Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

La sección de Historia de La Gaceta se hace eco del centenario del nacimiento del lógico y matemático austriaco Kurt Gödel.

En conmemoración de esta efeméride presentamos la traducción al español de: K. Gödel, "The present situation in the foundations of mathematics", conferencia impartida por Gödel en el congreso conjunto de la MAA y la AMS que tuvo lugar en Cambridge, Massachusetts, del 29 al 30 de diciembre de 1933, y que aparece recogida en los *Collected Works* (vol 3) de Gödel, editados por Solomon Feferman en *Oxford University Press*, pp. 45–53. Queremos expresar nuestro agradecimiento tanto a Oxford University Press como a S. Feferman, por habernos concedido su permiso para la traducción, que ha sido realizada por J. M. Almira. En su versión inglesa, este artículo está precedido (pp. 36-44) por una excelente introducción de S. Feferman, cuya lectura recomendamos encarecidamente.

Además, la sección se completa con el artículo "La obra de Gödel en lógica matemática y teoría de conjuntos" de Ignacio Jané. Este trabajo introduce al lector de La Gaceta en la obra del genial Gödel.

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: josef@us.es

La situación presente en los fundamentos de las matemáticas

por

Kurt Gödel

El problema de dar un fundamento a las matemáticas (y por matemáticas entiendo aquí la totalidad de los métodos de demostración utilizados actualmente por los matemáticos) puede considerarse descompuesto en dos partes distintas. Primero estos métodos de demostración tienen que ser reducidos a un número mínimo de axiomas y reglas primitivas de inferencia, que tienen que ser establecidas con tanta precisión como sea posible, y entonces, en segundo lugar, debe buscarse una justificación en uno u otro sentido para estos axiomas, esto es, un fundamento teórico del hecho de que ellos llevan a resultados que están de acuerdo entre sí y con los hechos empíricos.

La primera parte del problema ha sido resuelta de un modo completamente satisfactorio, consistiendo la solución en la llamada "formalización" de las matemáticas, lo que significa que se ha inventado un lenguaje de una precisión perfecta, mediante el cual es posible expresar cualquier proposición matemática con una fórmula. Algunas de estas fórmulas se toman como axiomas y entonces se establecen ciertas reglas de inferencia que nos permiten pasar de los axiomas a nuevas fórmulas y así deducir más y más proposiciones, siendo el aspecto más destacable de las reglas de inferencia que éstas son puramente formales, esto es, se refieren sólo a la estructura externa de las fórmulas, no a su significado, de modo que podrían ser aplicadas por alguien que no sabe nada de matemáticas, o por una máquina. [Esto tiene como consecuencia que nunca puede haber dudas sobre en qué casos se aplican las reglas de inferencia y, por tanto, se obtiene el grado más elevado de exactitud posible].

El importante hecho de que todas las matemáticas se puedan reducir a unos pocos axiomas formales y reglas de inferencia fue descubierto por Frege y Peano. Pero cuando se intentó por primera vez dar un tal sistema formal para las matemáticas, o sea, un sistema de axiomas y reglas de inferencia, surgió una seria dificultad. A saber, si los axiomas y reglas de inferencia se formulaban en el modo que parecía natural a primera vista, ellos implicaban contradicciones obvias, y se hizo claro que había que imponer ciertas restricciones en el tratamiento de los conjuntos infinitos. El modo en que estas restricciones deben realizarse parece estar exclusivamente determinado por los dos requisitos de evitar las paradojas y mantener todas las matemáticas (incluyendo la teoría de conjuntos). Al menos hasta el momento, sólo se ha encontrado una solución que verifique estos dos requisitos, aunque ya han transcurrido más de 30 años desde el descubrimiento de las paradojas. Esta solución es la teoría de tipos. (Me refiero a la teoría simple de tipos, no a la forma complicada, que requiere del axioma de reducibilidad).

Podría parecer que el sistema de axiomas de la teoría de conjuntos, como ha sido presentado por Zermelo, Fraenkel y von Neumann, suministra otra solución, pero resulta que este sistema no es otra cosa que una generalización natural de la teoría de tipos o, más bien, es en lo que se convierte la teoría de tipos si se eliminan ciertas restricciones superfluas. Esto se ve muy claramente, por ejemplo, a partir del artículo de von Neumann "Über eine Widerpruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre" [1929] y tiene lugar como sigue: La restricción sobre las reglas lógicas introducida por la teoría de tipos consiste esencialmente en esto, que la noción general de clase o conjunto es descartada y reemplazada por una serie infinita de diferentes nociones de clase. Es decir, para comenzar a hablar de clases se pide primero que un sistema de cosas (llamadas individuos) esté dado (podríamos, por ejemplo, tratar los enteros como individuos); entonces podemos formar clases de esos individuos y hablar sobre todas esas clases. Entonces puedes avanzar un paso más y formar el concepto de una clase cuyos elementos son estas clases de individuos, i.e., de una clase de clases de individuos (llamada clase de segundo tipo) y hablar de estas clases. Así puedes avanzar indefinidamente en esta jerarquía sin que jamás puedas formar la noción más general posible de clase o siquiera hablar de todas las clases. Pero, para esta jerarquía de clases, en los *Principia Mathematica* se han impuesto las siguientes restricciones, que son innecesarias desde el punto de vista de la búsqueda de un sistema formal que evite las paradojas lógicas y mantenga la totalidad de las matemáticas, que es la única cuestión que nos ocupa.

1. En los *Principia Mathematica* sólo se han admitido los llamados tipos puros, i.e., no se pueden formar clases que contengan clases de diferentes tipos entre sus elementos.
2. Las proposiciones del tipo $a \in b$ se tratan como carentes de sentido (i.e. no son ni verdaderas ni falsas) si a y b no son de tipos apropiados (si, por ejemplo, a es de tipo superior a b). Esta complicación se puede evitar sencillamente estableciendo que $a \in b$ es falso si a y b no tienen tipos apropiados.

Borrar estas primeras dos restricciones no es muy esencial, puede verse fácilmente que ninguna contradicción puede surgir de ello (y para cada proposición demostrable en el nuevo sistema existe una equivalente en *Principia Mathematica*). La situación es bastante diferente con la tercera restricción, que voy a explicar a continuación. En la teoría de Russell el proceso de pasar al siguiente tipo superior -por ejemplo, de clases de individuos a clases de clases de individuos- puede repetirse sólo un número finito de veces; es decir, a cada clase que aparece en el sistema de *Principia Mathematica* le corresponde un número finito n que indica en cuántos pasos la clase en consideración puede ser alcanzada comenzando en el nivel de los individuos. Este número n puede ser arbitrariamente grande pero debe ser finito.

Ahora bien, no existe razón alguna por la que parar el proceso de formación de tipos en este punto (como ha sido resaltado, por ejemplo, por Hilbert). Puede, por ejemplo, formarse la clase de todas las clases de tipo finito que, por supuesto, no es de tipo finito, pero podría llamarse de tipo ω. (La definición general del tipo ω sería que una clase pertenece a éste si contiene sólo clases de tipo finito entre sus elementos, pero para cada entero arbitrariamente grande n, contiene elementos de un tipo superior a n). Está claro cómo se puede continuar este proceso indefinidamente. Podemos hacer que la clase de todas las clases de tipo finito tenga una interpretación análoga a la clase de los individuos, esto es, la tomamos como base para una nueva jerarquía de tipos y, de este modo, formamos las clases de tipo $\omega + 1$, $\omega + 2$, y seguimos este proceso para cada ordinal transfinito.

Existe una objeción a este proceso de formación de clases de tipo infinito que podría haber sido una de las razones por las que Russell se abstuvo de realizarlo. A saber, que para poder establecer los axiomas de un sistema formal, incluyendo todos los tipos hasta un ordinal dado α, la noción de este ordinal α tiene que presuponerse como conocida, ya que aparecerá explícitamente en los axiomas. Por otra parte, una definición satisfactoria de los ordinales transfinitos se puede obtener dependiendo exclusivamente de los axiomas del sistema que se va a establecer. No creo que esta objeción sea seria por la siguiente razón: Los primeros dos o tres tipos ya bastan para definir ordinales muy grandes. De modo que se puede comenzar estableciendo los axiomas para estos primeros tipos, para lo cual no es necesario ningún ordinal, entonces definir un ordinal transfinito α en términos de estos primeros tipos y, por medio de él, establecer los axiomas del sistema incluyendo todas las clases de tipo menor que α (Llamémosla S_α). Al sistema S_α le podemos aplicar nuevamente el mismo proceso, es decir, tomamos un ordinal β mayor que α, que se pueda definir en términos del sistema S_α y, mediante su uso, establecemos los axiomas para el sistema S_β que incluye todos los tipos menores que β, y así sucesivamente.

El lugar que ocupa el sistema de axiomas para la teoría de conjuntos en esta jerarquía puede ser caracterizado por una cierta propiedad de cierre como sigue: Hay dos formas distintas para generar tipos. La primera consiste en avanzar desde un tipo dado al siguiente y la segunda en reunir una sucesión transfinita de tipos, como hicimos, por ejemplo, para formar el tipo ω. Ahora, la afirmación hecha por los axiomas de la teoría de conjuntos es esencialmente esto, que estos dos procesos no nos llevan fuera del sistema si el segundo proceso se aplica solamente a aquellas sucesiones de tipos que puedan definirse dentro del mismo sistema. [Es decir: si M es un conjunto de ordinales definibles en el sistema y a cada ordinal de M le asignamos un tipo contenido en el sistema, entonces el tipo obtenido agrupando esos tipos también está en el sistema]. Pero sería un error suponer que con este sistema de axiomas para la teoría de conjuntos deberíamos haber alcanzado un final para la jerarquía de tipos. Pues todas las clases que aparecen en este sistema pueden ser consideradas como un nuevo dominio de individuos y usadas como un punto de partida para la creación de tipos aún mayores. No hay final para este proceso [y la totalidad de sistemas así obtenida parece formar una totalidad de carácter similar a la del conjunto de los ordinales de la segunda clase numérica].

