

Grups i la paradoxa de Banach–Tarski

JOSEP BURILLO

Resum En aquest article exposarem una demostració de la paradoxa de Banach–Tarski per a $\mathbb{R}^3$, així com del fet que la paradoxa no és possible a $\mathbb{R}^2$. Ambdues demostracions tenen un punt crucial on intervenen els grups discrets, especialment al voltant del concepte de promediabilitat¹ (*amenability*). Per tant, es desenvolupa aquest concepte, donant exemples de grups promediabls i d’altres que no i s’exposa la contribució crucial de Følner a la teoria de grups promediabls. Al final de l’article s’explica el rol de la promediabilitat dins la teoria de grups del segle XXI.

Paraules clau: paradoxa de Banach–Tarski, descomposició paradoxal, grup lliure, grup promediabls.

Classificació MSC2000: 43A07, 03E25, 20E05.

1 Introducció

La paradoxa de Banach–Tarski [2], també coneguda com la paradoxa del pèsol i el Sol, és aquella segons la qual es pot subdividir un pèsol en un nombre finit de trossos, la reunió dels quals si es recol·loquen d’una altra manera, la seva reunió és una bola de la mateixa mida que el Sol. Aquesta paradoxa és una conseqüència de l’axioma de l’elecció i, a partir d’aquest, de l’existència de conjunts no mesurables segons la mesura de Lebesgue. L’article [3] de Josep Pla, publicat en aquest mateix *Butlletí* l’any 1983, es concentra en la relació que hi ha entre l’axioma de l’elecció i la paradoxa de Banach–Tarski.

Tanmateix, ja durant la dècada de 1920, Von Neumann es va adonar que la paradoxa era una propietat que més aviat tenia a veure amb el grup d’isometries de l’espai que no pas amb el mateix espai. Això dóna lloc al concepte de grup promediabls, un dels conceptes centrals en aquest àmbit i que també té una

¹ En català, la paraula lògica seria *mitjanable*, però hem preferit *promediabls*, que és un calc lingüístic del castellà derivat de “promedio”, i que al seu torn recorda el popular català “promig” (versió incorrecta de “mitjana”).

certa importància dins la teoria dels grups discrets infinits. Per exemple, en aquest concepte rau el fet que la paradoxa no sigui possible a $\mathbb{R}^2$, és a dir, aquesta subdivisió d'un disc que reorganitzada doni un altre disc de mida diferent no existeix en dimensió 2. Això és perquè el grup d'isometries de $\mathbb{R}^2$ és promediable i el de $\mathbb{R}^3$ no.

Així, doncs, la relació de la paradoxa de Banach-Tarski amb els grups és estreta. L'objectiu del present article és exposar aquesta relació, començant amb una demostració de la paradoxa basada en les propietats algebraiques del grup lliure no abelià i continuant amb la demostració que la paradoxa no és possible a $\mathbb{R}^2$, per a la qual serà central la definició de grup promediable. Finalment, parlarem breument de l'interès del concepte de promediabilitat en la teoria de grups actual, exposant la seva relació amb el concepte de quasiisometria.

Part I. La paradoxa a $\mathbb{R}^3$

El primer objectiu d'aquest article és demostrar la paradoxa en el cas de l'espai tridimensional. Les primeres tres seccions estan dedicades a aquesta demostració.

2 L'enunciat de la paradoxa

El concepte central relacionat amb la paradoxa de Banach-Tarski és el de conjunt paradoxal. Recordem primer que diem que un grup G actua sobre un conjunt X si cada element de G proporciona una bijecció de X i això és un homomorfisme entre G i el grup de bijeccions de X .

Així, un conjunt paradoxal serà un conjunt en el qual actua un grup, i que admet una descomposició com la de la paradoxa.

1 DEFINICIÓ Sigui X un conjunt, i sigui G un grup que actua sobre X . Diem que un subconjunt $E \subset X$ és *G-paradoxal* si existeixen dues famílies de subconjunts de E ,

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \quad B_1, B_2, \dots, B_m,$$

que són tots ells disjunts dos a dos, i elements del grup

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \quad h_1, h_2, \dots, h_m,$$

tals que

$$E = g_1 A_1 \cup g_2 A_2 \cup \dots \cup g_n A_n = h_1 B_1 \cup h_2 B_2 \cup \dots \cup h_m B_m.$$

Els conjunts A_i i B_j formen la *descomposició paradoxal*.

Observeu que la clau de la qüestió és que els conjunts A_i i B_j siguin tots disjunts dos a dos, amb la qual cosa tots ells conviuen dins E i, per tant, ni la família A_i ni la família B_j arriben a cobrir tot E . En canvi, si apliquem certs elements de G sobre aquests conjunts, aleshores cadascuna de les dues famílies

recobreix tot E per si sola. Això sembla fora de tota lògica si l'acció de G preserva la «mida» dels conjunts A_i i B_j , atès que cada família cobreix només com a màxim «la meitat» de E , però quan es transformen per l'acció de G aleshores cadascuna recobreix E sencer. Aquí és on rau la paradoxa.

Per als propòsits d'aquest article, anomenarem B^n la bola unitat de $\mathbb{R}^n$, i G_n el grup d'isometries de $\mathbb{R}^n$. Les isometries, també anomenades *desplaçaments*, són aquelles aplicacions afins de $\mathbb{R}^n$ en si mateix que preserven la distància. Tothom les coneix d'haver-les estudiat a la carrera: són les conegudes rotacions, simetries, translacions, etc.

Clarament, G_n actua sobre $\mathbb{R}^n$. Quan es defineix la mesura de Lebesgue, se li exigeix que sigui invariant respecte a l'acció de G_n sobre la σ -àlgebra de conjunts mesurables (aquella *tribu de borelians* que tanta gràcia fa el primer cop que ho sents). Si mai us heu preguntat per què la mesura de Lebesgue no està definida sobre tots els subconjunts de $\mathbb{R}^n$, la resposta és precisament la paradoxa de Banach-Tarski. Això tindrà importància més endavant.

D'aquesta manera, un cop tenim el concepte de conjunt paradoxal, l'enunciat de la paradoxa de Banach-Tarski és ben senzill.

