Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato* TEX. *Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 29 de febrero de 2008.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 81

Sean $\{x_k\}_{1\le k\le n}$ números reales positivos; probar que

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\arctan x_k}\right)\ge\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

Propuesto por Mihály Bencze
Brasov, Rumanía

[1]En la elaboración de este número han colaborado M. Benito Muñoz y E. Fernández Moral.

PROBLEMA 82

Probar la identidad

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x(1-x)} \right\} dx = 2 + \lim_{n\to\infty} (2\log n - n + S_n),$$

donde $\{a\}$ denota la parte fraccionaria de a y $S_n = \sum_{k=4}^{n-1} \sqrt{\frac{k-3}{k+1}}$.

Propuesto por Ovidiu Furdui
Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan

PROBLEMA 83

Sean $\lambda > 0$ un número real y $p \geq 1$ un número entero. Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\lambda k^{p-1}}{x}\right)^{\frac{x}{n^p}}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense de Madrid, Madrid

PROBLEMA 84

Sean x e y números reales positivos y distintos. Se definen la media aritmética A, la media geométrica G, la media armónica H y la media logarítmica L de x e y por

$$A = \frac{x+y}{2}, \qquad G = \sqrt{xy}, \qquad H = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \qquad \text{y} \qquad L = \frac{x-y}{\ln x - \ln y},$$

respectivamente. Probar que

$$G < \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2\sqrt{AH}}{A+H}\right) \frac{A^2 H}{2}} < L.$$

Propuesto por Juan Carlos González Vara
Universidad Europea Miguel de Cervantes, Valladolid

Problema 85

Sean a, b, c los lados de un triángulo ABC y sean r y R los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right) \geq 2-\frac{r}{R}.$$

Propuesto por I. V. Maftei y P. G. Popescu
Bucarest, Rumanía

Problema 86

En un plano se dan cuatro puntos fijos A, B, C y D. Construir un cuadrado de lados contenidos en cuatro rectas a, b, c y d de forma que $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ y $D \in d$. Demostrar que se pueden construir seis de estos cuadrados.

Propuesto por César Beade Franco
I. E. S. “Fernando Blanco”, Cee, La Coruña

Problema 87

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA, AB en los puntos D, E, F. Sean D', E', F' puntos variables en las rectas EF, FD, DE.

1. Demostrar que AD', BE', CF' concurren o son paralelas si y sólo si DD', EE', FF' concurren o son paralelas.

2. Si DD', EE', FF' son paralelas, hallar el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas AD', BE', CF'. ¿En qué casos dicho lugar es una circunferencia?

Propuesto por Andrés Sáez Schwedt
Universidad de León, León

PROBLEMA 88

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Si $S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_2 - x_i^2}{S_1 - x_i} \leq n \frac{S_2}{S_1}.$$

Propuesto por Ovidiu Bagdasar
Babes Bolyai University, Cluj Napoca, Rumanía

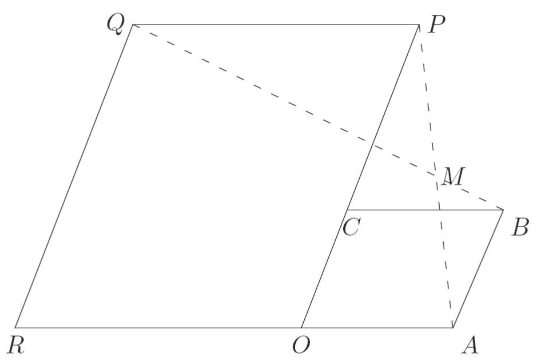
PROBLEMA 77 (Corrección)

Sean los paralelogramos $OABC$ y $OPQR$ como se indican en la figura y definiamos el punto M como la intersección de los segmentos PA y QB.

a) Probar que los puntos R, C y M son colineales.

b) Suponiendo que $OABC$ es un cuadrado, probar que el triángulo $\triangle RMA$ es rectángulo en M si y sólo si $OPQR$ es también un cuadrado.

c) Determinar el lugar geométrico de los puntos M para el caso en el que $OABC$ es un cuadrado fijo y $OPQR$ es un cuadrado variable.



Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense de Madrid, Madrid

Soluciones

Problema 54

Si en un triángulo cualquiera denotamos por s el semiperímetro, por r el radio del círculo inscrito y por R el radio del círculo circunscrito, entonces

$$\sqrt[3]{4srR} \leq \sqrt{\frac{r^2 + 4rR + 5s^2}{12}} \leq \frac{2s}{3}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid

Solución

Si a, b, c son los lados del triángulo, son bien conocidas las identidades

$$abc = 4Rrs \qquad \text{y} \qquad ab + bc + ac = r^2 + 4Rr + s^2.$$

Con ellas podemos expresar la desigualdad inicial como

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + ac + 4s^2}{12}} \leq \frac{2s}{3}$$

y, si desarrollamos s en esta expresión, podemos escribirla como

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{3(ab + bc + ac) + (a^2 + b^2 + c^2)}{12}} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Ahora para probar estas dos desigualdades vamos a utilizar la desigualdad $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$ que se cumple para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{3(ab + bc + ac) + (a^2 + b^2 + c^2)}{12}} &\geq \sqrt{\frac{3(ab + bc + ac) + (ab + bc + ac)}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{ab + bc + ac}{3}} \geq \sqrt{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \sqrt[3]{abc}\end{aligned}$$

donde se ha usado la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Por otro lado,

$$\frac{3(ab + bc + ac) + (a^2 + b^2 + c^2)}{12} = \frac{(a + b + c)^2 + (ab + ac + bc)}{12}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{9} + \frac{3(ab+bc+ac)-(a+b+c)^2}{36}$$
$$= \frac{(a+b+c)^2}{9} + \frac{(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)}{36} \leq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

de donde se obtiene la segunda desigualdad sin más que tomar raíces cuadradas.

Solución enviada por José Miguel Manzano Prego
Universidad de Granada

También resuelto por Miguel Amengual, E. M. García y S. G. Moreno, Javier Gómez y el proponente.

Se ha recibido una solución incompleta.

NOTA. En la solución anterior resulta sencillo comprobar que las igualdades se alcanzan para $a = b = c$; es decir, para un triángulo equilátero. Este hecho está implícito en todas las soluciones recibidas, pero únicamente Miguel Amengual lo pone de manifiesto.

PROBLEMA 57

Para $x > 0$ definimos la función Gamma de Euler, $\Gamma(x)$, como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Para cada número entero $k \geq 0$, denotamos $a_k(x) = \sqrt[x+k]{\Gamma(x+k+1)}$. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0(x)a_1(x)\cdots a_{n-1}(x) - a_n(x)a_{n+1}(x)\cdots a_{2n-1}(x)}{x^{n-1}}.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Kalamazoo, Michigan

SOLUCIÓN

El límite deseado es $-n^2e^n$. Para calcularlo, vamos a denotarlo con L. Usamos los símbolos de Landau, O y o, con sus significados usuales: $f(x) = O(g(x))$ si existe una constante C tal que la desigualdad $|f(x)| < Cg(x)$ se cumple para todo x grande, y $f(x) = o(g(x))$ si $f(x)/g(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Las constantes implicadas en el símbolo O pueden depender de n. Usamos $\log x$ para denotar el logaritmo natural.

Por la equivalencia de Stirling para la función Γ, deducimos que

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x-1}{e}\right)^{x-1} x^{O(1)} \tag{1}$$

cuando $x \to \infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_k(x) = \Gamma(x+k+1)^{1/(x+k)} &= \frac{x+k}{e}(x+k+1)^{O(1/(x+k))} \\ &= \frac{x}{e}\left(1+\frac{k}{x}\right)\exp\left(O\left(\frac{\log x}{x}\right)\right) = \frac{x}{e}\exp\left(O\left(\frac{\log x}{x}\right)\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora escribimos $L = \lim_{x\to\infty} u(x)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n+k}(x)}{x}$, donde

$$u(x) = -x + x\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(x)}{a_{n+k}(x)} = x(e^{v(x)}-1),$$

tomando $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(\log a_k(x) - \log a_{n+k}(x))$. Por la aproximación (2), se verifica que, cuando $x \to \infty$, $\frac{a_k(x)}{a_{n+k}(x)} = 1 + o(1)$ y por lo tanto $v(x) \to 0$. Usando que $(e^y - 1)/y \to 1$ si $y \to 0$ y la igualdad asintótica $\frac{a_k(x)}{x} = \frac{1}{e}(1+o(1))$, que se deduce de (2), obtenemos que

$$L = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+k}(x)}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\Big(x(e^{v(x)}-1)\Big) = e^{-n}\lim_{x\to\infty} xv(x).$$

