

El teorema del punto fijo sin homología: un enfoque combinatorio

por

R. Ayala Gómez, D. Fernández Ternero y J. A. Vilches Alarcón

Tradicionalmente, el método para demostrar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer n -dimensional consiste en probar antes que el n -ésimo grupo de homología simplicial de la esfera S^n no es trivial. Sin embargo, el Teorema de Brouwer y el Lema de Sperner, conocido resultado de Topología Combinatoria, pueden deducirse el uno del otro. La formulación y demostración del Lema de Sperner requieren únicamente un entendimiento muy intuitivo del concepto de triangulación, por lo que se puede incluir en un curso de introducción a la Topología Algebraica.

En este trabajo se expone la equivalencia entre los resultados de Brouwer y Sperner, que no suele encontrarse en la literatura, y se señala su relación con otros resultados importantes de la Topología Algebraica.

Es frecuente que en los cursos de introducción a la Topología Algebraica se presente como uno de los resultados de interés que justifican el contenido del curso el Teorema del Punto Fijo de Brouwer que afirma que *toda aplicación continua de un compacto convexo de \mathbb{R}^n en sí mismo tiene un punto fijo*. Bien es verdad que este resultado se utiliza con menos frecuencia que el teorema del punto fijo de Banach para funciones contractivas, pero es, por ejemplo, una herramienta de gran utilidad para resolver ecuaciones en derivadas parciales no lineales usando el método de Galerkin.

Aparte de que este resultado es de gran importancia en la demostración de ciertos teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones en diversas ramas del Análisis, es equivalente a la afirmación de que las esferas S^n no son contráctiles. Para demostrar este resultado en dimensión 2, suele invocarse la necesidad de probar que el grupo fundamental de S^1 es no trivial, y a continuación se plantea que en dimensiones superiores es imprescindible disponer de otras herramientas de Topología Algebraica, como son los grupos de Homología simplicial o singular. Debido sin duda a la influencia del libro de Eilenberg-Steenrod [17], este teorema y sus corolarios se presentan como ejemplos de la gran eficacia e interés de los métodos de la Teoría de Homología. De hecho, a partir de la propiedad de que la esfera no es contráctil se obtienen en el Capítulo XI del citado libro el teorema de la no retracción, la invariancia de la dimensión, el criterio de separación de Borsuk, el teorema de la invariancia del dominio y otros resultados sobre espacios localmente euclídeos.

Sin embargo, no es necesario usar estos métodos para obtener el Teorema del Punto Fijo y vamos a exponer cómo dicho resultado es consecuencia de un resultado de Topología Combinatoria elemental, conocido como Lema de

Sperner (de hecho, este resultado también se deduce a partir del Teorema de Brouwer). El propósito de la Topología Combinatoria es el estudio de los métodos de la combinatoria que permiten obtener resultados topológicos. Por ejemplo, si tenemos una triangulación de un espacio es más cómodo analizar y calcular los invariantes de los objetos algebraicos que la Topología Algebraica permite asociar al mismo. Más aún, ciertos teoremas topológicos pueden probarse apoyándonos en propiedades combinatorias que pueden formularse y demostrarse en un lenguaje muy sencillo e intuitivo. Por ejemplo, el Teorema de Borsuk-Ulam puede derivarse del Lema de Tucker sobre triangulaciones de esferas, o el Lema de Sperner resulta ser equivalente al Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

En este artículo veremos la demostración del Lema de Sperner, y cómo se obtiene de este lema el Teorema del punto fijo. A continuación, estudiaremos la relación de este resultado con otros teoremas bien conocidos de la Topología como pueden ser la no contractibilidad de las esferas y la no retracción de las bolas cerradas sobre su frontera, también mencionaremos la equivalencia del Teorema del Punto Fijo con la propiedad que tiene el conocido juego del Hex de no acabar nunca en empate.

Para facilitar los dibujos y las indicaciones, centraremos nuestra exposición en el caso bidimensional, limitándonos a señalar sucintamente cómo los resultados estudiados se generalizan a dimensiones superiores.

Comenzaremos con un breve recorrido histórico de la teoría del punto fijo.

1 . ANTECEDENTES

B. Bolzano en 1817 demostró que si una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cambia de signo en sus extremos, entonces se anula en algún punto del intervalo $[a, b]$.