Así pues, estamos frente a una situación extraña. Partimos buscando un sistema formal para las matemáticas y en vez de eso encontramos una infinidad de sistemas y, cualquiera que sea el sistema que elijamos de esta infinidad, existe uno más comprehensivo, es decir, uno cuyos axiomas son más fuertes. En la práctica podemos, sin problemas, confinarnos a uno de estos sistemas (por ejemplo, el sistema para la teoría de conjuntos) porque todos los métodos y demostraciones matemáticas que se han desarrollado hasta ahora están en este sistema y, aparte de ciertos teoremas de la teoría de conjuntos, toda la matemática desarrollada hasta ahora está contenida en sistemas incluso mucho más débiles, que incluyen sólo unos pocos de los primeros tipos. Sin embargo, la situación creada por la existencia de una infinidad de sistemas, cada uno de los cuales se puede extender con más conceptos y axiomas, puede ser considerada insatisfactoria y desacreditadora de la teoría de tipos, que nos conduce a esta situación.

Pero, de hecho, este carácter de nuestros sistemas se convierte en un fuerte argumento en favor de la teoría de tipos. Pues resulta perfectamente acorde con ciertos hechos que se pueden demostrar de forma independiente. Se puede demostrar que cualquier sistema formal -esté o no basado en la teoría de tipos, siempre que esté libre de contradicción- debe ser necesariamente deficiente en sus métodos de demostración. O, por ser más exacto: Para todo sistema formal podemos construir una proposición -de hecho, una proposición sobre la aritmética de los enteros- que es ciertamente verdadera si el sistema está libre de contradicciones pero no puede ser demostrada en el sistema dado. Ahora, si el sistema bajo consideración (llamémosle S) está basado en la teoría de tipos, resulta que exactamente el siguiente tipo superior no contenido en S es necesario para demostrar esta proposición aritmética, esto es, dicha proposición se convierte en un teorema demostrable si añadimos al sistema S el siguiente tipo superior y los axiomas asociados.

Este hecho es interesante también desde otro punto de vista. Demuestra que la construcción de tipos cada vez mayores no es de ninguna manera ociosa, sino que es necesaria para demostrar teoremas incluso de una estructura simple, a saber, proposiciones aritméticas, con lo que quiero decir lo siguiente: Digo que una proposición es "aritmética" si afirma que una cierta propiedad P es verificada por todos los enteros, donde P es una propiedad que es decidible para cada entero particular mediante un procedimiento general. El teorema de Goldbach, que afirma que cada número par es la suma de dos números primos, sería, en este sentido, un ejemplo de proposición aritmética. Un caso especial del teorema general sobre existencia de proposiciones indecidibles en todo sistema formal es que existen proposiciones aritméticas que no se pueden demostrar ni siquiera con el análisis sino sólo mediante métodos que implican el uso de cardinales infinitos extremadamente grandes y cosas similares.

Ahora, volviendo a la teoría de tipos, me parece que hay un sentimiento bastante extendido entre los lógicos de que hay algo incorrecto en esta teoría y que debe existir otro método más satisfactorio de evitar las paradojas. Pienso que este sentimiento está justificado con respecto a la forma de la teoría tal como ha sido presentada en *Principia Mathematica*. Pero si se eliminan las restricciones superfluas que mencioné anteriormente, la mayoría de las objeciones que se han arrojado contra ella ya no se sostienen. [Por ejemplo, la necesidad de enunciar los axiomas lógicos separadamente para cada tipo desaparece, pues podemos introducir una variable que toma valores en cualquier conjunto de tipos dado, si eliminamos la restricción relativa a la puridad de los tipos.] Como he mencionado anteriormente, la teoría de tipos, si la entendemos en la forma más general que expliqué, es hasta ahora la única solución al problema de restringir las reglas de la llamada lógica ingenua para evitar las paradojas y mantener toda la matemática, y es muy verosímil que permanezca así. Todas las otras soluciones que se han presentado hasta ahora o bien se quedaron en vagas promesas, es decir, no se han seguido hasta el punto de establecerlas como un sistema formal, o llevaron a contradicciones.

Voy ahora a ocuparme de la segunda parte de nuestro problema, a saber, el problema de dar una justificación de nuestros axiomas y reglas de inferencia. Con respecto a esta cuestión, debe decirse que la situación es extremadamente insatisfactoria. Nuestro formalismo funciona perfectamente bien y está perfectamente libre de objeciones siempre que lo consideremos como un mero juego con símbolos, pero en el momento que adjudicamos un significado a nuestros símbolos, surgen serias dificultades. Hay esencialmente tres tipos de dificultades:

La primera está relacionada con la noción no constructiva de existencia. Es decir: amparados por los axiomas de nuestros sistemas se nos permite, por ejemplo, formar una proposición del tipo "Existe un entero que tiene cierta propiedad P" y, aunque podríamos no disponer de medios para comprobar si tal entero existe o no, aplicamos la ley del tercio excluso a esta proposición, exactamente como si en cierto reino objetivo de las ideas esta cuestión tuviera respuesta, independientemente del conocimiento humano. Este tratamiento tiene extrañas consecuencias, como cabría haber esperado desde el principio. Por ejemplo, frecuentemente podemos probar la existencia de un entero con una propiedad dada, sin que nadie sea capaz realmente de nombrar un tal entero o siquiera describir un procedimiento a partir del cual podamos obtener un tal entero (las llamadas demostraciones de existencia no constructivas).

El segundo punto flaco, que es aún más serio, está relacionado con la noción de clase. Como expliqué antes, el concepto general de clase ha sido eliminado de nuestros sistemas y descompuesto en una serie infinita de conceptos de clases de diferente tipo. Pero extraigamos de esta serie un concepto arbitrario, por ejemplo la noción de "clase de primer tipo", esto es, una clase de enteros.

Como una clase de enteros, al menos si es infinita, sólo puede estar dada mediante una propiedad característica común a todos sus miembros, la noción de "clase de enteros" es esencialmente la misma que la de "propiedad de enteros", y este concepto aparece como una idea primitiva en nuestros sistemas. No solo eso, sino que además las palabras "todo" y "existe" se aplican a propiedades de enteros de exactamente el mismo modo que a los enteros, utilizando por ejemplo la ley del tercio excluso. Este modo de proceder es particularmente objetable en lo referente a propiedades, porque da lugar no sólo a proposiciones existenciales no constructivas sino también al llamado método de definición impredicativa, que consiste esencialmente en esto, que una propiedad P se define mediante una afirmación de la siguiente forma: Un entero x debe poseer la propiedad P si cierta afirmación sobre x es verdadera para todas las propiedades (incluyendo a la propia P). De nuevo, como en el caso de la ley del tercio excluso, este proceso de definición presupone que la totalidad de las propiedades existe de algún modo, independientemente de nuestro conocimiento y nuestras definiciones, y que nuestras definiciones sirven simplemente para seleccionar algunas de estas propiedades previamente existentes. Si asumimos esto, el método de definición impredicativa es totalmente correcto (como ha sido destacado por Ramsey), pues no hay nada que objetar en la caracterización de un elemento particular de una totalidad previamente dada haciendo referencia a la totalidad al completo. Hacemos esto, por ejemplo, si hablamos del edificio más alto de una ciudad.

Pero la situación pasa a ser completamente diferente si tratamos las propiedades como *generadas* por nuestras definiciones. Pues es ciertamente un círculo vicioso generar un objeto haciendo referencia a una totalidad en la que este mismo objeto se supone que ya está presente. Russell, para evitar este círculo vicioso, se vio obligado a descomponer la noción de propiedad de un tipo dado en una infinidad de subtipos [de modo que una propiedad que haga referencia a cierta totalidad de propiedades, nunca pertenece a dicha totalidad]. Este mecanismo evita los círculos viciosos pero también hace imposible una teoría adecuada para los números reales, muchos de cuyos teoremas fundamentales parecen depender de forma esencial de definiciones impredicativas.

El tercer punto flaco en nuestros axiomas está relacionado con el axioma de elección, del que, sin embargo, no quiero entrar en detalles porque es de menos importancia para el desarrollo de las matemáticas.

El resultado de la anterior discusión es que nuestros axiomas, si son interpretados como afirmaciones significativas, necesariamente presuponen un tipo de Platonismo que no puede satisfacer a ninguna mente crítica y que ni siquiera produce la convicción de que son consistentes. Sin embargo, es debido a otras razones que resulta extremadamente inverosímil que ellos realmente den lugar a contradicciones. Pues las consecuencias de los métodos objetables, como las definiciones impredicativas, han sido desarrolladas en todas las direcciones, especialmente en la teoría de conjuntos y la teoría de funciones, sin haber alcanzado jamás alguna inconsistencia. Así pues, surge la conjetura de que, aunque hemos fallado en dar un significado libre de objeciones a los símbolos de nuestros sistemas formales, quizás podamos demostrar la ausencia de contradicciones mediante métodos inobjetables. Y parece razonable esperar que esto sea posible, porque la afirmación a demostrar -la afirmación de que un sistema dado es no-contradictorio- es de un carácter muy simple y no implica el uso de ninguno de los conceptos objetables, como el de "propiedad de los enteros". De hecho, la ausencia de contradicción significa simplemente que si comenzamos con ciertas fórmulas (llamadas axiomas) y realizamos sobre ellas ciertas operaciones (dadas por las reglas de inferencia) tantas veces como deseemos, nunca obtendremos dos fórmulas contradictorias, es decir, dos fórmulas una de las cuales es la negación de la otra. En nuestra demostración de consistencia no tenemos por qué preocuparnos del significado de los símbolos de nuestros sistemas porque las reglas de inferencia nunca hacen referencia a su significado, y por tanto, la cuestión [de la consistencia] pasa a ser una cuestión de tipo combinatorio sobre el manejo de los símbolos de acuerdo con las reglas dadas.

