REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE ISSN 1139-1138
(2002) vol. XV, num. 1, 147-167
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.2002.v15.n1.16955

SYSTÈMES HAMILTONIENS k-SYMPLECTIQUES

Azzouz AWANE, Mohamed BELAM, Sadik FIKRI,
Mohammed LAHMOUZ et Bouchra NAANANI

Abstract

We study some properties of the $k-$symplectic Hamiltonian systems in analogy with the well-known classical Hamiltonian systems. The integrability of $k-$symplectic Hamiltonian systems and the relationships with the Nambu's statistical mechanics are given.

1 Introduction

L'étude locale des systèmes de Pfaff et la modélisation par Nambu de la mécanique statistique nous ont conduit à introduire la notion de structure $k-$symplectique ([2], [8]).

Le groupe de Heisenberg au sens de Goze-Haraguchi ([4] et [12]) met en relief les liens étroits entre la géométrie $k-$symplectique et celle définie par un $k-$système de contact par analogie avec les liens classiques qui existent entre les structures symplectiques et les structures de contact.

Notons que la quantification géométrique de Kostant-Souriau est introduite dans le cadre de ces structures [17].

Le cas particulier $k = 1$ correspond à une structure symplectique classique dotée d'un feuilletage lagrangien; cette dernière structure est usuellement appelée polarisation réelle au sens de Molino, Clark et Goel. L'extension aux $k-$systèmes est fortement motivée par ses liens avec la mécanique statistique de NAMBU.

Après avoir étudié quelques propriétés des systèmes hamiltoniens d'une structure $k-$symplectique, ce qui complète des résultats exposés

2000 Mathematics Subject Classification: 20F05, 20F26, 51A10, 70Hxx.
Servicio de Publicaciones. Universidad Complutense. Madrid, 2002

dans des articles antérieurs [3] et [6], nous verrons que l'existence d'intégrales premières d'un système hamiltonien facilite la recherche des courbes intégrales de ce système. Ici on étudie un cas parti-culier important où l'existence d'intégrales premières basiques pour le feuilletage, en nombre suffisant permet la détermination des courbes intégrales par quadratures et éliminations.

Dans la dernière partie de ce travail, nous mettons en évidence les liens entre la géométrie $k-$symplectique et la mécanique statistique de Nambu; en effet, le théorème de Liouville sur la conservation des volumes est le point central de la mécanique classique et ce théorème joue un rôle important dans la mécanique statistique. Le formalisme "hamiltonien" classique n'est pas le seul qui décrit cette mécanique statistique. Tout système d'équations qui conduit au théorème de Liouville convient également. Nambu propose une généralisation possible de la dynamique hamiltonienne pour un espace de phase de dimension 3. Nous allons voir, après avoir rappelé le système d'équations de mouvement de Nambu, que les applications hamiltoniennes de la structure $k-$symplectique sur $\mathbb{R}^{k+1}$ engendrent les solutions de ce système.

Sauf mention du contraire, les variétés différentiables considérées ici sont supposées connexes, séparées, paracompactes à bases dénombrables d'ouverts, et tous les éléments introduits dans ce travail sont supposés de classe C^∞.

2 Systèmes hamiltoniens

Soit M une variété différentiable de dimension $p+q$ munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension q et soit E le sous fibré intégrable $p-$dimensionnel de TM correspondant à E. Le sous-fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$ sera désigné par E, l'ensemble des sections du $M-$fibré $TM \longrightarrow M$ (resp. $E \longrightarrow M$) sera désigné par $\mathfrak{X}(M)$ (resp. $\Gamma(E)$) et l'ensemble des $r-$formes différentielles sur M sera désigné par $\mathfrak{A}^r(M)$.

Une fonctions réelle f de classe C^∞ sur M est dite basique pour $\mathfrak{F}$ si, pour tout $Y \in \Gamma(E)$, la dérivée $Y(f)$ de f suivant Y est identiquement nulle. L'ensemble des fonctions basiques pour $\mathfrak{F}$ sera désigné par $\mathfrak{A}^0_b(M,\mathfrak{F})$. Il est clair que $\mathfrak{A}^0_b(M,\mathfrak{F})$ est un sous anneau de $\mathfrak{A}^0(M)$ des fonctions réelles différentiables.

Rappelons ([15]) qu'une fonction différentiable $f \in \mathfrak{A}^0(M)$ est basique si et seulement si f est constante sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$.

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}\,(M)$ est dit feuilleté (ou est appelé un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$) si pour tout $Y \in \Gamma(E)$ le crochet de Lie $[X, Y]$ appartient à $\Gamma(E)$.

Rappelons ([15]) que pour qu'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ soit feuilleté, il est nécessaire et suffisant que si $(\varphi_t)_{|t|<\varepsilon}$ est un groupe local à un paramètre associé à X sur un voisinage d'un point arbitraire de M, le difféomorphisme local φ_t laisse invariant le sous fibré E, quel que soit t.
On désigne par $\mathfrak{L}(M, \mathfrak{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs feuilletés pour $\mathfrak{F}$.
Notons que si $f \in \mathfrak{A}^0_b(M, \mathfrak{F})$ et $X \in \mathfrak{L}(M, \mathfrak{F})$, la fonction $X(f)$ est basique $(X(f) \in \mathfrak{A}^0_b(M, \mathfrak{F}))$ et le champ de vecteurs fX est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$ $(fX \in \mathfrak{L}(M, \mathfrak{F}))$.