J. H. Poincaré, en relación con el problema de los 3 cuerpos, generalizó dicho resultado en 1883 al probar el que se conoce como *Teorema de Bolzano-Poincaré-Miranda*:

Sean $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ n funciones continuas y supongamos que $|x_i| \leq a_i$, siendo $a_i > 0$, $1 \leq i \leq n$. Más aún, supongamos que si $x_i = a_i$, para $1 \leq i \leq n$, se tiene que $f_i((x_1, \dots, x_n)) > 0$, y si $x_i = -a_i$, para $1 \leq i \leq n$, se tiene que $f_i((x_1, \dots, x_n)) < 0$. Entonces, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_i(x) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

El nombre de C. Miranda [4] está ligado a este resultado porque en 1940 probó que este teorema y el Teorema de Brouwer pueden deducirse el uno del otro.

P. Bohl [11] utilizó el Teorema de Green para probar en 1904 que no existe ninguna retracción del n -cubo sobre su frontera.

L. E. J. Brouwer probó en 1909 su teorema del punto fijo para $n = 3$.

J. S. Hadamard publicó en 1910 una demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer para dimensión arbitraria en el apéndice de un libro de Análisis de Tannery [22].

Brouwer [12] obtuvo en 1912 la demostración del teorema del punto fijo que lleva su nombre para un n -símplice, usando el teorema de aproximación simplicial y la noción de grado de una aplicación entre esferas.

Trataremos a continuación cómo se obtiene el Teorema del Punto Fijo de Brouwer a partir del resultado combinatorio sobre las subdivisiones simpliciales de los n -símplices probado por E. Sperner [14] en 1928, conocido como Lema de Sperner. Un año después del resultado de Sperner, B. Knaster, K. Kuratowski y S. Mazurkiewicz se apoyaron en él para probar el llamado Teorema KKM [13], a partir del cual dedujeron el Teorema de Brouwer. La sencillez de esta demostración llevó a preguntarse sobre la posible equivalencia entre los tres teoremas: el Lema de Sperner, el Teorema KKM y el Teorema de Brouwer. Esta conjetura quedó resuelta en 1974 cuando Yoseloff [10] probó que el Lema de Sperner es consecuencia del Teorema de Brouwer.

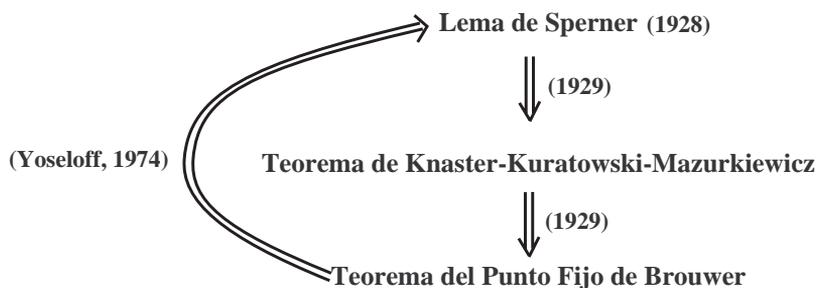


Figura 1: Relación entre el Lema de Sperner y el Teorema de Brouwer.

Antes de ver las relaciones que acabamos de mencionar presentamos algunas nociones básicas relativas a los complejos simpliciales.

2 . PRELIMINARES

Los complejos simpliciales son estructuras combinatorias que tienen como elementos básicos los símplices. Recordemos que unos puntos $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ se dicen *afínmente independientes* si los vectores $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ son linealmente independientes. El k -símplice generado por $k + 1$ puntos afínmente independientes de \mathbb{R}^n , x_0, x_1, \dots, x_k , que llamamos *vértices*, es el conjunto

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=0}^k t_i x_i \text{ con } \sum_{i=0}^k t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \right\}.$$

Llamaremos *coordenadas baricéntricas* del punto x de Δ a las coordenadas (t_0, t_1, \dots, t_k) . Se tiene que un símplice de vértices x_0, x_1, \dots, x_k , que denotaremos por $\Delta = \langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle$, es el cierre convexo de los puntos x_0, x_1, \dots, x_k . Así un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo, un 3-símplice es un tetraedro, etc.

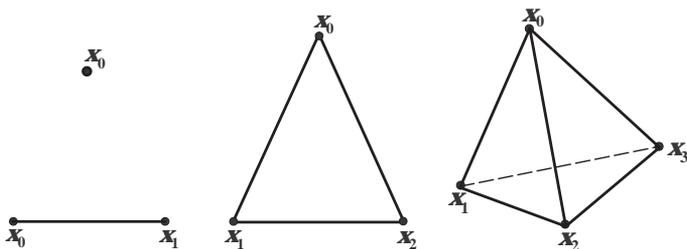


Figura 2: Símplices de dimensiones 0, 1, 2 y 3.