Sea $M := \lim_{x\to\infty} xv(x)$. Escribiendo $\Gamma(x+k+1) = (x+k)\Gamma(x+k) = \ldots = (x+k)\cdots x\Gamma(x)$, se cumple que

$$\begin{aligned} \log a_k(x) - \log a_{n+k}(x) &= \frac{\log\Gamma(x) + \sum_{i=0}^{k}\log(x+i)}{x+k} \\ &\quad - \frac{\log\Gamma(x) + \sum_{i=0}^{n+k}\log(x+i)}{x+n+k} \\ &= \frac{\log\Gamma(x) + (k+1)\log x + \sum_{i=0}^{k}\log(1+i/x)}{x+k} \\ &\quad - \frac{\log\Gamma(x) + (n+k+1)\log x + \sum_{i=0}^{n+k}\log(1+i/x)}{x+n+k} \\ &= \log\Gamma(x)\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+n+k}\right) \\ &\quad + \log x\left(\frac{k+1}{x+k} - \frac{n+k+1}{x+n+k}\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\log\left(1+\frac{i}{x}\right) = O\left(\frac{i}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, cuando $x \to \infty$. Tomando logaritmos en la fórmula (1) deducimos que $\log\Gamma(x) = x\log x - x + O(\log x)$. De este hecho y de las identidades

$$\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+n+k} = \frac{n}{(x+k)(x+n+k)}$$

y

$$\frac{k+1}{x+k} - \frac{n+k+1}{x+n+k} = \frac{-xn+O(n^2)}{(x+k)(x+k+n)} = \frac{-xn}{(x+k)(x+k+n)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

deducimos que

$$\begin{aligned}\log a_k(x) - \log a_{n+k}(x) &= \frac{n(\log\Gamma(x) - x\log x)}{(x+k)(x+n+k)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\\ &= -\frac{nx}{(x+k)(x+n+k)} + O\left(\frac{\log x}{x^2}\right),\end{aligned}$$

lo que implica

$$xv(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{nx^2}{(x+k)(x+n+k)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right) = -n^2 + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

y, por tanto, $M = -n^2$. Así se concluye que el límite solicitado es $L = e^{-n}M = -n^2e^{-n}$.

Solución enviada por Florian Luca
Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia (Michoacán), México
También resuelto por E. M. García y S. G. Moreno, V. Lanchares, V. Vicario y el proponente.

Problema 58

Sean a y n números naturales con $a \geq 4$. Probar que existen $x, y, z \in \mathbb{N}$ tales que

$$(4a-10)^n - (a-4)^n = x(a-1) + y(a-2) + z(a-3).$$

Propuesto por P. G. Popescu y I. V. Maftei
Bucarest, Rumanía

Primera solución

Usando la conocida identidad:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

y sustituyendo $x = 4a-10$ e $y = a-4$, queda $(4a-10)^n - (a-4)^n = (3a-6)R_n$, con

$$R_n = (4a-10)^{n-1} + (4a-10)^{n-2}(a-4) + \cdots + (4a-10)(a-4)^{n-2} + (a-4)^{n-1}.$$

Con lo que hemos encontrado la solución $x = y = z = R_n$, ya que

$$\begin{aligned}(a-1)x + (a-2)y + (a-3)z &= (a-1+a-2+a-3)R_n \\ &= (3a-6)R_n = (4a-10)^n - (a-4)^n\end{aligned}$$

Por último, basta añadir que $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ puesto que cada sumando es entero y positivo.

Solución enviada por Javier Gómez (estudiante)
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

Segunda solución

Probaremos un resultado más general: Si N y d son números naturales tales que $N > d(d+1)$, existen números naturales x, y, z tales que $N = x(d+1) + yd + z(d-1)$.