Considérons maintenant une variété différentiable M de dimension $n(k+1)$ munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension n et soient $\theta^1, \ldots, \theta^k$ des formes différentielles sur M, supposées fermées de degré 2. Pour tout x de M, on désignera par $C_x(\theta^1), \ldots, C_x(\theta^k)$ les espaces caractéristiques des $2-$formes $\theta^1, \ldots, \theta^k$ au point x [11].

On suppose que $\left(\theta^1, \ldots, \theta^k; E\right)$ définit une structure $k-$symplectique sur M, c'est à dire, pour tout $x \in M$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $C_x(\theta^1) \cap \cdots \cap C_x(\theta^k) = \{0\}$,
2. $\theta^p(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$ et $p(p = 1, \ldots, k)$.

Rappelons ([3], [8]) que si $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ est une structure $k-$symplectique sur M, alors pour tout point p de M, il existe un voisinage ouvert U de M contenant p de coordonnées locales $(x^{pi}, x^i)_{1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n}$, dites adaptées, tel que les formes différentielles θ^p soient représentées dans U par :

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré E soit défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$.

Ceci est équivalent à dire, qu'il existe un atlas $\mathfrak{A}$ de M, appelé atlas de Darboux, dont les changements de cartes appartiennent au pseudogroupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant la structure $k-$symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ invariante. Rappelons que la structure $k-$symplectique canonique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ est définie par les $2-$formes $\theta^p = \sum_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dx^i$ et par le sous-fibré E de $T\mathbb{R}^{n(k+1)}$ défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$, ici $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ est le système de coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$.

Il résulte des expressions canoniques de Darboux ci-dessus que les formes différentielles θ^p sont de classe $2n$; ceci entraîne que la distribution $x \longmapsto C_x(\theta^p)$ définit un sous-fibré intégrable de TM.

Pour tout $p\,(p = 1, \ldots, k)$, on pose

$$E^p = \bigcap_{q\neq p} C(\theta^q).$$

Soient TM/E le fibré quotient et ν la projection canonique $TM \longrightarrow TM/E = \nu E$. Soit $\nu^* E$ le dual de νE. On désigne par $\mathfrak{F}$ le feuilletage défini par le sous fibré E.

En termes de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, on a :

1. νE est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$,

2. $\nu^* E$ est engendré par les formes différentielles $dx^1, \ldots, dx^n$,

3. E^p est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^{p1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{pn}}$.

Rappelons ([6]) que l'on a :

1. pour chaque $p(p = 1, \ldots, k)$, le sous fibré E^p est intégrable,

2. $E = E^1 \oplus \ldots \oplus E^k$ (somme directe),

3. pour tout $p(p = 1, \ldots, k)$, l'application $X \longmapsto i(X)\theta^p$ définit un isomorphisme i_p de fibrés vectoriels au dessus de M de E^p sur $\nu^* E$.

Les feuilletages $\mathfrak{F}^p$ de M définis par les sous-fibrés E^p sont appelés *feuilletages caractéristiques* de la structure $k-$symplectique.

En termes de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, les applications i_p expriment la dualité :

$$\frac{\partial}{\partial x^{ps}} \longmapsto dx^s$$

entre la géométrie le long des feuilles de $\mathfrak{F}^p$ et la géométrie transverse.

Proposition 2.1. *Pour toute fonction basique f sur $(M, \mathfrak{F})$, on peut associer k champs de vecteurs $X_f^1, \ldots, X_f^k$ satisfaisant à :*

1. *X_f^p est tangent aux feuilles des feuilletages caractéristiques $\mathfrak{F}^p$ pour tout p,*
2. *$\left[X_f^p, X_f^q\right] = 0.$*

Démonstration. En utilisant la dualité $i_p : X \longmapsto i(X)\theta^p$ de E^p sur l'espace transverse ν^*E, on peut associer pour chaque fonction différentiable basique k champs de vecteurs $X_f^1, \ldots, X_f^k$ tels que

$$i(X_f^p)\theta^p = -df$$

pour tout p. Par rapport au système de coordonnées locales $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, le champ de vecteurs X_f^p s'écrit :

$$X_f^p = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{pi}}.$$

Il est clair que $X_f^p \in E^p$, et le premier point est démontré.

Soient maintenant $p, q = 1, \ldots, k$. Pour tout $r = 1, \ldots, k$, on a :

$$L_{X_f^p}\left(i(X_f^q)\theta^r\right) = \delta^{rq}\left(L_{X_f^p}df\right) = d\left(X_f^p(f)\right) = 0$$

et

$$\begin{aligned} i\left(\left[X_f^p, X_f^q\right]\right)\theta^r &= L_{X_f^p}\left(i(X_f^q)\theta^r\right) - i(X_f^q)L_{X_f^p}\theta^r \\ &= -i(X_f^q)L_{X_f^p}\theta^r \\ &= -i(X_f^q)\left(-i(X_f^p)d\theta^r + d\left(i(X_f^p)\theta^r\right)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\left[X_f^p, X_f^q\right] \in \bigcap_{r=1}^{k} C\left(\theta^r\right) = \{0\},$$

ce qui complète la démonstration de la proposition.

Soit j l'application de $\mathfrak{X}(M)$ dans $\mathfrak{A}^1(M) \times \ldots \times \mathfrak{A}^1(M)$ donnée par $j(X) = (i(X)\theta^1, \ldots, i(X)\theta^k)$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est appelé système hamiltonien si X est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$ et pour les $2-$formes θ^p à la fois; autrement dit X satisfait les conditions suivantes :

1. X est un automorphisme infinitésimal pour $\mathfrak{F}$
2. les formes de Pfaff $i(X)\theta^1, \ldots, i(X)\theta^k$ sont fermées.

