Educación

Sección a cargo de

María Luz Callejo

Supuestos epistemológicos en Educación Matemática

por

Camino Cañón Loyes

La Didáctica de la Matemática es una parcela de la acción humana, la propia de los procesos de enseñanza/aprendizaje de la matemática, que hace ya varias décadas ha dejado de ser vinculada al genio y vocación del profesor para ser considerada una disciplina científica.

Presentamos a continuación un mosaico de tamaño reducido compuesto por varias de las propuestas vigentes en el panorama actual de educación matemática (EM). El criterio seguido en la elección de las mismas ha sido el de identificar diferentes epistemologías matemáticas subyacentes, relevantes para la caracterización de la propuesta. En particular he elegido dos ejemplos donde el eje radica en paradigmas psicológicos, y otros dos en los que la epistemología de la matemática está en la base de la articulación de sus propuestas didácticas. Es un ejercicio de explicitación que puede aportar lucidez a los profesores que se hayan adherido a alguna de estas propuestas[1]. Al hacerlo pretendo también evidenciar hasta qué punto en la elección de cada una hay una concepción previa de lo que sea el conocimiento humano.

He elegido por su nitidez como propuesta de epistemología realista la conocida como *educación matemática realista* liderada por el matemático holandés Hans Freudenthal (1905-1990). Por la relevancia del constructivismo en la cultura actual, he destacado dos versiones del mismo: el *constructivismo radical* y el *constructivismo social*, y por la centralidad que otorga a la epistemología matemática en la articulación de sus teorías presento el llamado “programa epistemológico” de “*la didactique*” francesa.

[1] Pensar que la epistemología de la matemática ha de ser determinante en las propuestas de EM y esperar por tanto una cierta simetría entre las epistemologías de las matemáticas y de EM es una aproximación ingenua que no hace justicia a la complejidad del caso. El trabajo de Sierpinska y Lerman (1996) descarta cualquier aproximación ingenua a la cuestión.

1 Educación matemática realista

La filosofía de la educación matemática que subyace a las propuestas didácticas del *Freudenthal Institute* es conocida como "Realistic Mathematics Education" (RME) y está basada en las ideas desarrolladas por Freudenthal y por algunos miembros destacados de este movimiento[2].

La aportación de Freudenthal a la EM está basada en un profundo conocimiento de la matemática, de su historia y de sus aplicaciones, así como de una fina observación tanto de las propuestas didácticas existentes como de los procesos de aprendizaje de los alumnos y también de un conocimiento de autores y corrientes filosóficas de las que extrae su propia propuesta epistemológica. Conoce las teorías psicológicas al uso, pero no son ellas la fuente de inspiración ni basa en ellas la justificación de sus propuestas fenomenológicas[3].

En su libro de 1983, propone desvelar mediante ejemplos en qué consiste su fenomenología. En este caso comienza con el ejemplo de la magnitud longitud, que aparece como una función de objetos concretos constituyendo un primer estadio, el de la *fenomenología matemática* orientada a crear el marco de conceptos y de términos en los que se apoya la *fenomenología didáctica.* En este primer nivel de explicitación la presenta haciendo notar el modo de introducir al alumno en los procesos de aprendizaje en que se desarrollan los objetos mentales y con ellos los conceptos y las relaciones en el aprendizaje.

La concepción de las matemáticas que subyace a la propuesta didáctica de Freudenthal la explicita él mismo en sus *Lecciones Chinas* (1991). Es un realismo sustentado en un sentido común cuidadosamente caracterizado que explicita en torno a tres aspectos: la cuestión del origen, la matemática como actividad y el lenguaje.

Las matemáticas comienzan y permanecen en la realidad expresada en el sentido común de cada tiempo, el del origen de sus objetos y el contemporáneo de quienes se inician en su aprendizaje. Realidad entendida como un tejido donde no cabe discriminar las impresiones sensoriales de las interpretaciones de los mismos. El origen hay que buscarlo en los procesos colectivos de aprendizaje en los que el individuo siente como 'naturales' las reglas que le producen certeza y seguridad. Los niños adquieren el número en el fluir de sus actividades físicas

[2]Puede verse el "Report on a visit to Freudenthal Institute", realizado por B. J. Braams en 2001: `http://www.math.nyu.edu/mfdd/braams/links/fi-visit.html`.