En efecto, dividiendo N por d: $N = dq + r$, donde el cociente q y el resto r satisfacen que $q > d+1$ y $0 \leq r \leq d-1$, de donde se deduce que $q > r+2$. Poniendo entonces $x = r+1$, $y = q-r-2$ y $z = 1$, se tiene que

$$x(d+1) + yd + z(d-1) = d(x+y+z) + x - z = dq + r = N.$$

En el caso del enunciado, salvo si $n = 1$, en que la conclusión es trivial, tomando $N = (4a-10)^n - (a-4)^n$ y $d = a-2$ se verifica la condición $N > d(d+1)$, ya que

$$N \geq (4a-10)^2 - (a-4)^2 = (5a-14)(3a-6) > (a-1)(a-2),$$

(la última desigualdad se utiliza que $a \geq 4$). Con esto hemos concluimos.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander

También resuelto por E. M. García y S. G. Moreno, V. Lanchares, M. Peña, V. Vicario y los proponentes

PROBLEMA 59

Un rajá dejó a sus hijas un cierto número de perlas y determinó que la división se hiciera del siguiente modo. La hija mayor se quedaría con una perla y con ℓ/p de las que quedaran, la segunda hija recibiría dos perlas y ℓ/p de las restantes, la tercera joven recibiría tres perlas y ℓ/p de las que quedaran, y así sucesivamente, hasta que la totalidad de las perlas estuviesen repartidas. ¿Cuántas perlas y cuántas hijas tenía el rajá? ¿Para qué valores de ℓ y p el reparto es equitativo?

NOTA. Este problema generaliza el titulado “Las perlas del rajá” que aparece en el capítulo XXIII del libro *O homem que calculava*, de Malba Tahan (Júlio César de Mello e Souza). El problema original se plantea para los valores $\ell = 1$ y $p = 7$, y en él se declara que, además, el reparto es equitativo. En nuestra versión p y ℓ son enteros tales que $p \geq 2$ y $1 \leq \ell \leq p-1$.

Propuesto por E. M. García Caballero y S. G. Moreno
Universidad de Jaén, Jaén

NOTA. En el momento en el que se publicó esta propuesta debió aparecer con un asterisco junto a su enunciado ya que únicamente disponíamos de una solución parcial para la misma que presentamos a continuación. Los responsables de la sección pedimos por ello disculpas. Cualquier aportación a la resolución completa del problema que se reciba a partir de este momento será considerada para su publicación.

Solución parcial

Supongamos que el rajá tiene m hijas ($m \geq 1$). Sea $k_j + j$, $j = 1, \ldots, m$, el número de perlas disponibles antes de dar su parte correspondiente a la hija j-ésima. En el caso $m = 1$ (una única hija), es claro que $k_1 = 0$. Para $m > 1$, y según el reparto descrito, se verificará que $k_i + i - (i + \ell k_i/p) = k_{i+1} + i + 1$, para $i = 1, \ldots, m-1$ y $k_m = 0$; de manera equivalente,

$$k_i = p(k_{i+1} + i + 1)/(p - \ell), \quad \text{para } i = 1, \ldots, m-1 \text{ y } k_m = 0. \tag{1}$$

Usando (1) ya estamos en condiciones de obtener una condición equivalente al reparto equitativo para el caso no trivial. Si la hija i-ésima recibe c_i perlas, se satisface que $c_{i+1} = (p - \ell)(c_i + 1)/p$, puesto que

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= i + 1 + \frac{\ell}{p} k_{i+1} = i + 1 + \frac{\ell}{p}\Big(\frac{p-\ell}{p} k_i - i - 1\Big) \\ &= i + 1 + \frac{\ell}{p}(k_i - 1 - c_i) = \frac{p-\ell}{p}(c_i + 1). \end{aligned}$$

Como la m-ésima hija recibe m perlas, la equitatividad en el reparto equivale a que se verifique $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = m$, o bien, sustituyendo $c_{i+1} = c_i = m$ y despejando en la relación anterior,

$$p = (m+1)\ell. \tag{2}$$

A partir de (1), mediante una sencilla manipulación algebraica y usando la suma de series aritmético-geométricas, tenemos que

$$k_1 = \sum_{j=1}^{m-1} (j+1)\Big(\frac{p}{p-\ell}\Big)^j = \frac{p(p-2\ell)}{\ell^2} + \frac{p^m(m\ell - p + \ell)}{\ell^2 (p-\ell)^{m-1}}.$$

La condición para que se pueda efectuar el reparto es que k_1 sea un entero no negativo. Analizaremos tres casos:

i) Consideremos primero $\ell = 1$. Si $p = 2$, con cualquier valor entero no negativo de m obtenemos $k_1 = 2^m(m-1)$, de modo que es posible hacer el reparto; en este caso, y para valores $m > 1$, el reparto no es equitativo al no poder verificarse (2). Si $p > 2$, las únicas posibilidades que hacen a k_1 entero son el caso trivial $m = 1$ y el caso $m = p - 1$; además, cuando $m = p - 1$ el reparto resulta equitativo con $c_i = i + k_i/p = m$, para $i = 1, \ldots, m$.