Cada símplice generado por un subconjunto de $h + 1$ vértices de un k -símplice Δ , con $h \leq k$, se llamará h -cara de Δ . Si $h < k$ la cara se dirá *propia*. La unión de las caras propias de un k -símplice Δ se llamará *borde* de Δ y lo denotaremos por $\partial\Delta$. El *interior* de un k -símplice Δ será la diferencia entre Δ y su borde $\partial\Delta$.

La noción de complejo simplicial se desarrolló a partir de los estudios de polígonos y poliedros tridimensionales. J. B. Listing fue el primero en usar el término complejo, si bien la definición de complejo simplicial se atribuye a J. W. Alexander. Un *complejo simplicial*¹ K es una colección de símplices en algún \mathbb{R}^n tal que:

1. Todas las caras de cualquier símplice de K son también elementos de K .
2. Cualesquiera dos símplices de K no se cortan o lo hacen en una cara común.
3. Todo punto en un símplice de K tiene un entorno que corta, a lo sumo, a un número finito de símplices de K .

La dimensión de K es el máximo de las dimensiones de sus símplices. Todo k -símplice Δ determina un complejo simplicial de dimensión k al considerar Δ y todas sus caras. Dado un complejo simplicial K en \mathbb{R}^n , obtenemos un espacio topológico, llamado *espacio subyacente* o *poliedro* de K , al considerar

¹Realmente, ésta es la definición de *complejo simplicial geométrico*. Existe la noción de *complejo simplicial abstracto*, puramente combinatoria y más general que la de complejo simplicial geométrico (véase [20]).

sobre el conjunto $|K|$ unión de todos los símplexes de K la topología euclídea relativa.

El desarrollo de la Topología Combinatoria necesitó pasar de un complejo simplicial con un determinado poliedro a considerar el poliedro en sí mismo como espacio topológico. Para ello fue esencial la noción de subdivisión. Dados dos complejos simpliciales K y K' , se dice que K' es *subdivisión* de K si tienen los mismos espacios subyacentes y cada símplex de K' está contenido en algún símplex de K .

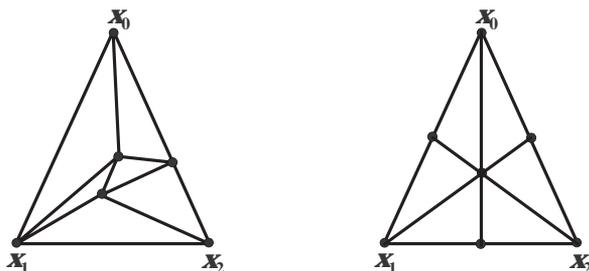


Figura 3: Dos subdivisiones del complejo simplicial determinado por un 2-símplex, la subdivisión derecha es la subdivisión baricéntrica.

Llamaremos *triangulación* de un símplex a una subdivisión del complejo simplicial formado por sus caras. Obsérvese que eso es una triangulación del símplex como espacio topológico, pero además exigimos que la triangulación esté adaptada a la estructura de caras del símplex.

3 . LEMA DE SPERNER

En esta sección presentaremos una demostración del Lema de Sperner, mostrando previamente algunas nociones necesarias.

Sea Δ un n -símplex de vértices x_0, \dots, x_n en \mathbb{R}^n , T una triangulación finita de Δ , y S el conjunto de sus vértices. Un *etiquetado de Sperner* de T es una función $f : S \rightarrow \{0, \dots, n\}$ que verifica la siguiente condición:

$$x \in \langle x_{i_0}, \dots, x_{i_n} \rangle \Rightarrow f(x) \in \{i_0, \dots, i_n\}$$

Es decir, si un vértice está en una cara de Δ , el número que f le atribuye es el de uno de los vértices de dicha cara.

Es evidente que un etiquetado de Sperner de una triangulación T de un n -símplex Δ induce un etiquetado de Sperner sobre la restricción de T a cualquier cara de Δ .