[3]Considera, además de la *fenomenología matemática* (fm), la *fenomenología didáctica* (fd) y la *fenomenología genética* (fg). En el caso de la fm se trabaja con una estructura matemática como un **producto** cognitivo en el modo en que describe sus objetos, sean matemáticos o sean de la realidad y vida cotidiana. En el segundo caso, se trabaja con ella como una cuestión de aprender y enseñar, esto es como un **proceso** cognitivo. Y cabe pensar en un estadio anterior: una fenomenología genética de las estructuras matemáticas que las estudia en el proceso cognitivo del desarrollo mental (fg).

y mentales hasta el punto de hacer difícil a los investigadores dar cuenta de cómo sucede en detalle[4].

La actividad matemática se inicia pues en procesos de matematización de lo real y encuentra expresiones en reglas, en *estructuras*, que se convierten a su vez en materia base para momentos de abstracción superiores generando esa jerarquía que se distancia de ese sentido común originario hasta llegar a convertirse en la realidad más alejada de él. El autor acude a la historia para diferenciar los momentos en que los *modelos matemáticos* aplicados al conocimiento y transformación de la naturaleza han respondido al sentido común primero y a teorías complejas después.

El *lenguaje* es un elemento de importancia capital en los procesos propios de la actividad matemática. Los símbolos para los números están integrados en el lenguaje escrito y es en este ámbito donde el símbolo adquiere realidad por sí mismo, una realidad aparentemente independiente de su creador, quien a su vez trata de reorganizar su creación generando una jerarquía fenomenológica, y por medio de ella, organizar también su entorno, empleando el instrumento matemático para el conocimiento del mismo.

Su concepción de la actividad matemática, de su desarrollo y de los procesos que en ella tienen lugar, proporcionan una base de sustentación para los principios didácticos que Freudenthal propone, completados como él mismo dice en su observación de lo que hacen los didactas y en su propia experiencia como matemático.

El autor propone explícitamente tres principios:

1.- La *reinvención guiada* posibilita a quien aprende encontrar su propio nivel explorando los caminos con la mucha o la poca ayuda que cada caso requiera. Se trata de reinventar, es decir, importa el matematizar más que la matemática, el abstraer más que la abstracción, etc. Además, el descubrimiento personal refuerza la motivación.

2.- Matematizar es un ejercicio de *generar nexos con la realidad*, y es a través de esos procesos como ha emergido la matemática. Por eso, una de las actividades didácticas fundamentales del profesor es identificar contextos, que se desvelen ante el que aprende como susceptibles de ser matematizados. Al matematizar las situaciones-problema en la naturaleza o en

[4]Critica el autor la no correspondencia del título del libro de J. Piaget, *La génesis del número en el niño* (1941), con su contenido. Dice que la cuestión de la génesis la desarrolló Piaget en sus primeros escritos, pero más tarde, adopta una aproximación epistemológica y no genética. Explica esto diciendo que mientras Euclides adoptó la aproximación del sentido común para los números, éste fue abandonado por aproximaciones sofisticadas para evitar las paradojas. Piaget adopta ya estas versiones sofisticadas, en concreto la de Frege-Russell pasada por Bourbaki. Es decir, la episteme de Piaget adopta el estadio del conocimiento en la última etapa conocida por él, y esto en opinión de Freudenthal está lejos de trazar la génesis del número en el niño. En otro lugar dirá que trata de conceptos y no de objetos mentales, que son los acreedores de la aproximación genética.

la sociedad queda superado el dualismo de matemática y matemática aplicada.

3.- Freudenthal distingue entre *procesos* de corta y de larga duración. Los segundos son los idóneos para el aprendizaje pues permiten guiar la reinvención con acciones como: aprender a recordar, a reconocer intuiciones, a entrenarse en desarrollar experimentos mentales, a reflexionar sobre el proceso mismo.

