Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Oscar Ciaurri y José Luis Díaz-Barrero[1]

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos en formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2007.*

Solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas enviados a esta sección sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que una solución al problema no está disponible en estos momentos.

Problemas

Problema 57

Para $x > 0$ definimos la función Gamma de Euler, $\Gamma(x)$, como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Para cada $k \geq 1$, un número natural, denotamos $a_k(x) = \sqrt[x+k]{\Gamma(x+k+1)}$. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0(x)a_1(x)\cdots a_{n-1}(x) - a_n(x)a_{n+1}(x)\cdots a_{2n-1}(x)}{x^{n-1}}.$$

Propuesto por Ovidiu Furdui
Kalamazoo, Michigan

[1]En la elaboración de este número han colaborado M. Benito Muñoz y E. Fernández Moral.

Problema 58

Sean a y n números naturales con $a \geq 4$. Probar que existen $x, y, z \in \mathbb{N}$ tales que

$$(4a-10)^n - (a-4)^n = x(a-1) + y(a-2) + z(a-3).$$

Propuesto por P. G. Popescu y I. V. Maftei
Bucarest, Rumanía

Problema 59

Un rajá dejó a sus hijas un cierto número de perlas y determinó que la división se hiciera del siguiente modo. La hija mayor se quedaría con una perla y con ℓ/p de las que quedaran, la segunda hija recibiría dos perlas y ℓ/p de las restantes, la tercera joven recibiría tres perlas y ℓ/p de las que quedaran, y así sucesivamente, hasta que la totalidad de las perlas estuviesen repartidas. ¿Cuántas perlas y cuántas hijas tenía el rajá? ¿Para qué valores de ℓ y p el reparto es equitativo?

Nota. Este problema generaliza el titulado “Las perlas del rajá” que aparece en el capítulo XXIII del libro *O homem que calculava*, de Malba Tahan (Júlio César de Mello e Souza). El problema original se plantea para los valores $\ell = 1$ y $p = 7$, y en él se declara que, además, el reparto es equitativo. En nuestra versión p y ℓ son enteros tales que $p \geq 2$ y $1 \leq \ell \leq p-1$.

Propuesto por E. M. García Caballero y S. G. Moreno
Universidad de Jaén, Jaén

Problema 60

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

a) Probar que si $t \geq 1$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[t]{\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(b-a)(t+1)}} \leq \sqrt[t]{\frac{a^t+b^t}{2}}.$$

b) Probar que si $0 \leq t \leq 1$

$$\sqrt[t]{\frac{a^t+b^t}{2}} \leq \sqrt[t]{\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(b-a)(t+1)}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

c) Deducir de b) que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Nota. La expresión intermedia en el apartado c) se denomina media idéntrica de a y b.

Propuesto por J. B. Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid

Problema 61

Un grupo de 100 establecimientos públicos reciben a diario un sólo ejemplar de un determinado número de periódicos de entre el total de 20 distintos que se distribuyen en la zona. Calcular el máximo número de ejemplares que pueden distribuirse al grupo de manera que no existan 90 establecimientos tal que cada uno de ellos reciba al menos 15 periódicos en común con el resto.

Propuesto por C. Balbuena, M. Cera, P. García-Vázquez, X. Marcote y J. C. Valenzuela
Universidad de Cádiz, Universitat Politècnica de Catalunya y Universidad de Sevilla

PROBLEMA 62

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$, $a_n > 0$, una serie convergente para $p > 1$ pero divergente para $p = 1$. Probar que existe otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p$ cumpliendo la misma condición que la anterior de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^p$ es oscilante para $p \to 1$.

Propuesto por Miguel Marano
Universidad de Jaén, Jaén

PROBLEMA 63

Determinar qué números naturales N pueden escribirse como

$$N = m + (m + 1) + \cdots + (m + (n - 1)),$$

con $m \geq 1$ y $n > 1$. Cuando efectivamente se pueda, mostrar un proceso constructivo de cómo hacerlo.