En los ejemplos de la Figura 4 se observa cómo existe al menos un símplex σ de máxima dimensión de la triangulación señalada que lleva todas las

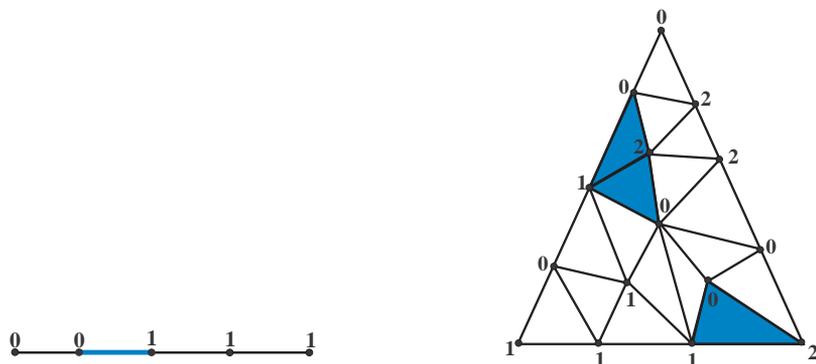


Figura 4: Un etiquetado de Sperner para triangulaciones de símplexes de dimensiones 1 y 2.

posibles etiquetas, es decir, los vértices de σ toman por f todos los valores posibles. Tales símplexes se llamarán *completamente etiquetados por f* . Se tiene entonces el siguiente resultado:

LEMA DE SPERNER.- *El número de símplexes completamente etiquetados de un etiquetado de Sperner es impar y, en particular, es no nulo.*

Demostración. Indicamos aquí la demostración dada en [6]. Consideramos un n -símplex Δ en \mathbb{R}^n , una triangulación finita T de Δ y un etiquetado de Sperner f sobre T . Haremos la demostración por inducción sobre n .

($n = 1$) Sobre una triangulación de un 1-símplex, un etiquetado de Sperner asigna etiquetas distintas a los vértices extremos. Entonces ha de existir algún intervalo de la triangulación cuyos vértices tengan etiquetas distintas, por tanto, será un 1-símplex completamente etiquetado. Para una demostración detallada véase [21].

($n - 1 \Rightarrow n$) Supongamos el resultado cierto para símplexes de dimensión $n - 1$ y veamos que también es cierto para n -símplexes.

Para seguir más cómodamente la demostración, se usarán figuras correspondientes a $n = 2$. Supongamos, por ejemplo, que se parte del triángulo de la Figura 5.

Podemos imaginar el n -símplex Δ como una “casa”, los n -símplexes de la triangulación T como “habitaciones”, y las caras propias de las habitaciones que lleven las n primeras etiquetas como una “puerta”, esto es, los $(n - 1)$ -símplexes de la triangulación T con etiquetas $0, 1, \dots, n - 1$. El etiquetado de Sperner f utiliza las etiquetas $0, 1, \dots, n - 1, n$.

En nuestro ejemplo guía, las puertas son los 1-símplexes cuyos vértices llevan las etiquetas 0 y 1. Nótese que pueden encontrarse en el interior

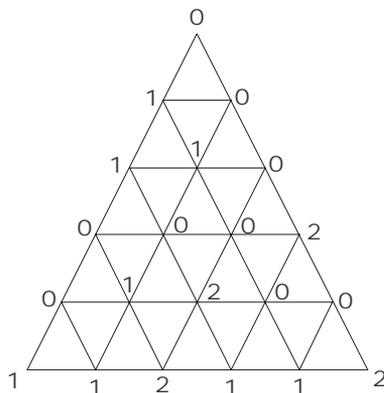


Figura 5: Un etiquetado de Sperner sobre una triangulación de un 2-símplice.

o en el borde de Δ (véase la Figura 6). Para $n = 3$, las puertas serían los 2-símplices con las etiquetas 0, 1 y 2.

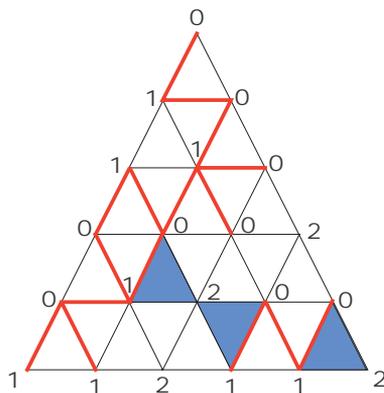


Figura 6: Puertas y habitaciones completamente etiquetadas en la Figura 5.

Se tiene que el número de puertas del borde de Δ es impar. En efecto, la única cara de dimensión $n - 1$ que puede contener puertas es la n -cara (es decir, la opuesta al vértice n), debido a la definición de etiquetado de Sperner. Pero los vértices de esa cara llevan las etiquetas $0, 1, \dots, n - 1$. Luego, por hipótesis de inducción, debe haber un número impar de $(n - 1)$ -símplices completamente etiquetados, que se corresponden con las puertas en el borde al considerarlos en Δ .

Estas puertas en el borde se usarán para localizar habitaciones completamente etiquetadas por medio del llamado argumento de la “trampilla”.