A estos tres principios explícitamente tratados como tales, añado un cuarto que de modo implícito actúa como tal principio en su propuesta y lo denominaré *orden en el aprendizaje*:

4.- Para un mejor aprendizaje se deben buscar primero los fenómenos que llevan casi forzosamente al que aprende a *constituir los objetos mentales*. Sólo posteriormente se introduce en el concepto a que da lugar[5].

En opinión de Freudhental, las propuestas de educación matemática llevan anejas no sólo posiciones epistemológicas sino antropológicas y éticas. En particular, la propuesta de RME aspira no sólo a introducir en el conocimiento matemático, sino a contribuir a la formación de los alumnos como personas y como ciudadanos.

2 CONSTRUCTIVISMOS

Las epistemologías constructivistas están presentes en propuestas en Educación Matemática que remiten fundamentalmente a dos grandes corrientes caracterizadas cada una por un paradigma psicológico propio: el *constructivismo radical* que remite a Piaget, y el *constructivismo social* que toma la obra de Vygotsky como sustentador de sus posiciones.

2.1 CONSTRUCTIVISMO RADICAL

La obra de Piaget se inicia teniendo al conductismo como interlocutor. Así, el paradigma de estímulo-respuesta propuesto por éste queda modificado sustantivamente en su aportación, al introducir entre ambos extremos el sujeto activo, pues para Piaget aprender es un proceso donde se lleva a cabo una reorganización cognitiva continua. Estos procesos son el resultado de una interacción necesaria entre la inteligencia consciente y el ambiente, que caracteriza como "adaptación".

[5] Alude al largo camino recorrido por el concepto de función del que disponemos actualmente, indicando cómo el uso del término 'función' en Leibniz y Bernoulli no tenía más referente que un objeto mental (1991, p. 19). Sobre el largo proceso de constitución del concepto de función puede verse el Apéndice al capítulo segundo de la parte II, en Cañón, 1993.

La teoría del *constructivismo radical* ha hecho suyo el argumento piagetiano de que la función cognitiva es adaptativa en el sentido biológico del término, y lo ha colocado como eje de sustentación de sus propuestas (citado por von Glasersfeld, 1991, p. 16). Lo epistemológicamente decisivo es cómo *encaja* el marco conceptual de un individuo con sus experiencias, nunca nuestra captación de una realidad ontológica objetiva. La pretensión realista de lograr una correspondencia con el mundo está aquí fuera de lugar. El autor norteamericano von Glasersfeld es la autoridad reconocida como intérprete teórico de esta propuesta[6] cuya fundamentación ha expuesto en varios lugares y sucintamente presentamos a continuación[7].

El modelo del constructivismo radical se muestra consistente con el modelo propuesto por Lakatos (1976) para dar cuenta del desarrollo de la matemática (cfr. Balacheff, en von Glasersfeld, 1991, pp. 89-110). Es pues una epistemología falibilista que según von Glasersfeld no precisa de dimensión ontológica, aunque reconoce que los elementos a los que se aplican las reglas del juego matemático no son invenciones libres. La certeza de los "hechos matemáticos surge de la observación de los matemáticos de estar de acuerdo en los modos de operar, no de la naturaleza de un universo objetivo" (von Glasersfeld, 1991, xvi).

Lerman (1998, p. 347) señala dos puntos débiles en esta propuesta. En primer lugar, la acusación de solipsismo. Esta acusación se basa en el papel secundario que se atribuye a las formas de interacción social y cultural, en particular a factores tan relevantes en educación como son los factores lingüísticos, las interacciones interpersonales, el aprendizaje del conocimiento heredado, etc. Esto hace difícil conciliar los aspectos psicológicos con los sociológicos y culturales del aprendizaje.

