Matemáticas en las aulas de secundaria

Sección a cargo de

Antonio Pérez Sanz

La mitad del cuadrado con Geometría Dinámica

por

José Antonio Mora Sánchez

Dieciséis años después de escribir un artículo, normalmente uno no suele volver sobre él. Publicado en 1991 en el número 8 de la *Revista SUMA*, *La mitad del cuadrado* relataba el desarrollo y los resultados de una investigación geométrica realizada en clases de matemáticas con alumnos de 3° de ESO. Desde 2002 todas las soluciones de los alumnos encontradas hasta el momento están diseñadas en forma de *applets* de `Java` en la página de Internet «Geometría Dinámica y calculadoras gráficas en matemáticas» `http://jmora7.com`.

En el tiempo transcurrido entre estas dos mitades del cuadrado han cambiado algunas cosas. Como signos visibles tenemos los ordenadores, nuevos sistemas de proyección, programas de Geometría Dinámica (GD) o Internet y, en otro orden de cosas, han cambiado leyes educativas y sabemos más acerca de cómo aprenden los estudiantes.

La configuración de las clases también ha sufrido transformaciones, las mismas que ha experimentado nuestra sociedad, la diversidad en nuestras clases es mucho mayor que entonces. De un sistema educativo dual –bachillerato y formación profesional–, junto con un tercer grupo constituido por un amplio porcentaje que abandonaba la escuela antes de los 16 años, hemos pasado a un sistema único, con las mismas matemáticas para todos al menos hasta los 15 años.

Los recursos didácticos que utilizábamos a principio de los noventa no iban más allá de las hojas de papel cuadriculado, el lápiz, los instrumentos de dibujo, ocasionalmente algún espejo o transparencia y la siempre presente pizarra para coordinar las distintas ideas que surgían en clase. En estos años la novedad más importante en cuanto a herramientas geométricas ha sido la aparición y desarrollo de los programas de geometría dinámica, especialmente `Cabri II` (1995) y `Geogebra` (2001).

La utilización de estos programas determina tanto los resultados obtenidos por los alumnos como la forma de trabajar en el aula y, lo que es más importante, cambian las estrategias que se ponen en marcha: la exploración de posibilidades, la toma de decisiones, el proceso de generalización, a qué contenidos se presta mayor atención. Veremos que es posible introducir conceptos que, sin una aproximación intuitiva, se encuentran muy lejos de los alumnos de esta edad, como los fractales y el infinito.

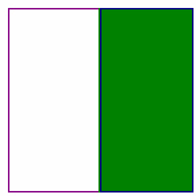
Algunos aspectos de la investigación ya fueron tratados detenidamente en el primer artículo aparecido en *SUMA*: la utilización del lenguaje geométrico, las definiciones, el rigor o las demostraciones en clase de matemáticas. En este segundo artículo nos dedicaremos a analizar esos otros aspectos en los que puede incidir la utilización de la Geometría Dinámica (GD) en la clase de matemáticas: el trabajo de exploración, la geometría en movimiento, la generalización en matemáticas, el tratamiento del área desde diferentes perspectivas o la conexión de las matemáticas con el arte.

Es el momento de situar el trabajo de investigación en el aula de matemáticas: cuando en el curso de 3° de ESO llegamos a la geometría, dejamos de lado el libro de texto durante algo más de un mes, para que sea la clase –profesor incluido–, la que se introduzca en un trabajo cuyo punto de partida es un enunciado aparentemente sencillo para esta edad.

1 . Enunciado

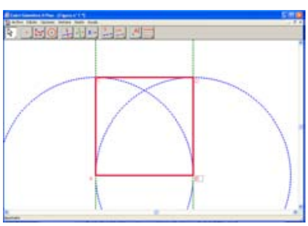
Dado un cuadrado, una forma de construir, dentro de él, un polígono cuya área sea la mitad consiste en *tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con un segmento.*

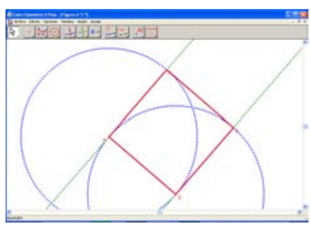
Investiga otros procedimientos.



2 . El trabajo previo. El programa de Geometría Dinámica

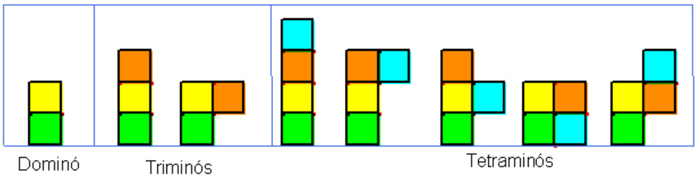
La experiencia se realiza en un aula de ordenadores con los alumnos distribuidos en grupos de 3. La formación inicial previa a la investigación es muy pequeña: una sesión de presentación de las distintas posibilidades del programa y otra de trabajo más o menos libre, con alguna tarea propuesta como el diseño de un campo de deporte ya que contiene muchos elementos geométricos y relaciones sencillas y da pie a utilizar las isometrías.





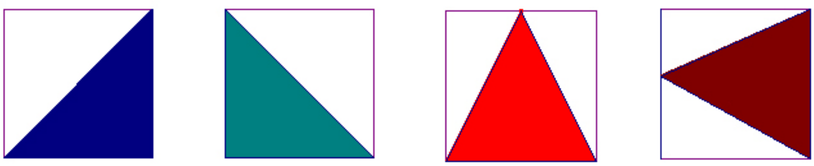
Estas sesiones les han de servir para introducirse en la filosofía del programa, en la idea de dependencia de unos elementos respecto de otros. La construcción de un cuadrado a partir de dos vértices contiguos y hacerlo de forma que siga siendo cuadrado, a pesar de que modifiquemos los vértices iniciales, es una tarea interesante para iniciarse en la forma de pensar cuando se utiliza la GD.