ii) Si $\ell = p - 1$, para cada entero $m \geq 2$ obtenemos $k_1 = \sum_{j=0}^{m-2}(m - j)p^{m-j-1}$, por lo que se podrá efectuar el reparto, aunque no será equitativo al no poder verificarse (2).

iii) Finalmente, si $1 < \ell < p-1$ nos queda, tras algunas manipulaciones,

$$k_1 = -1 + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{1}{(p-\ell)^{m-1}} \sum_{j=2}^{m} j \binom{m+1}{j+1} \ell^{j-1}(p-\ell)^{m-j}.$$

Por ejemplo, para $p = \ell + a = (n+1)a$, con a y n enteros positivos y $a \geq 2$, llegamos a que

$$k_1 = -1 + \frac{m(m+1)}{2} + \sum_{j=2}^{m} j \binom{m+1}{j+1} n^{j-1},$$

siendo posible realizar el reparto para cualquier valor entero $m > 1$, que resulta no equitativo. Es posible dar otro tipo de ejemplos, pero el análisis completo de este caso $(1 < \ell < p-1)$ queda abierto.

Solución enviada por los proponentes.

NOTA. V. Lanchares, de la Universidad de La Rioja, nos hace llegar el siguiente comentario respecto al problema anterior: Este problema ya aparece en el libro de Leonardo de Pisa, *Liber Abaci*, publicado en el año 1202. En concreto es el problema sobre *el legado de la fortuna de un hombre*, en el que lo que se reparte es la fortuna de un hombre en *bezants*, la moneda de la época. Además, el problema aparece generalizado, aunque no en el sentido en que se propone aquí. El problema puede consultarse en la traducción de Laurence Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern english of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer, Nueva York, 2002, pág. 399.

PROBLEMA 60

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

a) Probar que si $t \geq 1$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[t]{\frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(b-a)(t+1)}} \leq \sqrt[t]{\frac{a^t + b^t}{2}}.$$

b) Probar que si $0 \leq t \leq 1$

$$\sqrt[t]{\frac{a^t + b^t}{2}} \leq \sqrt[t]{\frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(b-a)(t+1)}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

c) Deducir de b) que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Nota. La expresión intermedia en el apartado c) se denomina media idéntrica de a y b.

Propuesto por J. B. Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid

Solución

La *desigualdad de Hermite–Hadamard* establece que si f es una función convexa sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

El apartado a) es una consecuencia directa de la desigualdad de Hermite–Hadamard en el caso de considerar las funciones convexas $f(x) = x^t$, $x \geq 0$, $t \geq 1$. De igual modo, para el apartado b) basta considerar $f(x) = -x^t$, $x \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$. En ambos apartados, para el caso $a = b$, la expresión intermedia del enunciado no está bien definida, y debe ser entendida como el límite de dicha expresión cuando b tiende a a, cuyo valor es a.

Para el caso $f(x) = -\ln x$ la desigualdad de Hermite–Hadamard toma la forma

$$-\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq -\frac{(b\ln b - b) - (a\ln a - a)}{b-a} \leq \frac{-\ln a - \ln b}{2}, \quad a \neq b,$$

o bien

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq -1 + \ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)} \geq \ln\sqrt{ab}, \quad a \neq b,$$

y no hay más que tomar exponenciales para dejar probado el último apartado.

NOTA. Usando la desigualdad de Hermite–Hadamard con $f(x) = e^x$, también podemos obtener la desigualdad entre la media geométrica, la media logarítmica y la media aritmética, $\sqrt{ab} \leq \frac{a-b}{\ln a - \ln b} \leq \frac{a+b}{2}, \quad a \neq b$.

Solución enviada por E. M. García Caballero y S. G. Moreno
Universidad de Jaén, Jaén
También resuelto por Jaime Vinuesa y el proponente.

PROBLEMA 61

Un grupo de 100 establecimientos públicos reciben a diario un solo ejemplar de un determinado número de periódicos de entre el total de 20 distintos que se distribuyen en la zona. Calcular el máximo número de ejemplares que pueden distribuirse al grupo de manera que no existan 90 establecimientos tal que cada uno de ellos reciba al menos 15 periódicos en común con el resto.