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

PROBLEMA 64

Sea (a, b) una pareja de números primos tales que $b - a = t$, con t un entero positivo, y $\sigma(n)$ la función que nos da la suma de los divisores de n. Definimos las funciones

$$R_t(a, b) = \prod_{p \mid ab(a+b)} p \qquad \text{y} \qquad S_t(a, b) = \frac{\sigma(a^2 b) + \sigma(ab^2)}{t}.$$

a) Sea $\{p_k\}_{k \geq 1}$ la sucesión de números primos tales que $(p_k, p_k + 2)$ es una pareja de primos (los denominados primos gemelos). Probar que $S_2(p_k, p_k + 2)$ es un entero positivo y que $2(p_k + 1) < R_2(p_k, p_k + 2) < S_2(p_k, p_k + 2)$. Si admitimos que existen infinitos términos en la sucesión $\{p_k\}_{k \geq 1}$, argumentar por qué existe una subsucesión convergente de la sucesión $\{R_2(p_k, p_k + 2)/S_2(p_k, p_k + 2)\}_{k \geq 1}$.

b) Probar que $S_4(a,b)$ y $S_6(a,b)$ son enteros.

c) Determinar una pareja (a,b) para la que $S_t(a,b) < R_t(a,b)$ y otra distinta para la que $S_t(a,b)$ no sea entero.

Propuesto por Juan López González (estudiante)
Universidad Autónoma de Madrid, Madrid

Problema 54 (Corrección)

Si en un triángulo cualquiera denotamos por s el semiperímetro, por r el radio del círculo inscrito y por R el radio del círculo circunscrito, entonces

$$\sqrt[3]{4srR} \leq \sqrt{\frac{r^2+4rR+5s^2}{12}} \leq \frac{2s}{3}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid

Soluciones

PROBLEMA 33

Consideramos un rectángulo blanco de tamaño $N \times 1$ ($N \in \mathbb{Z}^+$). Se pretende colocar sobre él un total de L rectángulos negros de longitudes $l_i \times 1$ ($l_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, 2, \ldots, L$) utilizando las siguientes reglas:

- Los rectángulos negros siempre deben colocarse de izquierda a derecha y de modo que el de longitud l_i quede comprendido entre los de longitudes l_{i-1} y l_{i+1}.
- Dos rectángulos negros deben dejar libre entre ellos un rectángulo blanco de tamaño al menos 1×1.

¿Cúantas formas distintas hay de colocar los L rectángulos negros de modo que se verifiquen las reglas anteriores?

Propuesto por Lourdes Benito López
Universidad de La Laguna, La Laguna

SOLUCIÓN

Podemos *contraer* todos los rectángulos negros hasta dejarlos con longitud cero, disminuyendo también la longitud del rectángulo blanco en la suma de las longitudes de aquellos. El problema consiste entonces en situar L puntos ordenados en los valores enteros entre 0 y $M = N - \sum_{i=1}^{L} l_i$, que es obviamente $\binom{M+1}{L}$.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor
Universidad de Cantabria, Santander
También resuelto por la proponente
Se ha recibido una solución incompleta

Problema 34

Sean $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una función continua y par, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, $\alpha > 0$ y $a > 1$. Probar que

$$\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{g(x)}}\, dx \right)^n \leq C\alpha^{n-1} \int_0^{\alpha} f(x)\, dx.$$

Propuesto por Mihàly Bencze
Brasov, Rumanía

Solución

En primer lugar observamos que, mediante el cambio de variable $x = -t$ y teniendo en cuenta la paridad de las funciones f y g,

$$\int_{-\alpha}^{0} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{g(x)}}\, dx = -\int_{\alpha}^{0} \frac{\sqrt[n]{f(-t)}}{1 + a^{g(-t)}}\, dt = \int_{0}^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{-g(x)}}\, dx.$$

Por tanto se verifica que

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{g(x)}}\, dx &= \int_{-\alpha}^{0} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{g(x)}}\, dx + \int_{0}^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{g(x)}}\, dx \\ &= \int_0^{\alpha} \sqrt[n]{f(x)} \left(\frac{1}{1 + a^{-g(x)}} + \frac{1}{1 + a^{g(x)}} \right) dx = \int_0^{\alpha} \sqrt[n]{f(x)}\, dx. \end{aligned}$$