El segundo se refiere al papel del profesor. Este no enseña matemáticas a los alumnos, sino que "les enseña a desarrollar su cognición" (Confrey, 1990, p.110). Para enseñar, es preciso establecer un *dominio de consenso* que incluye tanto al profesor como al alumno[8]. Hasta lograr el dominio de consenso, las interacciones con otros tienen importancia en cuanto que producen habitualmente perturbaciones en el sujeto que aprende. Un profesor constructivista se propone que los conceptos de los estudiantes encajen en el dominio consensual de un campo particular. Nunca dará a sus alumnos resultados terminados y cerrados pues se orienta a enseñar, no a entrenar, una distinción que le afirma frente al paradigma conductista.

---

[6] Así es reconocido tanto por los autores que se encuadran en esta propuesta, como por sus críticos –Freudenthal entre ellos–, y por quienes como Sierpinska y Lerman (1996) o Ernest (1997) presentan las aportaciones del constructivismo y sus límites.

[7] Pueden verse, entre otros, von Glasersfeld (1981). Hay versión inglesa elaborada por el propio autor en 1984 y traducción española de 1993; von Glasersfeld (1985) es accesible en: `http://www.oikos.org/constructivism.htm`.

[8] El concepto de *dominio consensual* es debido a Maturana, 1978

Concluimos la presentación de esta corriente, sin duda fecunda a juzgar por el gran número de adherentes y de trabajo desarrollado. Sus críticas y propuestas de superación al conductismo y la incorporación de las teorías de Piaget liberándolo en cierto sentido de su vinculación inicial al bourbakismo, han mostrado su potencialidad para sustentar otras propuestas de Educación Matemática con nuevos límites, pero diferentes de los anteriores. El constructivismo social constituye una de las tentativas de superación de algunos de los límites señalados en el constructivismo radical, y a él dedicamos las próximas páginas.

2.2 CONSTRUCTIVISMO SOCIAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Los diversos programas de Sociología del Conocimiento Científico[9] no han afectado a la educación matemática del modo que lo ha hecho el cambio de referente psicológico de Piaget a Vygotsky, con el consiguiente desplazamiento de la centralidad de las estructuras cognitivas del sujeto para colocar en su lugar la influencia sociocultural del contexto[10].

Como en el caso de Piaget, el conductismo imperaba cuando Vygotsky realiza su trabajo. En este caso, la genialidad estuvo en insertar entre el estímulo y la respuesta la mediación de la cultura, bajo la forma de significado. El sujeto que conoce es ya un individuo en acción y un sujeto social, y las actividades mentales asociadas con el sujeto activo tales como generalizar, discriminar, memoria, acción voluntaria..., son productos de la comunicación entre el niño y los adultos que le rodean, son actos sociales (cfr. Harre y Gillett, 1994 y Luria, 1973, p. 262). El conocimiento es pues cultural y se produce y controla socialmente, también el conocimiento matemático.

Vygotsky critica a Piaget por intentar derivar el pensamiento lógico del niño y su completo desarrollo del puro diálogo de la consciencia, divorciando así este proceso de la actividad, práctica social. También incide en este punto al criticar su resistencia a estudiar integradamente los distintos aspectos de la actividad humana, en particular cuestiona la disociación entre el afecto y la inteligencia (Vygostky, 1977, p.10)[11]. En esta perspectiva el aprendizaje lleva al desarrollo, contrariamente a Piaget, para quien el desarrollo condiciona el aprendizaje.

Algunas de las epistemologías de la matemática surgidas frente a las concepciones absolutistas del conocimiento matemático, son buenas compañeras

[9]Una presentación de la Sociología del Conocimiento Científico puede verse en Lamo de Espinosa y otros, 1994. La afirmación referida a la EM puede contrastarse en Lerman, 1998.

[10]Véase Sierpinska y Lerman (1996). También Ernest (1997) ofrece una descripción pormenorizada de las fases, corrientes y autores que han contribuido a desarrollar la perspectiva de constructivismo social en EM.

[11]En esta línea, con soporte teórico en diversas teorías psicológicas y sociológicas, I. M. Gómez Chacón (2000) ha estudiado los afectos en el aprendizaje matemático.

de camino para las propuestas de EM sustentadas en las teorías de Vygotsky[12]. Una propuesta significativa en EM es la del inglés P. Ernest, que presenta la matemática como una construcción social, un producto cultural, falible como cualquier otro tipo de conocimiento.