Esta fase se completa con la creación de procedimientos o macros para la realización de construcciones. La creación de una macro que construya cuadrados a partir de dos vértices contiguos nos ahorrará mucho trabajo posteriormente. Para comprobar la utilidad de estos procedimientos, se les pide que la utilicen para obtener los poliminós:



3 . Trabajo de exploración. Toma de decisiones

Las primeras soluciones para la mitad del cuadrado suelen llegar con bastante rapidez, pero no son muy elaboradas, repiten las mismas ideas una y otra vez cambiando la posición de la figura:

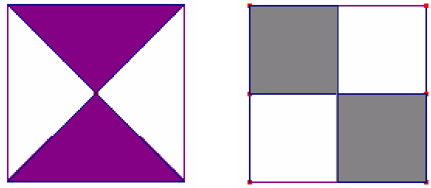


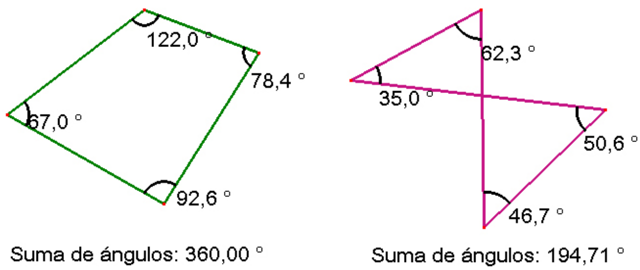
Estas construcciones son útiles para provocar en clase un debate sobre el significado del término procedimiento como secuencia organizada de pasos para llegar a un objetivo marcado.

Suelen aparecer algunas figuras sobre los que se plantea la duda de si serán polígonos o no. Es el caso de las construcciones que contienen arcos o líneas curvas.

Se deja a los estudiantes que sean ellos los que decidan acerca de la validez de ciertas soluciones, sin entrar en definiciones demasiado rigurosas para esta edad aunque, avanzado el trabajo, los alumnos y el profesor irán encontrando argumentos que pueden servir para aceptar o rechazar una figura sobre la que existen dudas.

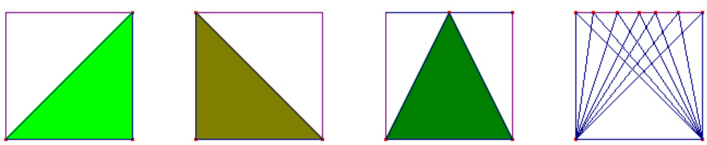
Estos dos polígonos tienen cuatro vértices y cuatro lados aunque uno de ellos incluye un «cruce». En GD es muy fácil pasar del cuadrilátero de la izquierda al de la derecha sin más que desplazar uno de los vértices Les pedimos que calculen los ángulos de un cuadrilátero y estudien lo que le ocurre a la suma de los ángulos cuando desplazamos uno de los vértices. Es interesante que vean lo que ocurre justo en el momento de provocar el cruce de los lados.



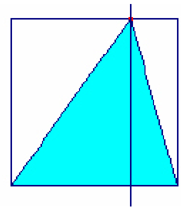


4 . LA GEOMETRÍA ES DINÁMICA

Los primeros triángulos que construyen los alumnos utilizan una diagonal del cuadrado y otro de los vértices para formar un triángulo rectángulo (e isósceles). Pronto toman dos vértices contiguos del cuadrado y el tercero lo sitúan en el punto medio del lado opuesto. Más adelante se dan cuenta de que el vértice superior no tiene por qué estar fijo y lo mueven a cualquier otro punto de ese lado.

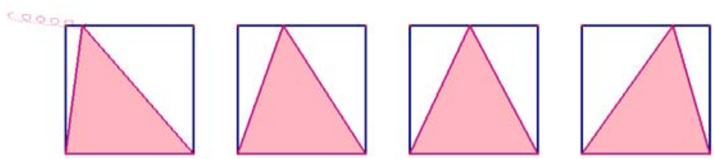


Colocamos un segmento que coincida con el lado, situamos un punto sobre él y medimos las áreas de los distintos rectángulos para comprobar que el área no varía. También llegamos a la conclusión de que estamos tomando triángulos de la misma área, porque la base y la altura de todos ellos son iguales.



Otra comprobación, generalmente mejor aceptada por los alumnos, consiste en trazar una perpendicular que divide al cuadrado en dos rectángulos, en cada uno de los cuales se toma la mitad para formar el triángulo. Si además le pedimos al programa que calcule las áreas del cuadrado y del triángulo, comprobaremos que la del triángulo es siempre la mitad a pesar de la deformación.

No es fácil trasladar al papel todo lo que podemos hacer y ver con un programa de GD. Lo intentaré con una secuencia de imágenes en la que tenemos que imaginar lo que veríamos al realizar la animación del punto que colocamos el lado superior del cuadrado, es decir, lo que ocurriría si los dos vértices inferiores quedaran fijos y el superior se desplaza de izquierda a derecha.

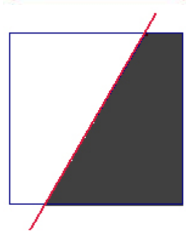


Como se ha comentado en la presentación, se pueden observar todos estos diseños en forma de animaciones en la página de Internet. Se ha procurado que en cada construcción sea posible manipular ciertos objetos móviles para observar su comportamiento.

