

# Aspectos topológicos de las deformaciones de singularidades

DAVID MOND

University of Warwick, England

**ABSTRACT.** An examination of the Reidemeister moves, and of the other changes which the plane projection of a space-curve undergoes on moving the centre of projection, reveals an surprising link between the changes in the homology of the image and the codimension of the singularities of projection. This link is the most accessible instance of a widespread phenomenon of singular complex geometry. This article gives a brief and non-technical survey.

*Keywords and phrases.* Singularities, vanishing homology, codimension.

*2000 Mathematics Subject Classification.* Primary: 32S05, 32S30. Secondary: 32S55.

**RESUMEN.** El estudio de los movimientos de Reidemeister, y de los demás cambios que sufre la proyección radial al plano de una curva en el espacio tridimensional, al cambiar el centro de la proyección, revela una sorprendente relación entre los cambios en la homología de la imagen, por una parte, y la codimensión de las singularidades de proyección por otra. Esta es la instancia más accesible de un fenómeno generalizado de la geometría compleja singular. El artículo hace una breve reseña, nada técnica, del fenómeno.

*Dedicación:* Di esta charla durante la primera visita que hice a Colombia después de la muerte del profesor Jairo Charris. Dedico este artículo al recuerdo vivo de su espíritu refulgente y generoso que nos hizo posible, a mí y a tantos otros, entrar en el mundo de la matemática.

## 1. Introducción

Este artículo pretende dar un vistazo introductorio sobre un tema que se presta para dibujar: la relación (con frecuencia de igualdad) entre el rango de la homología evanescente de una singularidad y el número de parámetros necesarios para obtener su deformación universal, es decir, la dimensión de la base de

una deformación universal<sup>1</sup> de ella. Buena parte del contenido de este texto no consiste nada más que en dibujos. Naturalmente hacen falta algunas palabras para encadenar las ideas, y algunas definiciones para aclarar el sentido de estas palabras. Para no detener la marcha de la exposición, he tratado de minimizar el aspecto formal y técnico; a cambio, doy referencias a libros y artículos donde se pueden encontrar los detalles. Si la exposición despierta inquietudes y las referencias no están a mano, con gusto trataré de responder a ellas, a través de la dirección electrónica que se da al final.

**1.1. Los movimientos de Reidemeister.** En la teoría de nudos, los *movimientos de Reidemeister* ocurren en la transición entre dos proyecciones planas genéricas de un nudo. La Figura 1 muestra dos de ellos.

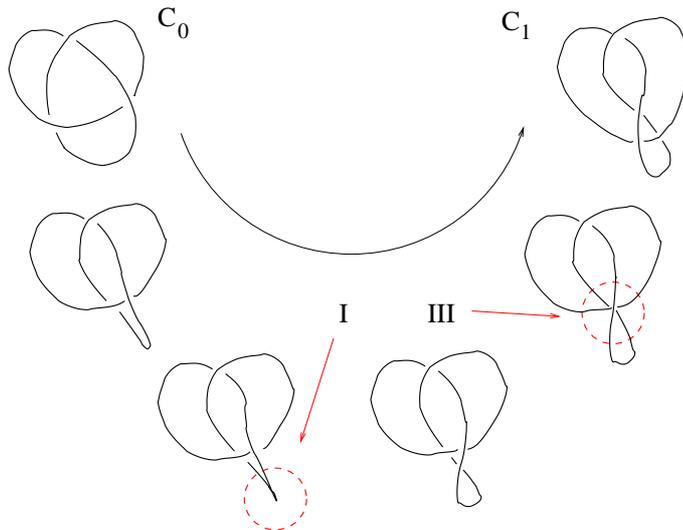


Figura 1: Transiciones entre proyecciones planas genéricas de un nudo trébol.

Cada círculo punteado delimita una región  $U$  que contiene el punto (la “singularidad”) en el que sucede algo especial, y en la cual no sucede nada más. Es decir, si escogiéramos otra bola más pequeña  $U'$  centrada en la singularidad,  $U' \cap C_t$  y  $U \cap C_t$  se verían iguales. Más formalmente,  $C_t \cap U$  es contráctil; topológicamente es un cono sobre su frontera  $C_t \cap \partial U$ . Diremos que  $U$  es una *bola aislante* para la singularidad, y que lo que está dentro es una *vista local* de ella. Para contrastar, a la izquierda en la Figura 2 hay una vista no local, extraída de la Figura 1. A la derecha se muestra como se puede descomponer

<sup>1</sup>Por un rigor lingüístico quizás excesivo, ahora en lugar de “universal” se dice “versal” o “semi-universal” en este contexto. Como estos son términos un poco opacos, uso “universal” en este artículo. Explicaremos su significado en la Subsección 1.3.

en una reunión de vistas locales. De hecho, toda variedad algebraica o analítica puede descomponerse así.