Le champ de vecteurs X sera appelé automorphisme infinitésimal pour la structure $k-$symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$.

Soit X un système hamiltonien. Il résulte du lemme de Poincaré, que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x et une application différentiable H de U dans $\mathbb{R}^k$ vérifiant sur U la relation $j(X) = -dH$.

Inversement, si H est une application différentiable de M dans $\mathbb{R}^k$ telle que $dH \in j(\mathfrak{L}(M, \mathfrak{F}))$, alors il existe un unique champ de vecteurs sur M, noté X_H, et appelé système hamiltonien associé à H, tel que $j(X_H) = -\,dH$.

Les applications différentiables H de M dans $\mathbb{R}^k$ telles que $dH \in j(\mathfrak{L}(M, \mathfrak{F}))$ sont appelées applications hamiltoniennes de la structure $k-$symplectique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$.

Rappelons ([3] et [8]) que si $H = (H^p)_{1 \le p \le k}$ est une application hamiltonienne et X_H le système hamiltonien associé. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1 \le p \le k, 1 \le i \le n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent respectivement :

$$H^p = \sum_{j=1}^{n} f_j(x^1, \ldots, x^n) x^{pj} + g^p(x^1, \ldots, x^n)$$

et

$$X_H = -\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x^s}(x^1,\ldots,x^n)x^{ps} + \frac{\partial g^p}{\partial x^s}(x^1,\ldots,x^n)\right)\frac{\partial}{\partial x^{ps}} + \sum_{s=1}^{n} f_s(x^1,\ldots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^s}$$

où f_j et g^p sont des fonctions différentiables dans U basiques pour $\mathfrak{F}_U$.

Soient H, K deux applications hamiltoniennes et X_H, X_K les systèmes hamiltoniens associés. Le crochet $[X_H, Y_K]$ est un système hamiltonien, et plus précisément, l'application notée $\{H,K\}$, de M dans $\mathbb{R}^k$, donnée par

$$\{H,K\} = -\left(\theta^1(X_H,X_K),\ldots,\theta^k(X_H,X_K)\right)$$

satisfait à $[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}}$.

Dans un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1\le p\le k, 1\le i\le n}$ les composantes $\{H,K\}^p$ de $\{H,K\}$ s'écrivent :

$$\{H,K\}^p = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H^p}{\partial x^s}\frac{\partial K^p}{\partial x^{ps}} - \frac{\partial H^p}{\partial x^{ps}}\frac{\partial K^p}{\partial x^s}\right).$$

Soit $\mathfrak{H}(M)$ l'ensemble des applications hamiltoniennes de la structure $k-$symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;E)$. La correspondance $(H,K)\longmapsto\{H,K\}$ de $\mathfrak{H}(M)\times\mathfrak{H}(M)$ dans $\mathfrak{H}(M)$ est une application $\mathbb{R}-$bilinéaire antisymétrique satisfaisant l'identité de Jacobi et on voit bien que $(\mathfrak{H}(M),\{,\})$ est une algèbre de Lie réelle de dimension infinie.

3 Intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Soient M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$, munie d'une structure $k-$symplectique $(\theta^1,\ldots,\theta^k;E)$.

Un champ de vecteurs X sur M est dit basiquement intégrable par rapport à la structure $k-$symplectique, s'il possède n intégrales premières basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, définies sur toute la variété M et indépendantes en tout point de M.

Par exemple, considérons l'espace $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de la structure $k-$symplectique canonique $\left(\theta^1, \ldots, \theta^k, E\right)$. Le système hamiltonien associé à l'application hamiltonienne

$$H = -\left(x^j\delta^{1p}, \ldots, x^j\delta^{qp}, \ldots, x^j\delta^{kp}\right)$$

est donné par :

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x^{pj}},$$

avec $p = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, n$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, les fonctions $f_i = x^i \quad (i = 1, \ldots, n)$ sont des intégrales premières basiques de X_H pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ indépendantes en tout point de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ donc ce champ de vecteurs est basiquement intégrable.

Proposition 3.1. *Soient $f^1, \ldots, f^n$ des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, indépendantes en chaque point de M. Alors, pour tout $x_o \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_o, nk fonctions différentiables $\left(f^{pi}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ sur U telles que $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ soit un système de coordonnées locales adapté à la structure $k-$symplectique, c'est à dire :*

$$\begin{cases} \theta^p_{|U} = \sum\limits_{i=1}^{n} df^{pi} \wedge df^i \\ E_{|U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker df^i. \end{cases}$$

Démonstration. Il résulte du théorème de Darboux ([2], [3] ou [8]) que pour tout point $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert V de M contenant x_0 de coordonnées locales $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, dites adaptées, tel que les formes différentielles θ^p soient représentées dans V par $\theta^p_{|V} = \sum\limits_{i=1}^{n} dx^{pi} \wedge dx^i$ et que le sous-fibré E soit défini par les équations $dx^1 = \ldots = dx^n = 0$. Puisque $f^1, \ldots, f^n$ sont des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, indépendantes en chaque point de M, alors $(x^{pi}, f^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ est un système de coordonnées locales adaptées au feuilletage, c'est-à-dire que les dérivations

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{pi}}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$$

engendrent l'espace tangent aux feuilles de $\mathfrak{F}$, et E est défini par les équations

$$df^1 = \ldots = df^n = 0,$$

car

$$df^i\left(\frac{\partial}{\partial x^{pj}}\right) = \frac{\partial f^i}{\partial x^{pj}} = 0.$$

En remplaçant $x^1, \ldots, x^n$ par $f^1, \ldots, f^n$ dans la démonstration du théorème de Darboux, on voit qu'il existe un voisinage ouvert U de x_o, nk fonctions différentiables $\left(f^{pi}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ sur U telles que $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ soit un système de coordonnées locales adaptées à la structure $k-$symplectique, c'est à dire, $\theta^p_{|U} = \sum\limits_{i=1}^{n} df^{pi} \wedge df^i$ et $E_{|U} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker df^i$, ce qui montre la proposition.