Para valores enteros no negativos del parámetro n, las funciones potenciales $\varphi_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definidas mediante $\varphi_n(x) = x^n$ son convexas, de modo que, en virtud de la desigualdad integral de Jensen, podemos garantizar que

$$\left(\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \sqrt[n]{f(x)}\, dx \right)^n \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \left(\sqrt[n]{f(x)} \right)^n dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(x)\, dx.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, resulta finalmente

$$\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{1 + a^{g(x)}}\, dx \right)^n = \left(\int_0^{\alpha} \sqrt[n]{f(x)}\, dx \right)^n \leq \alpha^{n-1} \int_0^{\alpha} f(x)\, dx,$$

lo que establece el enunciado del problema para el valor $C = 1$, y ésta es la mejor de las constantes como fácilmente se puede verificar en el caso concreto que resulta de considerar $f(x) = 1$ y $g(x) = 0$.

Solución enviada por E. M. García Caballero y S. G. Moreno
Universidad de Jaén, Jaén
También resuelto por J. Vinuesa y el proponente
Se ha recibido una solución incompleta

PROBLEMA 35

Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}} = z.$$

Propuesto por Juan Luis Varona Malumbres
Universidad de La Rioja, Logroño

SOLUCIÓN

Las soluciones pueden ser generadas de la siguiente forma: se toman enteros $z, m \geq 0$ tales que $z^2 \geq 2m$; después se hace $x = z^2 - m$ e $y = m^2$.

Nótese que resultan $x, y, z \geq 0$. Para comprobar que así tenemos una solución, basta elevar al cuadrado el término de la izquierda del enunciado; se obtiene $x + \sqrt{y}$, que efectivamente es z^2. Además, los tres radicandos que aparecen son no negativos, como se demuestra sin dificultad. La solución trivial $x = y = z = 0$ se consigue sólo con $m = 0$, $z = 0$.

Ahora comprobaremos que todas las soluciones posibles son como hemos dicho. Primero, del enunciado se sigue que $z \geq 0$. Además, si examinamos el signo de los radicandos deducimos que $x \geq 0$; también que $x^2 \geq y$. Al elevar al cuadrado obtenemos $x + \sqrt{y} = z^2$; vemos pues que $y \geq 0$. Si llamamos $m = z^2 - x = \sqrt{y} \geq 0$, tenemos que $y = m^2$ es un cuadrado perfecto. Finalmente, de $x^2 \geq y$ deducimos $x \geq \sqrt{y} = m$, es decir, $z^2 = x + m \geq 2m$.

Solución enviada por Enrique Macias Virgós
Universidad de Santiago de Compostela
También resuelto por E. M. García y S. G. Moreno, J. Vinuesa y el proponente
Se ha recibido una solución incompleta

Problema 36

Sean $x_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$, con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq \sqrt{\frac{2n}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{x_j}}.$$

Propuesto por Marius Olteanu
Rumanía

Solución

Si elevamos al cuadrado la desigualdad propuesta, tendremos que probar que

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^2 \geq 2n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{x_j}$$

que, reordenando los términos, es equivalente a

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \geq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{x_j}. \tag{1}$$

Si tomamos $a_i = b_i = 1/x_i$, el lado izquierdo de (1) está formado por $n-1$ sumas de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ y el lado derecho por $n-1$ sumas de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$, donde σ denota una permutación de $\{1, \dots, n\}$. Por tanto, (1) es una consecuencia de la desigualdad de reordenamiento, y la igualdad se alcanza si y sólo si $x_1 = \cdots = x_n$.