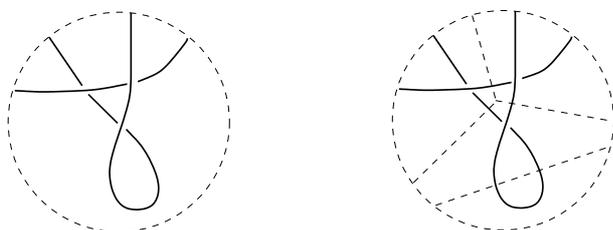


Figura 2: Vista no local y su descomposición en reunión de vistas locales.

Fuera de la región  $U$  la proyección es estable: está enteramente compuesta de trozos lisos y de nodos, que no sufren cambios cualitativos bajo pequeñas deformaciones de la proyección.

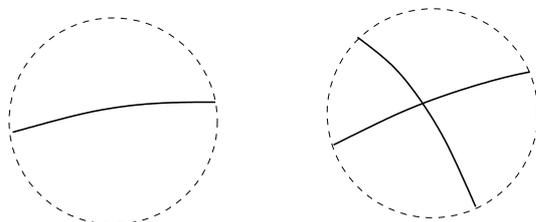


Figura 3: (i) Trozo liso y (ii) nodo

La siguiente figura muestra los tres movimientos de Reidemeister, en forma de una secuencia de imágenes. Para cada movimiento mostramos tres dibujos, y una parametrización de un movimiento típico de esta clase. El parámetro  $\lambda$  funciona como la coordenada del tiempo. En cada caso, el dibujo central, para  $\lambda = 0$ , es una vista local del movimiento en el instante de transición. Los dibujos que lo rodean muestran lo que se ve dentro de la misma bola aislante para pequeños valores de  $\lambda$ .

I			II			III		
$\lambda < 0$	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$
$t \mapsto (t^2, t^3 + \lambda t)$			$\begin{cases} s \mapsto (s, s^2 + \lambda) \\ t \mapsto (t, t^2) \end{cases}$			$\begin{cases} s \mapsto (s, -s) \\ t \mapsto (t, \lambda) \\ u \mapsto (u, u) \end{cases}$		

Figura 4: Los movimientos de Reidemeister.

**1.2. Proyecciones planas de curvas espaciales.** Dada una curva en el espacio tridimensional, desde ciertos puntos se pueden ver trozos que muestran las mismas vistas locales que los movimientos de Reidemeister. Por ejemplo, si uno mira a la curva a lo largo de una de sus rectas tangentes, en el punto de tangencia aparece una cúspide como la que se ve en el centro del movimiento I de Reidemeister. De hecho, si la torsión de la curva en ese punto no es nula, al mover el ojo se ve todo el movimiento I de Reidemeister, tal como está retratado en la Figura 4, en una pequeña vecindad de este punto.

Dado que la cúspide se puede ver desde cualquier punto en una recta tangente, el conjunto de puntos desde los cuales se le puede ver es una superficie, la tangente desarrollable, y por lo tanto tiene codimensión 1 en el espacio tridimensional. Convendrá ponerle un nombre,  $V_{RI}$ , a esta superficie.

Con tal de que la curva no sea demasiado especial —una recta, por ejemplo, o una curva perfectamente plana— también aparecen los centros de los movimientos II y III de Reidemeister, y también cada uno de ellos es visible desde los puntos de una superficie, que llamaremos  $V_{RII}$  y  $V_{RIII}$  respectivamente. Además, moviendo el ojo al través de una de estas superficies, se ve todo el movimiento de Reidemeister correspondiente.

También aparecen nuevas vistas locales. Se pueden clasificar: diremos que dos vistas locales son equivalentes si son difeomorfas. La Figura 6, junto con la Figura 4, da una lista (incompleta) de las clases de difeomorfismo de vistas locales de una curva genérica en el espacio<sup>2</sup>. De hecho, en el caso de la quinta en la Figura 6, visible a lo largo de una recta cuadrisecante, no hay una sola clase por difeomorfismo, sino infinitas, como se explicará luego. Singularidades de cada clase se pueden ver desde un determinado conjunto de puntos en el espacio, cuya codimensión se muestra en la segunda columna. Para cada clase de vista local  $X$ , llamamos  $V_X$  al conjunto de puntos desde los cuales se le puede ver.