Soient X un système hamiltonien basiquement intégrable et $f^1, \ldots, f^n$ des intégrales premières de X, basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ indépendantes en tout point de M. La relation $X_x\left(f^p\right) = df^p_x\left(X_x\right) = 0$, pour tout $x \in M$ et pour tout $p = 1, \ldots, k$, montre que $X_x \in \ker df^1_x \cap \ldots \cap \ker df^n_x$, et X est une section du sous fibré E, d'où :

Corollaire 1. *Soient X un système hamiltonien basiquement intégrable, alors X est tangent aux feuilles.*

Corollaire 2. *Soit $H = (H^p)_{1\leq p\leq k}$ une application hamiltonienne et X_H le système hamiltonien associé supposé basiquement intégrable. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{pi}, x^i)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$, les composantes H^p de H et X_H s'écrivent :*

$$H^p = g^p(x^1, \ldots, x^n)$$

$$X_H = -\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial g^p}{\partial x^s}(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^{ps}} = -\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial H^p}{\partial x^s}(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^{ps}}$$

où les g^p sont des fonctions différentiables dans U, basiques pour le feuilletage.

Proposition 3.2. *Soit $H = (H^p)_{1 \leq p \leq k}$ une application hamiltonienne sur M et X_H le système hamiltonien associé. On suppose que X_H est basiquement intégrable. Alors X_H est une combinaison linéaire sur M des champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ $(1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n)$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire de X_H.*

Démonstration. Il résulte du corollaire précédent que tout point de M possède un ouvert sur lequel les fonctions H^p $(p = 1, \ldots, k)$ s'écrivent sous la forme :

$$H^p = \widetilde{H}^p \circ \left(f^1, \ldots, f^n\right),$$

où $\widetilde{H}^p$ est une fonction différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comme

$$\begin{aligned} i\left(\sum_{i,p} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right).X^p_{f^i}\right)\theta^q &= \sum_{i,p} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right).i\left(X^p_{f^i}\right)\theta^q \\ &= -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{H}^q}{\partial f^s}\left(f^1, \ldots, f^n\right)\ df^s, \end{aligned}$$

on a

$$i\left(\sum_{i,p} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right).X^p_{f^i}\right)\theta^q = -d\widetilde{H}^q\left(f^1, \ldots, f^n\right),$$

d'où

$$X_H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^s}\left(f^1, \ldots, f^n\right).X^p_{f^i}$$

où, pour tout $i\,(i = 1, \ldots, n)$, les k champs de vecteurs $X^1_{f^i}, \ldots, X^k_{f^i}$ sont reliés à la fonction basique f^i par la relation

$$i\left(X^1_{f^i}\right)\theta^1 = \ldots = i\left(X^k_{f^i}\right)\theta^k = -df^i.$$

On déduit que X_H est une combinaison linéaire des champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ avec $1 \leq p \leq k$ et $1 \leq i \leq n$, dont les coefficients $\frac{\partial \widetilde{H}^p}{\partial f^i}\left(f^1, \ldots, f^n\right)$ sont constants sur chaque arc de trajectoire de X_H contenu dans U, puisque $f^1, \ldots, f^n$ sont des intégrales premières de X_H. Comme les trajectoires de X_H sont connexes, le champ de vecteurs X_H est une combinaison linéaire sur M des $X^p_{f^s}$, dont les coefficients sont constants sur chaque trajectoire du système hamiltonien X_H.

Les champs de vecteurs $X^p_{f^s}$ $(1 \leq p \leq k, 1 \leq s \leq n)$ engendrent un champ de directions différentiable qui est complètement intégrable puisque $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$ pour tous $p, q = 1, \ldots, k$ et $i, j = 1, \ldots, n$. Chaque trajectoire de X_H (ou de l'un des champs de vecteurs $X^p_{f^s}$) est entièrement contenue dans une de ces feuilles puisque X_H et les $X^p_{f^s}$ sont tangents à chaque feuille. On déduit :

Corollaire 3. *Les champs de vecteurs* $\left(X^p_{f^s}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq s\leq n}$ *engendrent le sous-fibré* E *subordonné à la structure* $k-$*symplectique.*

Notons que chaque feuille de ce feuilletage est une sous-variété lagrangienne fermée de M, dont les équations sont $df^i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ et que le champ de vecteurs X_H est tangent aux feuilles. Ainsi $H^p \in \mathfrak{A}^0_b(M, \mathfrak{F})$ pour tout $p = 1, \ldots, k$.

Proposition 3.3. *Le nombre maximum de fonctions basiques indépendantes sur* M *est* $n = codim\mathfrak{F}$.

Démonstration. On sait que pour toute fonction basique f pour le feuilletage $\mathfrak{F}$, les champs de vecteurs X^p_f correspondants sont tangents aux feuilles. Si $f^1, \ldots, f^l$ sont l fonctions basiques indépendantes sur M alors, pour tout $x \in M$, le sous espace engendré par les vecteurs $X^p_{f^s}(x)$ est contenu dans E_x. Par suite $lk \leq nk$, d'où $l \leq n$.