Por supuesto, el punto clave en la deseada demostración de consistencia es que ésta debe desarrollarse según métodos absolutamente inobjetables, es decir, debe evitar las demostraciones no constructivas de existencia, las definiciones impredicativas y cuestiones similares, pues es precisamente una justificación de estos métodos dudosos lo que estamos buscando. Ahora, lo que queda de la matemática si descartamos estos métodos [y retenemos sólo aquellas cosas que se pueden construir y las operaciones que se pueden realmente llevar a cabo] es la llamada matemática intuicionista, y el dominio de esta matemática intuicionista no está de ningún modo tan unívocamente determinado como podría parecer a primera vista. Pues es cierto que hay distintos conceptos de constructividad y, en consecuencia, diferentes estratos de matemáticas intuicionistas o constructivistas. Conforme ascendemos en la serie de estos estratos, nos estamos acercando a las matemáticas ordinarias, no constructivas, y al mismo tiempo los métodos de demostración y construcción que admitimos pasan a ser menos satisfactorios y menos convincentes. El más bajo de estos estratos, esto es, la forma más estricta de matemáticas constructivas, se puede describir aproximadamente mediante las siguientes dos características:

1. La aplicación del concepto de “todo” o “cualquiera” se restringe a aquellas totalidades infinitas para las que podemos dar un procedimiento para generar todos sus elementos (como podemos hacer, por ejemplo, para la totalidad de los enteros con el proceso de formar el siguiente entero mayor, y no podemos hacerlo con la totalidad de las propiedades de los enteros).
2. La negación no se puede aplicar a proposiciones que afirman que algo se verifica para todo elemento, porque esto produciría proposiciones existenciales. O, por ser más exacto: las negaciones de las proposiciones generales (esto es, proposiciones existenciales) sólo tienen significado en nuestro sistema en el sentido de que hemos encontrado un ejemplo pero, por brevedad, no lo damos explícitamente. A saber, sirven solamente como una abreviación y podríamos deshacernos de ellas si lo deseásemos.

Del hecho de que hemos eliminado el concepto de existencia y las reglas lógicas relacionadas con él, se sigue que nos hemos quedado con esencialmente un único método para demostrar proposiciones generales, a saber, la inducción completa aplicada al proceso de generación de nuestros elementos.

Y finalmente, requerimos que podamos introducir sólo aquellas nociones que son decidibles para cualquier elemento particular y sólo aquellas funciones que puedan ser calculadas para cualquier elemento particular. Tales nociones y funciones se pueden definir siempre mediante inducción completa y, por tanto, podemos decir que nuestro sistema (lo llamaré A) está basado exclusivamente en el método de inducción completa tanto en sus definiciones como en sus demostraciones. Este método posee un grado de evidencia particularmente elevado y de ahí que sería la cosa más deseable que la ausencia de contradicciones en las matemáticas ordinarias no constructivas se pudiera probar con métodos permitidos en este sistema A. Y, efectivamente, todos los intentos de demostración de consistencia llevados a cabo por Hilbert y sus discípulos trataron de cumplir exactamente este requisito. Mas, por desgracia, la esperanza de tener éxito en esta dirección se ha desvanecido completamente a la vista de algunos hechos recientemente descubiertos. Se puede demostrar de manera bastante general que no puede existir una prueba de consistencia para un sistema formal S que pueda ser expresada en los términos del propio sistema formal S. Ahora, todas las pruebas intuicionistas que han sido construidas cumpliendo los requisitos del sistema formal A se pueden expresar fácilmente en el sistema del análisis clásico e incluso en el sistema de la aritmética clásica, y hay razones para creer que esto se mantendrá cierto para cualquier demostración que uno pueda construir.

Así que parece que ni siquiera podemos probar la consistencia de la aritmética con los métodos del sistema A porque esta demostración, si cumple con las reglas del sistema A, sería también expresable en la aritmética clásica, lo que es imposible. Sin embargo, se han obtenido resultados parciales interesantes, siendo el de mayor alcance el siguiente teorema demostrado por Herbrand: Si tomamos una teoría que es constructiva en el sentido de que cada afirmación de existencia realizada en los axiomas está apoyada por una construcción, y si añadimos a esta teoría el concepto no constructivo de existencia y todas las reglas de la lógica vinculadas a él, por ejemplo la ley del tercio excluso, nunca caeremos en contradicciones. Uno podría pensar que esto es lo que queríamos. Pero desafortunadamente en la aritmética clásica hacemos más que aplicar las reglas de la lógica (digamos, la ley del tercio excluso) a expresiones que contienen el concepto no constructivo de existencia. También aplicamos la inducción completa a estas expresiones, a saber, formamos propiedades de enteros utilizando la noción no constructiva de existencia y, para demostrar que estas propiedades pertenecen a todos los enteros, aplicamos inducción completa, y ese es el punto en el que el resultado de Herbrand falla. El método de Herbrand podría ser generalizado también a sistemas que adopten la subdivisión de Russell de tipos en subtipos pero, como mencioné antes, para sistemas mayores que contengan toda la aritmética o el análisis la situación es desesperanzadora si insistimos en dar una demostración de consistencia con los medios del sistema A.

Ahora, si observamos la matemática intuicionista tal como ha sido desarrollada por Brouwer y sus seguidores, nos percatamos de que ellos de ninguna manera se han confinado al sistema A. El primer lugar donde sus límites son transgredidos es en el concepto de "absurdo". En nuestro sistema A tenemos prohibidas las negaciones de las proposiciones generales o, debería decir, sólo las admitimos en el sentido de que realmente hemos encontrado un contraejemplo. Brouwer, sin embargo, introduce una forma distinta para negar proposiciones generales, llamada "absurdo", y por la afirmación de que una propiedad p es absurda entiende que uno ha logrado derivar a partir de p una contradicción (por supuesto, mediante los métodos intuicionistas de demostración). Ahora, podría suceder, y realmente sucede, que podamos derivar una contradicción de la proposición "para todo x, $F(x)$ es verdadero" mediante métodos intuicionistas de demostración sin que nadie sea capaz de ofrecer un contraejemplo, es decir, un x para el que $F(x)$ es falso, de modo que tenemos un perfecto sustituto para los teoremas de existencia no constructivos. Y mucho más que esto es cierto. Si investigamos los axiomas de las matemáticas intuicionistas tal como han sido establecidos por Heyting, un discípulo de Brouwer, encontramos que para la noción de absurdo se obtienen exactamente las mismas proposiciones que las que se obtienen para la negación en la matemática ordinaria –al menos, esto es cierto en el dominio de la aritmética–. Así que hemos logrado, mediante la noción de absurdo, dar una interpretación y, por tanto, también una demostración de consistencia para la aritmética clásica, que era imposible sólo con los medios del sistema A. El carácter de los axiomas asumidos por Heyting sobre el concepto de absurdo puede verse a partir del siguiente ejemplo: $p \Rightarrow \neg\neg p$, que significa: si p se ha probado, entonces la hipótesis $\neg p$ lleva a una contradicción. Esto es evidente, porque p y $\neg p$ ya constituyen una contradicción. Los axiomas de este tipo no violan el principio fundamental de las matemáticas constructivas, que sólo se puede hablar con sentido de las cosas que realmente podamos construir y las operaciones que podamos realmente llevar a cabo. Así que los axiomas de Heyting relativos al absurdo y conceptos similares sólo difieren del sistema A por el hecho de que el sustrato sobre el que las construcciones se llevan a cabo son las demostraciones en vez de los números u otros conjuntos enumerables de objetos matemáticos. Pero por este mismo hecho ellos violan el principio, que enuncié anteriormente, de que la palabra "cualquiera" es aplicable sólo a aquellas totalidades para las que disponemos de un proceso finito para generar todos sus elementos. Pues la totalidad de todas las posibles demostraciones ciertamente no posee esta cualidad y, sin embargo, la palabra "cualquiera" se aplica a esta totalidad en los axiomas de Heyting, como pueden ver con el ejemplo que mencioné anteriormente, que dice: "Dada *cualquier* demostración de una proposición p, podemos construir una reducción al absurdo para la proposición $\neg p$". Las totalidades cuyos elementos no se pueden generar mediante un procedimiento bien definido son en cierto sentido vagas e indefinidas hasta sus fronteras. Y esta objeción se aplica en particular a la totalidad de las demostraciones intuicionistas debido a la vaguedad del concepto de constructividad. Por tanto, esta fundación de la aritmética clásica mediante el uso del concepto de absurdo es de dudoso valor. Mas queda la esperanza de que en el futuro uno pueda encontrar otros métodos más satisfactorios de construcción, más allá de los límites del sistema A, que nos permitan dar un fundamento para el análisis clásico y la aritmética. Esta cuestión promete ser un fructífero campo para ulteriores investigaciones.

Traducido del inglés por J. M. Almira
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén
Correo electrónico: jmalmira@ujaen.es

La obra de Gödel en lógica matemática y teoría de conjuntos

por

Ignacio Jané

Kurt Gödel nació en 1906 en Brünn (actualmente Brno), entonces parte del imperio austrohúngaro y ahora de la república Checa. Estudió en la universidad de Viena y en 1940 emigró a los Estados Unidos de América, donde se incorporó al Institute for Advanced Study de Princeton. Unánimemente considerado el lógico más importante del siglo XX, sus resultados fundamentales en lógica matemática y teoría de conjuntos, obtenidos entre 1929 y 1939, han ejercido, y todavía ejercen, una profunda influencia. A partir de 1943 se dedicó sobre todo a la filosofía, especialmente a la filosofía de la matemática. Gödel tuvo una intensa relación con Albert Einstein, también miembro del Instituto, e incluso contribuyó a la cosmología relativista ([14], vol. 2, 190-198 y 202-216), describiendo, entre otras, una solución de las ecuaciones del campo gravitatorio en la que es posible viajar al pasado. Murió en Princeton en año 1978.