Los movimientos de Reidemeister son los únicos de codimensión 1. Esto explica por que son los únicos que aparecen necesariamente al deformar una proyección genérica de un nudo en otra. Para conseguir tal deformación, basta mover el ojo desde un punto de vista genérico a otro. Se puede elegir el camino entre los dos puntos, de tal forma que pase transversalmente por las superficies  $V_{RI}$ ,  $V_{RII}$  y  $V_{RIII}$  y evite completamente los conjuntos desde los cuales se ven otras singularidades. Pues como estos tienen codimensión mayor que 1, no dividen el espacio y así se pueden evitar. No se pueden evitar  $V_{RI}$ ,  $V_{RII}$  y  $V_{RIII}$ , porque ellas (o más precisamente su clausura topológica) sí dividen el espacio.

Moviendo el ojo de manera apropiada, se puede lograr que cada vista local se transforme en una vista genérica o estable. Llamamos “perturbación estable”

---

<sup>2</sup>La lista de las clases de difeomorfismo de singularidades (vistas locales) de proyección de una curva genérica en el espacio tridimensional fue publicada por J. M. Soares David en [3]. Una buena descripción de su trabajo se encuentra en [16].

de la vista local, la parte de una vista estable obtenida moviendo el ojo un poquito, que se encuentra contenida en la bola aislante con la que comenzamos (la que determina la vista local). Digo “un poquito” porque si se mueve mucho, rasgos significativos pueden entrar en la bola aislante desde afuera, o salir de ella hacia afuera. Lo que queremos ver en la perturbación genérica es precisamente lo que tiene su origen en la vista local con la que comenzamos.

La Figura 4 muestra dos perturbaciones estables para cada movimiento de Reidemeister (el “antes” y el “después”). Para los movimientos I y II, la perturbación de la izquierda tiene más nodos que la de la derecha. Llamamos  $n_{\text{máx}}$  al mayor número de nodos que puede aparecer en una perturbación estable.

Mov.	visible desde:	cod.	$n_{\text{máx}}$	$n_{\text{máx}} - r + 1$
I	$V_{\text{RI}}$ = reunión de rectas tangentes a la curva (‘tangente desarrollable’)	1	1	1
II	$V_{\text{RII}}$ = reunión de rectas bisecantes contenidas en planos tangentes	1	2	1
III	$V_{\text{RIII}}$ = reunión de rectas trisecantes	1	3	1

Figura 5

La tabla anterior resume algunos de los datos sobre los movimientos de Reidemeister. En la última columna está la suma  $n_{\text{máx}} - r + 1$ , donde  $r$  es el número de ramas (trozos independientes de curva) que componen la vista local original. Más abajo se verá la razón de esto.

En la Figura 6, como en la Figura 4, se da una parametrización de un miembro de cada clase (en la columna “forma normal”); todos los demás miembros de la clase tendrán parametrizaciones que son equivalentes, bajo cambios  $C^\infty$  de coordenadas en fuente y meta a esta, salvo la quinta, la cual tiene cuatro ramas y que se ve al mirar la curva a lo largo de una recta cuadrisecante (por esta razón, llamaremos esta clase “la cuadrisecante”). En toda la historia que estoy tratando de contar, esta vista local aparece como excepción a cada regla. Nuestra motivación para dar la forma normal se verá más abajo. A diferencia de la Figura 4, aquí no hay parámetro  $\lambda$  cuya variación produzca una deformación de la vista. De hecho, para cada una de estas vistas locales, es necesario más que un parámetro para explorar todas las posibles deformaciones.

Llama la atención que para todas las vistas locales menos una, la cuadrisecante, se tiene que

$$n_{\text{máx}} - r + 1 = \text{codim.} \quad (1.1)$$

No es coincidencia, ni la igualdad, ni la excepción. Es la primera muestra de una relación un poco sorprendente entre dos medidas de la complejidad de una singularidad que forma el tema principal de este artículo.