Proposition 3.4. *On suppose que* X_H *est basiquement intégrable. Alors pour tout point* a *de* M, *la courbe intégrale de* X_H *passant par ce point peut être localement déterminée, au voisinage de* a *par quadratures.*

Démonstration. Soit $a \in M$. Il existe un voisinage ouvert U de a dans M, des fonctions $\left(f^{pi}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ différentiables sur U telles que $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ définit un système de coordonnées locales adapté la structure $k-$symplectique $\left(\theta^1, \ldots, \theta^k; E\right)$, c'est à dire :

$$\theta^p_{|U} = \sum_{i=1}^{n} df^{pi} \wedge df^i \text{ et } E_{|U} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker df^i.$$

L'équation différentielle définie par X_H s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} \\ \frac{df^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial f^i} \end{cases}$$

avec $(p = 1, \ldots, k$ et $i = 1, \ldots, n)$. Comme

$$H^p = \sum_{j=1}^{n} F_j \left(f^1, \ldots, f^n\right) f^{pj} + G^p \left(f^1, \ldots, f^n\right)$$

on déduit

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = F_i \left(f^1, \ldots, f^n\right).$$

Or les fonctions f^i sont des intégrales premières de X_H donc

$$\frac{df^i}{dt} = \frac{\partial H^p}{\partial f^{pi}} = X_H \left(f^i\right) = 0,$$

d'où pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $F_i \left(f^1, \ldots, f^n\right) = 0$, par conséquent on a $H^p = G^p \left(f^1, \ldots, f^n\right)$ pour tout $p = 1, \ldots, k$. Ainsi

$$\frac{df^{pi}}{dt} = -\frac{\partial H^p}{\partial f^i} = -\frac{\partial G^p}{\partial f^i} \left(f^1, \ldots, f^n\right).$$

Par suite la courbe intégrale de X_H passant par a, pour la valeur 0 du paramètre t, s'exprime au moyen des coordonnés locales $\left(f^{pi}, f^i\right)_{1 \le p \le k, 1 \le i \le n}$ par:

$$\begin{cases} f^i(t) = f^i(a) \\ f^{pi}(t) = f^{pi}(a) - t\frac{\partial G^p}{\partial f^i}\left(f^1(a), \ldots, f^n(a)\right). \end{cases}$$

La détermination de cette courbe intégrale ne fait intervenir que des quadratures, des éliminations et des dérivations partielles.

Rappelons que tout sous-groupe discret G de $\mathbb{R}^m$ est nécessairement de la forme

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{s} n_i e_i \ , (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^s \right\},$$

où $e_1, \ldots, e_s$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$, linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^m$.

En complétant $e_1, \ldots, e_s$ en une base $(e_1, \ldots, e_s, \ldots, e_m)$, on voit que l'espace quotient $\mathbb{R}^m/G$ s'identifie au produit $\mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$ où $\mathbb{T}^s$ est le tore de dimension s.

On conviendra de paramétrer le tore $\mathbb{T}^s$ en l'identifiant au quotient $\mathbb{R}^s/2\pi\mathbb{Z}^s$.

Soit $p : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{T}^s$ la projection canonique. Chaque élément $\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$ de $\mathbb{R}^s$ définit un élément $p\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$ du tore $\mathbb{T}^s$, on dira que $\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$ est un système de coordonnées angulaires de l'élément $p\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^s\right)$.

Les fonctions coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^s$ sont appelées variables angulaires sur le tore $\mathbb{T}^s$.

Soit $f = \left(f^1, \ldots f^n\right) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable avec $f^1, \ldots f^n$ des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathfrak{F}$ et soient $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ une valeur régulière de f et N la composante connexe de $f^{-1}(a)$.

Une sous variété N de M est dite totalement isotrope (resp. lagrangienne) si, pour tout $x \in N$, l'espace tangent T_xN est sous espace totalement isotrope (resp. lagrangien) de T_xM [7].

Proposition 3.5. *N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et les restrictions à cette sous variété des nk champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ $(1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n)$ qui sont linéairement indépendants en chaque point de M sont tangents à N et l'on a $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ et $p, q = 1, \ldots, k$.*

Démonstration. Puisque a est une valeur régulière de $f : M \to \mathbb{R}^n$, alors $f^{-1}(a)$ est une sous-variété fermée de M de dimension nk. Il en est de même pour chacune de ses composantes connexes. Comme $f^{-1}(a)$ est localement connexe alors N est ouverte dans $f^{-1}(a)$. On déduit que $\dim N = \left(\dim f^{-1}(a)\right) = nk$ et l'on a $T_xN \simeq T_xf^{-1}(a) \simeq \ker df^1(x) \cap \ldots \cap \ker df^n(x)$ pour tout $x \in N$.

La sous variété N est totalement isotrope. En effet, pour tout $x \in N$, on a $X^p_{f^i}(x) \in T_xN$, pour tout $p = 1, \ldots, k$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$. Comme les champs de vecteurs $X^p_{f^i}(x)$ $(1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq n)$ sont linéairement indépendants en tout point de M forment une base de T_xN car $nk = \dim T_xN$. Les relations $\theta^p\left(X^q_{f^i}(x), X^r_{f^j}(x)\right) = 0$, pour tous $p, q, r = 1, \ldots, k$, et $i, j = 1, \ldots, n$, nous permettent de conclure que T_xN est totalement isotrope pour tout $x \in N$. Par conséquent N est totalement isotrope, et puisque $\dim N = nk$, alors N est une sous variété lagrangienne de M.

