le denomina discretización. En nuestro caso, el terreno en el que transcurre la riada se fragmenta en trozos pequeños de forma cuadrangular, que se denominan células o volúmenes finitos (Fig. 3). En el modelo aproximado, que se denomina modelo discreto, las nuevas incógnitas son el caudal medio y el espesor medio de la lámina en cada una de las células y en una serie de instantes de tiempo sucesivos. Mientras menor sea el tamaño de las células, y por tanto mayor su número, mejor es la aproximación que se obtiene de caudales y espesores.

Aunque el modelo aproximado sea más fácil de resolver, el proceso que lleva de los datos a las incógnitas conlleva miles de millones de cuentas, lo que es inabordable no ya para nuestro grupo de investigación: lo sería incluso para el colectivo de matemáticos del mundo entero (y ha-

bría que contar además con la extraordinaria dificultad de ponerlos de acuerdo....) Y aquí aparece un nuevo ingrediente: la implementación en un ordenador, es decir, la confección de un programa que le dé a un ordenador (o a un conjunto de ordenadores que trabajen de forma coordinada) las instrucciones necesarias para que haga todas las cuentas. Y ahora ya por fin podemos decir cómo se ha obtenido la Figura 2: en cada uno de los instantes de tiempo simulados se pintan en celeste las células que tienen agua y de marrón las que no (el tono de marrón depende de la profundidad media).

Estas simulaciones de la riada tóxica se hicieron algún tiempo después de que tuviera lugar el desastre a fin de validar el modelo, es decir, para comparar la predicción calculada con lo que realmente ocurrió, y así verificar la fiabilidad del método. Esta es una etapa fundamental del proceso de modelado ya que, a pesar de

la exactitud que se le presupone a las matemáticas, cada paso del proceso que nos ha llevado hasta la figura conlleva errores: errores de modelado, errores en los datos, errores de aproximación, errores de redondeo... Es fundamental verificar si, a pesar de todo, las predicciones del modelo tienen que ver con el comportamiento real del sistema que se pretende simular.

Una vez validado, el modelo puede ser adaptado fácilmente para simular inundaciones en otras zonas: basta cambiar los datos. Se obtiene así una herramienta eficaz y general para la evaluación de riesgos en casos de rotura de presas o de depósitos de agua.

Además de simular inundaciones, el grupo EDANYA trabaja en modelos de corrientes marinas, de transporte de sedimentos y de avalanchas submarinas, entre otros. Asimismo, se colabora en esta actividad con geólogos del Centro Oceanográfico de Fuengirola (IEO) en un proyecto de excelencia de la Junta de Andalucía, con oceanógrafos de la Universidad de Cádiz, así como con otros equipos de analistas numéricos españoles y extranjeros, especialmente con el grupo que dirige el Profesor Tomás Chacón de la Universidad de Sevilla, con quienes se trabaja en las simulaciones de la riada de Aznalcóllar. La Figura 4 muestra una simulación de la corriente de superficie en el Estrecho de Gibraltar. Finalmente, la Figura 5 muestra la formación de un tsunami debido a una avalancha submarina. Éstas y otras animaciones realizadas por este grupo de investigación de la Universidad de Málaga pueden ser consultadas: <http://anamat.cie.uma.es/animaciones>. ●

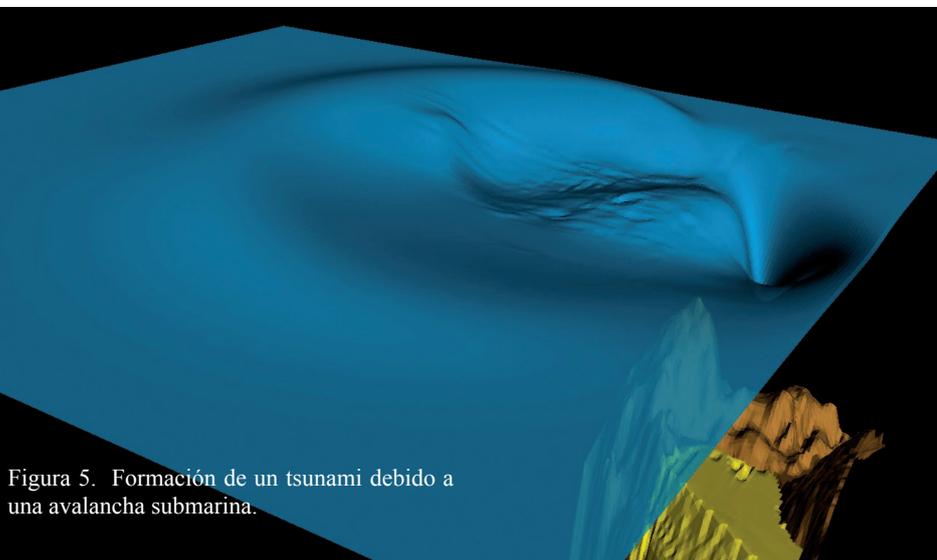


Figura 5. Formación de un tsunami debido a una avalancha submarina.