Solución enviada por M. Peña, J. Serra y M. Teixidó (estudiantes)
También resuelto por E. M. García y S. G. Moreno, J. Vinuesa y el proponente

PROBLEMA 37

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ números reales estrictamente positivos. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^5 + 9} \prod_{j=1}^{n} a_j^{1/2} \leq \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{a_j^2}{n-1} \right]^{(n-1)/4}.$$

Propuesto por Pantelimon George Popescu (estudiante)
Universidad Politécnica de Bucarest, Rumanía

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, para $1 \leq k \leq n$, resulta obvio que

$$\sqrt{a_k} = \sqrt[10]{a_k^5 \cdot 1 \cdots 1} \leq \frac{a_k^5 + 9}{10}.$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{a_k^5 + 9} \leq \frac{1}{10\sqrt{a_k}}.$$

Multiplicando las desigualdades anteriores por $\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}$ obtenemos que

$$\frac{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}}{a_k^5 + 9} \leq \frac{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n / a_k}}{10},$$

para $1 \leq k \leq n$. Sumando las desigualdades precedentes se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}}{a_k^5 + 9} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n / a_k}}{10}$$

Aplicando, a cada sumando de la parte derecha la desigualdad entre las medias cuadrática y geométrica tendremos que

$$\frac{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n / a_k}}{10} = \frac{1}{10} \left(\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_n / a_k} \right)^{(n-1)/2} \leq \frac{1}{10} \left[\sum_{j=1 j \neq k}^{n} \frac{a_j^2}{n-1} \right]^{(n-1)/4},$$

que concluye el resultado.

Solución enviada por el proponente

Problema 38

a) Encontrar un conjunto de 10 números naturales consecutivos tales que entre ellos no haya un subconjunto cuyos elementos sumen un cuadrado perfecto.

b) $\star$ ¿Existen secuencias arbitrariamente largas de números naturales consecutivos entre los cuales no hay un subconjunto no vacío cuyos elementos suman un cuadrado perfecto?

Propuesto por Bernardo Recamán Santos
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia

Solución

a) No es difícil comprobar (se tarda menos que en hacer un Sudoku), que el conjunto $\{183, \ldots, 192\}$ es la solución más pequeña.

b) Contestamos afirmativamente a la pregunta presentando dos demostraciones diferentes. La primera de ellas (sección 1) descansa en el hecho de que los cuadrados son *escasos*, y de hecho probamos un resultado más general que permite sustituir los cuadrados por cualquier sucesión con densidad cero. La segunda demostración (sección 2) está basada en las propiedades aritméticas de los cuadrados y es consecuencia de un interesante resultado sobre residuos cuadráticos módulo un primo. Terminamos esta contribución (sección 3) analizando otra variante del problema que consiste en no requerir que los números naturales de la secuencia sean consecutivos.

1 Si no son muchos, los podemos esquivar

Definición 1 *La densidad asintótica inferior de una sucesión de enteros positivos C se define como*

$$\underline{d}(C) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\#\{c \le n \colon c \in C\}}{n}.$$

TEOREMA 2 *Sea C una sucesión de enteros positivos con $\underline{d}(C) = 0$. Entonces para todo $k \geq 1$ existen k enteros positivos consecutivos que no contienen ningún subconjunto cuyos elementos sumen un elemento de C.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un conjunto de enteros A, definimos $\sigma(A)$ como el conjunto formado por todas las sumas finitas de diferentes elementos de A,

$$\sigma(A) = \left\{ \sum_{a \in S} a \colon S \subset A \right\}.$$

y para todo par de enteros positivos n, k definimos $I_k(n)$ como el conjunto de k enteros consecutivos

$$I_k(n) = \{n+1, \ldots, n+k\}.$$

LEMA 3 *Los conjuntos $\sigma(I_k(n + jk^2))$, $1 \leq j \leq n/k^3$, son disjuntos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $a_1, \ldots, a_r \in I_k(n + jk^2)$ y $a'_1, \ldots, a'_{r'} \in I_k(n + j'k^2)$, con $r \leq r' \leq k$, $j \neq j'$. Vamos a ver que $a_1 + \cdots + a_r \neq a'_1 + \cdots + a'_{r'}$.
Si $r < r'$ entonces