5 . Generalizar

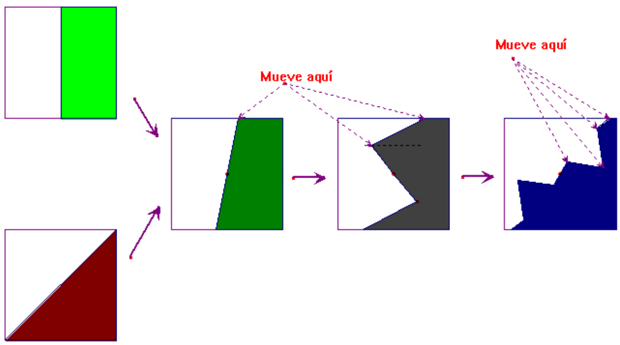
Volvemos la mirada a las soluciones del apartado anterior desde otra perspectiva: los triángulos rectángulo e isósceles que aparecen al principio son sólo casos particulares del procedimiento «tomar dos vértices contiguos y el tercero en el lado opuesto», es decir, estamos ante la generalización de un procedimiento y los primeros que considerábamos son sólo casos particulares del que acabamos de encontrar.

De la misma forma que hemos tratado el triángulo, hay otras soluciones que podemos generalizar. Si tomamos *una línea que pase por el centro del cuadrado*, obtenemos una figura que los alumnos tardan en reconocer como trapecio, porque en los libros siempre aparece el trapecio isósceles. Hacemos que la recta pase por el centro y por un punto del segmento situado sobre



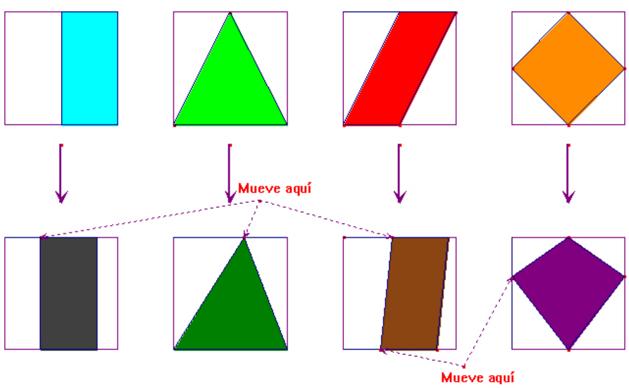
el lado superior (o un punto del segmento sobre un lado y su simétrico respecto del centro del cuadrado) y realizamos la animación de este último para ver los sucesivos trapecios de los que tanto el rectángulo del enunciado (cuando el punto está en el centro del lado), como los dos triángulos rectángulos (cuando está sobre los vértices) son casos particulares.

El proceso de generalización va mucho más lejos, porque no es necesario que la línea sea recta. Para que el polígono construido tenga por área la mitad basta con que se haya diseñado el corte de forma que tenga un centro de simetría en el centro del cuadrado. `Cabri` facilita que los puntos donde cambia de inclinación se puedan colocar sobre un cierto elemento (segmento, arco, etc.), con el fin de crear animaciones en la figura.



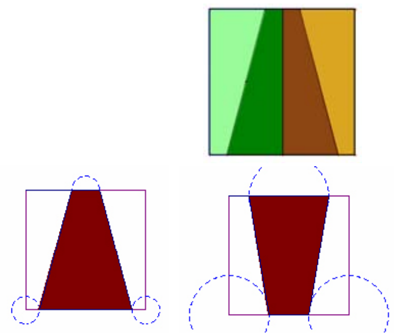
6 . Polígonos animados de ayer y de hoy.

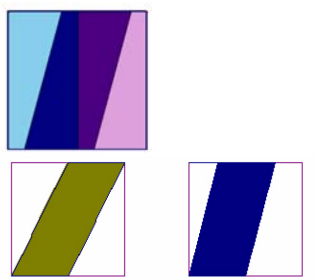
Conforme avanza el trabajo van surgiendo distintos polígonos: cuadrados, triángulos, rectángulos, trapecios, paralelogramos, etc. Es el momento en que podemos plantear a los alumnos que esas figuras pueden adquirir movimiento y relacionarlo con la búsqueda de generalizaciones del apartado anterior.



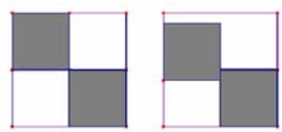
El rectángulo no tiene por qué quedar situado a uno de los lados del cuadrado si pensamos en que basta con que tenga por altura el lado del cuadrado y por base la mitad (o al revés). En GD podemos conseguir que la base del rectángulo se desplace por el lado del cuadrado si conseguimos dibujar un segmento sobre el lado del cuadrado de longitud la mitad de éste (aquí la herramienta compás es la que resuelve los problemas).

Un caso interesante es el del trapecio isósceles al que llegan por dos caminos. El más usual consiste en partir el cuadrado verticalmente en dos rectángulos y en cada uno de ellos tomar la solución del trapecio (utilizando después la simetría axial para completar la otra parte). Hay otro más elaborado que consiste en tomar un punto en una de las dos mitades del lado superior y llevar esa distancia a la otra mitad y a los vértices del lado opuesto como indican las circunferencias del dibujo.