Par rapport à un système de coordonnées locales $(x^{pi}, x^i)_{1\le p\le k, 1\le i\le n}$ adaptées à la structure $k-$symplectique, les champs de vecteurs $X^p_{f^j}$ s'écrivent :

$$X^p_{f^j} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{pi}}.$$

En utilisant le lemme de Schwarz, on voit que $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$, ce qui montre la proposition.

Supposons que les restrictions $X^p_{f^i|N}$, des champs de vecteurs $X^p_{f^i}$ à N, sont complètes et désignons par ϕ^{pi} le flot du champ de vecteurs $X^p_{f^j|N}$. Considérons l'application différentiable $\Phi : \mathbb{R}^{nk}\times N \longrightarrow N$ définie par :

$$\Phi_t (x) = \Phi (t, x) = \prod_{p=1}^{k}\prod_{i=1}^{n} \phi^{pi}_{t_{pi}} (x)$$

pour tout $t = (t_{pi})_{1\le p\le k,1\le i\le n} \in \mathbb{R}^{nk}$ et pour tout $x \in N$.

Proposition 3.6. *L'application Φ définit une action transitive et localement libre.*

Démonstration. La relation $\left[X^p_{f^i}, X^q_{f^j}\right] = 0$ montre que les flots des champs de vecteurs $X^p_{f^i|N}$ commutent, par conséquent $\Phi_0 = Id_N$ et $\Phi_t \circ \Phi_{t'} = \Phi_{t+t'}$, pour tout $t \in \mathbb{R}^{nk}$, pour tout $t' \in \mathbb{R}^{nk}$ et Φ définit une action différentiable du groupe abélien $\mathbb{R}^{nk}$ sur N. Pour tout $x \in N$, l'application $g_x : t \longmapsto \Phi_t (x)$ est de rang nk. Ainsi l'action Φ est localement libre, c'est à dire le sous groupe d'isotropie

$$G_x = \left\{t \in \mathbb{R}^{nk}, \Phi (t, x) = x\right\},$$

de chaque point x de N est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{nk}$. L'orbite $O (x)$ de chaque point $x \in N$, est à la fois ouvert et fermé de N. Comme N est connexe on déduit que $O (x) = N$ pour tout $x \in N$; ainsi, l'action Φ est transitive.

Puisque l'action Φ est transitive, alors N est difféomorphe à $\mathbb{R}^{nk}/G_x$, donc à $\mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{nk-s}$, où s est le nombre de générateurs indépendants de G_x.

Dans les hypothèses et notations ci-dessus, on suppose que les fonctions $f^1, \ldots, f^n$ sont indépendantes en tout point de M.

Proposition 3.7. *Soient* $a \in M$ *et* N *la composante connexe de* $f^{-1}(f(a))$ *contenant le point* a*. Si* N *est compacte, alors* N *est une sous-variété lagrangienne fermée de* M *qui est invariante par le flot du champ de vecteurs* X_H*.*

De plus, il existe un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^{nk}$ *sur* N *définissant un système de variables angulaires* $(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk})$ *au moyen duquel le flot* ϕ *de* $X_{H|N}$ *s'exprime par*

$$\phi_t\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \left(\Psi^1 + \omega^1 t, \ldots, \Psi^{nk} + \omega^{nk} t\right)$$

$\omega^1, \ldots \omega^{nk}$ *étant des constantes. On dira que ce flot est quasi-périodique.*

Démonstration. Comme $f(a)$ est une valeur régulière de f, on déduit de ce qui précède, que N est une sous-variété lagrangienne fermée de M et que les champs de vecteurs $\left(X^p_{f^i}\right)_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ sont tangents à cette sous-variété. N étant compacte, les champs de vecteurs $X^p_{f^i|N}$ sont complets. Comme N est difféomorphe à $\mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{nk-s}$, on déduit que $s = nk$. Il en résulte que le sous-groupe d'isotropie G_a de a, pour l'action Φ, est engendré par nk éléments $e'_1, \ldots, e'_{nk}$ de $\mathbb{R}^{nk}$ formant une base de cet espace.

Considérons l'application

$$\Psi : \mathbb{R}^{nk} \to N,$$

définie par :

$$\Psi\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{nk} \Psi^s e'_s\ , a\right),$$

pour tout $\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) \in \mathbb{R}^{nk}$. D'après la définition même de Φ, le flot ϕ^{pi} de $X^p_{f^i|N}$ en tout point $y \in N$, est donné par :

$$\phi^{pi}_t(y) = \Phi(te_{pi}, y)$$

où $(e_{pi})_{1\leq p\leq k, 1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{nk}$. L'expression de ce flot au moyen des variables $\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}$ est donné par :

$$\phi^{pi}_t\left(\Psi^1, \ldots, \Psi^{nk}\right) = \left(\Psi^1 + t\omega^1_{pi}, \ldots, \Psi^1 + t\omega^{nk}_{pi}\right)$$

où $\frac{\omega^1_{p,i}}{2\pi}$, ... , $\frac{\omega^{nk}_{p,i}}{2\pi}$ sont les composantes de e_{pi} dans la base $e'_1, \dots, e'_{nk}$ de $\mathbb{R}^{nk}$.

On sait que tout point de M possède un voisinage ouvert sur lequel on a :

$$H^p = \tilde{H}^p \circ \left(f^1, \dots, f^n\right),$$

où $\tilde{H}^p$ est une fonction numérique différentiable définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Le champ de vecteurs X_H a pour expression locale :

$$X_H = \sum_{p=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i} \left(f^1, \dots, f^n\right) .X^p_{f^i}.$$

On pose $A^{pi} = \frac{\partial \tilde{H}^p}{\partial f^i} \left(f^1, \dots, f^n\right)$. On a donc :

$$X_H = \sum_{p=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} A^{pi}.X^p_{f^i}.$$

En utilisant la connexité de N on voit que les coefficients A^{pi} sont constants sur N.