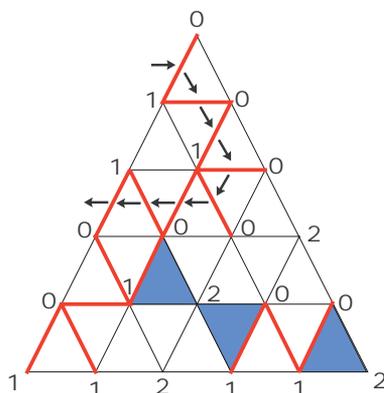


Figura 8: Recorrido que no localiza ninguna habitación completamente etiquetada.

Ahora bien, como el número de puertas en el borde de Δ es impar y mediante los recorridos que hemos descrito sólo podrían quedar emparejadas un número par de ellas, el número de las restantes, que nos conducirán a una habitación completamente etiquetada, debe ser impar.

Además, las habitaciones completamente etiquetadas que no son accesibles por recorridos desde el borde, quedan emparejadas, ya que atravesando la única puerta de una de ellas se realiza un recorrido que termina en otra cuya única puerta está situada en el interior de Δ (véase la Figura 9).

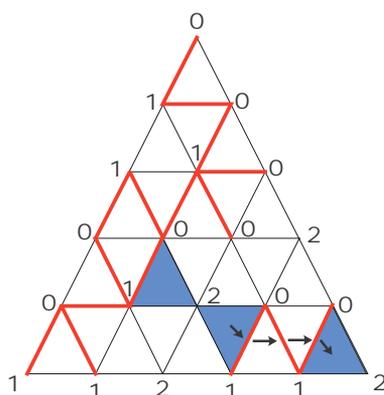


Figura 9: Habitaciones completamente etiquetadas emparejadas.

Así pues, el número total de habitaciones de Δ completamente etiquetadas es impar.

□

4 . TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

A continuación, apoyándonos en el Lema de Sperner, demostraremos el siguiente resultado:

TEOREMA DE KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ.- Sea Δ un n -símplice de vértices x_0, x_1, \dots, x_n en \mathbb{R}^n y sean F_0, F_1, \dots, F_n cerrados de Δ tales que:

$$\langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_l} \rangle \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_l},$$

donde $0 \leq l \leq n$. Entonces se tiene que:

$$\bigcap_{0 \leq i \leq n} F_i \neq \emptyset.$$

Demostración. Basta comprobar que la aplicación

$$\varphi : F_0 \times \dots \times F_n \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

dada por $\varphi(a_0, \dots, a_n) = \max\{|a_i - a_j| / 0 \leq i, j \leq n\}$, se anula. Como es uniformemente continua, por estar definida sobre un compacto, es suficiente probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $(a_0, \dots, a_n) \in F_0 \times \dots \times F_n$ con $|a_i - a_j| \leq \varepsilon$ para todo $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

Sean pues $\varepsilon > 0$ y T una triangulación de Δ de diámetro² menor o igual que ε . Sobre el conjunto de sus vértices se define la función $f(x)$ como:

$$f(x) = \min\{i / x \in F_i \text{ y } x \text{ no está en la } i\text{-ésima cara de } \Delta\}$$

Este conjunto es no vacío para todo x por hipótesis. Se obtiene de este modo un etiquetado de Sperner, y los vértices del símplice completamente etiquetado que proporciona el Lema de Sperner son los puntos a_0, \dots, a_n . □

Como consecuencia de este resultado se obtiene el Teorema de Brouwer, que fue uno de los primeros logros de la Topología Algebraica, y es la base de otros teoremas de punto fijo más generales, de gran importancia en Análisis Funcional.

²El diámetro de una triangulación es el máximo de los diámetros de sus símplices y el diámetro de un símplice es la máxima distancia entre sus vértices.

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.- Sea Δ un n -símplice en \mathbb{R}^n de vértices x_0, x_1, \dots, x_n y sea $f : \Delta \rightarrow \Delta$ una aplicación continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Si $x \in \Delta$, sean (t_0, \dots, t_n) sus coordenadas baricéntricas, esto es, $x = t_0x_0 + \dots + t_nx_n$. Consideremos los cerrados:

$$F_i = \{x \in \Delta / t_i(f(x)) \leq t_i(x)\} \text{ con } 0 \leq i \leq n$$

Veamos que cumplen las hipótesis del teorema anterior. Si $x \in \langle x_{i_0}, \dots, x_{i_l} \rangle$, entonces $0 = t_i(x) \leq t_i(f(x))$ para todo $i \notin \{i_0, \dots, i_l\}$. Por tanto, para algún $i \in \{i_0, \dots, i_l\}$ se tiene que $t_i(f(x)) \leq t_i(x)$, ya que $\sum t_i(x) = \sum t_i(f(x)) = 1$. Así pues, existe $x \in F_{i_0} \cup \dots \cup F_{i_l}$. El Teorema KKM asegura la existencia de $x \in \bigcap_{i=0}^n F_i$, luego tal x verifica que $t_i(f(x)) = t_i(x)$ para todo $i = 0, \dots, n$. Así que $x = f(x)$. \square