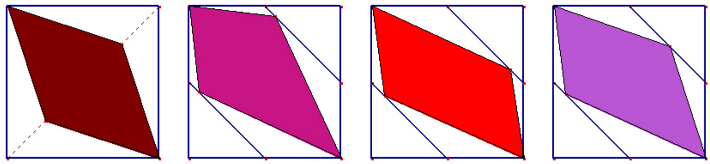


Si en el primero de los dos casos del trapecio anterior en lugar de la simetría axial usamos la simetría central alrededor del centro del cuadrado obtenemos un paralelogramo en lugar de un trapecio. Otra forma de conseguir el paralelogramo es construirlo a partir de dos segmentos situados sobre lados opuestos del cuadrado que midan la mitad y unirlos para formar un cuadrilátero.



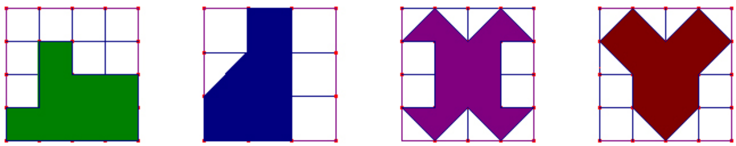
También podemos utilizar el desplazamiento de figuras para revisar soluciones que al principio se pudieron desechar (polígonos cruzados) que ahora se convierten en polígonos sin más que trasladar uno de los cuadrados.

Con los desplazamientos de algunos elementos generamos unos polígonos a partir de otros. Construimos un rombo tomando dos vértices opuestos y los otros dos situados en la diagonal opuesta, dividida en cuatro partes iguales. Ahora trazamos paralelas a la diagonal principal pasando por los otros vértices y construimos nuevos polígonos por desplazamiento de los puntos que están sobre los segmentos dibujados. El primer rombo se convierte en una cometa, al desplazar los puntos la misma distancia en el mismo sentido o en un paralelogramo si se desplazan la misma distancia en sentido opuesto. Si se mueven distancias distintas en cada lado tendremos un cuadrilátero.



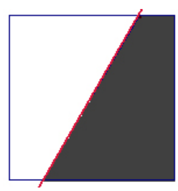
7 . El área

Siempre hay algún alumno al que se le ocurre que puede dividir el cuadrado en 9, 16, 25, ... cuadrados más pequeños y tomar la mitad para formar un polígono, esto suele llevar a algunas soluciones que pueden ser elegantes.



Pero no aportan mucho porque, si insiste en ellas, se convierte en un tedioso problema de dividir por dos y contar la mitad. Como procedimiento es siempre el mismo y la perspectiva que aporta acerca del área es muy estática.

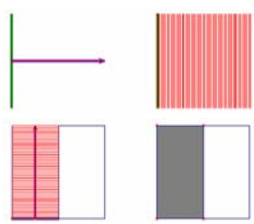
Otra visión más elaborada del área es la que nos lleva a consideraciones acerca de la fórmula para calcular el área de un polígono, por ejemplo cuando obtenemos una colección de triángulos todos con la misma base y la misma altura y concluimos que el área debe ser la misma. También ocurre con los trapecios cuando nos fijamos en que la suma de las dos bases es igual al lado del cuadrado, tendremos entonces que



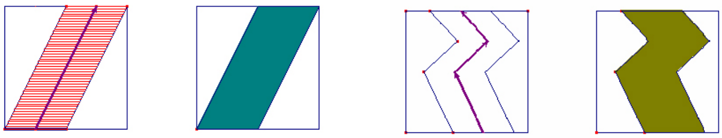
$$S = \frac{B+b}{2}h = \frac{l}{2}l = \frac{l^2}{2},$$

que es la mitad del área del cuadrado. Con argumentos de este tipo podemos llegar a las fórmulas del área del paralelogramo, del triángulo o del rombo.

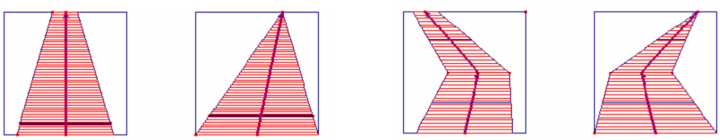
Parker (1988) sugiere ampliar esta concepción del área con otra más dinámica cuando propone considerar el área como la región barrida por un segmento que se desplaza permaneciendo paralelo al original. `Cabri` permite realizar esta acción mediante las herramientas «traza» (mancha dejada por el segmento cuando se mueve) o con «lugar geométrico» (distintas posiciones del segmento cuando se desplaza el punto inicial con que se ha creado).



El desplazamiento puede realizarse según un vector perpendicular al segmento (y tendremos un rectángulo), o que forme un ángulo distinto (paralelogramo). También podrá cambiar de dirección las veces que deseemos (será un polígono sin nombre especial, aunque los cóncavos no son fáciles de encontrar en los libros de texto). El área barrida no depende de la longitud del vector de traslación sino de la distancia entre los segmentos inicial y final. Vendría a ser una idea parecida al principio de Cavalieri en el plano.



Parker va más lejos ya que, si el segmento se acorta en proporción constante a medida que se desplaza, generará un trapecio. El área será la longitud media del segmento por la distancia que atraviesa (otra vez la fórmula del área del trapecio). Para obtener una solución a nuestro problema únicamente nos tendremos que asegurar es que dicha media sea exactamente la mitad del lado del cuadrado. En el límite, si uno de los lados se reduce a un punto y el otro abarca todo el lado del cuadrado, tendremos la solución del triángulo.