Propuesto por C. Balbuena, M. Cera, P. García-Vázquez, X. Marcote y J. C. Valenzuela
Universidad de Cádiz, Universitat Politècnica de Catalunya y Universidad de Sevilla

SOLUCIÓN

Denotemos por E_i, $i = 1, \ldots, 100$ a cada uno de los establecimientos, y por P_j, $j = 1, \ldots, 20$, a cada uno de los distintos periódicos que se distribuyen entre los establecimientos. Supongamos que los establecimientos $E_{17}, \ldots, E_{100}$ reciben todos los periódicos desde P_1 hasta P_{20}, y que, en cambio, cada E_i recibe todos menos el P_i siendo $i = 1, \ldots, 16$. Con este reparto, en total se distribuyen 1984 periódicos. Obsérvese que para cualesquiera 90 establecimientos, al menos 6 de ellos pertenecen al conjunto $\{E_1, \ldots, E_{16}\}$. Es decir, como cada uno de estos últimos deja de recibir un periódico distinto, impiden que al menos 6 de los periódicos puedan ser comunes a los 90 establecimientos. Por lo tanto, es evidente que el número de periódicos que reciben los 90 en común es a lo sumo 14.

Veamos que 1984 es el número máximo posible de periódicos distribuidos en las condiciones exigidas. Supongamos que se distribuyen 1985 periódicos. Sea d_i el número de periódicos que se reciben en el establecimiento E_i y supongamos que los establecimientos están ordenados de manera que $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_{100}$. Obsérvese que $d_{16} = 20$, ya que si $d_{16} < 20$ entonces

$$1985 = d_1 + \ldots + d_{100} < 16 \times 19 + 20 \times 84 = 1984,$$

lo cual es absurdo. Por otro lado, si $d_{11} = 20$ entonces $E_{11}, \ldots, E_{100}$ recibirían todos los periódicos. Luego $d_{11} \leq 19$; pero además, si $d_{11} \leq 18$ entonces

$$1985 = d_1 + \ldots + d_{100} \leq 18 \times 11 + 20 \times 89 = 1978,$$

lo cual es absurdo. En definitiva $d_{11} = 19$. En conclusión $E_{16}, \ldots, E_{100}$ reciben todos los periódicos y $E_{11}, \ldots, E_{15}$ tienen en común todos salvo a lo sumo 5, con lo cual $E_{11}, \ldots, E_{100}$ reciben al menos 15 en común, en contra de las hipótesis.

Solución enviada por los proponentes.

Problema 63

Determinar qué números naturales N pueden escribirse como

$$N = m + (m+1) + \cdots + (m + (n-1)),$$

con $m \geq 1$ y $n > 1$. Cuando efectivamente se pueda, mostrar un proceso constructivo de cómo hacerlo.

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

Solución

Si N puede expresarse de esa forma entonces, sin más que sumar los términos de la progresión aritmética correspondiente, $N = \frac{(2m+n-1)n}{2}$. Es decir, $2N = (2m+n-1)n$. De aquí se deduce que $2N$ es el producto de un número par y otro impar, siempre que $n > 1$. Por tanto si N es una potencia de 2 no puede escribirse como suma de números consecutivos. Por el contrario, cualquier otro número sí. Para encontrar una descomposición procedemos del siguiente modo:

1. Escribimos $2N$ como producto de una potencia de 2 por un número impar $2N = 2^k I$, donde $k \geq 1$ e $I \geq 3$.

2. Tomamos n igual al menor de los factores $(2^k,\, I)$ y $2m+n-1$ igual al mayor de ellos. Es decir: $n = \min(2^k, I)$, $m = \frac{|2^k - I|+1}{2}$.

Como $k \geq 1$ e $I \geq 3$, esto garantiza que $m \geq 1$ y $n > 1$.

En realidad el algoritmo anterior se puede generalizar para obtener todas las posibles formas de escribir N de la manera solicitada. Para ello basta descomponer el número $2N$ como producto de un número par $P \neq 2N$ y otro impar $I \geq 3$. Tómese $n = \min(P, I)$ y $m = \frac{|P-I|+1}{2}$. Así, el total de formas diferentes en que un número dado se puede descomponer en suma de consecutivos puede calcularse en función de la descomposición en factores primos de $2N$. Si $2N = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, el total de descomposiciones posibles es $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) - 1$. Nótese que esta expresión es 0 si $2N$ es una potencia de 2.