2 TEOREMA (PARADOXA DE BANACH-TARSKI) *La bola unitat B^3 de $\mathbb{R}^3$ és G_3 -paradoxal.*

Per tant, dins de la bola unitat existeixen subconjunts A_i i B_j , tots ells disjunts dos a dos, que satisfan les condicions paradoxals. Observeu també que aquests conjunts no poden ser, per força, mesurables Lebesgue, perquè, si ho fossin, el fet que són disjunts (i l'additivitat de la mesura) faria que la suma de totes les mesures dels conjunts fos menor que el volum de la bola, mentre que, després d'aplicar l'acció de G_3 , cada família per separat n'ha de sumar una mesura més gran que el volum de la bola. Certament, si anomenem V el volum de la bola unitat, i μ la mesura de Lebesgue, tenim:

$$V \leq \sum_{i=1}^n \mu(g_i A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad V \leq \sum_{j=1}^m \mu(h_j B_j) = \sum_{j=1}^m \mu(B_j),$$

però aleshores

$$2V \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(B_j) \leq \mu(B^3) = V$$

i això és impossible perquè V no és zero.

Aquesta és la paradoxa i d'aquí el que és més sorprenent d'aquest resultat.

En aquest enunciat, s'estableix que podem descompondre la bola unitat en un nombre finit de peces que, arranjades de manera adient, ens donen dues boles unitat. És una petita variació de la paradoxa (que no farem aquí) que, en lloc de dues boles unitat, l'arranjament de les peces ens doni una bola de radi 2 en comptes de radi 1 i, per tant, de qualsevol radi imaginable. Aquesta és la «paradoxa del pèsol i el Sol» mencionada a la introducció: podem

descompondre un pèsol en un nombre finit de peces que es poden recombinar per a formar una bola tan gran com el Sol.

La demostració de la paradoxa no és extremament complicada. Però el més curiós de tot és que tothom, quan li anomenen la paradoxa de Banach-Tarski, de seguida pensa en conjunts no mesurables i en l'axioma de l'elecció. En canvi, la clau de la demostració és el fet que el grup no abelià lliure és paradoxal. Un cop vist això, la resta és tècnica per transferir la descomposició paradoxal del grup lliure a la bola. Detallarem aquesta demostració en les seccions següents.

3 El grup lliure de dos generadors

El grup lliure no abelià de dos generadors, anomenat F_2 , és aquell que, generat per dues lletres a, b , no té relacions, sinó que totes les paraules reduïdes (és a dir, que no contenen parells aa^{-1} , $a^{-1}a$, bb^{-1} ni $b^{-1}b$) representen elements diferents del grup lliure. Qualsevol grup que es pugui generar amb dos elements és quocient de F_2 . Recordem que el grup lliure no abelià de dos generadors és numerable, atès que és una reunió numerable de conjunts finits (les paraules d'una longitud donada són una quantitat finita).

Tot grup actua sobre si mateix per multiplicació a l'esquerra. Per tant, el grup lliure fa tant de grup actuator com de conjunt actuat, i se li poden aplicar els conceptes de la secció anterior. Aleshores, tenim el resultat següent:

3 TEOREMA *El grup lliure F_2 és F_2 -paradoxal.*

PROVA Com dèiem, els elements de F_2 són paraules reduïdes amb les lletres a, b i llurs inversos, juntament amb la paraula buida, anomenada 1, que fa d'identitat. Considerem, doncs, les paraules no buides, i anomenem $[x]$ el subconjunt de paraules que comencen per x , on x pot ser cadascuna de les quatre lletres a, b, a^{-1}, b^{-1} . Això ens dóna quatre subconjunts de F_2 , disjunts dos a dos, i que donaran la descomposició paradoxal. Observem que els quatre conjunts satisfan:

$$F_2 = [a] \cup a[a^{-1}] = [b] \cup b[b^{-1}].$$

Per entendre aquesta descomposició només hem de pensar que, a les paraules que comencen per a^{-1} , la segona lletra no pot ser a , però pot ser qualsevol de les altres tres. Per això tenim

$$a[a^{-1}] = \{1\} \cup [a^{-1}] \cup [b] \cup [b^{-1}],$$

i, doncs, la reunió del conjunt $[a]$ amb el traslladat de $[a^{-1}]$ és tot el grup lliure. $\square$

Així, doncs, el grup lliure presenta un comportament paradoxal respecte a la seva pròpia acció. A partir d'ara, l'objectiu és transferir aquesta descomposició a objectes geomètrics, a partir d'accions de grups geomètrics que continguin el grup lliure. Per tant, el primer que farem és construir un subgrup d'un grup geomètric, que sigui isomorf al grup lliure.

4 PROPOSICIÓ *El grup $SO(3)$ de rotacions a $\mathbb{R}^3$ conté un subgrup isomorf al grup lliure F_2 .*

PROVA Considerem dues rotacions amb angle φ , on $\cos \varphi = 1/3$ i els eixos de les quals estiguin en angle recte. Per exemple, les dues rotacions donades per les matrius:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

El subgrup generat per aquestes dues matrius és lliure. Anomenem-lo L . La demostració d'aquest fet és la següent: considereu qualsevol paraula w en les matrius α i β . Si la paraula comença per β , per exemple

$$w = \beta^3 \alpha^{-3} \beta^4 \alpha \beta,$$

conjuguem-la per la potència adequada de β per tal que comenci per α , en aquest cas

$$\beta^{-3} w \beta^3 = \alpha^{-3} \beta^4 \alpha \beta^4,$$

i observem que la paraula w és la identitat si i només si $\beta^{-3} w \beta^3$ ho és. Per tant, podem suposar que la paraula comença per α . Aquesta paraula correspon a un producte de matrius, començant per la matriu α . Apliqueu aquest producte de matrius al vector $(1, 0, 0)$. És una inducció elemental demostrar que la imatge d'aquest vector és sempre del tipus

$$(a, b\sqrt{2}, c)/3^k,$$

on a , b i c són enters, i b no és múltiple de 3. Per tant, aquesta imatge no és mai igual a $(1, 0, 0)$ i, per tant, cap paraula en les matrius α i β , començant per α , pot ser igual a la identitat. $\square$

Ja tenim un grup geomètric isomorf al grup lliure i, per tant, aquest subgrup de $SO(3)$ també és paradoxal. Aprofitant l'acció de $SO(3)$ en l'esfera anem a transferir la descomposició paradoxal a S^2 .

4 Descomposicions paradoxals d'objectes geomètrics

El subgrup L és lliure no abelià, està format per rotacions, i tots els eixos passen per l'origen de $\mathbb{R}^3$. Cada eix de rotació talla l'esfera S^2 en dos punts. Sigui D el conjunt de punts de S^2 que són intersecció d'eixos d'elements de L amb S^2 . Com que L és numerable, el conjunt D és un subconjunt numerable de S^2 i tots els seus punts són fixos per a alguna rotació a L .