Me parece necesario advertir que los dos apartados que siguen: *Aproximaciones al infinito* y *La mitad fractal del cuadrado* no los he experimentado todavía en clase, han surgido de charlas con otros profesores de matemáticas que se han sentido atraídos por *La mitad del cuadrado.*

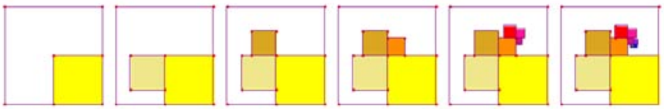
8 . Aproximaciones al infinito

Podemos llevar la mitad del cuadrado a cursos posteriores en los que queramos introducir a los estudiantes en la idea del infinito y hacer aflorar una paradoja clásica que se deriva de un abusivo paso al límite. Las siguientes construcciones son soluciones de la mitad del cuadrado:

La sucesión de los perímetros de las mitades sombreadas es una sucesión $\left\{3 + \frac{n-1}{n}\right\}$ que tiende a 4, pero en el límite, la línea poligonal tiende a la diagonal, es decir, en el límite debería valer $2 + \sqrt{2}$. La cuestión la reconoció Rafael

Losada del IES Pravia de Asturias como una falsa paradoja, porque las poligonales no corresponden a funciones derivables, por lo que no se puede asegurar que la sucesión de las longitudes converja a la longitud del límite.

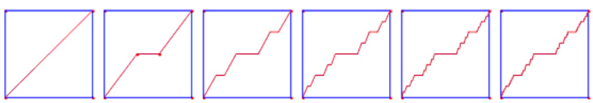
Otra forma de acercarnos al concepto de infinito es mediante una suma infinita de fracciones:



Se trata de $\sum_{i=2}^{\infty} 1/2^i = 1/2$, es decir: $1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$ Se utiliza un procedimiento en el que cada cuadrado nuevo tiene por lado $l\sqrt{2}/2$, siendo l el lado del anterior y se forman figuras que después se puedan repetir por autosemejanza.

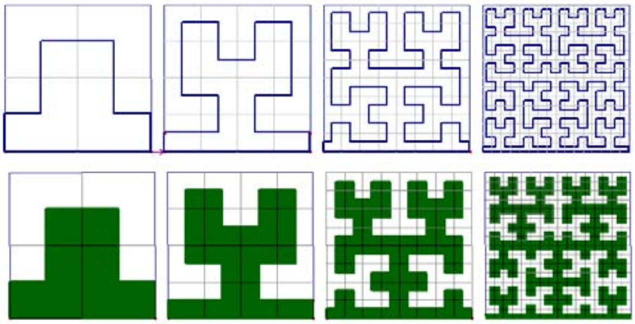
9 . La mitad fractal del cuadrado

Una vez hemos entrado en procesos infinitos, podemos explorar curvas que pueden ser consideradas funciones fractales, es el caso de la escalera del diablo que surgió a partir de conversaciones con José Ángel Bolea del IES de Galapagar, Madrid.



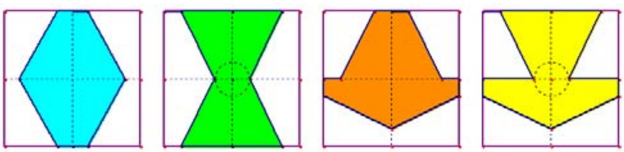
Por otra parte, Fernando Juan, profesor del IES Joan Fuster de Bellreguard, Valencia, estuvo profundizando en la curva de Koch como solución a la mitad del cuadrado mediante una macro; en este caso el perímetro sí que tiende a infinito

Otro ejemplo sorprendente de mitad explorado por Fernando es la curva de Hilbert que tiene la peculiaridad de llenar el cuadrado, es decir, pasa por todos los puntos del cuadrado. En este caso ha sido adaptada para que delimite un polígono de área la mitad del cuadrado:



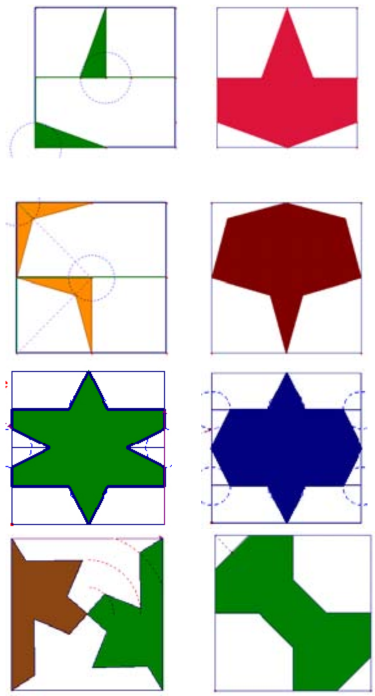
10 . Combinaciones de procedimientos

Volvamos a las clases de tercero. Siempre es posible dividir un cuadrado en otros más pequeños y aplicar en ellos las soluciones obtenidas anteriormente con la condición de que todas ellas formen un polígono (era un requisito del enunciado). Resultan especialmente interesantes cuando a partir de una figura se obtienen las demás por traslación, giro de 90° alrededor del centro del cuadrado o por simetría axial.



Si además dejamos algún elemento móvil en el primer polígono dibujado, tendremos una nueva fuente de inspiración para obtener soluciones que aportarán bellas baldosas con las que más tarde podremos construir mosaicos.

11 . LAS BALDOSAS DE LA ALHAMBRA



Algunas de las soluciones que obtienen los alumnos son estéticamente elegantes. A un cuadrado se le quitan dos pequeños triángulos en dos lados opuestos y los colocamos en los otros dos lados.

Al rectángulo de la parte superior le quitamos y ponemos las figuras coloreadas que aparecen.

Consiguen figuras con forma de estrella.