La referencia principal a la obra de Gödel la constituyen los cinco volúmenes, cuidadosamente editados y con magníficas introducciones a los distintos trabajos, de *Collected Works* [14]. Los dos primeros volúmes comprenden su obra publicada, el tercero contiene un buen número de artículos y conferencias no publicados, mientras que los dos últimos (más de 1300 páginas en total) se dedican a la correspondencia científica que Gödel mantuvo a lo largo de su vida. *Logical Dilemmas* [9], de John W. Dawson es una buena biografía de Gödel. *Reflections on Kurt Gödel* [24], [25] y *A logical Journey* [26] de Hao Wang, así como *In the Light of Logic* [11], de Solomon Feferman, contienen valiosa información y comentarios sobre sus concepciones filosóficas y su actitud ante los fundamentos de la matemática. Hay una traducción al español de las obras publicadas de Gödel [15]. En ella se decidió alterar la terminología e incluso algunos símbolos de los trabajos originales, lo cual dificulta su uso como obra de consulta.

En este artículo me ocuparé de las dos aportaciones más influyentes de Gödel, a saber, su célebre teorema de incompletud y su demostración de la consistencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo. Mi presentación no consitirá en una descripción más o menos amplia de los artículos pertinentes, sino que procuraré poner de manifiesto sus aspectos esenciales, lo cual, en algunas ocasiones, me obligará a tratar algunos puntos con cierto detalle. Creo que esa actitud es adecuada en el caso del teorema de incompletud, que a menudo se trata con una ligereza inaceptable.

Muchas veces se ha apelado al teorema de incompletud de Gödel para obtener supuestas conclusiones de toda índole. Estas referencias a Gödel suelen basarse en una concepción deficiente de lo que el teorema afirma. Un buen lugar para conocer los malos usos del teorema de incompletud y descubrir el error o los errores en cada caso es el libro *Gödel's Theorem: An incomplete guide to its use and abuse* [13], del recientemente fallecido lógico y filósofo sueco Torkel Franzén.

1

El segundo de los veintitrés problemas que David Hilbert presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900 lleva por nombre 'la consistencia de los axiomas aritméticos' (ver [16]). Aquí, 'aritmética' hace referencia a la teoría de los números reales, una axiomatización de la cual Hilbert había publicado ese mismo año [17]. Los axiomas de Hilbert caracterizan el cuerpo de los números reales como un cuerpo ordenado arquimediano maximal y el problema en cuestión consistía en demostrar que estos axiomas "no son contradictorios, es decir, que nunca pueden obtenerse resultados mutuamente contradictorios mediante un número finito de inferencias lógicas a partir de ellos". La importancia de este resultado era fundamental para Hilbert, puesto que, en sus propias palabras, "la demostración de la consistencia de los axiomas es a la vez la demostración de la existencia matemática de la totalidad de los números reales o del continuo". La razón de estas palabras reside en la identificación de la existencia matemática con la posibilidad lógica. Los axiomas caracterizan los números reales porque 1) definen la estructura de cuerpo ordenado arquimediano maximal, 2) los números reales (si existen) forman una estructura tal y 3) cualesquiera estructuras tales son isomorfas entre sí. Decir que los números reales existen no es otra cosa que afirmar la posibilidad lógica de un cuerpo arquimediano maximal, es decir, la consistencia de los axiomas que lo definen. Esta concepción de la existencia matemática es bastante natural y no sólo fue propuesta explícitamente por Hilbert. Así, Poincaré escribía en 1905 que "en matemáticas, la palabra existir no puede tener más que un significado, significa exento de contradicción" ([20], 819).

¿Cómo se demuestra que los axiomas de una teoría T no son contradictorios? Puede hacerse reinterpretando los términos primitivos de T como conceptos de otra teoría T' y mostrando que los axiomas así reinterpretados son teoremas de T'. Con este procedimiento, sin embargo, sólo reducimos la consistencia de T a la de T', pero no justificamos de manera definitiva que T es consistente, a no ser que ya hayamos establecido que T' lo es. La demostración de consistencia que Hilbert requería debía ser absoluta, no relativa a otra teoría, y sugirió que podría obtenerse "mediante un examen cuidadoso y una modificación apropiada de los métodos de razonamiento conocidos en la teoría de los números irracionales". Dejando a un lado la oscuridad de esta sugerencia, vale la pena observar que ni siquiera es claro que el problema de la consistencia formulado por Hilbert sea un problema matemático preciso, puesto que no está claro cuáles son las inferencias lógicas a que su definición hace referencia. Cuando, casi veinte años más tarde, Hilbert empezó a ocuparse seriamente de las demostraciones de consistencia, tuvo que empezar delimitando con precisión los instrumentos lógicos necesarios para la formulación de las teorías. Hacerlo no es sólo necesario para abordar el problema de la consistencia, sino también para poder identificar una teoría a partir de los axiomas. Damos por hecho que los axiomas de Hilbert (o cualesquiera otros axiomas) determinan una teoría, a saber, la totalidad de sus consecuencias lógicas, pero ¿está claro, e incluso, está determinado qué cuenta cómo consecuencia lógica?

2

La lógica subyacente a los axiomas de la teoría de los números reales de Hilbert es compleja, sobre todo en lo que respecta a los conceptos *arquimediano* y *maximal*. Normalmente caracterizamos los números reales como un cuerpo ordenado completo, pero incluso esta caracterización es compleja, puesto que el concepto de completud presupone el de conjunto arbitrario de elementos de un dominio: un cuerpo ordenado es completo si *todo conjunto* acotado superiormente tiene una cota superior mínima. Las dificultades inherentes a la lógica necesaria para dar cuenta de las consecuencias de estos axiomas son notables. Para formular los axiomas de cuerpo ordenado nos basta con cuantificar sobre los elementos del cuerpo, pero para expresar que el orden es completo debemos cuantificar también sobre los subconjuntos del cuerpo, lo cual comporta aceptar como dada la totalidad de tales subconjuntos. En el primer caso (cuantificación sobre los elementos de la estructura que describimos), hablamos de *lógica elemental* o *lógica de primer orden*. Si cuantificamos también sobre conjuntos de elementos de la estructura hablamos de *lógica de segundo orden*, que, de hecho, es un apartado de la teoría de conjuntos. Hilbert y sus colaboradores (entre ellos Wilhelm Ackermann y Paul Bernays) dieron un tratamiento formal riguroso a la lógica de primer orden.

Los símbolos comunes a todo lenguaje formal de primer orden son las variables individuales (v_1, v_2, v_3, ...), las conectivas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, para la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional, respectivamente), los cuantificadores ($\forall$, $\exists$), el símbolo de igualdad ($=$) y los paréntesis como símbolos auxiliares. Además, cada lenguaje particular contiene distintos símbolos propios, que pueden ser constantes individuales, símbolos funcionales o símbolos relacionales, para referirnos a objetos distinguidos, a operaciones y a relaciones específicas, respectivamente. (El lenguaje apropiado para la teoría de los cuerpos ordenados contiene las constantes individuales 0 y 1, los símbolos funcionales $+$ y $\cdot$, y el símbolo relacional $<$.) Hay reglas precisas para la generación de las fórmulas de un lenguaje, así como una caracterización efectiva de las axiomas lógicos y de las reglas de inferencia. Con su ayuda definimos el concepto de *deducción* a partir de un conjunto Σ de fórmulas: una deducción a partir de Σ es una sucesión finita $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas tales que cada una de ellas es un axioma lógico, o una fórmula de Σ, o se obtiene de fórmulas anteriores aplicando una regla de inferencia. Usamos la notación $\Sigma \vdash \varphi$ para expresar que hay una deducción de la fórmula φ a partir de Σ, brevemente, que φ es *deducible* de Σ.

Tras toda presentación formal de la lógica de primer orden acecha la cuestión de su arbitrariedad. No en la elección de los símbolos y en la definición de las fórmulas, sino en la elección de los axiomas lógicos y de las reglas de inferencia (en suma, del *cálculo deductivo*). De la gran variedad de suposiciones y modos de inferencia que usamos en los argumentos matemáticos habituales y que podemos calificar de lógicos, ¿por qué elegimos unos en detrimento de otros? ¿Cómo sabemos que al limitar los modos de inferencia no limitamos los resultados? Hay muchos cálculos, ¿cómo sabemos que la elección de uno u otro no altera los resultados obtenidos?

Sea Σ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden. Podemos pensar en Σ como en el conjunto de axiomas de una teoría, a saber, de la teoría cuyos teoremas son las consecuencias lógicas de los axiomas. Si hemos construido cuidadosamente el cálculo deductivo, este será *correcto*, es decir, las fórmulas deducibles a partir de Σ serán teoremas de la teoría en el sentido habitual. La cuestión es garantizar que todos los teoremas son deducibles en el cálculo a partir de los axiomas. Este es el requisito de la *completud* del cálculo. Desde el último tercio del siglo XIX, se entendió que los teoremas de una teoría axiomática son las fórmulas verdaderas en todos los modelos de los axiomas. Con esta concepción general de teorema, el problema de la completud de un cálculo deductivo consiste en determinar si toda fórmula verdadera en todos los modelos de los axiomas es deducible en el cálculo a partir de ellos. Este es un problema que se presentaba como abierto en la primera edición, aparecida en 1928, del influente texto *Grundzüge der theoretischen Logik* [18], de Hilbert y Ackermann. Su solución afirmativa, conocida como el *Teorema de completud* de la lógica de primer orden, la ofreció Gödel en 1929 en su tesis doctoral en la Universidad de Viena y en un artículo publicado el año siguiente ([14], vol. 1, 60-101 y 102-123).