Solución enviada por Víctor Lanchares Barrasa
Universidad de La Rioja, Logroño.

También resuelto por C. Beade, M. Fernández, E. M. García y S. G. Moreno, E. J. Gómez, J. M. Gutiérrez, M. Peña, V. Vicario, Jaime Vinuesa y el proponente.

NOTA. El proponente de la solución nos envía una función para el manipulador algebraico *Mathematica* que calcula todas las posibles descomposiciones para un entero N siguiendo el método constructivo de su solución:

```
descomp[n_] := Block[{listdiv, res = {}},
  listdiv = Select[Divisors[2*n], OddQ[#] &];
  For[i = 2, i <= Length[listdiv], i = i + 1,
      imp = listdiv[[i]]; p = 2*n/imp; m = (Abs[p - imp] + 1)/2;
      AppendTo[res, Range[m, m + Min[p, imp] - 1]]]; res]
```

E. J. Gómez indica que el problema ya era conocido; que puede verse, por ejemplo, en el libro "Number Theory for Beginners" de A. Weil, donde aparece como problema III.4.

Problema 64

Sea (a, b) una pareja de números primos tales que $b-a=t$, con t un entero positivo, y $\sigma(n)$ la función que nos da la suma de los divisores de n. Definimos las funciones

$$R_t(a,b)=\prod_{p|ab(a+b)} p \quad \text{y} \quad S_t(a,b)=\frac{\sigma(a^2b)+\sigma(ab^2)}{t}.$$

a) Sea $\{p_k\}_{k\geq 1}$ la sucesión de números primos tales que (p_k, p_k+2) es una pareja de primos (los denominados primos gemelos). Probar que $S_2(p_k, p_k+2)$ es un entero positivo y que $2(p_k+1) < R_2(p_k, p_k+2) < S_2(p_k, p_k+2)$. Si admitimos que existen infinitos términos en la sucesión $\{p_k\}_{k\geq 1}$, argumentar por qué existe una subsucesión convergente de la sucesión $\{R_2(p_k, p_k+2)/S_2(p_k, p_k+2)\}_{k\geq 1}$.

b) Probar que $S_4(a, b)$ y $S_6(a, b)$ son enteros.

c) Determinar una pareja (a, b) para la que $S_t(a, b) < R_t(a, b)$ y otra distinta para la que $S_t(a, b)$ no sea entero.

Propuesto por Juan López González (estudiante)
Universidad Autónoma de Madrid, Madrid

Solución

a) Comenzamos probando que $S_2(p_k, p_k+2)$ es un número entero positivo. Para ello calculamos $\sigma(p_k^2(p_k+2))$ y $\sigma(p_k(p_k+2)^2)$:

$$\begin{aligned}
\sigma(p_k^2(p_k+2)) &= 1+p_k+(p_k+2)+p_k^2+p_k(p_k+2)+p_k^2(p_k+2)\\
&= p_k^3+4p_k^2+4p_k+3, \qquad \text{y}\\
\sigma(p_k(p_k+2)^2) &= 1+p_k+(p_k+2)+p_k(p_k+2)+(p_k+2)^2+p_k(p_k+2)^2\\
&= p_k^3+6p_k^2+12p_k+7.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$S_2(p_k, p_k+2)=\frac{2p_k^3+10p_k^2+16p_k+10}{2}=p_k^3+5p_k^2+8p_k+5;$$

es decir, $S_2(p_k, p_k+2)$ es un número entero positivo.

A continuación establecemos las desigualdades $2(p_k+1) < R_2(p_k, p_k+2) < S_2(p_k, p_k+2)$. $R_2(p_k, p_k+2)$ es el producto de los factores primos del número $p_k(p_k+2)(p_k+p_k+2) = 2p_k(p_k+1)(p_k+2)$. Es claro que 2, p_k y p_k+2 son divisores primos distintos del número $2p_k(p_k+1)(p_k+2)$. (Nótese que $p_k \neq 2$ ya que por hipótesis p_k y p_k+2 son primos.) Por tanto, $R_2(p_k, p_k+2) \geq 2p_k(p_k+2) > 2(p_k+1)$. Por otra parte, $R_2(p_k, p_k+2) \leq p_k(p_k+1)(p_k+2) = p_k^3 + 3p_k^2 + 2p_k$, puesto que p_k y p_k+2 son primos y el resto de los factores primos del producto $2p_k(p_k+1)(p_k+2)$ son los factores primos de p_k+1 cuyo producto es menor o igual que p_k+1. Por tanto,

$$R_2(p_k, p_k+2) \leq p_k^3 + 3p_k^2 + 2p_k < p_k^3 + 5p_k^2 + 8p_k + 5 = S_2(p_k, p_k+2).$$