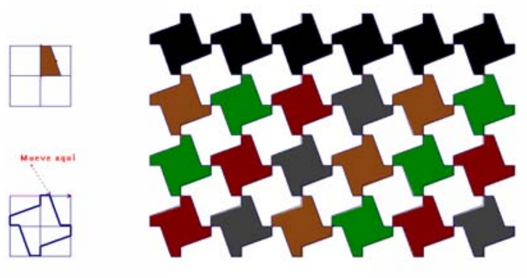
Polígonos con forma de hoja o hueso, pero con una ventaja añadida: que podemos realizar la construcción con uno o más elementos libres y del que dependen todos los demás.

12 . MOSAICOS

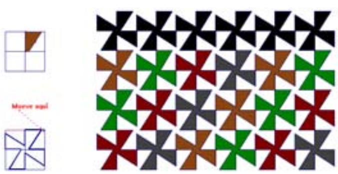
Muchas de estas figuras las encontramos en los diseños nazaríes de la Alhambra de Granada y esta es una nueva vía para enfocar la investigación: conseguir baldosas que, por repetición a base de traslaciones, giros y simetrías, den lugar a mosaicos que recubran el plano.

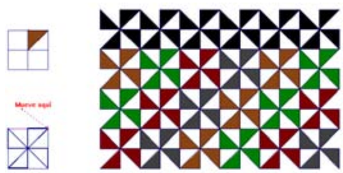
La Alhambra es el palacio del cuadrado, lo encontramos de forma explícita en azulejos que recubren las paredes con combinaciones de colores que no nos dejan indiferentes. Otras veces los cuadrados quedan ocultos tras otras formas.

La solución del trapecio y sus cuatro giros de 90° alrededor de uno de sus vértices crea un interesante mosaico cuando utilizamos traslaciones de la baldosa según dos vectores situados en los lados del cuadrado. El mosaico tiene una característica interesante: los huecos que dejan las zonas sombreadas componen la misma figura que la forma dibujada.

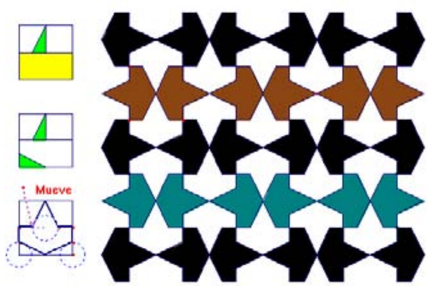


Pero volvamos a la idea del apartado anterior. Si conseguimos que el diseño de la figura básica dependa de un punto y todo el mosaico se construye a partir de esa baldosa mediante isometrías, al cambiar más tarde la posición de ese punto, todo el mosaico se transformará con él. Aquí tenemos dos posiciones más del mismo mosaico. Recordemos ahora que en geometría dinámica podemos realizar una transformación progresiva de uno a otro mediante animaciones que en `Cabri` toman forma de un muelle que estiramos. La acción se desencadena al soltarlo.

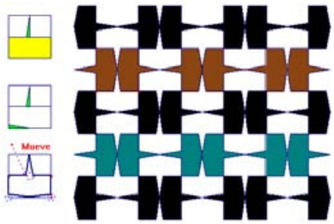


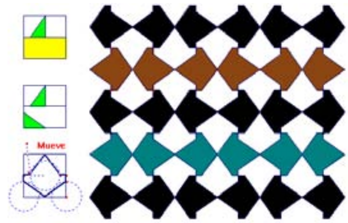


En una de las columnas que rodean al patio de los leones encontramos un mosaico parecido al de la fotografía. A la derecha se reproduce la baldosa a partir del rectángulo que ocupa la mitad inferior del cuadrado, se le quitan dos triángulos en la parte inferior que colocamos en la superior. El movimiento elegido para pasar de una baldosa a otra es la simetría central respecto de los centros de los lados del cuadrado

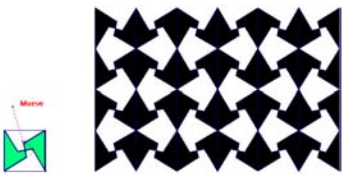


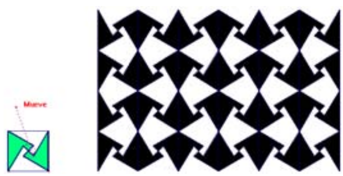
Los triángulos desplazados toman diferentes formas con sólo variar la posición de un punto. Aquí también podemos comprobar las variaciones del mosaico.



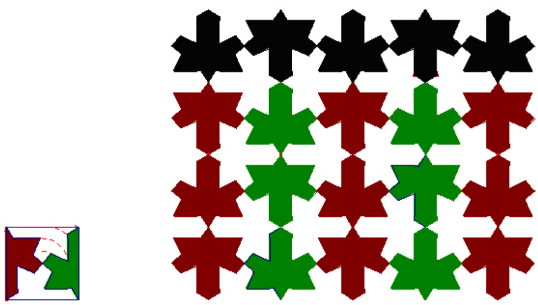


Otra forma de conseguir algunos de los mosaicos proviene de trazar una línea con centro de rotación de orden 4 en el centro del cuadrado y colorear dos de las regiones opuestas de las cuatro en que se ha dividido el cuadrado –otra vez volvemos a situaciones que pueden haber sido desechadas como soluciones para la mitad del cuadrado, en este caso por utilizar polígonos cruzados–, la repetición de estas baldosas se hace por simetría axial y el elemento móvil se encuentra sobre un arco de circunferencia.