Una formulación equivalente del teorema de completud de la lógica de primer orden es que todo conjunto consistente de fórmulas (*consistente* en el sentido del cálculo: a partir de él no es deducible una fórmula y su negación) tiene un modelo. Gödel demostró algo más fuerte, a saber, que todo conjunto consistente de fórmulas posee un modelo numerable (o sea o bien finito o bien biyectable con el conjunto de los números naturales). De ello se sigue que la teoría de los números reales axiomatizada por Hilbert no es formalizable en un lenguaje de primer orden, puesto que todos sus modelos son isomorfos al cuerpo ordenado de los números reales, que, como Cantor demostró en 1874 en [1], no forman un conjunto numerable. La caracterización de los números reales requiere apelar a la teoría de conjuntos, lo cual no es sorprendente si recordamos que tal caracterización fue un estímulo considerable para la creación de la teoría de conjuntos por Dedekind y de Cantor (ver [12]).

3

La demostración del teorema de completud fue la primera contribución de Gödel a la lógica, pero el resultado por el cual es más famoso es el llamado *Teorema de incompletud* ([14], vol 1, 144-195). Es conveniente aclarar el significado del término 'completud' en ambos teoremas. Como ya hemos visto, en el primer caso, 'completud' es una propiedad de cálculos deductivos: un cálculo deductivo es completo si toda consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ es deducible a partir de Σ en el cálculo. En el segundo caso, 'completud' se aplica a conjuntos de fórmulas. Un conjunto Σ de fórmulas de un lenguaje dado es completo si, para toda fórmula φ del lenguaje en cuestión, o bien φ o bien $\neg\varphi$ es consecuencia lógica de Σ. Si el lenguaje lo es de primer orden, el teorema de completud de Gödel nos permite reemplazar 'consecuencia lógica' por 'deducible' (en un cálculo dado).

La importancia del concepto de completud en este segundo sentido es obvia si lo aplicamos al conjunto de los axiomas de una teoría. Que un conjunto consistente de axiomas sea completo significa que la teoría que determina (o sea el conjunto de sus consecuencias lógicas) contiene la respuesta a todas las preguntas formulables en su lenguaje. La exigencia de completud a ciertos conjuntos de axiomas está íntimamente relacionada con el interés del problema de su consistencia. ¿Por qué era tan importante para Hilbert demostrar la consistencia de su teoría los números reales? No porque fuera una teoría cualquiera de los números reales. Una teoría muy pobre no caracterizaría el cuerpo de los números reales y, por tanto, la demostración de su consistencia no podría garantizar lo que Hilbert pretendía, a saber, la existencia del continuo. Si bien la relación entre completud y categoricidad de una teoría (una teoría es categórica si todos sus modelos son mutuamente isomorfos) no era muy clara en 1900, Hilbert mantenía que sus axiomas de los números reales, al igual que los de la geometría euclídea, eran completos (aunque tampoco está del todo claro qué entendía entonces Hilbert por 'completud').

Como es habitual en los teoremas fundamentales, el teorema de incompletud de Gödel admite varias formulaciones, no todas ellas completamente equivalentes. La razón principal de este hecho es que estos teoremas suelen generalizarse, y algunas generalizaciones suelen serlo en direcciones distintas. En una formulación, el teorema dice que no hay ningún conjunto decidible de axiomas cuyas consecuencias sean exactamente todas las verdades aritméticas elementales. En otra formulación más general, el teorema de incompletud dice que todo conjunto decidible de axiomas en el lenguaje de la aritmética con un mínimo contenido matemático es incompleto. Esta es la formulación que discutiré y cuya demostración trataré de esbozar.

Empecemos aclarando algunos términos. El *lenguaje de la aritmética* es el lenguaje de primer orden cuyos símbolos primitivos no lógicos son $<$, $+$, $\cdot$, S, 0, para la relación de orden, las operaciones de suma y producto, la operación sucesor ($n \mapsto n+1$) y el número cero, respectivamente. Con ayuda de los dos últimos símbolos formamos los numerales, es decir, las expresiones 0, S0, SS0, SSS0, ... , $\underbrace{\mathrm{S} \ldots \mathrm{S}}\,0$, ... , que abreviamos como $\widetilde{0}$ $\widetilde{1}$, $\widetilde{2}$, ... , $\widetilde{n}$, ... (El numeral $\widetilde{n}$ es el nombre canónico del número n en el lenguaje de la aritmética).

Debemos distinguir entre *fórmulas abiertas* (con una o más variables libres) y fórmulas cerradas, o *sentencias* (sin variables libres). Las sentencias del lenguaje de la aritmética funcionan como enunciados sobre los números naturales, las fórmulas con una variable libre $\varphi(v_1)$ expresan propiedades de números, las fórmulas con dos variables libres $\varphi(v_1, v_2)$, expresan relaciones entre dos números, etc. Los axiomas y los teoremas de una teoría son siempre sentencias. Una sentencia del lenguaje de la aritmética es verdadera si es satisfecha en la estructura de los números naturales. No hay nada oscuro ni filosófico en este concepto de verdad en una estructura. Es un concepto preciso que admite una definición matemática (aunque no meramente aritmética), como puede constatarse consultando cualquier manual de lógica elemental.

Un conjunto de fórmulas es *decidible* si es computable, es decir, si hay un algoritmo que permita determinar de manera mecánica si una fórmula cualquiera pertenece o no al conjunto en cuestión. Las cuestiones relativas a la decidibilidad de conjuntos de fórmulas o de relaciones entre fórmulas son reducibles a cuestiones sobre la computabilidad de conjuntos de números naturales y de relaciones entre ellos. Estas últimas admiten un tratamiento matemático preciso, en términos de recursividad, de calculabilidad por una máquina de Turing, o mediante otra caracterización equivalente. Las múltiples especificaciones del concepto de computabilidad son posteriores al artículo de Gödel, quien consideró un concepto más limitado de función y de relación computable, a saber, lo que ahora conocemos como funciones y relaciones recursivas primitivas. En lo que sigue, hablaré de recursividad en vez de computabilidad cuando quiera referirme explícitamente al concepto matemático preciso. Que el concepto informal de computabilidad coincide con el de recursividad es lo afirma la *tesis de Church-Turing*. En lo que sigue, podemos apelar implícitamente a ella para convencernos de que ciertas relaciones o funciones claramente computables son recursivas.

Sea T una teoría en el lenguaje de la aritmética acerca de la cual sólo suponemos que 1) posee un conjunto decidible de axiomas (es recursivamente axiomatizable), y 2) a partir de sus axiomas son deducibles las verdades aritméticas más simples. Con toda precisión, entre los teoremas de T se hallan todas las ecuaciones particulares verdaderas de la forma $\widetilde{n}+\widetilde{m} = \widetilde{k}$ y $\widetilde{n}\cdot\widetilde{m} = \widetilde{k}$, todas las desigualdades verdaderas de la forma $\neg\,(\widetilde{n} = \widetilde{m})$, la sentencia $\forall x \neg\,(x < \widetilde{0})$, y todas las sentencias de la forma $\forall x(x < \mathrm{S}\widetilde{n} \leftrightarrow x = \widetilde{0} \vee x = \widetilde{1} \vee \ldots \vee x < \widetilde{n})$ y de la forma $\forall x(x < \widetilde{n} \vee x = \widetilde{n} \vee \widetilde{n} < x)$. Es obvio que el contenido aritmético mínimo exigido a T es muy débil. Sin embargo, es suficiente para garantizar que todas las relaciones y funciones recursivas son *representables* en T, es decir:

1. Si R es una relación k-aria recursiva, hay una fórmula del lenguaje de aritmética con k variables libres $\rho(v_1, \ldots, v_k)$ tal que para cualesquiera números $n_1, \ldots, n_k$:

$$\text{si } R(n_1, \ldots, n_k), \text{ entonces } T \vdash \rho(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k), \tag{R1}$$

$$\text{si no } R(n_1, \ldots, n_k), \text{ entonces } T \vdash \neg\rho(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k). \tag{R2}$$

2. Si h es una función k-aria recursiva, hay una fórmula del lenguaje de la aritmética con $k+1$ variables libres $\eta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$ tal que para cualesquiera números $n_1, \ldots n_k, m$: si $h(n_1, \ldots, n_k) = m$, entonces

$$T \vdash \eta(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k, \widetilde{m}), \tag{F1}$$

$$T \vdash \forall v_{k+1}\,((\eta(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k, v_{k+1}) \rightarrow v_{k+1} = \widetilde{m}). \tag{F2}$$

Asignemos un número natural positivo a cada símbolo del lenguaje de la aritmética. Por ejemplo, asignamos los números 1 y 2 a los dos paréntesis, los números del 3 a 10 a los ocho símbolos lógicos (conectivas, cuantificadores, símbolo de igualdad), los números del 11 al 15 a los cinco símbolos primitivos de la artitmética y el número $15+n$ a la variable v_n $(n \geq 1)$. Sea $\#s$ el número asignado al símbolo s. De este modo, a cada expresión, o sea, a cada sucesión finita $\mathbf{s} = s_1, s_2, \ldots s_n$ de símbolos del lenguaje le corresponde la sucesión finita de números $\#s_1, \#s_2, \ldots, \#s_n$, que podemos cifrar mediante un número, $\mathrm{G}(\mathbf{s})$, el *número de Gödel* de $\mathbf{s}$. Por ejemplo, podemos definir $\mathrm{G}(\mathbf{s}) = 2^{\#s_1} \cdot 3^{\#s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\#s_n}$, donde p_i es el i-ésimo número primo. Finalmente, a cada sucesión finita de expresiones del lenguaje le corresponde la sucesión de sus números de Gödel, que a su vez podemos cifrar con un único número natural. De este modo, símbolos, fórmulas y demostraciones pueden verse como números, y las operaciones y relaciones entre elementos sintácticos corresponden a relaciones entre números.