Vista local	codim.	forma normal	perturbación maximal	$n_{\text{máx}}$	$n_{\text{máx}} - r + 1$
	2	$t \mapsto (t^2, t^5)$		2	2
	2	$s \mapsto (s, s^2)$ $t \mapsto (t, 0)$ $u \mapsto (u, -u^2)$		4	2
	2	$s \mapsto (0, s)$ $t \mapsto (t^2, t^3)$		3	2
	2	$s \mapsto (0, s)$ $t \mapsto (t^2, t^3)$		3	2
	2	$s \mapsto (s, 0)$ $t \mapsto (t, t)$ $u \mapsto (0, u)$ $v \mapsto (v, -v)$		6	3
	3	$s \mapsto (s, 0)$ $t \mapsto (t^2, t^3)$		4	3
	3	$s \mapsto (s, 0)$ $t \mapsto (t, t^3)$ $u \mapsto (0, u)$		5	3

Figura 6: Singularidades de proyección de codimensión mayor que 1.

**1.3. Singularidades de curvas planas parametrizadas.** La primera medida es la complejidad topológica de una perturbación de la singularidad, resumida en un número entero, el aumento del rango total de su homología. A continuación veremos que eso es lo que está dado por  $n_{\text{máx}} - r + 1$ . La segunda medida es el número de variables adicionales (parámetros) necesarios para poder desplegar, salvo difeomorfismo, todos los posibles cambios de los que es susceptible. Una deformación que hace eso se llama *deformación universal*. Una definición precisa se puede encontrar, por ejemplo, en [11]. Aquí, me limito a hacer tres comentarios sobre el tema:

(i) La misma noción de deformación universal depende de la relación de equivalencia con la que estamos clasificando las singularidades. Hablamos de una deformación que despliegue, “salvo difeomorfismo”, todos los posibles cambios que pueden ocurrir. Como en este contexto estamos clasificando las curvas planas parametrizadas por cambios suaves de coordenadas (es decir, por difeomorfismos) en fuente y meta, la definición precisa de deformación universal

usa esta misma noción, y reemplaza “salvo difeomorfismo” por “salvo cambios suaves de coordenadas en fuente y meta”. En otros contextos la definición es ligeramente diferente.

(ii) Existen métodos muy desarrollados para calcular una deformación universal a partir de una parametrización o una ecuación de la singularidad. Cabe destacar que no depende para nada del hecho de que aparezca como proyección de una curva espacial. Por ejemplo, la singularidad de curva plana parametrizada

$$t \mapsto (t^2, t^5), \tag{1.2}$$

tiene como deformación universal la familia

$$t \mapsto (t^2, t^5 + \lambda_1 t^3 + \lambda_2 t). \tag{1.3}$$

Esto se puede calcular sin tener que pensar en ninguna curva espacial de la que ésta sea proyección. De hecho, es un ejercicio ameno dibujar la imagen de la aplicación (1.3) para diferentes valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Después de calcular un rato, uno se da cuenta de que hay un subconjunto unidimensional  $B$  en el espacio de los parámetros, tal que si  $(\lambda_1, \lambda_2) \notin B$ , la aplicación (1.3) es estable, con imagen suave salvo por un número finito ( $\leq 2$ ) de nodos. Si se varía el punto  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , la imagen cambia de forma, pero sin sufrir cambios cualitativos, menos cuando se atraviesa  $B$ .

(iii) Para cada clase  $X$  de vista local en las Figuras 4 y 6, salvo la cuadrise-cante, el mínimo número de parámetros necesarios para tener una deformación universal está dado por la codimensión de  $V_X$ . Damos un bosquejo de explicación de esto más abajo.

Consideremos ahora una vista local que conste de  $r$  ramas, y una perturbación estable de ella que muestre  $n$  nodos.

**Lema 1.1.** (i) Si es conexa, la imagen de la perturbación es homotópicamente equivalente a un ramillete de  $n - r + 1$  círculos. (Un ramillete (“wedge”) es una reunión disjunta salvo por la presencia de un punto común a todas.)

(ii) En este caso el aumento en el rango total de la homología es  $n_{\text{máx}} - r + 1$ .

*Demostración.* Dejo al lector convencerse de que la imagen es homotópicamente

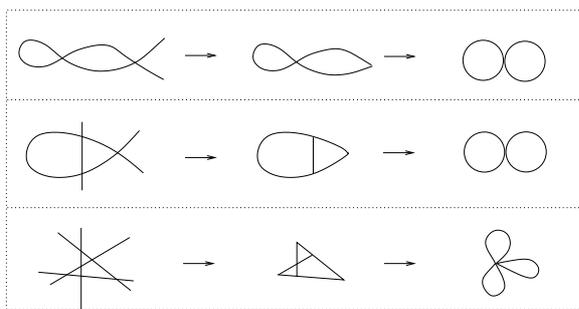


Figura 7: imágenes homotópicamente equivalentes a ramilletes de círculos.

equivalente a un ramillete de círculos; de hecho, todo grafo lo es. La Figura 7 puede ayudar.