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_r &\leq r(n + jk^2 + k) \leq rn + jk^3 + k^2 \leq rn + n + k^2 \\ &\leq r'n + k^2 = r'(n + j'k^2) - r'j'k^2 + k^2 < a'_1 + \cdots a'_{r'}. \end{aligned}$$

Si $r = r'$, supongamos que $j < j'$ por ejemplo, entonces

$$a_1 + \cdots + a_r \leq r(n + jk^2 + k) = r(n + (j+1)k^2 - k^2 + k) \leq r(n + j'k^2) < a'_1 + \cdots + a'_r$$

Como $\underline{d}(C) = 0$ tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existen infinitos enteros m tales que $C(m) < \epsilon m$, donde $C(x)$ cuenta los elementos positivos de C menores o iguales que x. Para $\epsilon = \frac{1}{16k^4}$, sea m uno cualquiera de dichos enteros y mayor que $12k^4$. Sean $n = [\frac{m}{2k}]$ y $J = [\frac{n}{2k^3}]$.

Vamos a demostrar que alguno de los intervalos $I_k(n+jk^2)$, $1 \leq j \leq J$ satisface las condiciones del teorema.

Si no fuera así, cada uno de los conjuntos $\sigma(I_k(n + jk^2))$, $1 \leq j \leq J$ contendría por lo menos un elemento de C, y como, por el lema anterior, dichos conjuntos son disjuntos, entonces C tendría que tener al menos J elementos menores que $k(n + Jk^2 + k) \leq k(n + 2Jk^2) < 2kn$. En otras palabras, $J \leq C(2kn)$. Luego

$$\frac{n}{2k^3} - 1 \leq J \leq C(2kn) \leq C(m) < \epsilon m = \frac{m}{16k^4}.$$

La contradicción se obtiene observando que

$$\frac{n}{2k^3} - 1 = \frac{[\frac{m}{2k}]}{2k^3} - 1 \geq \frac{\frac{m}{2k} - 1 - 2k^3}{2k^3} \geq \frac{\frac{m}{2k} - 3k^3}{2k^3} \geq \frac{\frac{m}{2k} - \frac{m}{4k}}{2k^3} = \frac{m}{8k^4}.$$

Corolario 4 *Para todo entero positivo k, existen k enteros consecutivos (menores que 32^2k^8) tales que las sumas de diferentes elementos de dichos enteros nunca son cuadrados.*

Corolario 5 *Para todo entero positivo k, existen k enteros consecutivos (menores que $e^{32^2k^8}$) tales que las sumas de diferentes elementos de dichos enteros nunca son suma de dos cuadrados.*

Corolario 6 *Para todo entero positivo k, existen k enteros consecutivos (menores que e^{32k^4}) tales que las sumas de diferentes elementos de dichos enteros nunca son números primos.*

Las cotas obtenidas en los corolarios son consecuencia del menor m que satisface $C(m) < \frac{1}{16k^4}m$ para cada sucesión concreta. En el caso de los primos es posible dar una construcción explícita que mejora dicha cota:

$$A_k = \{((k+1)^2)! + 2, \ldots, ((k+1)^2)! + k + 1\}.$$

2 También se pueden esquivar los residuos cuadráticos

Si un entero es un residuo no cuadrático $(\mathrm{mód}\, p)$, entonces no puede ser un cuadrado, por lo que la respuesta a la pregunta b) también es un corolario del siguiente teorema.

Teorema 7 *Para todo entero positivo $k \geq 1$, existen k enteros consecutivos y un primo p de tal manera que dichos enteros no contienen ningún subconjunto cuyos elementos sumen un residuo cuadrático* $(\mathrm{mód}\, p)$.

Demostración.