Considerem el conjunt $S^2 \setminus D$. El grup L actua sense punts fixos sobre $S^2 \setminus D$. Per tant, es pot transferir la descomposició paradoxal de L a $S^2 \setminus D$. Observem que $S^2 \setminus D$ queda subdividit en òrbites de l'acció de L , un conjunt no numerable

d'òrbites, atès que cada òrbita és numerable, com ho és L . Triem un punt a cada òrbita i considerem el conjunt M format per aquests punts. Clarament, tots els traslladats de M per L recobreixen tot $S^2 \setminus D$. Però aleshores la descomposició paradoxal de L es transporta naturalment a $S^2 \setminus D$. Si A_1, A_2, B_1 i B_2 formen la descomposició paradoxal de L , aleshores els conjunts A_1M, A_2M, B_1M i B_2M formen la descomposició paradoxal de $S^2 \setminus D$.

Per tant, hem demostrat el resultat següent:

5 PROPOSICIÓ *Existeix un subconjunt numerable D dins S^2 tal que $S^2 \setminus D$ és $SO(3)$ -paradoxal.*

Observem també el paper crucial que l'axioma de l'elecció té en aquesta demostració: l'elecció d'un punt a cada òrbita només és possible apel·lant a aquest axioma. La paradoxa de Banach-Tarski depèn críticament de l'axioma de l'elecció; de fet el teorema no és demostrable en el sistema d'axiomes Zermelo-Fraenkel (sense l'axioma de l'elecció): vegeu [3]. Per tant, l'axioma ha d'aparèixer, d'una manera o d'una altra, en qualsevol demostració de la paradoxa, i és en aquest punt on apareix en la demostració que estem desenvolupant.

L'objectiu següent és eliminar el subconjunt D i demostrar que, de fet, és tota l'esfera S^2 la que és paradoxal. Per això es fa servir un mètode estàndard anomenat *absorció* de conjunts petits. Necessitem una definició.

6 DEFINICIÓ Sigui X un conjunt on actua un grup G , i siguin E_1 i E_2 dos subconjunts de X . Diem que E_1 i E_2 són *G -equidescomponibles* si existeixen $A_1, A_2, \dots, A_n$, subconjunts de X i elements $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$, tals que:

- Els elements de les dues famílies $\{A_i\}$ i $\{g_i A_i\}$ són disjunts dos a dos, és a dir,

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad g_i A_i \cap g_j A_j = \emptyset.$$

- Cada família recobreix un dels subconjunts, és a dir,

$$E_1 = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad E_2 = g_1 A_1 \cup g_2 A_2 \cup \dots \cup g_n A_n.$$

Dos conjunts són equidescomponibles si admeten descomposicions que siguin equivalents mitjançant l'acció de G , és a dir, que els trossos de la descomposició d'un siguin els de la descomposició de l'altre, traslladats per elements de G .

L'interès d'aquesta definició rau en el fet que, si dos conjunts són equidescomponibles, les descomposicions paradoxals es poden traslladar de l'un a l'altre.

7 PROPOSICIÓ *Si dos conjunts E_1 i E_2 són G -equidescomponibles, i E_1 és G -paradoxal, aleshores E_2 també ho és.*

La demostració és elemental i es deixa com a exercici per al lector. Simplement cal traslladar la descomposició paradoxal de E_1 a E_2 mitjançant els elements del grup i els subconjunts de l'equidescomposició.

Així, el resultat següent ens dóna la descomposició $SO(3)$ -paradoxal de S^2 . Aquest resultat és un exemple del mètode d'absorció, segons el qual un conjunt petit pot ser engolit dins el conjunt paradoxal més gran.

8 PROPOSICIÓ *Sigui D el subconjunt de S^2 de la proposició 5. Aleshores S^2 i $S^2 \setminus D$ són $SO(3)$ -equidescomponibles.*

PROVA Necessitem un element $\rho \in SO(3)$ tal que tots els conjunts D , $\rho(D)$, $\rho^2(D)$, i tots els $\rho^n(D)$ siguin disjunts dos a dos. Això es pot fer perquè D és numerable. Triem una recta ℓ per l'origen de manera que els seus dos punts d'intersecció amb S^2 no siguin a D . I ara considerem el conjunt d'angles A següent: els elements de A són tots aquells angles θ tals que la rotació d'angle $n\theta$ i eix ℓ , per a algun n , envia un punt de D a un altre punt de D .

Fixem-nos que, si un angle θ pertany a A , vol dir que, per a alguna rotació sobre la recta ℓ amb angle θ , una potència seva envia un punt de D a un altre punt de D . Però el conjunt A és per força numerable i, per tant, hi ha molts angles dins S^1 que no hi són. Sigui η un angle que no sigui a A . Aleshores agafem ρ com la rotació d'angle η amb eix a ℓ . Per construcció, aquest ρ satisfà la condició desitjada, perquè cap potència seva pot enviar un punt de D a un altre.

Un cop tenim ρ , definim

$$\overline{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D).$$

I finalment, l'equidescomposició és

$$S^2 = (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \overline{D} \quad S^2 \setminus D = (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \rho(\overline{D}).$$

Amb aquests dos últims resultats, doncs, podem concloure que S^2 és $SO(3)$ -paradoxal.

Per estendre la paradoxa a la bola B^3 només cal fer-ho radialment des de l'origen, és a dir, que si uns certs conjunts formen la descomposició paradoxal de S^2 , aleshores $B^3 \setminus 0$ admet una descomposició similar, estenent els conjunts radialment a tota la bola excepte l'origen. Observeu que les esferes centrades a l'origen són invariants per l'acció de $SO(3)$ i, per tant, es conclou naturalment que $B^3 \setminus 0$ és $SO(3)$ -paradoxal.

Per acabar la demostració, només haurem d'emprar un altre cop el mètode d'absorció per incloure l'origen i estendre la paradoxa a la bola sencera. Per a això ja no és suficient l'acció del grup $SO(3)$, perquè tots els elements de $SO(3)$ fixen l'origen, i ara ja s'ha d'ampliar el grup a tot G_3 . El resultat últim que finalitza la demostració de la paradoxa de Banach-Tarski és el següent.