Supongamos que hay infinitos números primos gemelos. Entonces la sucesión $\{R_2(p_k, p_k+2)/S_2(p_k, p_k+2)\}_{k\geq 1}$ tiene infinitos términos, cuyos valores pertenecen al intervalo compacto $[0, 1]$. Por tanto, la anterior sucesión posee una subsucesión convergente.

b) Para comprobar que $S_4(a, b)$ es entero, calcularemos en primer lugar $\sigma(a^2(a+4))$ y $\sigma(a(a+4)^2)$:

$$\begin{aligned}\sigma(a^2(a+4)) &= 1 + a + (a+4) + a^2 + a(a+4) + a^2(a+4)\\ &= a^3 + 6a^2 + 6a + 5, \qquad \text{y}\\ \sigma(a(a+4)^2) &= 1 + a + (a+4) + a(a+4) + (a+4)^2 + a(a+4)^2\\ &= a^3 + 10a^2 + 18a + 21.\end{aligned}$$

Ahora debemos ver que $\sigma(a(a+4)^2) + \sigma(a(a+4)^2) = 2a^3 + 16a^2 + 24a + 26$ es múltiplo de 4. Como $16a^2 + 24a = \dot{4}$, basta verificar $2a^3 + 26 = \dot{4}$ o, equivalentemente, $a^3+13 = \dot{2}$. Por hipótesis a y $a+4$ son números primos. Entonces, a no puede ser 2, luego es un número impar. Se concluye que $a^3 + 13$ es un número par, por ser suma de dos impares.

A continuación verificamos que $S_6(a, b)$ es entero o, equivalentemente, que $\sigma(a(a+6)^2) + \sigma(a(a+6)^2)$ es múltiplo de 6. Se cumple que:

$$\begin{aligned}\sigma(a^2(a+6)) &= 1 + a + (a+6) + a^2 + a(a+6) + a^2(a+6)\\ &= a^3 + 8a^2 + 8a + 7, \qquad \text{y}\\ \sigma(a(a+6)^2) &= 1 + a + (a+6) + a(a+6) + (a+6)^2 + a(a+6)^2\\ &= a^3 + 14a^2 + 56a + 43.\end{aligned}$$

Por tanto, hay que probar que $\sigma(a(a+6)^2)+\sigma(a(a+6)^2) = 2a^3+22a^2+64a+50$ es múltiplo de 6. Dividiendo entre 2, basta ver que $a^3+11a^2+32a+25 = \dot{3}$. Puesto que estamos suponiendo que a y $a+6$ son primos, a no puede ser 3 ni un múltiplo de 3. Por tanto, $a = 3k + 1$ o $a = 3k + 2$, para algún número natural k. Comprobemos que en ambos casos resulta que $a^3 + 11a^2 + 32a + 25 = \dot{3}$. En efecto:

$$(3k+1)^3 + 11(3k+1)^2 + 32(3k+1) + 25 = 27^3 + 126k^2 + 171k + 69 = \dot{3};$$
$$(3k+2)^3 + 11(3k+2)^2 + 32(3k+2) + 25 = 27^3 + 153k^2 + 264k + 141 = \dot{3}.$$

Para concluir veamos algunos ejemplos de lo solicitado en el apartado c). Para ver que $S_t(a, a+t)$ no tiene por qué ser entero basta considerar $S_5(2,7) = \frac{\sigma(2^2 \cdot 7) + \sigma(2 \cdot 7^2)}{5} = \frac{56+171}{5} = \frac{227}{5}$. Finalizamos comprobando que $S_3(2,5) < R_3(2,5)$. Para ello calculamos ambos valores: $S_3(2,5) = \frac{\sigma(2^2 \cdot 5) + \sigma(2 \cdot 5^2)}{3} = \frac{42+93}{3} = \frac{135}{3} = 45$ y $R_3(2,5) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.

Solución enviada por Manuel Fernández López
I. E. S. "María Sarmiento", Lugo

También resuelto por F. Luca, M. Peña y el proponente.