Lema 8 *Para todo entero positivo m existe un primo p tal que $-1, -2, \ldots, -m$ son residuos no cuadráticos* $(\mathrm{mód}\, p)$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la solución del sistema formado por todas las congruencias

$$\begin{cases} x \equiv -1 \,(\text{mód}\, 8), \\ x \equiv -1 \,(\text{mód}\, \mathrm{q}), \ \text{si } q \equiv -1 \,(\text{mód}\, 4), \\ x \equiv +1 \,(\text{mód}\, \mathrm{q}), \ \text{si } q \equiv +1 \,(\text{mód}\, 4)\,. \end{cases}$$

donde q recorre todos los primos $q \leq m$. El teorema chino del resto nos dice que el sistema es equivalente a una congruencia de la forma $x \equiv a \,(\text{mód}\, \mathrm{b})$, donde

$$b = 8 \prod_{\substack{q \leq m \\ q \text{ primo}}} q, \qquad (a,b) = 1;$$

y el teorema de Dirichlet nos asegura que la progresión $a \,(\text{mód}\, \mathrm{b})$ contiene infinitos primos. Sea p cualquiera de ellos.

Utilizaremos la ley de reciprocidad cuadrática[2] y el sistema de congruencias anterior para ver que todo primo $q \leq m$ es un residuo cuadrático $(\text{mód}\, \mathrm{p})$.

Para q impar tenemos que $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}}$.

- Si $q \equiv +1 \,(\text{mód}\, 4)$ entonces $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{1}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}} = 1$.
- Si $q \equiv -1 \,(\text{mód}\, 4)$ entonces $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{q-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}} = 1$.

El caso $q = 2$ es trivial porque $p \equiv -1 \,(\text{mód}\, 8)$.

Por otra parte todo entero positivo r, $1 \leq r \leq m$, o bien es $r = 1$, que es residuo cuadrático obviamente, o bien es el producto de primos $q \leq m$, no necesariamente distintos, que son residuos cuadráticos $(\text{mód}\, \mathrm{p})$, por lo que r también es un residuo cuadrático $(\text{mód}\, \mathrm{p})$. Entonces, como $p \equiv -1 \,(\text{mód}\, 4)$, para todo entero positivo $r \leq m$ se tiene que $\left(\frac{-r}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{r}{p}\right) = -1$.

Tomemos $m = k^2$ en el lema, y sea p uno de los primos que satisface la conclusión del lema. Vamos a ver que el conjunto $I_k(p-k-1) = \{p-k, \ldots, p-1\}$ va a satisfacer la condición del teorema. Efectivamente, si $s \in \sigma(I_k(p-k-1))$, entonces $s \equiv l \,(\text{mód}\, \mathrm{p})$, con $-k^2 \leq l \leq -1$.

---

[2] Para cualesquiera primos impares p, q se tiene que $\left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$, $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ y $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

3 ¿Y si no se requiere que sean consecutivos?

Parece un problema más natural no requerir que la secuencia de números naturales en el problema b) sea de números consecutivos. Esta relajación del problema permite obtener no sólo sucesiones arbitrariamente largas sino sucesiones infinitas con la propiedad requerida.

Teorema 9 *Existe una sucesión infinita A con la propiedad de que la suma de elementos distintos de A nunca es un cuadrado.*

Demostración. La sucesión infinita $a_1 = 2,\ a_k = (a_1 + \cdots + a_{k-1})^2 + 1,\ k \geq 2$ satisface dicha condición. En efecto, sea S un subconjunto finito de esta sucesión y sea a_k el mayor término de S. Claramente $(a_1 + \cdots + a_{k-1})^2 + 1 = a_k \leq \sum_{a \in S} a \leq a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k = a_1 + \cdots + a_{k-1} + (a_1 + \cdots + a_{k-1})^2 + 1 < (a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1)^2$. Y como $\sum_{a \in S} a$ está comprendido entre dos cuadrados consecutivos, no puede ser un cuadrado.

La sucesión de los cuadrados en este último teorema se puede sustituir por cualquier sucesión E con lagunas arbitrariamente grandes.