9 PROPOSICIÓ *La bola B^3 i la bola sense l'origen $B^3 \setminus 0$ són G_3 -equidescomponibles.*

PROVA La demostració és molt semblant a l'absorció de D dins S^2 . Només cal trobar un element $\sigma \in G_3$ tal que 0 i totes les seves imatges per les potències de σ siguin diferents. Això es pot assolir, per exemple, agafant una rotació amb un eix molt proper a 0, sense passar-hi, i amb angle de rotació un múltiple irracional de π . Fent el mateix procediment que en la proposició 8, s'obté el resultat desitjat. $\square$

Observem que aquesta última part de la demostració, en què la descomposició paradoxal de S^2 s'estén radialment a B^3 (i després l'absorció de l'origen), es pot desenvolupar igualment amb tot $\mathbb{R}^3$ en compte de fer-ho a la bola. La descomposició de S^2 s'estén radialment a tot $\mathbb{R}^3$ menys l'origen, que després s'absorbeix. Aquí veiem que la demostració que acabem de fer per a B^3 serveix igualment per al resultat següent:

10 TEOREMA (PARADOXA DE BANACH-TARSKI PER A $\mathbb{R}^3$) *L'espai $\mathbb{R}^3$ és G_3 -paradoxal.*

Així finalitza la demostració de la paradoxa. Creiem que és remarcable el fet que les descomposicions paradoxals de tots els objectes geomètrics emanen de la descomposició del grup lliure de dos generadors, i veureu una mica més endavant com aquest grup forma part d'una manera crucial de la teoria dels grups promediabls. Però la demostració es basa completament en el grup lliure, que és el conjunt paradoxal primordial, i la resta és una cadena d'arguments de caire tècnic per estendre la paradoxa a altres grups i conjunts geomètrics.

Aquesta paradoxa té un enunciat sorprenent, però només perquè estem acostumats a relacionar subconjunts de $\mathbb{R}^n$ amb objectes de la vida diària. La paradoxa no és possible amb objectes tangibles, atès que tots ells estan formats per àtoms indivisibles. En canvi, teòricament, els conjunts que apareixen en la paradoxa no són mesurables i, per tant, presenten una complicació infinita en detalls arbitràriament petits, i no es corresponen amb objectes reals. Però ben mirat, realment, aquesta paradoxa no és més sorprenent que la descomposició dels nombres enters en parells i senars, en què cada un dels dos conjunts de la descomposició és bijectiu amb el total. La paradoxa de Banach-Tarski s'ha d'interpretar dins d'aquest mateix punt de vista, una propietat dels conjunts infinits que sembla paradoxal però que realment no ho és.

Com a curiositat, observem també (de manera humorística) que la paradoxa de Banach-Tarski es remunta a més de dos mil anys enrere, atès que ja apareix a la Bíblia. La paràbola de la multiplicació dels pans i els peixos és explicable segons la paradoxa de Banach-Tarski. Per multiplicar un pa només cal partir-lo en trossos no mesurables adequats, i la seva reorganització produirà dos pans! És clar que, per als simples humans, només ens està permès deduir indirectament l'existència de conjunts no mesurables, mentre que la divinitat pot fer efectiva aquesta existència amb objectes materials. Però certament

l'autèntic miracle no és multiplicar pans i peixos, sinó partir-los en trossos no mesurables. Fet això, multiplicar-los no costa gaire, segons van descobrir Banach i Tarski l'any 1924.

Part II. La paradoxa no és possible a $\mathbb{R}^2$

Aquesta segona part està dedicada a la demostració del fet que la paradoxa no és possible a $\mathbb{R}^2$. Això comporta necessàriament una excursió cap al concepte de grup promediable. Aquest concepte té una certa dificultat i és complex d'entendre (vegeu més avall la demostració relativa a $\mathbb{Z}$), i és desitjable donar-ne diverses caracteritzacions. Parlarem aquí, doncs, de la seva definició mitjançant mesures i de la caracterització de Følner.

5 Mesures en grups, grups promediabls

La paradoxa de Banach-Tarski, com ja hem mencionat abans, obliga que la mesura de Lebesgue no pugui estar definida sobre tot el conjunt $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$, fins i tot si rebaixem les condicions de la mesura i li demanem només que sigui finitament additiva. El resultat és el següent:

11 PROPOSICIÓ *No existeix una mesura μ definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ que sigui finitament additiva, que sigui invariant per l'acció de G_3 i que satisfaci $\mu(B^3) = 1$. Igualment, tampoc no existeix aquesta mesura amb les mateixes propietats i $\mu(\mathbb{R}^3) = 1$.*

La demostració és elemental, essent la mesura definida en tots els subconjunts; en particular, sobre els subconjunts de la descomposició paradoxal, s'arriba ràpidament a una contradicció.

Aquest resultat és un cas particular del teorema de Tarski, que demostra que aquesta condició és una caracterització general dels conjunts paradoxals. La direcció difícil d'aquesta demostració allargaria molt aquest article, i pot ser consultada a [11].

12 TEOREMA (TARSKI) *Si un grup G actua sobre un conjunt X , i $E \subset X$ és un subconjunt, aleshores les dues condicions següents són equivalents:*

- (1) *E és G -paradoxal.*
- (2) *X no admet una mesura μ , definida sobre tot $\mathcal{P}(X)$, finitament additiva, G -invariant, i tal que $\mu(E) = 1$.*

La part difícil de la demostració, que és (2) $\Rightarrow$ (1), consisteix en demostrar que si E no és paradoxal aleshores es pot construir aquesta mesura. Consulteu [11] per als detalls.

De la mateixa manera que la descomposició paradoxal sobre els conjunts geomètrics es pot construir a partir de la descomposició paradoxal sobre un grup que hi actua, la construcció de les mesures també pot ser transferida del grup a l'espai.

Aquesta transferència dóna lloc a la definició del concepte central d'aquest article, el concepte de grup promediable.

13 DEFINICIÓ Un grup G s'anomena *promediable* si admet una mesura μ definida sobre $\mathcal{P}(G)$, finitament additiva, invariant per multiplicació a l'esquerra, i tal que $\mu(G) = 1$.

Aquesta definició és de Von Neumann [10], que va ser qui es va adonar de la possibilitat de la transferència de les mesures dels grups als espais, i de la relació dels grups promediabls amb la paradoxa de Banach-Tarski.

La transferència de la mesura és deguda al resultat següent:

14 PROPOSICIÓ Si G és promediable i actua sobre un espai X , aleshores X admet una mesura ν definida a $\mathcal{P}(X)$, finitament additiva, G -invariant, i amb $\nu(X) = 1$.