Las relaciones y funciones sintácticas son recursivas, mejor dicho, lo son las correspondientes relaciones y funciones de números naturales. En particular, es recursivo el conjunto de los números de Gödel de las fórmulas, así como el del conjunto de números de Gödel de las sentencias. Además, dado que hemos supuesto T posee un conjunto decidible de axiomas, Σ, también es recursivo el conjunto de los números de Gödel de los axiomas de T, al igual que relación Ded que se da entre un número n y un número m cuando *m es el número de una deducción a partir de Σ de la fórmula cuyo número de Gödel es n.*

Introducimos ahora una función recursiva que merece particular atención. Si φ es una fórmula, la *diagonalización* de φ es la fórmula obtenida al substituir en φ la variable v_1 por el numeral del número de Gödel de φ. O sea, si $\mathrm{G}(\varphi(v_1)) = n$, la diagonalización de $\varphi(v_1)$ es la fórmula $\varphi(\widetilde{n})$. Definimos ahora la función diag, que es la versión aritmetizada de la diagonalización: Si n es el número de Gödel de una fórmula φ, $\mathsf{diag}(n)$ es el número de Gödel de la diagonalización de φ. La función diag es recursiva (es obviamente calculable en sentido informal).

La importancia de la diagonalización es que nos permite obtener *sentencias autoreferentes*. Dada una fórmula con una única variable libre $\varphi(v_1)$ hallaremos una sentencia σ tal que, si n es el número de Gödel de σ, $T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\widetilde{n})$. (De modo sugerente, aunque impreciso, podemos decir que, demostrablemente en T, la sentencia σ dice se sí misma que tiene la propiedad expresada por φ.) La proposición de que una sentencia σ tal existe es el llamado *Lema de diagonalización*, que ahora demostramos.

Sea $\delta(v_1, v_2)$ una fórmula que representa la función diag en T y consideremos la fórmula $\psi(v_1) = \forall v_2\, (\delta(v_1, v_2) \rightarrow \varphi(v_2))$. Sea n el número de Gödel de ψ. La sentencia buscada σ es $\psi(\widetilde{n})$, o sea, σ es la diagonalización de ψ. Con todo detalle, σ es la sentencia:

$$\forall v_2\, (\delta(\widetilde{n}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2)).^2$$

Sea k el número de Gödel de σ. Así, $\mathsf{diag}(n) = k$. Puesto que $\delta(v_1, v_2)$ representa a diag en T, por (F1) tenemos que $T \vdash \delta(\widetilde{n}, \widetilde{k})$, de modo que:

$$T \vdash \sigma \rightarrow \varphi(\widetilde{k}). \qquad (*_1)$$

Por otra parte, por (F2), $T \vdash \forall v_2\, (\delta(\widetilde{n}, v_2) \rightarrow v_2 = \widetilde{k})$, de donde se sigue (simplemente por lógica) que $T \vdash \varphi(\widetilde{k}) \rightarrow \forall v_2\, (\delta(\widetilde{n}, v_2) \rightarrow \varphi(v_2))$, es decir:

$$T \vdash \varphi(\widetilde{k}) \rightarrow \sigma, \qquad (*_2)$$

De $(*_1)$ y $(*_2)$ concluimos que $T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\widetilde{k})$, como debíamos mostrar.

Puesto que T es recursivamente axiomatizable, la relación Ded es recursiva y por tanto representable en T. Fijemos una fórmula $\alpha(v_1, v_2)$ que representa a Ded en T. Por (R1) y (R2) tenemos que, para cualesquiera números n y m, $T \vdash \alpha(\widetilde{n}, \widetilde{m})$ o $T \vdash \neg\alpha(\widetilde{n}, \widetilde{m})$, según $\mathsf{Ded}(n, m)$ o no $\mathsf{Ded}(n, m)$. Por el lema de diagonalización aplicado a la fórmula $\forall v_2 \neg\alpha(v_1, v_2)$, obtenemos una sentencia γ con número de Gödel e tal que

$$T \vdash \gamma \leftrightarrow \forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2). \qquad (*_3)$$

[2]Sea F_n la fórmula con número de Gödel n. Si leemos '$\delta(v_1, v_2)$' como 'F_{v_2} es la diagonalización de F_{v_1}', podemos leer 'σ' como: 'la diagonalización de F_n tiene la propiedad φ'. Pero la diagonalización de F_n es precisamente σ. Por tanto, σ dice de sí misma que tiene la propiedad φ. El argumento que sigue muestra que T es capaz de desentrañar estas relaciones.

Decimos que γ es la *sentencia de Gödel de la teoría* T. Tenemos que:

- *Si* T *es consistente, entonces* $T \nvdash \gamma$.

Pues supongamos que $T \vdash \gamma$. Hay, pues, una deducción de γ a partir de los axiomas de T, es decir, hay un número m tal que $\mathsf{Ded}(e, m)$, de modo que, por (R1), $T \vdash \alpha(\widetilde{e}, \widetilde{m})$. Por otra parte, por $(*_3)$, $T \vdash \forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$, de donde se sigue que $T \vdash \neg\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{m})$, por lo que T es inconsistente.

Así, si T es consistente, T no demuestra su sentencia de Gödel. Quisiéramos concluir ahora que tampoco la refuta, es decir, que $\neg\gamma$ tampoco es un teorema de T. Sin embargo, para ello debemos exigir que T cumpla una condición adicional. Para motivarla, veamos qué ocurriría si $\neg\gamma$ fuera un teorema de la teoría consistente T. Por una parte, por $(*_3)$, tendríamos que $T \vdash \neg\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$; por otra parte, como acabamos de mostrar, no hay ninguna deducción de γ a partir de de los axiomas de T, de modo que, por (R2), para todo número m, $T \vdash \neg\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{m})$. Vemos, pues, que debería haber una fórmula, $\varphi(v_2)$, con una variable libre, a saber la fórmula $\neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$, tal que (i) $T \vdash \neg\forall v_2 \varphi(v_2)$, a la vez que (ii) $T \vdash \varphi(\widetilde{m})$ *para todo número natural* m. De una teoría que que cumple (i) y (ii) para alguna fórmula φ se dice que es ω-inconsistente. Es claro que una teoría tal no es verdadera de los números naturales (es decir, no tiene a la estructura de los números naturales como modelo). Una teoría que no es ω-inconsistente es *ω-consistente.* Puesto que toda teoría ω-consistente es consistente, tenemos que:

- *Si* T *es ω-consistente, entonces* $T \nvdash \neg\gamma$.

Podemos formular, pues, el teorema de incompletud de Gödel de este modo: Toda teoría recursivamente axiomatizable que sea ω-consistente y que tenga por lo menos el contenido mínimo mencionado (suficiente para la representabilidad de las relaciones y funciones recursivas) es incompleta.

4

El lema de diagonalización nos permite obtener el teorema, demostrado por Alonzo Church en 1936 [7], según el cual toda teoría consistente con por lo menos el contenido mínimo indicado es indecidible, es decir, el conjunto de (los números de Gödel de) sus teoremas no es recursivo. El argumento es el siguiente: Si tal conjunto es recursivo, hay una fórmula $\tau(v_1)$ que lo representa en T; o sea, para toda sentencia α con número de Gödel m, si $T \vdash \alpha$, entonces $\vdash \tau(\widetilde{m})$, mientras que si $T \nvdash \alpha$, entonces $\vdash \neg\tau(\widetilde{m})$. Aplicamos ahora el lema de diagonalización a la fórmula $\neg\tau(v_1)$ y obtenemos una sentencia σ tal que $T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\tau(\widetilde{e})$ (donde e es el número de Gödel de σ). Pero entonces podemos concluir que $T \vdash \sigma$ si y sólo si $T \vdash \neg\sigma$, por lo que T es inconsistente.

No es difícil ver que toda toda teoría consistente recursivamente axiomatizable y completa es decidible (para decidir si una sentencia σ es un teorema de la teoría basta producir, una a una, todas las deducciones y verificar si su última fórmula es σ o $\neg\sigma$. La completud de la teoría garantiza que una u otra debe aparecer). Podemos, pues, aplicar el teorema de Church para concluir que toda teoría consistente y recursivamente axiomatizable con por lo menos el contenido mínimo indicado es incompleta. Esta es una nueva demostración del teorema de incompletud de Gödel en el que no interviene la ω-consistencia. La simple consistencia basta. En este aspecto, esta forma del teorema del completud es más fuerte que la anterior, ya sólo exige la consistencia, pero la demostración que de él hemos dado es menos informativa que la de Gödel, ya que no exhibe ninguna sentencia independiente de la teoría (es decir, ni ella ni su negación son deducibles de sus axiomas). Ahora bien, en el mismo año 1936, Barkley Rosser obtuvo una sentencia tal modificando la construcción de Gödel [21].

Church mostró también [6] que la lógica misma de primer orden es indecidible, en el sentido de que no hay ningún algoritmo que permita determinar si una sentencia es universalmente válida (o sea, verdadera en todas las estructuras). Para ello basta hallar una teoría consistente y finitamente axiomatizable T en el lenguaje de la aritmética con por lo menos el contenido mínimo mencionado. La razón es simple: Si la lógica fuera decidible lo sería también T, pues para determinar si σ es un teorema de T basta determinar si el condicional $\alpha \to \sigma$ es universalmente válido, donde α es la conjunción de los axiomas de T. (Los dos primeros artículos de la breve monografía *Undecidable theories* [22] de Tarski, Mostowski y Robinson constituyen una magnífica presentación general de estos temas.)