Teorema 10 *Si la sucesión $E = \{e_k\}_{k \geq 1}$ satisface que $\limsup_{k \to \infty}(e_{k+1} - e_k) = \infty$, entonces existe una sucesión de enteros positivos A tal que la suma de distintos elementos de A nunca pertenece a E.*

Demostración. Definimos a_1 como el menor entero positivo que no pertenece a E, y para $k \geq 2$, $a_k = e_{j_k} + 1$, donde j_k es el menor entero positivo tal que $e_{j_k+1} - e_{j_k} > a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1$. La existencia de tal j_k está garantizada por la hipótesis del teorema.

Por otra parte dado un subconjunto finito S, consideremos el mayor elemento de S, pongamos a_k. Tenemos que

$$e_{j_k} < \sum_{a \in S} a \leq a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k < e_{j_k+1} - e_{j_k} - 1 + e_{j_k} + 1 = e_{j_k+1}$$

Como $\sum_{a \in S} a$ está comprendido entre dos términos consecutivos de E, no puede pertenecer a E.

Terminamos esta contribución con la versión finita del problema y proponemos un problema que no sabemos resolver y que parece tan interesante como difícil.

Teorema 11 *Para todo entero positivo $N \geq 2$, existe un subconjunto $A \subset \{1, \ldots, N\}$ de tamaño $|A| \gg N^{1/3}$, y tal que la suma de los elementos de cualquier subconjunto de A no es nunca un cuadrado.*

Sea p el menor primo del intervalo $(N^{2/3}, 2N^{2/3})$. Veamos que el conjunto $A = \{p, 2p, 3p, \ldots, [N/p]p\}$ satisface la condición del problema. En efecto, la suma de los elementos de cualquier subconjunto S, no vacío, de A no puede ser un cuadrado perfecto porque es siempre múltiplo de p (obviamente), pero nunca lo es de p^2, ya que

$$\sum_{a \in S} a \leq p + 2p + \cdots + [N/p]p \leq [N/p]^2 p < p(N/p)^2 (p/N^{2/3})^3 = p^2.$$

Por otra parte, $|A| = [N/p] \gg N^{1/3}$.

PROBLEMA 12 *¿Es posible mejorar el exponente* $1/3$ *en el teorema anterior?*

Solución enviada por Javier Cilleruelo
Universidad Autónoma de Madrid
El apartado a) también resuelto por J. López (estudiante) y el proponente

PROBLEMA 39

Consideramos el triángulo $\triangle ABC$ con $b = BC$, $c = AB$, $b > c$ y AH su altura desde el vértice A. Sean H' y H'' los puntos sobre la prolongación de AH obtenidos por giro con centro H de C y B respectivamente. Si E es el punto donde se cortan las hipotenusas de los triángulos $\triangle HH'C$ y $\triangle HH''B$, probar que AE es la bisectriz del ángulo A si y sólo si $A = 90^o$.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
Universidad Complutense, Madrid
Dedicado a la memoria de M. S. Klamkin

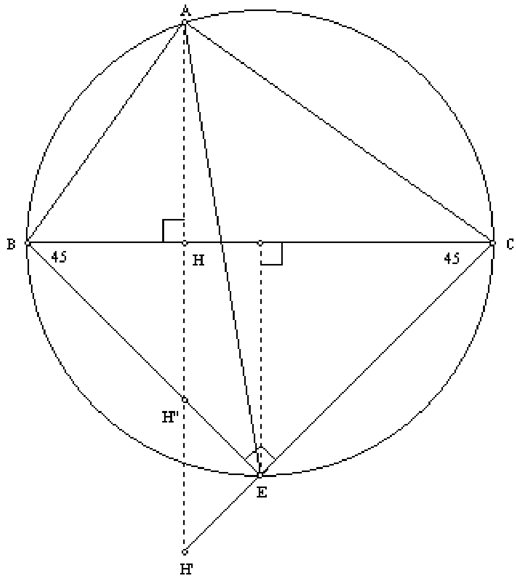
SOLUCIÓN

Puesto que que los triángulos $\triangle BHH''$ y $\triangle CHH'$ son, por construcción, rectángulos e isósceles, también $\triangle BEC$ es rectángulo e isósceles con $BE = EC$.