PROVA Triem un punt $x \in X$. Definim simplement

$$\nu(A) = \mu\{g \in G \mid gx \in A\},$$

en què μ és la mesura de G . És gairebé trivial comprovar les propietats de ν , que dóna una mesura total 1 a l'òrbita de x . $\square$

Lògicament, a partir d'aquest teorema deduïm que el grup G_3 no és promediable, atès que $\mathbb{R}^3$ és paradoxal. Tampoc ho és F_2 , atès que és paradoxal amb la seva pròpia acció.

La construcció estàndard d'una integral respecte d'una mesura es pot aplicar a un grup promediable. Donat un grup G , sigui $B(G)$ l'espai de funcions reals afinitades definides en G . Això permet definir la integral $\int_G f d\mu$, primer per a funcions esglaonades simples i després estenent per pas al límit a totes les funcions mesurables. En aquest cas, com que la mesura està definida a tot $\mathcal{P}(G)$, totes les funcions són mesurables. Aquesta integral és invariant per l'acció de G , és a dir, satisfà, per a cada $g \in G$ fixat:

$$\int_G f(gx) d\mu = \int_G f(x) d\mu.$$

Aquesta integral s'anomena tradicionalment una *mitjana invariant*, i la nomenclatura reflecteix aquest terme: en francès els grups promediabls s'anomenen *moyennables*, i en anglès *amenable*. Aquest nom és un joc de paraules, atès que l'existència d'una mitjana *mean* donaria lloc a la paraula *meanable*, que sona molt proper a *amenable*, amb l'afegit que *amenable* en anglès vol dir «accessible, que presenta bona disposició» i que s'aplica normalment a persones.

6 Exemples

Ja coneixem grups no promediabls, F_2 i G_3 . Anem a veure com trobar grups promediabls.

Una família de grups que són sempre promediables són els grups finits, lògicament. La mesura es defineix en un subconjunt de manera natural: com el seu cardinal dividit pel nombre d'elements del grup, és a dir, si $\#A$ representa el cardinal del conjunt A , aleshores

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#G}$$

i observem que la mesura és invariant perquè gA té el mateix nombre d'elements que A .

La part més interessant arriba quan considerem grups infinits. Quin és el grup infinit més senzill? El grup cíclic $\mathbb{Z}$ dels nombres enters. És $\mathbb{Z}$ promediable? La resposta a aquesta pregunta és afirmativa, però la demostració no és senzilla. Intentem demostrar que $\mathbb{Z}$ és promediable. La construcció que acabem de fer per a grups finits no serveix, lògicament, però intentarem aproximar-la. Considerem, dins $\mathbb{Z}$, el subconjunt dels enters que van des de $-n$ fins a n , el qual té $2n + 1$ elements, i anomenem-lo C_n . Intentem aproximar una mesura a $\mathbb{Z}$ definint una mesura μ_n que tingui suport a C_n , que, com que és finit, ho podem fer perfectament igual que abans. Donat un subconjunt A de $\mathbb{Z}$, definim

$$\mu_n(A) = \frac{\#(A \cap C_n)}{\#C_n}.$$

Aquesta mesura està ben definida sobre tots els subconjunts de $\mathbb{Z}$ i és additiva, però, és invariant? Considerem el conjunt que correspondria a gA dins $\mathbb{Z}$, que seria el conjunt $A + 1$, format pels elements $a + 1$ per als $a \in A$. Com que el generador de $\mathbb{Z}$ és 1, el conjunt $A + 1$ és el traslladat de A . Aquest conjunt, lògicament, pot ser diferent de A , però no massa, i aquí hi ha la clau. Observeu, si $A \cap C_n$ té k elements, aleshores el nombre d'elements de $(A + 1) \cap C_n$ pot variar com a màxim en 1 amunt o avall, segons si els nombres n i $-n - 1$ pertanyen a A . És clar: si n pertany a A , quan faig $A + 1$ em surt fora de C_n , i el cardinal de la intersecció pot baixar en 1. Pot augmentar en 1 també si $-n - 1 \in A$, perquè, quan trasllem, aquest entra dins C_n .

Però aquesta és tota la variació possible. Per tant, hem demostrat que

$$|\mu_n(A + 1) - \mu_n(A)| = \left| \frac{\#((A + 1) \cap C_n)}{\#C_n} - \frac{\#(A \cap C_n)}{\#C_n} \right| \leq \frac{1}{2n + 1},$$

i la diferència es fa petita i, per tant, desapareix en el límit. Sembla lògic, doncs, definir una mesura a $\mathbb{Z}$ agafant el «límit» de les mesures μ_n , és a dir, si $A \subset \mathbb{Z}$, definir

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A),$$

i això seria correcte si no fos perquè aquest límit, en general, no existeix. És un exercici senzill per al lector trobar un subconjunt de $\mathbb{Z}$ per al qual aquest límit no existeixi, fent que la successió $\{\mu_n(A)\}$ oscil·li arbitràriament.

Així, què podem fer? Doncs, encara que aquest límit no existeixi, la mesura es pot definir dins l'espai de mesures. Considerem l'espai $[0, 1]^{P(\mathbb{Z})}$, els elements

del qual són les aplicacions de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en $[0, 1]$. Aquest espai és compacte pel teorema de Tychonoff, perquè és un producte cartesià, indexat per $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, de còpies de $[0, 1]$, que és compacte. Dins d'aquest espai, el subconjunt de les mesures (que satisfan les propietats d'additivitat, etc.) és un tancat i, dins aquest, l'espai $\mathcal{M}_n$ de les mesures ν que satisfan

$$|\nu(A+1) - \nu(A)| \leq \frac{1}{n}$$

és també tancat. A més, la família és descendent per raons òbvies, és a dir, si $n < m$, tenim que $\mathcal{M}_n \supset \mathcal{M}_m$. I a més, $\mathcal{M}_n$ no és buit, perquè la mesura μ_n construïda anteriorment hi pertany.

D'això es conclou que l'espai de mesures

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n>0} \mathcal{M}_n$$

no és buit. I per força, per a una mesura de $\mathcal{M}$, si pertany a tots els $\mathcal{M}_n$, la diferència entre $\mu(A+1)$ i $\mu(A)$ ha de ser zero i, per tant, la mesura és invariant.