Que el número de círculos sea  $n - r + 1$  es fácil de calcular con la ayuda de la característica de Euler,  $\chi$ . Un ramillete de  $\mu$  círculos tiene característica igual a  $\mu\chi(S^1) - (\mu - 1)$ , pues se han perdido  $\mu - 1$  0-símplices al identificar en uno un punto de cada círculo. Como  $\chi(S^1) = 0$ , esto da  $1 - \mu$ . La imagen se obtiene de  $r$  copias del intervalo  $I = [0, 1]$ , identificando  $n$  pares de puntos. Así, su característica de Euler es igual a  $r\chi(I) - n$ , es decir a  $r - n$ . Para que  $r - n = 1 - \mu$ , se debe tener  $\mu = n - r + 1$ .  $\square$

Ahora ¿por qué ha de ser la codimensión del conjunto desde el cual se puede ver una vista local, igual al número de parámetros necesarios para una deformación universal de ella? A continuación damos una respuesta parcial.

Una vez que se está provisto de las definiciones precisas, no es difícil probar que dos deformaciones universales de una misma singularidad, supuesto que tengan el mismo número de parámetros, son isomorfas en un sentido apropiado. Más aún, si una deformación universal utiliza más del número mínimo de parámetros necesarios, entonces algunos le sobrarán. Es decir, después de un cambio de coordenadas en el espacio de parámetros, algunos de los parámetros simplemente no harán nada: el variarlos no contribuye a deformar nada.

Esto es lo que sucede con las deformaciones de las vistas locales que se obtienen al mover el ojo. Si una vista local de tipo  $X$  requiere nada más  $k$  parámetros para una deformación universal ( $k = 0, 1, 2$  ó  $3$ ), entonces  $3 - k$  de las tres dimensiones del espacio sobrarán y hay una subvariedad lisa de dimension  $3 - k$ , tal que al mover el ojo a lo largo de ella, la vista local no cambia. Este espacio es precisamente el conjunto de vistas  $V_X$ . De ahí que *con tal que la deformación lograda al mover el ojo sea universal*, la codimensión de  $V_X$  en el espacio tridimensional es igual al mínimo número de parámetros necesarios para una deformación universal.

Conviene en este momento hacer un pequeño giro en nuestra terminología. De ahora en adelante, para cada clase de vista local  $X$ , llamaremos “codimensión empírica” de  $X$  a la codimensión de  $V_X$  en el espacio tridimensional. Reservaremos el término “codimensión” para el mínimo número de parámetros necesarios para una deformación universal. La igualdad (1.1) se convierte en

$$n_{\text{máx}} - r + 1 = \text{codimensión empírica.} \quad (1.4)$$

Para todas las vistas locales, menos la cuadrisecante, tenemos

$$\text{codimensión empírica} = \text{codimensión.} \quad (1.5)$$

La razón es que para todas ellas, la deformación obtenida moviendo el ojo (la “deformación empírica”) es universal. En el caso de la cuadrisecante, la codimensión empírica no es igual a la codimensión. La deformación empírica no es universal, pues una intersección de cuatro rectas en el plano determina un

invariante lineal continuo, la *razón doble*, (“cross ratio” en inglés), y una deformación universal tendría que variar ésta para explorar todas las posibilidades cercanas. Pero mover el ojo no varía la razón doble.

Queda la pregunta de por qué la deformación empírica es universal, para todas las singularidades de proyección de una curva espacial genérica, menos la cuadrisecante. La prueba usual de este hecho va a través de un teorema de transversalidad análogo al Teorema de Transversalidad de Thom<sup>3</sup>. Explicar eso requeriría un desarrollo técnico fuera del alcance de este artículo. Por eso es mejor quedarnos en un plano no técnico.