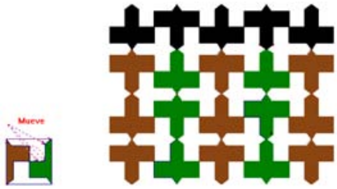


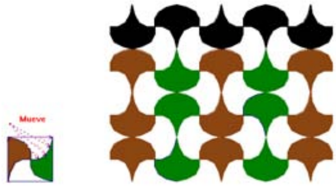
De la misma forma conseguimos la baldosa con forma de hoja:



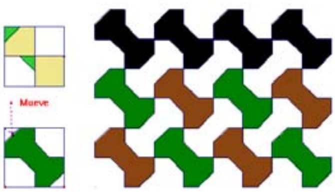
Esta baldosa tiene tres elementos que se mueven sobre arcos de circunferencias. Veamos dos transiciones más del mismo mosaico.

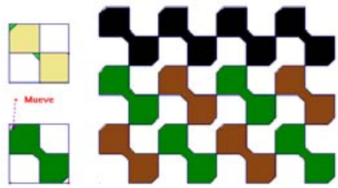
Podemos observar que en todos estos mosaicos la figura que se compone en el fondo blanco es la misma que contiene a las regiones coloreadas.



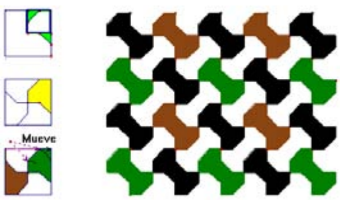


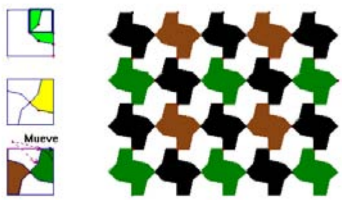
Para acabar esta pequeña muestra intentamos obtener la baldosa de la Alhambra que tiene forma de hueso. La construiremos de dos formas: en primer lugar se diseña a partir de dos cuadrados opuestos a los que se les quita dos pequeños triángulos que se llevan al centro del cuadrado para conectar las dos regiones coloreadas, El mosaico se completa por traslaciones.





Por último trazamos una línea que tiene centro de rotación de orden cuatro con dos puntos móviles y con simetrías axiales respecto de los lados del cuadrado





13 . Los contenidos matemáticos

El trabajo que se propone en la mitad del cuadrado abarca la mayoría de los contenidos geométricos de tercer curso de ESO propuestos en el decreto que establece las enseñanzas mínimas para todo el Estado. En las ideas expuestas se desarrollan de forma muy detallada al menos seis de los ocho contenidos que aparecen en el decreto ministerial.

- Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.
- Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.
- Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.
- Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.
- Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Alguno de estos contenidos es mucho más difícil de conseguir con libro, lápiz y papel que con los programas de GD.

También hay contenidos de otros bloques, especialmente los algebraicos con la obtención de las expresiones literales que se utilizan como fórmulas para el cálculo de longitudes y de áreas. Este trabajo favorece que el alumno valore la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones prácticas.

El currículo de la LOE incluye además una colección de contenidos comunes a todos los bloques que en muchos casos quedan ocultos detrás de la amalgama de ejercicios que vienen detrás de cada lección. En la mitad del cuadrado siempre están presentes los siguientes contenidos, tan matemáticos como las fracciones o el teorema de Thales:

- La planificación y la utilización de estrategias en la resolución de problemas,
- La descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.
- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

También están presentes otros contenidos que no son propios del tercer curso y en algunos casos ni siquiera pertenecen a la etapa obligatoria de la Secundaria, pero que algunos alumnos que tienen especial capacidad o interés serán capaces de iniciar.

14 . Hablamos de aprender matemáticas, metodología, recursos, diversidad. . .

Seguimos con el currículo de la LOE. . . : parece que la metodología o no es importante o nadie sabe qué hacer con ella. En el decreto de mínimos el MEC considera que no es de su competencia y la deja al arbitrio de las Comunidades Autónomas. Más tarde las Comunidades promulgan sus desarrollos de los currículos en los diarios oficiales, pero en la mayoría de los casos la metodología sigue en terreno de nadie, se copian las introducciones y los criterios de evaluación y sólo se preocupan de añadir algunos contenidos en los apartados de números de los primeros cursos y de álgebra en los últimos. Lo demás no importa.

Es como si a nadie le interesara cómo se hacen las clases de matemáticas. Bueno, a las editoriales sí, y de un análisis superficial de los libros de texto podríamos sacar la conclusión de que una lección bien explicada con suficientes ejercicios de práctica es suficiente para que los estudiantes tengan una buena comprensión de las matemáticas y hagan uso de ellas. Los libros raramente proponen una investigación a medio o largo plazo, en la que los estudiantes tengan que aportar ideas matemáticas de varios apartados de las matemáticas, de otras ciencias o relacionarlo con cuestiones de la vida cotidiana, artísticas o culturales.

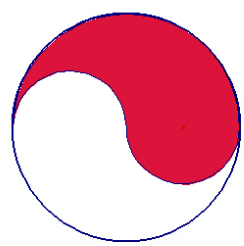
Los documentos oficiales tanto del MEC como de las Comunidades, hacen una apuesta firme por la utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno en geometría. Ponen especial interés en los programas de geometría dinámica porque permiten a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas. Pero no basta con la aparición en el BOE para que esa utilización se pueda llevar a la práctica. En la mayoría de los casos no hay suficientes ordenadores en los centros, la organización de los centros no es flexible, falta formación del profesorado o no se dispone de materiales de enseñanza adecuados. Todos esos problemas se los está encontrando la GD para entrar en las aulas.

En muchos institutos no es tarea fácil llevar a un grupo de matemáticas a un aula de informática, pero tampoco vamos a esperar a que todo esté arreglado para encontrar medio cuadrado. Se pueden buscar soluciones: algunos grupos pueden tener una hora de matemáticas coincidiendo con el horario libre del aula de ordenadores, otros organizan pequeñas aulas de informática con ordenadores cedidos por empresas que los retiran por obsoletos y los programas de GD no necesitan grandes requisitos para funcionar. Necesitamos saber qué ideas tienen los compañeros de otros centros para resolver estas situaciones.