Així es demostra que l'espai de mesures invariants sobre $\mathbb{Z}$ no és buit i, doncs, hem demostrat el resultat següent:

15 PROPOSICIÓ *El grup $\mathbb{Z}$ dels nombres enters és promediable.*

Sembla una mica exagerat que per demostrar que un grup tan senzill com $\mathbb{Z}$ és promediable s'hagi de fer servir el teorema de Tychonoff aplicat a l'espai de mesures, però no hi ha altra manera de fer-ho. Aquesta mena de resultats és habitual en aquesta teoria, i la gent que treballa en anàlisi funcional, per exemple, hi està habituada. Així i tot, sí que és una mica frustrant no poder escriure explícitament la mesura per a grups tan senzills.

Ja tenim, doncs, un grup promediable infinit. Com hem remarcat abans, la clau d'aquesta demostració és que hi ha una família de conjunts, els C_n , tals que, si els traslladem pel generador (és a dir, si sumem 1 a tots els elements), els conjunts no canvien gaire. Durant la dècada de 1950, el matemàtic noruec E. Følner va tenir la intuïció que aquesta propietat podia caracteritzar els grups promediables. A la propera secció descriurem el treball de Følner, que és clau per entendre la promediabilitat des del punt de vista algebraic.

7 La caracterització de Følner

Així, la idea de Følner va ser intentar trobar conjunts finits dins el grup de manera que la mesura es pogués aproximar per mesures sobre aquests conjunts. La invariància de la mesura quedarà assegurada si, com passa a $\mathbb{Z}$, els conjunts finits canvien poc quan són traslladats pels elements de G . Això serà cert quan els conjunts C_n tinguin la frontera petita.

Per poder detallar aquests conceptes necessitem l'estructura general del graf de Cayley d'un grup finitament generat. Aquest graf proporciona una de

les eines més interessants per estudiar el grup, sobretot perquè li dóna una flaire geomètrica que és molt visual i atractiva, a més d'útil. Els grafs de Cayley de grups finits són interessants en teoria de grafs i combinatòria, però aquí ens concentrarem en els grafs de Cayley de grups infinits, per als quals les propietats geomètriques són més interessants i tenen relació amb la geometria tradicional.

Sigui G un grup i X un conjunt finit de generadors de G . El graf de Cayley $\Gamma(G, X)$ de G respecte de X és un graf que té per vèrtexs els elements de G , i per arestes els triples (g, x, g') , $g, g' \in G$, $x \in X$, tals que $g' = gx$. Així, de cada g del grup, en surt una aresta, que considerarem etiquetada per $x \in X$, fins a l'element gx . Per exemple, el graf de Cayley de $\mathbb{Z}$, amb el sistema de generadors $X = \{1\}$, és una línia recta: els punts enters són els vèrtexs del graf, i una aresta va des de n fins a $n + 1$.

Per a $\mathbb{Z}^2$, per exemple, generat per dos elements $x = (1, 0)$ i $y = (0, 1)$ tals que $x + y = y + x$, és la xarxa de punts enters dins $\mathbb{R}^2$, i les arestes són segments de longitud 1, els horitzontals etiquetats per x , i els verticals per y . Observem que un quadrat del graf reflecteix exactament el fet que $x + y = y + x$, i és cert en general que un camí tancat dins el graf correspon a una relació del grup, és a dir, a una paraula que és igual a la identitat.

Així, doncs, el graf de Cayley del grup lliure (no abelià) és un arbre, perquè en el grup lliure no hi ha relacions. Si a i b són els generadors, de cada vèrtex w del grup lliure en surten dues arestes, una cap a wa i una altra cap a wb i, de fet, cap a w n'arriben dues que provenen dels elements wa^{-1} i wb^{-1} . I dues paraules reduïdes en a i b mai no són el mateix element del grup, ja que no hi ha camins tancats. El graf de Cayley del grup lliure és un arbre regular, tots els vèrtexs tenen grau 4.

Un cop tenim el graf de Cayley del grup G respecte a X , podem definir el concepte de frontera d'un subconjunt finit. Sigui C un subconjunt finit del grup G . La frontera de G , escrita lògicament ∂C , està formada per aquells elements de C que són veïns del complement de C . És a dir:

$$\partial C = \{g \in C \mid \text{existeix } x \in X \text{ tal que } gx \notin C\}.$$

Observem que dins el graf de Cayley de $\mathbb{Z}$, la frontera dels conjunts C_n de $\mathbb{Z}$ és $\{-n, n\}$. Dins $\mathbb{Z}^2$, si agafem per exemple un quadrat amb vèrtexs $(\pm n, \pm n)$, la frontera està formada pels elements de $\mathbb{R}^2$ que tenen almenys una de les dues coordenades amb valor absolut igual a n .

La frontera d'un conjunt és important perquè és una mesura de com canvia el conjunt quan el traslладem per un generador. Per a un subconjunt C del grup G , considerem xC , on x és un generador, i observem en què són diferents C i xC . Els elements de xC que no són a C són a la frontera, ja que en multiplicar-los per x surten de C . I igualment, els elements de C que no són a xC són també a la frontera, perquè si els multipliquem per x^{-1} surten de C . La conclusió és que si considerem els elements en què difereixen C i xC , és a dir, la diferència simètrica de C i xC , aquesta té menys elements que ∂C .

Si tenim doncs, com a $\mathbb{Z}$, una successió de conjunts C_n , podem definir una mesura μ_n de la mateixa manera que allà. Si A és un subconjunt arbitrari de G , fem

$$\mu_n(A) = \frac{\#(A \cap C_n)}{\#C_n},$$

i tindrem

$$|\mu_n(xA) - \mu_n(A)| \leq \frac{|\#(xA \cap C_n) - \#(A \cap C_n)|}{\#C_n} \leq \frac{\#(C_n \triangle xC_n)}{\#C_n} \leq \frac{\#\partial C_n}{\#C_n}.$$

Això es pot fer per a qualsevol família de subconjunts finits C_n dins el grup, però, és clar, això només té gràcia si la mesura resultant (després d'aplicar el teorema de Tychonoff, etc.) és invariant. I per a això és necessari que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial C_n}{\#C_n} = 0.$$

La gran contribució de Følner és donar la importància que té a aquesta propietat, que ha estat immortalitzada amb el seu nom.

16 DEFINICIÓ Donat un grup finitament generat G , una *família de conjunts de Følner* és una família de subconjunts finits C_n de G tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial C_n}{\#C_n} = 0.$$

El teorema fonamental de la teoria de la promediabilitat és el següent.