A la raíz de todo está la idea de que un objeto genérico no presenta “coincidencias”. Una curva plana trazada al azar tendría nodos, pero no intersecciones triples, y tampoco puntos donde se corte tangencialmente. Una curva trazada al azar en el espacio —la trayectoria de una abeja, por ejemplo— no se cortaría, ni tendría rectas bitangentes. Ahora, de una curva en el espacio obtenemos, por proyección radial desde puntos del espacio, toda una familia tridimensional de proyecciones planas. Ahora, el principio de ausencia de coincidencias opera de manera más sutil. La mayoría de las proyecciones planas son estables, y suaves salvo por la presencia de nodos. Pero desde ciertos puntos la proyección es diferente. El mismo principio de ausencia de coincidencias implica que la manera como cambian las singularidades de proyección, al mover el punto del que se proyecta, tampoco reviste “coincidencias” si el objeto original (la curva espacial) es general. Para cada singularidad de proyección, existe una serie de condiciones geométricas que se pueden expresar en términos de una ausencia de coincidencias, que garantiza que la deformación empírica sea universal. Son de la siguiente índole: que donde se anula la torsión de la curva no se anule su derivada también, que tampoco se anule nunca la curvatura, y que si una recta corta a la curva en tres puntos, entonces los planos osculantes en esos puntos son todos diferentes.

Se puede probar que si se da una lista finita de condiciones de este tipo, entonces (en un sentido que se puede hacer preciso) casi todas las curvas espaciales las satisfacen todas ([16]). De allí que dada una lista finita de clases de equivalencia de singularidades de proyección, entonces para casi todas las curvas espaciales, todas las singularidades en la lista aparecerán universalmente deformadas, si es que aparecen. Con la cuadrisecante, el problema es que, como hemos explicado, no es una sola clase de equivalencia por difeomorfismo. Reúne un número incontable de clases, con diferentes razones dobles. Con una lista finita podemos enumerar algunos, y probar que para casi toda curva espacial no ocurren las de la lista. Pero no podemos excluir todas, por que eso sería imponer un número no numerable de condiciones, y ahora no es cierto que casi todas las curvas las cumplen. Por ejemplo, todo nudo no trivial tiene al menos una recta cuadrisecante ([15], [13]).

---

<sup>3</sup>El Teorema de Transversalidad se puede encontrar en [16] y la prueba de que la deformación empírica es universal, en [14].

Ahora estamos en condiciones de explicar el por qué de la igualdad (1.4). Para un teorema claro, tenemos que irnos a los números complejos.

**Teorema 1.2.** ([14]) *Sea  $\gamma : (\mathbb{C}, t_0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, x_0)$  un germen de curva parametrizada de codimensión finita, y  $U$  una bola aislante para su imagen. Sea  $\gamma_t$  una perturbación estable de  $\gamma$ . Entonces*

- (i)  $\gamma_t(\mathbb{C}) \cap U$  tiene la clase de homotopía de un ramillete de círculos, y
- (ii) el número  $\mu_I$  de estos círculos satisface

$$\mu_I \geq \text{codim}(\gamma),$$

con igualdad sí y sólo si  $\gamma$  es equivalente a un germen casi-homogéneo.

Sobre los complejos, salvo homeomorfismo hay sólo una perturbación estable de cada clase de singularidad: en el mundo complejo, las singularidades de codimensión 1 no dividen el espacio de aplicaciones estables, esencialmente por la misma razón por la que el 0 no divide el plano complejo  $\mathbb{C}$  en dos partes. Así, una perturbación estable se puede deformar en otra, a través de una sucesión que no deja en ningún momento de ser estable. Por ser perturbaciones estables, son equivalentes a sus vecinas. Esta equivalencia se transmite desde el principio hasta el fin de la deformación.

Ahora bien, por un milagro que sólo sucede con las curvas parametrizadas, y no en las singularidades de objetos de mayor dimensión ([10]), para cada singularidad de curva real existe una perturbación real tal que todos los nodos de su complejificación son reales ([1], [7]). Para una tal perturbación (naturalmente, una de las perturbaciones maximales de las que hemos hablado) la inclusión de la parte real en la parte compleja es una equivalencia de homotopía, así que retrata fielmente lo que está sucediendo en el mundo complejo, por lo menos en lo que se refiere a la homología.

Todas las formas normales son casi-homogéneas, así que en cada caso se cumple la igualdad

$$\text{codim} = \mu_I = n_{\text{máx}} - r + 1 \quad (1.6)$$

(la segunda igualdad viene del Lema 1.1). Para todas las clases de vistas locales, menos la cuadrisecante, la codimensión es igual a la codimensión empírica, así que finalmente hemos llegado a la explicación de (1.4).