Existen demostraciones directas del Teorema de Brouwer a partir del Lema de Sperner que proporcionan un método de localización del punto fijo. Ello se consigue mediante la obtención de símlices completamente etiquetados de triangulaciones de diámetro cada vez más pequeño (véase [18]).

Veamos por último que el Lema de Sperner es consecuencia del Teorema de Brouwer.

TEOREMA.- *El Teorema de Brouwer implica el Lema de Sperner.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que tenemos un etiquetado de Sperner f sobre una triangulación T de un n -símplice Δ , de manera que ningún símlice de T esté completamente etiquetado. Denotaremos los vértices de Δ , ya etiquetados, por x_0, \dots, x_n .

Vamos a definir una aplicación continua $h : \Delta \rightarrow \Delta$ sin puntos fijos, lo que supondrá una contradicción con la hipótesis. Primero se define h sobre los vértices de T del siguiente modo:

Dado un vértice v de T con etiqueta $f(v)$

- si $f(v) < n$, definimos $h(v) = x_{f(v)+1}$ y
- si $f(v) = n$, definimos $h(v) = x_0$.

Nótese que de este modo, $h(x_i) = x_{i+1}$ si $i < n$ y $h(x_n) = x_0$.

Si extendemos por linealidad sobre los n -símlices de T , se obtiene una función continua sobre cada uno de ellos, que seguiremos denotando por h . Como estos símlices constituyen un recubrimiento cerrado y finito de Δ , h es continua sobre Δ .

Veamos que h no tiene puntos fijos. En efecto, si x está en el interior de Δ , entonces está en un n -símplice σ de T y $h(x)$ está en el borde de Δ , pues al no existir ningún símlice completamente etiquetado $h(\sigma)$ es una cara propia de Δ (véase la Figura 10). Luego $h(x) \neq x$. Por otra parte, si x está en el borde de Δ , puede ser un vértice de T o estar en el interior de un k -símplice τ de T

(con $1 \leq k \leq n - 1$). Si es un vértice, entonces $h(x) = x_k$ con $k \neq f(x)$, luego $h(x) \neq x$ (véase la Figura 11). Si está en el interior de τ , entonces está en el interior de una k -cara Λ de Δ y $h(x) \neq x$, pues $h(\Lambda)$ es una cara de Δ distinta de Λ (véase la Figura 12). \square

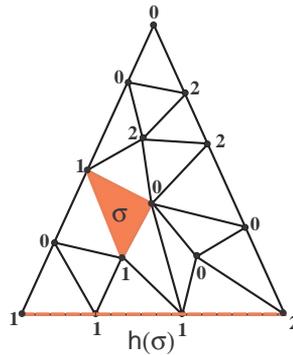


Figura 10: Brouwer implica Sperner 1.

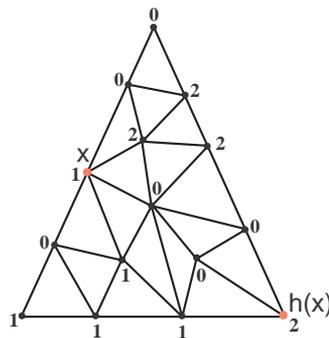
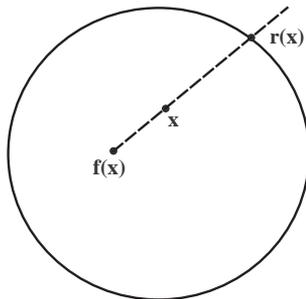


Figura 11: Brouwer implica Sperner 2.

Si se define un espacio topológico con la *propiedad del punto fijo* como un espacio X que cumple que toda aplicación continua $f : X \rightarrow X$ admite al menos un punto fijo, es evidente que se trata de una propiedad topológica. Por tanto, como cualquier n -símplice es homeomorfo a la bola unidad cerrada B^n , podemos reformular el Teorema de Brouwer del siguiente modo:

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.- B^n tiene la propiedad del punto fijo.

- (2 \Rightarrow 1) Si existiera una aplicación continua $f : B^n \rightarrow B^n$ sin puntos fijos, se obtendría una retracción $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ del siguiente modo:
Dado $x \in B^n$, consideramos la semirrecta que parte de $f(x)$ y pasa por x , ésta corta en un punto a S^{n-1} que será $r(x)$.