Si $\angle BAC = 90^o$, entonces el cuadrilátero $ABEC$ es cíclico porque la suma de sus ángulos en A y en E es 180^o. Por consiguiente, tenemos

$$\angle BAE = \angle ECB = 45^o = \frac{1}{2}\angle BAC$$

con lo que AE biseca $\angle BAC$.



Recíprocamente, si el punto E, que es de la mediatriz de BC porque $BE = EC$, está sobre la bisectriz de $\angle BAC$, entonces es un punto de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ pues la bisectriz interior de un ángulo de un triángulo y la mediatriz del lado opuesto a dicho ángulo se cortan en un punto de la circunferencia circunscrita. Resulta así inscriptible el cuadrilátero $ABEC$, verificándose

$$\angle BAC = 180^{\circ} - \angle BEC = 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}.$$

Solución enviada por M. Amengual Covas
Cala Figuera, Mallorca
También resuelto por J. Vinuesa, C. Sánchez y el proponente

PROBLEMA 40

Sea $A_1A_2\cdots A_n$ un polígono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen y de radio R. Si P es un punto cualquiera cuya distancia al origen es menor o igual que $2R$, probar que

$$R \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} PA_k \leq 3R.$$

Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero
Universidad de La Rioja, Logroño, y Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona
Dedicado a la memoria de M. S. Klamkin

SOLUCIÓN

Fijado un entero $n \geq 2$, vamos a denotar $w_n = \exp(2\pi i/n)$, de modo que las raíces n-ésimas de la unidad son los puntos $w_n, w_n^2, \dots w_n^n$. Estos puntos determinan el n-ágono regular inscrito en la circunferencia unidad ($|z| = 1$), con uno de sus vértices sobre el punto $(1, 0) = w_n^n$.

Con la formulación de variable compleja, y con un cambio apropiado de escala ($z' = z/R$), el problema consiste en probar que para todo z, si $|z| \leq 2$ entonces $n \leq \sum_{k=1}^{n} |z - w_n^k| \leq 3n$.

Es claro que $\sum_{k=1}^{n} |w_n^k| = n$. En otras palabras, la suma de distancias del origen a los n vértices del n-ágono regular inscrito en la circunferencia unidad es n. Y este hecho sencillo nos permite establecer, vía reducción al absurdo, la desigualdad $n \leq \sum_{k=1}^{n} |z - w_n^k|$. En efecto, supongamos que existiese un punto $z_0 \neq 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n} |z_0 - w_n^k| < n$; como el problema presenta una invarianza de giro de $2\pi/n$ radianes, los puntos $z_0w_n, z_0w_n^2, \dots, z_0w_n^{n-1}$ verificarían la desigualdad anterior (i.e., $\sum_{k=1}^{n} |z_0w_n^j - w_n^k| < n$, para $j = 1, 2, \dots, n$). Entonces, teniendo en cuenta que $\sum_{j=1}^{n} w_n^j = 0$, obtendríamos

$$n = \sum_{k=1}^{n} |w_n^k| = \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{z_0}{n} \sum_{j=1}^{n} w_n^j \right) - w_n^k \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}(z_0w_n^j - w_n^k) \right|$$
$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |z_0w_n^j - w_n^k| = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |z_0w_n^j - w_n^k| < n.$$

Por otro lado, si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos la acotación

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|z-w_n^k| &\leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z-w_n^k|^2} = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(|z|^2+1-2\operatorname{Re}(z\overline{w_n^k}))}\\ &= \sqrt{n}\sqrt{n|z|^2+n-2\operatorname{Re}\left(z\sum_{k=1}^{n}\overline{w_n^k}\right)} = n\sqrt{|z|^2+1},\end{aligned}$$

que mejora, para el caso $|z|\leq 2$, la desigualdad propuesta, dando lugar a $\sum_{k=1}^{n}|z-w_n^k|\leq\sqrt{5}n$.

Solución enviada por E. M. García Caballero y S. G. Moreno
Universidad de Jaén, Jaén

También resuelto por M. Peña, C. Sánchez y los proponentes