El Teorema 1.2 es sólo el ejemplo más visualizable de una gama de resultados similares. En cada uno, se relaciona la codimensión de una singularidad con la topología del “objeto estable cercano”.

## 2. Singularidades de hipersuperficies complejas

El caso más clásico fue estudiado por Milnor: si la función analítica  $f : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  tiene un punto crítico aislado en  $x_0$  donde tiene valor  $t_0$ , y  $U$  es una bola aislante, entonces para  $t$  cercano a  $t_0$  y diferente de él,  $f^{-1}(t) \cap U$ , la “fibra de Milnor” de la singularidad, tiene la clase de homotopía de un ramillete de esferas de dimensión  $N - 1$ . El número de ellas es el *número de Milnor* de la

singularidad,  $\mu$ , y

$$\mu = \dim \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, x_0} / (\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_N). \tag{2.1}$$

La prueba de (2.1) utiliza el hecho de que en una perturbación estable de  $f$ , el punto crítico en  $x_0$  se descompone en un cierto número de puntos críticos no degenerados (“de Morse”). Por un fenómeno de “conservación de la multiplicidad” el número de ellos es la dimensión de la derecha. Un cálculo explícito muestra que cada punto crítico no degenerado da lugar a una esfera en el ramillete.

Curiosamente, por razones completamente independientes, el álgebra a la derecha de (2.1) también nos da la codimensión de la singularidad. A grandes rasgos, si

1. entendemos el problema de hallar una deformación universal de una singularidad como el de hallar una sección transversal a la órbita de la forma normal bajo el grupo de cambios de coordenadas, y
2. lo linealizamos,

entonces nos damos cuenta que tenemos que calcular el cociente

$$\frac{\left\{ \frac{d}{dt} f_t |_{t=0} : f_0 = f \right\}}{\left\{ \frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t) |_{t=0} : \varphi_0 = \text{id} \right\}}, \tag{2.2}$$

donde  $\varphi_t$  denota una familia de difeomorfismos.

Como  $df_t/dt|_{t=0}$  puede ser cualquier función  $g$  (basta considerar la deformación  $f_t = f + tg$ ), el numerador es todo el anillo de gérmenes de funciones,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, x_0}$ . Como

$$\frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t) = \sum_j \left( \frac{\partial f}{\partial z_j} \circ \varphi_t \right) \frac{\partial \varphi_{tj}}{\partial t},$$

y  $\varphi_0$  es la identidad,

$$\frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t) |_{t=0} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} \left( \frac{\partial \varphi_{tj}}{\partial t} |_{t=0} \right)$$

y pertenece a  $(\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_N)$ . De hecho, el denominador es todo este ideal. Por lo tanto, el cociente en (2.2) es el mismo que en (2.1). Esta coincidencia está en la raíz de la existencia, descubierto por Kyoji Saito en los años 80, de una estructura de Frobenius sobre el espacio de los parámetros de una deformación universal, que tiene importancia en la Mirror Symmetry (o Simetría de Espejo). El libro de Hertling [8] hace un recuento cuidadoso de esta teoría. Es de esperar que igualdades del tipo (1.6) o la descrita más abajo en el teorema 3.1, puedan también conducir a otras instancias de esta estructura. Indicios de su existencia en estos casos se dan en [4], [5] y [6].

### 3. Otras singularidades

La homología de  $f^{-1}(t) \cap U$  se llama la “homología evanescente” de la singularidad, porque desaparece cuando  $t \rightarrow t_0$ . En diferentes contextos geométricos, la homología evanescente está llevada por diferentes objetos. La hemos visto en la imagen de una perturbación estable de una curva plana parametrizada y en la fibra no-singular de una función analítica. Otro contexto en el que aparece es en el de las singularidades de aplicaciones  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ , con  $n \geq p$ . Aquí, la homología evanescente está llevada por el discriminante (el conjunto de valores críticos).

La codimensión de una singularidad es, de nuevo, el número de parámetros necesarios para tener una deformación universal.

Sean  $n$  y  $p$  enteros positivos con  $n \geq p$ , tales que el par  $(n, p)$  esté entre las “nice dimensions” de J.Mather ([12]); es decir, tal que todo germen de aplicación de codimensión finita entre espacios de estas dimensiones tiene una perturbación estable. De hecho, todas las dimensiones bajas (por ejemplo, todo par  $(n, p)$  con  $p \leq 5$ ) cumplen este requisito.