- (1 \Rightarrow 3) Si S^{n-1} fuera contráctil, podríamos extender la aplicación identidad de S^{n-1} en sí misma a una aplicación continua $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Componiendo con la aplicación antipodal $A : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, dada por $A(x) = -x$, y con la inclusión $i : S^{n-1} \hookrightarrow B^n$, obtendríamos una aplicación continua $h = i \circ A \circ f : B^n \rightarrow B^n$ sin puntos fijos. En efecto, si $x \in \text{int}(B^n)$, entonces $h(x) \in S^{n-1}$ y, por tanto, $h(x) \neq x$. Por otra parte, si $x \in S^{n-1}$, entonces $h(x) = i \circ A \circ f(x) = i \circ A(x) = i(-x) = -x$ y, por tanto, $h(x) \neq x$.

□

Entre las generalizaciones del Teorema de Brouwer a espacios de dimensión infinita, cabe citar:

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE SCHAUDER.- Si C es un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach, toda aplicación continua cuya imagen sea un conjunto numerablemente compacto, tiene un punto fijo.

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE TYCHONOFF.- Si C es un subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial topológico localmente convexo, toda aplicación continua tiene al menos un punto fijo.

Recordemos que el Teorema de Borsuk-Ulam afirma que *para toda aplicación continua existe un par de puntos antípodas que tienen la misma imagen*. En [16] se prueba que este teorema es equivalente a la afirmación de que *una aplicación que conserve antípodas no puede ser homotópica a una aplicación constante*. De aquí se deduce inmediatamente el Teorema de Brouwer, ya que este es equivalente a que la aplicación identidad no sea homotópicamente nula

(véase [5]). Ahora bien, en [19] se presenta una demostración elemental y directa de dicha implicación y del Teorema de Borsuk-Ulam dentro de la línea de esta exposición; es decir, poniendo de manifiesto cómo resultados importantes de la Topología Algebraica se pueden deducir de propiedades de naturaleza combinatoria, sin necesidad de desarrollar herramientas que requieran un lenguaje sofisticado. Esta economía de medios los hace accesibles a cualquier estudiante principiante.

En concreto, en [19] se demuestra la siguiente versión del Teorema de Borsuk-Ulam a partir de un resultado combinatorio, conocido como el Lema de Tucker (una generalización de este resultado se puede ver en [7]):

TEOREMA DE BORSUK-ULAM.- *No existe ninguna función continua $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ tal que $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.*

Para enunciar el Lema de Tucker se necesitan algunas nociones sobre etiquetados de triangulaciones de la n -bola cerrada B^n . Una triangulación finita T de B^n es *antipodalmente simétrica* sobre la frontera si el conjunto de símlices de T contenidos en $S^{n-1} = \partial B^n$ es una triangulación de S^{n-1} y es antipodalmente simétrica, es decir, si $\sigma \subset S^{n-1}$ es un símlice de T , entonces $-\sigma$ también (véase la Figura 13).

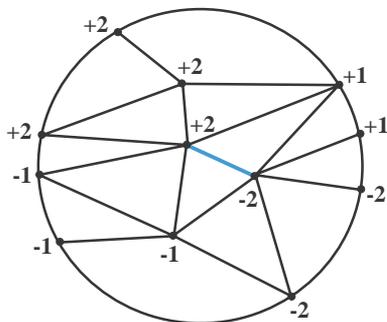


Figura 13: Lema de Tucker en dimensión 2.

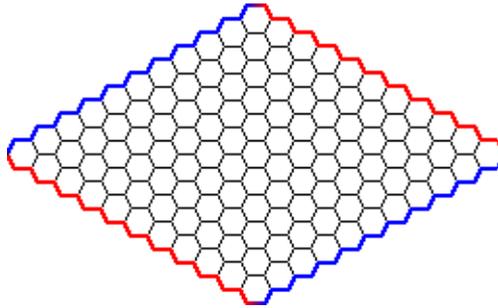
LEMA DE TUCKER.- *Sea T una triangulación de B^n que es antipodalmente simétrica sobre el borde. Sea*

$$\lambda : V(T) \rightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$$

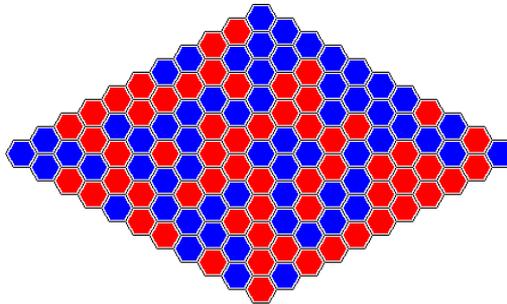
un etiquetado de los vértices de T tal que $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ para todo vértice $v \in \partial B^n$. Entonces existe un 1-símlice en T tal que sus vértices están etiquetados con números opuestos.