17 TEOREMA (FØLNER [6]) *Un grup finitament generat és promediable si i només si admet una família de conjunts de Følner.*

L'argument que hem donat anteriorment només demostra una implicació. L'altra és força més complicada, i podeu consultar-la a [7] o bé a l'article original de Følner. Però la implicació que ens interessa és la que hem desenvolupat. Amb aquesta podem demostrar, per exemple, que $\mathbb{Z}^k$ és promediable, simplement agafant com a conjunt de Følner C_n un cub de costat el segment de longitud $2n$ que va de $-n$ a n en cada coordenada. El seu cardinal és de l'ordre de n^k i la frontera té aproximadament (un múltiple de) n^{k-1} elements. I així, combinant de manera natural aquests conjunts amb els grups finits, tenim el resultat següent.

18 PROPOSICIÓ *Els grups abelians finitament generats són promediabils.*

Per finalitzar aquesta secció, observem que, com que ja sabem que F_2 no és promediable, no pot admetre una família de conjunts de Følner. Considerant l'arbre regular infinit de grau 4, i fixant un punt base, la bola de radi n (elements a distància com a màxim n del punt base) té cardinal de l'ordre 3^n . Per tant, la frontera té $3^n - 3^{n-1}$ elements i, consegüentment, el quocient entre la frontera i el conjunt té límit $2/3$ i no serveix com a família de conjunts de Følner, com ja sabíem que passaria. De fet, això és general, donat pel resultat següent:

19 PROPOSICIÓ ([1]) *Per a qualsevol subconjunt finit A del grup lliure F_2 , es té*

$$\frac{\#\partial A}{\#A} \geq \frac{2}{3}.$$

Clarament, dins el grup lliure no hi pot haver conjunts de Følner.

8 El grup d'isometries de $\mathbb{R}^2$

Per a acabar el nostre viatge pels grups promediabls demostrarem que el grup G_2 d'isometries de $\mathbb{R}^2$ és promediable, i això ens portarà al nostre objectiu final, la demostració de la impossibilitat de la paradoxa de Banach-Tarski a $\mathbb{R}^2$. Per fer això necessitarem dos resultats, que fan referència a la preservació de la promediabilitat amb les operacions conjuntístiques i algebraiques.

20 PROPOSICIÓ *Si un grup és promediable, també ho són els seus subgrups i els seus quocients. Si tenim una successió exacta curta*

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1,$$

aleshores G és promediable si i només si ho són G' i G'' .

No donarem la demostració d'aquest resultat, que és rutinària i allargaria massa aquest article. La podeu consultar a [13]. Aquest resultat multiplica el nombre de grups promediabls. Per exemple, ara els grups nilpotents i els grups resolubles són promediabls.

També com a corollari d'aquest resultat, però ara en la seva vessant negativa, qualsevol grup que contingui un subgrup lliure no pot ser promediable. Això ens dona una quantitat gran de grups no promediabls, i durant molt temps es va pensar que aquesta propietat caracteritzava els grups no promediabls. La conjectura de Von Neumann deia precisament això: que un grup era promediable si i només si no contenia cap subgrup lliure. La conjectura, oberta durant molts anys, finalment va ser resolta negativament per Ol'shanskii [8] trobant un grup no promediable però sense subgrups lliures, i uns anys després, Ol'shanskii i Sapir van trobar també un contraexemple que admet una presentació finita [9].

La definició de grup promediable es pot aplicar tant a grups amb generació finita com a grups que no ho siguin. Si un grup no admet un sistema finit de generadors, es pot considerar un límit directe (reunió infinita) dels seus subgrups finitament generats. Això dona lloc al resultat següent:

21 PROPOSICIÓ *Un grup és promediable si i només si ho són tots els seus subgrups finitament generats.*

En un sentit, la demostració és òbvia, atès que la promediabilitat s'hereta en els subgrups. En un altre, com que tot grup és la reunió dels seus subgrups finitament generats, el resultat és conseqüència del resultat següent, més general.

22 PROPOSICIÓ *Si un grup G és la reunió d'un sistema dirigit de grups $\{G_i\}_{i \in I}$, on tots els G_i són promediabls, aleshores G també és promediable.*

Aquí la demostració fa servir també el teorema de Tychonoff, i és semblant a la demostració de l'existència de la mesura de $\mathbb{Z}$. Es defineix $\mathcal{M}_i$ com el conjunt de les mesures definides a G i que són invariants només per als $g \in G_i$. Es demostra que, com que el sistema és dirigit, la família $\{\mathcal{M}_i\}$ té intersecció no buida i, doncs, una mesura que pertanyi a aquesta intersecció serà invariant per a tot el grup G .

Això ens permet assegurar la promediabilitat dels grups abelians, amb generació arbitrària.

23 COROLLARI *Tot grup abelià és promediable.*

I finalment, el resultat que acaba la demostració que la paradoxa de Banach-Tarski no és possible a $\mathbb{R}^2$.

24 TEOREMA *El grup G_2 d'isometries de $\mathbb{R}^2$ és promediable.*

PROVA El grup G_2 no és abelià, però és extensió d'abelians i, per tant, la proposició 20 ens assegurarà que és promediable. Només cal recordar que G_2 té un subgrup G_2^+ d'índex 2 de les isometries que preserven l'orientació, i aquestes isometries estan formades per una rotació (un element de S^1) i una translació (un element de $\mathbb{R}^2$). És a dir, tenim dues successions exactes curtes:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow G_2^+ \rightarrow G_2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1 \\ 1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow G_2^+ \rightarrow S^1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

i, per tant, com que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^2$ i S^1 són tots abelians i per tant promediabls, es dedueix que G_2 és promediable. $\square$

Remarquem, doncs, que sí que existeix, encara que sigui impossible escriure-la explícitament, una mesura sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, finitament additiva, G_2 -invariant, i amb mesura del total igual a 1.

Part III. La promediabilitat al segle XXI

9 Invariància per quasiisometries

La promediabilitat és un concepte clàssic, que data de la primera meitat del segle XX, i que ha gaudit de gran acceptació dins l'àmbit de l'anàlisi funcional i de la teoria dels grups topològics. El lector interessat pot trobar caracteritzacions de promediabilitat en funció del teorema de Hahn-Banach, per exemple, i potser les coneix si és un expert en alguna d'aquestes àrees. La mateixa paradoxa de Banach-Tarski s'emmarca dins d'aquests àmbits, amb la teoria de conjunts i la lògica pel mig, mitjançant l'axioma de l'elecció. Fins i tot, en l'article [4], els autors desenvolupen la teoria de la promediabilitat per als grafs infinits,

de manera anàloga a com ho fem nosaltres per als grafs de Cayley, però sense restringir-se a aquests.