**Teorema 3.1** ([2]). *Sea  $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  una aplicación de codimensión finita y  $U$  una bola aislante. Sea  $f_t$  una perturbación estable de  $f$  y  $D(f_t)$  su discriminante. Entonces*

(i)  $D(f_t) \cap U$  tiene el tipo de homotopía de un ramillete de esferas de dimensión  $p - 1$ ;

(ii) El número de ellas,  $\mu_\Delta$ , satisface la relación

$$\mu_\Delta \geq \text{codim}(f)$$

con igualdad si  $f$  es equivalente a un germen casi-homogéneo.

Este resultado está estrechamente relacionado con la igualdad (1.1) y su explicación (1.2). El Teorema 1.2 apenas el caso  $n = 1$  de un teorema análogo al 3.1 para gérmenes de aplicaciones de  $\mathbb{C}^n$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , que trata de imágenes en lugar de discriminantes. Ha sido probado por T. de Jong y D. van Straten ([9]) para el caso  $n = 2$ , pero sólo está conjeturado para  $n > 2$ , aunque muchos ejemplos sugieren que es verdad. La dificultad de una prueba para  $n > 2$  parece concentrarse en la platitud del algebra jacobiana relativa a la imagen sobre la base de la deformación, que, de nuevo, se requiere para probar un resultado de conservación de multiplicidad como el que se tiene en el caso estudiado por Milnor y descrito en la Sección 2.

### Bibliografía

- [1] N. A'CAMPO, Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées des courbes planes, *Math. Ann.* **213** (1975) I, 1–32.
- [2] J. N. DAMON & D. MOND,  $\mathcal{A}$ -codimension and the vanishing topology of discriminants, *Invent. Math.* **106** (1991), 217–242.
- [3] J. M. S. DAVID, Projection-generic curves, *J. London Math. Soc.*, **27** (1983) 2, 552–562.

- [4] I. DE GREGORIO, Deformations of functions and F-manifolds, *por aparecer*, Bull. London Math. Soc.
- [5] I. DE GREGORIO, Functions on curve singularities and Frobenius manifolds, *en preparación*.
- [6] I. DE GREGORIO & D. MOND,  $F$ -manifolds from composed maps, São Carlos-sur-Mer, Proceedings of the 8th Workshop on Real and Complex Singularities, Birkhäuser Verlag (*por aparecer*).
- [7] S. M. GUSSEIN-ZADE, Dynkin diagrams for certain singularities of functions of two real variables, *Functional Analysis and Appl.* **8** (1974), 295–300.
- [8] C. HERTLING, *Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics 151, Cambridge University Press, 2002.
- [9] T. DE JONG & D. VAN STRATEN, Disentanglements, *Singularity Theory and Applications, Warwick 1989 Vol. 1*, D. Mond and J. Montaldi eds., Lecture Notes in Math. 1462, Springer Verlag, 1991.
- [10] W. L. MARAR & D. MOND, Map germs with good real perturbations, *Topology* **35** (1996) 1, 157–166.
- [11] J. MARTINET, *Singularities of smooth functions and maps*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 58, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [12] J. MATHER, Stability of  $C^\infty$  mappings VI, The Nice Dimensions, Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium, C. T. Wall (Ed.), Lecture Notes in Math. 1942, Springer-Verlag (1970), 207–253.
- [13] D. MOND & H. MORTON, Closed curves with no quadrisecants, *Topology* **21** (1982) 3, 235–243.
- [14] D. MOND, Looking at bent wires:  $\mathcal{A}_e$  codimension and the vanishing homology of parametrised plane curve singularities, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **117** (1995), 213–222.
- [15] E. PANNWITZ, Eine elementar geometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten, *Math. Ann.* **108** (1933), 629–672.
- [16] C. T. C. WALL, Geometric properties of generic differentiable manifolds, *Geometry and Topology, Proc. III Latin Amer. School of Math., IMPA, Rio de Janeiro, 1976*, Springer Lecture Notes in Math. 597, 704–774.
- [17] C. T. C. WALL, Projection-genericity of space-curves, *por aparecer*, se encuentra en [http://www.liv.ac.uk/~sim\\$ctcw/Other.html](http://www.liv.ac.uk/~sim$ctcw/Other.html).

(Recibido enero de 2006. Aceptado en noviembre de 2006)

MATHEMATICS INSTITUTE  
 UNIVERSITY OF WARWICK  
 COVENTRY CV4 7AL  
 WARWICK, ENGLAND  
*e-mail*: mond@maths.warwick.ac.uk