Vale la pena observar que el requisito repetidamente mencionado de poseer un mínimo contenido matemático no es eliminable, pues no es difícil describir teorías consistentes y completas en el lenguaje de la aritmética. Un ejemplo trivial: la teoría cuyos axiomas son las dos sentencias $\forall v_1 \forall v_2\,(v_1 = v_2)$ y $\forall v_1\,(v_1 < v_1)$. Su modelo (único salvo isomorfismo) contiene un único objeto a (esto fija la denotación de la constante 0 y las operaciones S, + y $\cdot$) tal que $a < a$.

Falta decir algo sobre el llamado *segundo teorema de incompletud*. Tras la descripción de la sentencia de Gödel γ de una teoría T, hemos mostrado que si T es consistente, γ no es deducible en T. Tratemos de formular este resultado en el lenguaje de la aritmética. Puesto que $T \vdash \neg\,(\widetilde{0} = \widetilde{1})$, T es consistente si y sólo si $T \nvdash \widetilde{0} = \widetilde{1}$. Así, si c es el número de Gödel de la sentencia $\widetilde{0} = \widetilde{1}$, T es consistente si y sólo si para todo número m no es el caso que $\mathsf{Ded}(c, m)$. Si α es una fórmula que representa a Ded en T, podemos expresar en T la consistencia de T mediante la sentencia $\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{c}, v_2)$. Llamemos a esta sentencia $\mathsf{Con}(T)$.

Análogamente, dado que $\mathrm{G}(\gamma) = e$, expresamos que γ no es deducible en T como $\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$. Pero, por $(*_3)$, esta sentencia es equivalente a γ. Por tanto podemos formalizar que si T es consistente, entonces $T \nvdash \gamma$, como: $\mathsf{Con}(T) \to \gamma$.

Ahora bien, esta formalización puede ser deficiente. Que la fórmula α represente a la relación Ded en la teoría T sólo garantiza que T evalúa correctamente Ded *para cada par de números concretos*. Pero de ello no podemos inferir que α capture adecuadamente el concepto de deducibilidad y, por tanto, que la sentencia $\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$ exprese que γ no es deducible en T.

Sin embargo, si como T tomamos una teoría aritmética razonable y razonablemente potente (más potente que el mínimo requerido para las demostraciones anteriores), en particular, si como T tomamos la aritmética de Peano (entre cuyos axiomas se hallan las definiciones recursivas de la suma y el producto y el principio de inducción matemática), podemos representar las relaciones y funciones recursivas con fórmulas que expresan estas relaciones y funciones de modo natural. En tal caso, la fórmula $\mathsf{Con}(T) \to \gamma$ expresará lo que pretendemos expresar.

Supongamos, pues, que T es la aritmética de Peano. Supongamos también que las fórmulas elegidas para representar las funciones y relaciones recursivas son intensionalmente correctas. En la última sección de su artículo, Gödel observa que la demostración de que la consistencia de T implica la indemostrabilidad de γ en T puede llevarse a cabo en T, por lo que el condicional $\mathsf{Con}(T) \to \gamma$ es, de hecho, un teorema de T. Pero entonces, si T es consistente, $\mathsf{Con}(T)$ no es un teorema de T, pues si lo fuera también lo sería γ. Este es el segundo teorema de incompletud de Gödel, según el cual la consistencia de una teoría suficientemente potente no puede demostrarse con los medios formalizables en la misma teoría. Gödel no demostró propiamente este teorema, sólo argumentó en favor de su plausibilidad. La primera demostración completa, muy laboriosa, apareció en 1939, en el segundo volumen de *Grundlagen der Mathematik* [19], de Hilbert y Bernays.

Es preciso añadir que los resultados discutidos hasta ahora no sólo se aplican a teorías en el lenguaje de la aritmética, sino también a todas aquellas teorías en las que los conceptos aritméticos son definibles, en particular a la teoría de conjuntos.

5

El primero de los problemas propuestos por Hilbert en su conferencia de 1900 lleva por título *El problema cantoriano de la potencia del continuo*. La potencia (Mächtigkeit) de un conjunto es su cardinalidad, y el continuo es el conjunto de los números reales. El problema consiste en demostrar o refutar la *hipótesis del continuo*, que Cantor propuso por primera vez en 1878 en [2], según la cual todo conjunto de números reales o bien es numerable (o sea, biyectable con el conjunto de los números naturales) o bien tiene la potencia del continuo (es decir, es biyectable con el conjunto de todos los números reales).

Tras este problema, Hilbert presenta otro que, dice, está íntimamente relacionado con el primero y puede ser la clave de su solución. Se trata de demostrar o refutar la aseveración de Cantor de que todo conjunto, y el continuo en particular, es bien ordenable, es decir, admite un buen orden. Un buen orden de un conjunto A es un orden lineal de A con respecto al cual todo subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo.

En 1904, Zermelo introdujo el axioma de elección y con su ayuda demostró que todo conjunto es bien ordenable (brevemente, demostró el *principio del buen orden*) [27]. Cuatro años más tarde publicó otra prueba del mismo resultado [28]. En la formulación que le dio Zermelo cuando en 1908 presentó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos [29], el axioma de elección dice que si A es un conjunto cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, hay un conjunto B que posee exactamente un elemento en común con cada uno de los elementos de A. Es obvio que si la unión del conjunto A (o sea el conjunto $\bigcup A$ cuyos elementos son los elementos de los elementos de A) es bien ordenable, tal conjunto B existe: dado un buen orden de la unión de A, definimos B como el conjunto de los elementos mínimos de los elementos de A. Así, módulo los restantes axiomas de Zermelo, el axioma de elección y el principio del buen orden son equivalentes.

¿Resolvió Zermelo el problema de Hilbert? La respuesta depende de cuáles sean los principios conjuntistas básicos que aceptemos. De hecho, tanto el problema del buen orden como el del continuo sólo tienen un sentido claro si fijamos con suficiente precisión la teoría de conjuntos en que están inmersos, y en 1900 Hilbert no estaba en disposición de hacerlo. En todo caso, tras la demostración de Zermelo y la axiomatización de la teoría de conjuntos, la pregunta natural a este respecto es si el axioma de elección es deducible de los axiomas restantes.

A partir de la axiomatización de Zermelo, la teoría de conjuntos se fue precisando hasta estabilizarse en la teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF) o en la versión equivalente de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG). Las dos teorías son equivalentes en cuanto los mismos teoremas sobre conjuntos son demostrables en una y otra, si bien ZF trata sólo de conjuntos y NBG admite también clases. En lo que sigue, sólo hablaremos de ZF.

En 1939 Gödel demostró que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son consistentes con ZF ([14], vol. 2, 28-32). Esto es, demostró que si extendemos ZF con el axioma de elección y la hipótesis del continuo como nuevos axiomas, el resultado es una teoría consistente, si ZF lo es. De esto se sigue que ni el axioma de elección ni la hipótesis del continuo son refutables en ZF. En 1963, Paul Cohen mostró que tampoco son demostrables en ella [8]. Las dos proposiciones son, pues, independientes de ZF.

ZF es una teoría axiomática en un lenguaje de primer orden sobre los conjuntos puros, es decir, los conjuntos cuyos elementos son conjuntos, los elementos de cuyos elementos son conjuntos, etc. Sus axiomas son de dos clases. Por una lado, están aquellos que podemos calificar de estructurales: el axioma de extensionalidad, según el cual todo conjunto está determinado por sus elementos, y el de fundación o regularidad, que afirma que todo conjunto no vacío posee un elemento minimal, es decir que para todo conjunto $a \neq \emptyset$

hay un conjunto b tal que $b \in a$ y $b \cap a = \emptyset$. Por otro lado, están los axiomas de existencia de conjuntos: el axioma del par, el de separararación, el de la unión, el de infinitud, el de substitución y el del conjunto potencia (el conjunto potencia $\mathcal{P}(a)$ de un conjunto a es el conjunto de todos los subconjuntos de a).

Esencial en el desarrollo de ZF es el concepto de *ordinal.* Los ordinales, que Cantor introdujo en 1883 ([3], [5]), pueden verse como una extensión de los números naturales. Cantor los introdujo mediante dos principios de generación. El primer principio permite pasar de un ordinal cualquiera α a su *sucesor* inmediato, $\alpha + 1$. El segundo principio se aplica a todo conjunto de ordinales sin elemento máximo para generar su *límite*, esto es, el menor ordinal mayor que todos los elementos del conjunto. Los ordinales obtenidos por el primer principio son los ordinales sucesores; los obtenidos por el segundo principio son los ordinales límites. Los números naturales son los ordinales generables mediante el uso exclusivo del primer principio de generación. Su límite es ω, el menor ordinal infinito. Exceptuando el menor ordinal, 0, todo ordinal es o bien un sucesor o bien un límite. Posteriormente Cantor definió los ordinales como los tipos de orden de los buenos órdenes, y actualmente se definen como conjuntos de cierta clase (conjuntos transitivos bien ordenados por la relación de pertenencia). Una ventaja de la definición actual, debida a von Neumann, es que la relación de orden entre ordinales es la relación de pertenencia ($\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$), de modo que cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales que le preceden. Sin embargo, la definición original, aunque matemáticamente deficiente, es la más sugerente. Además, nos permite ver de modo inmediato por qué no hay ningún conjunto que contenga todos los ordinales. La razón es simple: si a es un conjunto cualquiera de ordinales, o bien a tiene elemento máximo o no lo tiene. Si lo tiene, su sucesor inmediato es un ordinal que no pertenece a a, si no lo tiene, el límite de a es un ordinal que no pertenece a a.