Le flot de X_H s'exprime donc, au moyen des variables angulaires $\Psi^1, \dots, \Psi^{nk}$, selon

$$\phi_t\left(\Psi^1, \dots, \Psi^{nk}\right) = \left(\Psi^1 + \omega^1 t, \dots, \Psi^{nk} + \omega^{nk} t\right),$$

avec $\omega^s = \sum\limits_{p=1}^{k} \sum\limits_{i=1}^{n} A^{pi}\omega^s_{pi}$, pour tout $s = 1, \dots, nk$.

4 Liens avec la mécanique statistique de Nambu

4.1 Cas de $M = \mathbb{R}^3$

Le théorème de Liouville sur la conservation des volumes est le point central de la mécanique classique. Ce théorème joue un rôle important dans la mécanique statistique. Le formalisme "hamiltonien" classique n'est pas le seul décrivant cette mécanique statistique. Tout système d'équations qui conduit au théorème de Liouville convient également.

Nambu propose une généralisation possible de la dynamique hamiltonienne pour un espace de phase de dimension 3. Nous allons voir, après avoir rappelé le système d'équations de Nambu, que les applications hamilto-niennes de la structure 2−symplectique sur $\mathbb{R}^3$ engendrent les solutions de ce système.

Les équations régissant le mouvement de la mécanique statistique de Nambu sont données par le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(y,z)} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(z,x)} \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(x,y)}$$

où H et G sont deux fonctions réelles définies sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z) et où $\frac{D(H,G)}{D(y,z)}$ est le Jacobien

$$\frac{D(H,G)}{D(y,z)} = \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y}.$$

Les équations ci-dessus sont appelées équations de mouvement de Nambu et le champ de vecteurs dont les trajectoires sont définies par les équations de mouvement de Nambu sera désigné par $X^n_{(H,G)}$, et appelé système dynamique de Nambu.

Munissons l'espace M de la structure 2-symplectique canonique $(\theta^1, \theta^2; E)$ définie par

$$\begin{cases} \theta^1 = dx \wedge dz, \\ \theta^2 = dy \wedge dz, \\ E = \ker dz. \end{cases}$$

Les applications hamiltoniennes de la structure 2−symplectique sont les applications du type

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dont les composantes sont données par

$$H^1 = f(z)x + g^1(z), \; H^2 = f(z)y + g^2(z),$$

où f, g^1 et g^2 sont des fonctions différentiables basiques définies sur l'espace M. Les trajectoires du système hamiltonien X_H de la structure 2-symplectique sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H^1}{\partial z}, \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H^2}{\partial z}, \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H^1}{\partial x} = \frac{\partial H^2}{\partial y}$$

Proposition 4.1. *Soient $H = (H^1, H^2)$ avec $H^1 = f(z)x + g^1(z)$ et $H^2 = f(z)y + g^2(z)$, une application hamiltonienne de la structure $2-$symplectique. Alors le système hamiltonien X_H et le système dynamique de Nambu X_H^n sont liés par la relation*

$$X_H^n = f(z)X_H.$$

Cela résulte directement des relations suivantes:

$$\frac{D(H^1, H^2)}{D(y,z)} = -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial z}\ , \ \frac{D(H^1, H^2)}{D(z,x)} = -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial z}\ ,$$

et

$$\frac{D(H^1, H^2)}{D(x,y)} = -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial x} = -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial y}.$$

Corollaire 4. *La fonction*

$$(f(z))^{-1}H = (x + h^1(z), y + h^1(z))$$

est une solution des équations du mouvement de la mécanique statistique de Nambu sur le domaine de l'espace où $f(z)$ ne s'annule pas, ici

$$h^1(z) = (f(z))^{-1}g^1(z) \quad \textit{et} \quad h^2(z) = (f(z))^{-1}g^2(z)\,.$$

4.2 Cas de $M = \mathbb{R}^{k+1}$

Munissons l'espace $M = \mathbb{R}^{k+1}$ de la structure $k-$symplectique canonique $(\theta^1, \ldots, \theta^k; E)$ définie par

$$\begin{cases} \theta^1 = dx^1 \wedge dx^{k+1}, \\ \quad\quad \ldots \\ \theta^k = dx^k \wedge dx^{k+1}. \end{cases}$$

et E est défini par l'équation $dx^{k+1} = 0$, où $\left(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}\right)$ est le système de coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{k+1}$.

Les applications hamiltoniennes de cette structure $k-$symplectique sont les applications $H : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$dont les composantes sont données par :

$$\Big\{ H^1 = f(x^{k+1})x^1 + g^1(x^{k+1}), \ldots, H^k = f(x^{k+1})x^k + g^k(x^{k+1}),$$

où f , $g^1, \ldots, g^k$ sont des fonctions basiques différentiables sur l'espace M.

Les trajectoires du système dynamique de Nambu X_H^n associé à H sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dx^j}{dt} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k \ =1}^{k+1} \varepsilon_{ji_1i_2\ldots i_k} \frac{\partial H^1}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial H^2}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial H^k}{\partial x^{i_k}},$$

où $\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_{k+1}}$ est le tenseur de Levi-Civita.