En opinión de P. Ernest (1997), la problemática del constructivismo social para la EM tiene dos vertientes. Una es cómo dar cuenta del aprendizaje del individuo sobre las bases de una construcción social; la otra, cómo dar cuenta de la naturaleza del conocimiento matemático en tanto que socialmente construido. Para la primera, encuentra cauce en las bases psicológicas proporcionadas por Vygotsky y sus seguidores[13]. Para la segunda ofrece este autor una respuesta elaborada a partir de varias corrientes de la filosofía de la matemática contemporánea. Cuatro cuestiones articuladas dan forma a su propuesta: un **origen** sociocultural, una **justificación** de las demostraciones *quasi-empírico* al modo lakatosiano, una caracterización de "lo **objetivo**" como lo "socialmente aceptable" mediado por las instituciones (Bloor, 1983), y el **lenguaje** como mediación entre la construcción individual y el carácter sociocultural del conocimiento, adoptando un tipo de convencionalismo al modo del Wittgenstein de las *Investigaciones Filosóficas* (1956) en el que las reglas son parte de los *juegos de lenguaje* que remiten a *formas de vida*.

En sus últimos escritos, Ernest (2004, pp. 91 y 83) da un paso más y matiza algunas posiciones del convencionalismo y lo hace adhiriéndose al pragmatismo representado por Richard Rorty (1979). De él toma *conversación* como base epistemológica para una filosofía constructivista social de la matemática.

Las críticas que pueden hacerse son las que corresponden, por una parte, a las filosofías de la matemática que toma de base y a la consistencia de la conjugación de las mismas y de éstas con las teorías de Vygotsky. Por otra parte, Ernest coincide con otros autores (Lerman, 1998) en afirmar que la teorización de los aspectos cognitivos del aprendizaje matemático con base en Piaget está más desarrollada que la correspondiente a los que están apoyados en Vygotsky. Sin embargo, esta segunda vía tiene a su favor que abre un conjunto de líneas de avance prometedoras en investigación al incorporar las dimensiones socioculturales y muy en particular el lenguaje.

---

[12] En el estudio tantas veces citado de Sierpinska y Lerman (1996) puede verse una amplia descripción de estas epistemologías falibilistas y naturalizadas. También en J. de Lorenzo (2000).

[13] En etapas anteriores de su producción, Ernest estuvo adscrito al constructivismo radical. Él mismo expresa así su paso a las teorías de Vygotsky como referente epistemológico consistente con sus posiciones en epistemología matemática: "Aunque ofrecí una crítica del constuctivismo radical (por ejemplo, Ernest, 1991), es sólo gradualmente como he llegado a la comprobación de cuán incompatible es la posición neopiagetiana del constructivismo radical con el punto de vista de la inteligencia que se abre paso a través de la metáfora de la conversación" (Ernest, 2004, p.82).

3 La didactique francesa

La aparición y desarrollo de los diversos momentos de lo que podríamos llamar la escuela francesa de la *Didactique*, está descrita en numerosas publicaciones realizadas por miembros fundadores y otros miembros cualificados de la misma. A ellos nos referiremos fundamentalmente[14]. La influencia de la *Didactique* en España ha sido y es grande. Existen actualmente varios grupos activos tanto en investigación como en programas y cátedras de formación de profesores de matemáticas[15].

En el ámbito de la Educación Matemática la aportación de la escuela francesa ofrece un panorama de extensa producción. Surge en la década de los setenta como una posición alternativa al estado de cosas del momento caracterizado por dos líneas en alza: una concepción de la enseñanza de la matemática como un arte basado en las cualidades de alumnos y profesores –*concepción mágica*–, y otra concepción superadora de la anterior que presentaba el aprendizaje exclusivamente centrado en procesos psico-cognitivos, conocida hoy como *etapa clásica* (Gascón, 1998, p. 3)[16].