De acuerdo con ZF, el universo de los conjuntos V (que no es un conjunto) se estructura en una sucesión transfinita de estratos, los conjuntos V_α, uno para cada ordinal α, de modo que V_0 es el conjunto vacío, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ y, si α es un ordinal límite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$. Así, los elementos un estrato sucesor son los subconjuntos del estrato precedente, mientras que los elementos un estrato límite son todos aquellos conjuntos que ya aparecen en estratos anteriores. De esto se sigue que cada V_α es transitivo (o sea, contiene los elementos de sus elementos) y que si $\alpha <\beta$, entonces $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Esta sucesión de estratos es la llamada *jerarquía acumulativa.* Su definición no depende del axioma de fundación. De hecho, este axioma es equivalente (módulo los restantes axiomas) a la proposición de que todo conjunto pertenece a algún estrato: $\forall x \, \exists \alpha \, (x \in V_\alpha)$.

Una seria dificultad en el estudio de los conjuntos es dar cuenta del contenido del conjunto potencia de un conjunto infinito cualquiera. En la jerarquía acumulativa, todos los subconjuntos de un estrato aparecen de golpe en el estrato posterior. No así en la *jerarquía constructible* que Gödel concibió para demostrar que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son consistentes con ZF. Al igual que la acumulativa, la jerarquía que Gödel define es una sucesión transfinita de estratos, L_α, uno para cada ordinal α. También como en la jerarquía acumulativa, $L_0 = \emptyset$ y $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$, para cada ordinal límite α. La definición sólo cambia en los estratos sucesores: $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$, donde $\mathcal{D}(L_\alpha)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de L_α definibles en L_α mediante una fórmula de primer orden con parámetros en L_α. Esto significa que un conjunto a aparece en el estrato $L_{\alpha+1}$ si y sólo si hay una fórmula φ y elementos $a_1, \dots a_n$ de L_α (los parámetros de la definición) tales que a es el conjunto de los elementos x de L_α que en L_α cumplen que $\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$. Formalmente:

$$a = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}\,.$$

(Este concepto de definibilidad es expresable ZF, por lo que la definición de la jerarquía constructible es inobjetable.)

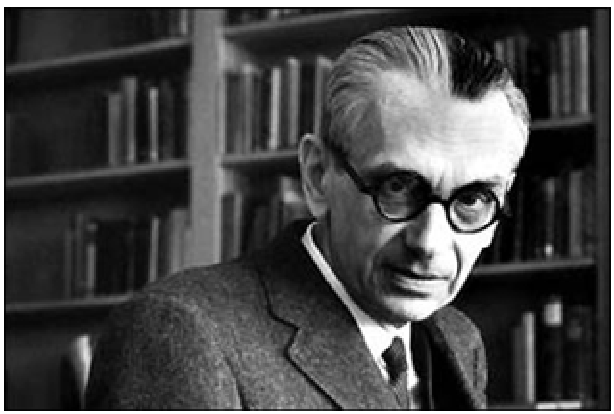
Un *conjunto constructible* es un conjunto que pertenece a algún L_α. Sea L a la totalidad de los conjuntos constructibles. L no es un conjunto, puesto que contiene todos los ordinales: de hecho, $\alpha \in L_{\alpha+1}$. En primer lugar, Gödel muestra que todos los axiomas de ZF se cumplen en L. Por ello decimos que L, el *universo constructible*, es un modelo de ZF. El universo constructible satisface el llamado *axioma de constructibilidad* ($\forall x \exists \alpha\, (x \in L_\alpha)$ o, brevemente, $V = L$) según el cual todo conjunto es constructible (esto no es inmediato).

Gödel muestra que todo conjunto constructible es bien ordenable, de modo que el axioma de elección se cumple en L. De hecho, Gödel define un buen del universo constructible. El punto crucial de la definición es cómo extender un buen orden de un estrato L_α a un buen orden del estrato sucesor $L_{\alpha+1}$. Puesto que todo elemento de $L_{\alpha+1}$ está determinado por una fórmula y una sucesión finita de elementos de L_α, ordenamos los nuevos elementos de $L_{\alpha+1}$ según el número de Gödel de la fórmula que los define y el orden que los parámetros tienen en L_α.

Gödel muestra también que la hipótesis del continuo vale en el universo constructible. Puesto que 1) ω cumple el papel del conjunto de los números naturales, y 2) el conjunto de los números reales es biyectable con $\mathcal{P}(\omega)$, la hipótesis del continuo dice que todo subconjunto infinito de $\mathcal{P}(\omega)$ es o bien numerable o bien biyectable con $\mathcal{P}(\omega)$. La demostración de que la hipótesis del continuo vale en L es más compleja y delicada que la del axioma de elección, pero es posible indicar su punto principal. Antes, sin embargo, es conveniente reformular la hipótesis del continuo. La reformulación (que sólo es aceptable en presencia del axioma de elección, que, como ya sabemos, vale en L) es que $\mathcal{P}\omega$ es biyectable con ω_1, el menor ordinal no numerable. La razón de la equivalencia reside en que, puesto que $\mathcal{P}(\omega)$ es bien ordenable y no es numerable, posee un subconjunto biyectable con ω_1. Por tanto, decir que todo conjunto no numerable de $\mathcal{P}(\omega)$ es biyectable con $\mathcal{P}(\omega)$ es decir que $\mathcal{P}(\omega)$ es biyectable con ω_1. Gödel muestra esto se cumple en el universo constructible en dos pasos. En primer lugar, muestra que todo subconjunto constructible de ω pertenece a L_{ω_1} (de modo que si $V = L$, entonces $\mathcal{P}(\omega) \subseteq L_{\omega_1}$), en segundo lugar, muestra que L_{ω_1} es biyectable con ω_1.

De hecho, como demostró Gödel, no sólo la hipótesis del continuo vale en L, sino también la llamada *hipótesis generalizada del continuo*, donde el papel de ω y el de $\mathcal{P}(\omega)$ lo cumplen cualquier conjunto infinito y su conjunto potencia. En una de sus formulaciones equivalentes, la hipótesis generalizada del continuo dice que si a es un conjunto infinito, todo subconjunto de $\mathcal{P}(a)$ es biyectable o bien con un subconjunto de a o bien con $\mathcal{P}(a)$.

Tanto en el artículo de 1931 como en el de 1939, las aportaciones de Gödel van mucho más allá de los resultados obtenidos. Los métodos introducidos en la demostración del teorema de incompletud y la incorporación a la teoría de conjuntos del universo constructible han contribuido de modo esencial al desarrollo de los fundamentos de la matemática y de la teoría de conjuntos como disciplina autónoma.



REFERENCIAS

[1] GEORG CANTOR, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. 77:258–262, 1874. En [4], 115-118.

[2] GEORG CANTOR, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. 84:242–258, 1878. En [4], 119-133.

[3] GEORG CANTOR, *Grundlagen einer allgemeine Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, Leipzig, 1883. En [4], 165-208. Traducción española en [5], 81-135.

[4] GEORG CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer-Verlag, Berlin, 1932. Editado por Ernst Zermelo.

[5] GEORG CANTOR, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. Crítica, Barcelona, 2006. Edición de José Ferreirós.

[6] ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:40–41, 1936.

[7] Alonzo Church, An unsolvable problem of elementary number theory. 58:345–363, 1936.

[8] Paul Cohen, The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.

[9] John W. Dawson, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel.* A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997.

[10] William Ewald, editor, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, volume II. Clarendon Press, Oxford, 1996.

[11] Solomon Feferman, *In the Light of Logic.* Oxford University Press, New York, 1998.

[12] José Ferreirós, *Labyrinth of Thought.* Birkhäuser, Basel, 1999.

[13] Torkel Franzén, *Gödel's Theorem. An Incomnplete Guide to Its Use and Abuse.* A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005.

[14] Kurt Gödel, *Collected Works.* Volumes I-V. Edited by Solomon Feferman et al. Oxford University Press, New York, 1986-2003.

[15] Kurt Gödel, *Obras completas.* Alianza, Madrid, 1989. Introducción y traducción de Jesús Mosterín.

[16] David Hilbert, Mathematische Probleme. 1900. Traducción inglesa en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 37 (2000), 407-436. Traducción parcial en [10], 1095-1105.

[17] David Hilbert, Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8:180–184, 1900. Traducción inglesa en [10], 1089-1095.

[18] David Hilbert y Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik.* Springer, Berlin, 1928.

[19] David Hilbert y Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Band 2. Springer, Berlin, 1939.

[20] Henri Poincaré, Les mathématiques et la logique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 13:815–835, 1905.

[21] Barkley Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:87–91, 1936.

[22] Alfred Tarski, Andrzej Mostowski y Raphael M. Robinson, *Undecidable Theories.* North-Holland, Amsterdam, 1953.

[23] Jan van Heijenoort, editor, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.

[24] Hao Wang, *Reflections on Kurt Gödel.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.

[25] HAO WANG, *Reflexiones sobre Kurt Gödel*. Alianza, Madrid, 1991. Traducción española de [24] por Pilar Castillo.

[26] HAO WANG, *A Logical Journey*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

[27] ERNST ZERMELO, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, 59:514–516, 1904. Traducción inglesa en [23],139-141.

[28] ERNST ZERMELO, Neue Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen*, 65:107–128, 1908. Traducción inglesa en [23], 183-198.

[29] ERNST ZERMELO, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, 65:261–281, 1908. Traducción inglesa en [23], 199-215.

Ignacio Jané
Departament de Lògica
Universitat de Barcelona
Montalegre, 6
08001 Barcelona
Correo electrónico: `jane@ub.edu`