El tratamiento de la diversidad también es una cuestión importante para el profesorado de secundaria y lo seguirá siendo en los próximos años. Sin embargo, no siempre tenemos las herramientas para tratar a alumnos de diferentes niveles en el aula. En una investigación de este tipo es fácil tener éxito con los alumnos. Un enunciado sencillo como éste hace que todos tengan la oportunidad de abordarlo sea cual sea su nivel y dar sus primeros pasos. Tanto los estudiantes avanzados, como los que tienen más dificultades encuentran motivos para trabajar y se enfrentan a retos que están a su nivel. Se crea un ambiente en clase de ayuda de unos a otros y de comunicación de los resultados obtenidos, aunque siempre hay que intentar que los que van más lento también dispongan de un tiempo prudencial para llegar a las soluciones por ellos mismos.

El profesor no se dedica a corregir los errores, podríamos decir que su trabajo es, en cierto modo, el contrario: cuando observa que un procedimiento propuesto por un grupo de alumnos contiene algún error, lo expone a la consideración de la clase para que sean los alumnos los que busquen las causas del error y la forma de corregirlo o bien de modificarlo para redirigirlo hacia otro procedimiento que sea válido. Son muy divertidas las situaciones en las que los alumnos exponen un procedimiento con el que ellos saben lo que quieren conseguir pero, si lo seguimos literalmente paso a paso, lleva a cosas muy alejadas de lo que ellos esperan, las aprovecharemos para que mejoren en su forma de expresarse matemáticamente

El trabajo de la mitad del cuadrado ha tenido continuación con los mosaicos de la Alhambra, pero otro profesor seguramente habría dirigido la investigación por otros caminos:



- La mitad de otros polígonos, ¿y el círculo?. La tercera o la cuarta parte de ciertos polígonos.
- El espacio, cuerpos cuyo volumen sea la mitad del cubo. Tanto `Cabri` como `Geogebra` han creado versiones 3D que se encuentran todavía en los inicios, pero mejorarán en poco tiempo.
- Mosaicos de Escher que se pueden diseñar a partir de medio cuadrado. En nuestro trabajo ya hemos encontrado que en varios casos los espacios blancos que quedaban en las baldosas tienen la misma forma que las regiones coloreadas.

Agradecimientos

Han pasado muchos años desde las primeras *mitades del cuadrado* durante los cuales he repetido varias veces la experiencia, he visto a los alumnos trabajar, encontrar soluciones viejas y nuevas. Para mí ha sido una experiencia gratificante y he conseguido aprender con ellos. También tiene sus dificultades: no es fácil centrar la atención de una clase cuando cada grupo está metido en su trabajo y más cuando están absortos con el ordenador. He tenido la oportunidad de debatir con otros profesores que han leído el relato de la experiencia en el artículo de la *Revista SUMA* o en la versión posterior de mi página web y he podido ver las reacciones de compañeros que han participado en algún curso de formación del profesorado. A todos ellos me gustaría agradecer sus interesantes comentarios y aportaciones.

Quiero reconocer muy especialmente las sugerencias de Salvador Caballero, Fernando Juan, José Ángel Bolea, Rafael Losada, Manuel Sada, José Manuel Arranz y Maite Gómez.

Páginas de Internet

Jose Antonio Mora `http://jmora7.com`
Rafael Losada `http://www.iespravia.com/rafa/rafa.htm`
José Manuel Arranz `http://roble.pntic.mec.es/jarran2/`
Manuel Sada `http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/`
Rafael Miranda `http://www.geometriadinamica.cl/`

Referencias

[1] J. Carvajal, *Recortables geométricos. Secciones modulares del cubo.* Generalitat Valenciana, Valencia, 1986.

[2] D. Crawfort *¿Qué es un cuadrilátero?.* En Walter, pp. 9-12. MEC, Madrid, 1988.

[3] D. Fielker, *Rompiendo las cadenas de Euclides.* MEC, Madrid, 1987.

[4] J.A. García Cruz, Actividades de Geometría. *Apuntes de Educación, Naturaleza y Matemáticas* **20** (1986) pp. 12-13. Anaya, Madrid, 1986.

[5] M. Guzmán, *Estructuras fractales y sus aplicaciones.* Labor, Madrid, 1993.

[6] J.A. Mora, La mitad del cuadrado *Revista SUMA* **8** (1991), pp. 11-29. FESPM, Madrid, 1991.

[7] J.A. Mora, J. Rodrigo, *Mosaicos.* Proyecto Sur, Granada, 1993.

[8] J.A. Mora, *Matemáticas con Cabri II.* Proyecto Sur, Granada, 1999.

[9] J.A. Mora, Geometría dinámica para el análisis de obras de arte. *Revista UNIÓN* **9** (2007).

[10] J. PARKER, *Revisando el concepto de área.* En WALTER, pp. 23-31. MEC, Madrid, 1988.

[11] C. RUIZ GARRIDO Y R. PÉREZ GÓMEZ, Visiones matemáticas de la Alhambra. El color. *Revista Epsilon* (1987). Monográfico dedicado a la Alhambra, pp. 51-59.

[12] M. WALTER, *Geometría* MEC. Colección Documentos y Propuestas de Trabajo, Madrid, 1988.

José Antonio Mora Sánchez
IES San Blas
Alicante
Correo electrónico: `jmora7@gmail.com`