La nueva línea se identificará como *Programa Epistemológico* significando con ello que las teorías didácticas que se articularán responden a la consideración de que las dificultades que se evidencian en las tareas didácticas no son sólo dificultades cognitivas, sino también dificultades intrínsecas al saber matemático en el que se pretende introducir al alumno. La aparición de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (cf. Brousseau, 1998) supuso una aportación de novedad en este segundo sentido al poner de manifiesto que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial y postular que los fenómenos didácticos son irreductibles a los fenómenos

[14]Entre los autores que más han contribuido a los aspectos epistemológicos de la *Didactique des Matematiques* están: Brousseau, Chevallard, Vergnaud, Artigue, Balacheff, Douady, etc. En Gascón (1998) hay referencias abundantes y específicas a estos autores. También hacemos uso de una presentación reciente hecha por autores de la universidad nacional de Puerto Rico, de síntesis contenidas en Godino (2005), de algunos comentarios críticos (Sierpinska y Lerman, 1996), de escritos y notas críticas de la profesora L. Ruiz Higueras de la Universidad de Jaén y del trabajo presentado por J. D. Godino, V. Font, A. Contreras, M.R. Wilhelmi, *Una visión de la Didáctica Francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Ponencia en el I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. "Sociedad, Escuela y Matemática: Las aportaciones de la TAD". Baeza, Octubre 2005.

[15]Véase Rico y Sierra (2000), y las actas de congreso al que se ha aludido en la cita anterior.

[16]La sistematización en la etapa clásica se lleva a cabo según dos enfoques. Un enfoque es el que prima el aprendizaje del alumno y se da en torno a paradigmas de la psicología vigentes, como lo fue el del "aprendizaje significativo" de Ausubel, o los de Piaget, Vygotsky y Bruner, entre otros. El segundo de los enfoques prima la actividad docente y amplía la problemática con cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional, que se concibe multidisciplinar: psicología educativa, sociología, didáctica general, historia y epistemología de las matemáticas.

cognitivos, sociológicos o lingüísticos que aparecen en los fenómenos de generación y difusión de la matemática en las instituciones sociales. También aquí, como en las propuestas presentadas anteriormente, el diálogo con Piaget resultó obligado. La TSD introduce la *situación didáctica* para reformular los conceptos de asimilación y acomodación piagetianos. Mientras que el autor suizo estudia los procesos psicológicos del que aprende matemáticas, la TSD introduce un factor decisivo: el *medio*, y estudia cómo gestiona el que aprende un saber matemático concreto en una situación. Por eso, "aprender matemáticas" y "enseñar matemáticas" son términos derivados del término primitivo "situación didáctica", que remite a su vez a un proceso sistémico cuyas componentes esenciales son: profesor, alumno, institución y "saber a enseñar".

Todas las actividades matemáticas tienen lugar en el seno de una institución, por lo que su forma de existencia y su evolución dependen principalmente de restricciones de tipo educativo relacionadas con el proceso que Chevallard (1985) denominará *transposición didáctica* y que dará nombre a una nueva teoría (TDT). Ésta consiste en los cambios y transposiciones que conlleva un conocimiento matemático –el "saber sabio" o "saber a enseñar"– para ser enseñado en el aula. El "saber sabio" tiene una existencia cultural en cierto modo independiente de las personas y de las instituciones interesadas en su elaboración y comunicación. La didáctica se ocupa primariamente del estudio de los procesos de comunicación y reconstrucción de los saberes integrantes de ese "saber sabio" por los sujetos en el seno de los sistemas didácticos.

Se considera que las actividades matemáticas escolares no son sino una parte de un dominio más amplio, el de las prácticas matemáticas institucionalizadas. La Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) estudia el fenómeno del conocimiento bajo el ángulo de las condiciones de posibilidad de su producción y desarrollo en instituciones sociales[17]. Por tanto, uno conoce no en un sentido absoluto, sino relativo a una institución. De ahí que se hable de la *relatividad institucional del conocimiento*.