On a donc

$$\frac{dx^1}{dt} = \varepsilon_{1(k+1)2\ldots k} \frac{\partial H^1}{\partial x^{k+1}} \frac{\partial H^2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial H^k}{\partial x^k} =$$
$$(-1)^{k-1} \left(\frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} x^1 + \frac{\partial g^1(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} \right) \left(f(x^{k+1}) \right)^{k-1},$$
$$\frac{dx^2}{dt} = \varepsilon_{21(k+1)2\ldots k} \frac{\partial H^1}{\partial x^1} \frac{\partial H^2}{\partial x^{k+1}} \frac{\partial H^3}{\partial x^3} \cdots \frac{\partial H^k}{\partial x^k} =$$
$$(-1)^{k-1} \left(\frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} x^2 + \frac{\partial g^2(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} \right) \left(f(x^{k+1}) \right)^{k-1},$$
$$\cdots$$
$$\frac{dx^k}{dt} = \varepsilon_{k123\ldots(k+1)} \frac{\partial H^1}{\partial x^1} \frac{\partial H^2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial H^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial H^k}{\partial x^{k+1}} =$$
$$(-1)^{k-1} \left(\frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} x^k + \frac{\partial g^k(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} \right) \left(f(x^{k+1}) \right)^{k-1},$$

et

$$\frac{dx^{k+1}}{dt} = \varepsilon_{(k+1)123\ldots k} \frac{\partial H^1}{\partial x^1} \frac{\partial H^2}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial H^k}{\partial x^k} = (-1)^k \left(f(x^{k+1}) \right)^k ,$$

Déterminons maintenant les trajectoires du système hamiltonien X_H. On a :

$$\begin{array}{ll}
\frac{dx^1}{dt} & = -\left(\frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} x^1 + \frac{\partial g^1(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} \right) \\
\frac{dx^2}{dt} & = -\left(\frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} x^2 + \frac{\partial g^2(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} \right) \\
\cdots & \cdots \\
\frac{dx^k}{dt} & = -\left(\frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} x^k + \frac{\partial g^k(x^{k+1})}{\partial x^{k+1}} \right) \\
\frac{dx^{k+1}}{dt} & = f\left(x^{k+1} \right)
\end{array}$$

On déduit la :

Proposition 4.2. *Soient $H = (H^1, \ldots, H^k)$ avec $H^p = f(x^{k+1})x^p + g^p(x^{k+1})$, $p = 1, \ldots, k$, une application hamiltonienne de la structure $k-$symplectique canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$. Alors le système hamiltonien X_H et le système dynamique de Nambu X_H^n sont liés par la relation*

$$X_H^n = (-1)^k \left(f(x^{k+1}) \right)^{k-1} X_H.$$

Corollaire 5. *La fonction*

$$(-1)^k \, (f(x^{k+1}))^{-(k-1)} H = (x^1 + h^1(x^{k+1}), \ldots, x^k + h^k(x^{k+1}))$$

est une solution des équations du mouvement de la mécanique statistique de Nambu sur le domaine de l'espace où $f(x^{k+1})$ ne s'annule pas, ici

$$h^p(x^{k+1}) = (-1)^k \, (f(x^{k+1}))^{-(k-1)} g^p(x^{k+1}) \text{ avec } p = 1, \ldots, k.$$

Bibliographie

[1] J.M. Ancochea Bermúdez, *Sobre la rigidez de Algebras de Lie.* Thèse Madrid (1984).

[2] A. Awane, *Sur une généralisation des structures symplectiques.* Thèse Strasbourg (1984).

[3] A. Awane, *k-symplectic structures.* Journal of Mathematical physics 33(1992) 4046-4052. U.S.A.

[4] A. Awane, *G-espaces k-symplectiques homogènes.* Journal of Geometry and Physics. 13(1994) 139-157. North-Holland.

[5] A. Awane, *Structures k-symplectiques.* Thèse Mulhouse(1992).

[6] A. Awane, *Some affine properties of the k-symplectic manifolds.* "Contribution to Algebra and Geometry *Beiträge zur Algebra und Geometrie*". Volume 39 (1998), No. 1, 75-83.

[7] A. Awane, *Systèmes extérieures k-symplectiques.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol 56, 1(1998) 65-80.

[8] A. Awane, M. Goze, *Pfaffian systems, k-symplectic systems.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/boston/London 2000.

[9] P. Dazord, *Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens.* Ann. Ecole Normale Sup. 14 Paris (1981) 465-480.

[10] J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse*. Gauthiers-Villars (1974).

[11] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann. Paris (1969).

[12] M. Goze, Y. Haraguchi, *Sur les r-systèmes de contact*. CRAS, Paris, (1982), T294 SI 95-97.

[13] P. Libermann, C.M. Marle, *Géométrie symplectique Bases théorique de la Mécanique classique*. Tomes 1, 2, 3, U.E.R. de Mathématiques, L.A. 212 et E.R.A. 944, 1020, 1021 du C.N.R.S.

[14] P. Molino, *Géométrie de Polarisation*. Travaux en cours Hermann (1984) 37-53.

[15] P. Molino, *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*. Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser.A, 1,85(1982) 45-76.

[16] Y. Nambu, *Generalized Hamiltonian Dynamics*. Physical Review D Volume 7, Number 8 15 April 1973.

[17] M. Puta, *Some Remarks on the k-symplectic manifolds*. Tensors.109-115.

Université Hassan II-Mohammedia
Faculté des Sciences de Ben Msik
Département de Mathématiques
B.P. 7955, Boulevard Driss Harti
Casablanca, Maroc

Recibido: 5 de Julio de 2000
Revisado: 12 de Diciembre de 2000