No mostraremos cómo se deriva el Teorema de Borsuk-Ulam a partir del Lema de Tucker; de hecho, también se tiene la implicación en sentido contrario.

Por último, comentaremos brevemente la relación entre el Teorema de Brouwer y el juego del Hex. En dimensión 2 es un juego para dos jugadores (existe el juego en dimensión n). Cada jugador juega con fichas de un color (azul o rojo) sobre un tablero romboidal con casillas hexagonales. Los lados opuestos del tablero tienen asignados el mismo color.



Los jugadores deben colocar alternadamente fichas de su color en el tablero, de manera que el objetivo del juego es unir mediante una cadena continua de fichas del color del jugador los lados opuestos que le corresponden. Por ejemplo, la partida de la siguiente ilustración la ha ganado el jugador con color rojo.



Se tiene que el Teorema de Brouwer es equivalente a la propiedad de que el juego de Hex no puede terminar en empate, esto es, siempre tiene un ganador (en dimensión n arbitraria). Puede consultarse [2] para una exposición sobre el tema. Existe también una demostración en la que, además del Lema de Sperner, se involucran otros resultados combinatorios.

AGRADECIMIENTOS:

Deseamos expresar nuestro agradecimiento al revisor del artículo por sus comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

- [1] R. H. BING, The elusive fixed point property, *Amer. Math. Monthly* (1969) **76** (2), 119–132.
- [2] D. GALE, The game of Hex and the Brouwer Fixed Point Theorem, *Amer. Math. Monthly* (1979) **86** (10), 818–827.
- [3] W. KULPA, The Poincaré-Miranda theorem, *Amer. Math. Monthly* (1997) **104** (6), 545–550.
- [4] C. MIRANDA, Un’osservazione su un teorema di Brouwer, *Bolletino della Unione Matematica Italiana* (1940) **3**, 5–7.
- [5] F. E. SU, Borsuk-Ulam implies Brouwer: A direct construction, *Amer. Math. Monthly* (1997) **104** (9), 855–859.
- [6] F. E. SU, Rental harmony: Sperner’s lemma in fair division, *Amer. Math. Monthly* (1999), **106** (10), 930–942.
- [7] K. FAN, A generalization of Tucker’s combinatorial lemma with topological applications, *Ann. of Math.* (1952) **56** (3), 431–437.
- [8] M. W. HIRSCH, A proof of nonretractability of a cell onto its boundary, *Proc. Amer. Math. Soc.* (1963) **14** (2), 364–365.
- [9] K. D. JOSHI, Mistake in Hirsch’s proof of the Brouwer fixed point theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* (2000) **128** (5), 1523–1525.
- [10] M. L. YOSELOFF, Topological proofs of some combinatorial theorems, *J. Combin. Theory, Ser. A* (1974) **17**, 95–111.
- [11] P. BOHL, Über die Bewegung eines mechanischen System in der Nähe einer Gleichgewichtslage, *J. Reine Angew. Math.* (1904) **127**, 179–276.
- [12] L. E. J. BROUWER, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* (1912) **71**, 97–115.
- [13] B. KNASTER, K. KURATOWSKI & S. MAZURKIEWICZ, Eien Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, *Fund. Math.* (1929) **14**, 132–137.
- [14] E. SPERNER, Neuer Beweis für dei Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* (1928) **6**, 265–272.
- [15] E. C. ZEEMAN, Relative Simplicial Approximation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1964) **60**, 39–43.
- [16] J. DUGUNDJI & A. GRANAS, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, 2003.
- [17] S. EILENBERG & N. STEENROD, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1966.
- [18] K.D. JOSHI, *Applied discrete structures*, New Age International, 1997.
- [19] J. MATOUŠEK, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer-Verlag, 2003.
- [20] J. R. MUNKRES, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.

- [21] YU. A. SHASHKIN, *Fixed Points*, American Mathematical Society, 1991.
- [22] J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Hermann, 1910, Paris.

R. Ayala Gómez
D. Fernández Ternero
J. A. Vilches Alarcón
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
Apto. 1160, 41080 Sevilla
Correo electrónico: rdayala@us.es
desamfer@us.es
vilches@us.es