Aquí ens hem interessat per les repercussions que té el concepte de promediabilitat dins la teoria de grups discrets, principalment finitament generats, i la possibilitat de demostrar la paradoxa per a $\mathbb{R}^3$ (i la seva impossibilitat per a $\mathbb{R}^2$) a partir de conceptes purament de teoria de grups, com són la geometria del grup lliure i la dels grafs de Cayley dels grups finitament generats.

Dins la teoria dels grups discrets infinits, el concepte de promediabilitat en ell mateix havia estat considerat una curiositat accidental, un concepte tangencial a la teoria. Però des dels anys vuitanta, amb la introducció per part de Gromov del concepte de quasiisometria, el concepte de promediabilitat ha adquirit una importància més gran. Voldria finalitzar aquest article donant la definició d'aquest concepte i la seva relació amb la promediabilitat. Aquest és un bon exemple del que s'anomena avui dia la *teoria geomètrica de grups*, que és l'estudi dels grups des del punt de vista de la geometria dels espais en els quals actuen, i en particular dels grafs de Cayley.

25 DEFINICIÓ Donats dos espais mètrics (X, d_X) i (Y, d_Y) , i dos nombres reals positius λ i C , una (λ, C) -quasiisometria és una aplicació

$$f: X \rightarrow Y,$$

no necessàriament contínua, i que satisfà:

- Per a tot $x, x' \in X$, es té

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + C.$$

- Per a tot $y \in Y$, existeix un $x \in X$ tal que $d_Y(f(x), y) \leq C$.

Una quasiisometria, doncs, pot canviar la distància entre dos punts, però no gaire, només per un factor multiplicatiu i una constant additiva. Aquesta constant fa que les quasiisometries no siguin, en general, contínues.

Observem que la segona condició parla de quasiexhaustivitat i, de fet, a partir d'aquí es pot trobar una quasiinversa que és també una quasiisometria.

La possibilitat de considerar el graf de Cayley (o més exactament, el seu conjunt de vèrtexs) d'un grup com a espai mètric donant longitud 1 a cadascuna de les seves arestes fa que puguem considerar les quasiisometries com a morfismes de la categoria de grups finitament presentats, en lloc dels habituals homomorfismes. Les quasiisometries tenen bona relació amb les propietats algebraiques dels grups, com ho demostren les propietats següents:

26 PROPOSICIÓ Tenim els resultats següents:

- Un isomorfisme entre dos grups finitament generats és una quasiisometria.
- Si tenim dos sistemes finits de generadors X i Y del mateix grup G , la identitat és una quasiisometria entre els dos grafs de Cayley $\Gamma(G, X)$ i $\Gamma(G, Y)$.

- Si H és un subgrup d'índex finit de G , aleshores la inclusió de H dins G és una quasiisometria.

D'altra banda, a causa de la constant C , les quasiisometries no es comporten bé respecte als grups finits:

27 PROPOSICIÓ *Dos grups finits qualssevol són quasiisomètrics.*

Així, els isomorfismes entre grups són quasiisometries, però, com veiem en el cas dels grups finits, no totes les quasiisometries són isomorfismes. Ara bé, en el cas dels grups infinits, la classificació dels quals és encara ben lluny de ser assolida, les quasiisometries donen una possible classificació més grollera que la classificació per isomorfismes i, per tant, més assequible. Aquesta classificació, lògicament, també encara està lluny del nostre abast i potser hi estarà sempre, però com a mínim és més tractable. Aquí és on la promediabilitat ha adquirit una nova vida dins la teoria geomètrica de grups infinits, a causa del resultat següent:

28 TEOREMA *La promediabilitat és un invariant per quasiisometries. És a dir, si dos grups (finitament generats) són quasiisomètrics, un és promediable si i només si ho és l'altre.*

La demostració d'aquest fet es basa completament en la caracterització de Følner, atès que el concepte de frontera és relativament ben preservat per la quasiisometria, i aleshores la imatge per la quasiisometria dels conjunts de Følner és molt propera als conjunts de Følner del grup imatge.

Així, la promediabilitat s'ha fet servir dins articles com ara [12] o [5] per distingir grups quasiisomètricament dins una mateixa família.

Podem dir que la promediabilitat dels grups discrets finitament generats és més viva que mai.

Referències

- [1] ARZHANTSEVA, G. N.; BURILLO, J.; LUSTIG, M.; REEVES, L.; SHORT, H.; VENTURA, E. «Uniform non-amenability». *Adv. Math.*, 197 (2) (2005), 499–522.
- [2] BANACH, S.; TARSKI, A. «Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents». *Fund. Math.*, 6 (1924), 244–277.
- [3] PLA I CARRERA, J. «L'axioma de l'elecció i la paradoxa de Banach-Tarski». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 15 (1983), 103–161.
- [4] ELEK, G.; SÓS, V. T. «Paradoxical decompositions and growth conditions». *Combin. Probab. Comput.*, 14 (1-2) (2005), 81–105.
- [5] FARB, B.; MOSHER, L. «A rigidity theorem for the solvable Baumslag-Solitar groups». *Invent. Math.*, 131 (2) (1998), 419–451. [Amb un apèndix de Daryl Cooper]
- [6] FØLNER, E. «On groups with full Banach mean value». *Math. Scand.*, 3 (1955), 243–254.

- [7] GREENLEAF, F. P. *Invariant means on topological groups and their applications*. Nova York: Van Nostrand Reinhold Co., 1969. (Van Nostrand Mathematical Studies; 16).
- [8] OL'SHANSKII, A. Y. «On the question of the existence of an invariant mean on a group». *Uspekhi Mat. Nauk*, 35 (4(214)) (1980), 199–200.
- [9] OL'SHANSKII, A. Y.; SAPIR, M. V. «Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (96) (2003), 43–169.
- [10] VON NEUMANN, J. «Zur allgemeinen Theorie des Masses». *Fund. Math.*, 13 (1929), 73–111.
- [11] WAGON, S. *The Banach-Tarski paradox*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. [Pròleg de Jan Mycielski, reimpressió corregida de l'original de 1985]
- [12] WHYTE, K. «The large scale geometry of the higher Baumslag-Solitar groups». *Geom. Funct. Anal.*, 11 (6) (2001), 1327–1343.
- [13] WOESS, W. *Random walks on infinite graphs and groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Tracts in Mathematics; 138)

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA IV
 ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR DE CASTELLDEFELS
 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
 AV. DEL CANAL OLÍMPIC, 15
 08860 CASTELLDEFELS, BARCELONA SPAIN
 burillo@ma4.upc.edu