La fecundidad del programa epistemológico ha generado también teorías que desarrollan aspectos más próximos al extremo que este programa pretendió superar, el polo psicológico de lo que podemos llamar de la "cognición individual". Entre ellas están la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC, Vergnaud, 1990) y la teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS)[18]. Por su parte, el llamado Enfoque Ontosemiótico (EOS, Godino, 2006) se sitúa en un punto de equilibrio entre lo que se ha llamado polo de la cognición in-

[17] En la actualidad se posiciona en el campo de la antropología de los saberes como *teoría antropológica de la didáctica*, y adopta una aproximación cercana a la propuesta por M. Douglas en su libro: *How Institutions Think* (1986) Cfr. Bosch, Chevallard y Gascón, 2005.

[18] Véase el trabajo de J. D. Godino, V. Font, A. Contreras, M.R. Wilhelmi, citado en nota 15. Estos autores presentan en su clasificación de teorías por relación a los polos epistemológicos y de cognición individual, la teoría de Douady: "Dialectique outil-objet" y el "Jeu de cadres" como perteneciente al programa epistemológico.

dividual y polo de la cognición institucional (Godino, 2005). De hecho, una pretensión de este enfoque ontosemiótico de la cognición matemática es el proporcionar un marco unificado para el estudio de las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones en el seno de los sistemas didácticos[19].

El nombre elegido para denominar este programa de didáctica –*programa epistemológico*–, expresa ya la opción hecha por sus promotores: dar la primacía al "saber sabio" y a los procesos de transposición de éste a las instituciones, en particular al aula. La historia y sus reconstrucciones racionales ocupan un lugar destacado al hacer que ese saber objetivo no pueda ser confundido con una posición platónica, porque es un saber logrado tentativamente, mediante lenguajes diversos y procesos complejos que arrojan luz para plantear las situaciones y los procesos de enseñanza/aprendizaje, para reconocer errores epistemológicos "útiles", etc.[20].

Y junto con la historia, la conciencia de que la matemática, como cualquier otro tipo de conocimiento, se gesta, se aplica y se enseña en el marco de instituciones cuyos usos y valores repercuten significativamente en el modo de plantear el aprendizaje y por lo mismo en los planteamientos de la didáctica.

Para concluir diremos que en el caso de la *Didactique*, la epistemología es considerada como el lugar teórico desde el que lograr una alternativa a las propuestas sustentadas en paradigmas de la psicología. El saber matemático pasa a ser el foco desde donde se ilumina el proceso de enseñanza/aprendizaje en el que el alumno adquiere y desarrolla su propio conocimiento matemático, un saber que articula la objetividad del "saber sabio" con la contingencia de la historia y de las instituciones.

Quizás, como apunta Godino, permanezca el desafío de lograr "un equilibrio mayor entre lo individual, lo institucional y lo social" (Godino, 2005) y –añadimos– los factores culturales que configuran las identidades de los alumnos.

4 Reflexiones finales

Para finalizar esta reflexión quiero llamar la atención acerca de cómo se ha llevado a cabo la superación de lo que fue una tensión inicial en la elaboración de propuestas didácticas entre la hegemonía concedida a la psicología y la concedida a la matemática. En los ejemplos expuestos se distinguen dos líneas. Una afirma la epistemología matemática como elemento eje para articular las

[19] Así está dicho en Godino (2006), y lo confirma el trabajo citado en la nota anterior.

[20] La noción de concepción ha sido especialmente trabajada por Artigue (1984 y 1989) y en ella se distinguen dos aspectos complementarios: el punto de vista de la cognición del sujeto individual y el punto de vista epistemológico con referencia a la historia de la noción o concepto matemático en cuestión. En cuanto a los errores y a la noción de "obstáculo" L. Ruiz Higueras: 1998, aporta una información interesante en las páginas 26 y ss.

propuestas didácticas y estaría representada por la EMR y por la didáctica del *programa epistemológico* francés. La EMR encierra elementos filosóficos más generales como la consideración de realidad, pero no tiene pretensiones de hacer de la epistemología de la matemática una teoría general del conocimiento. La segunda se ciñe al conocimiento matemático tal como se ha ido generando y plasmando históricamente en instituciones culturales determinadas.

La segunda línea, sin embargo, busca un nivel previo a la psicología y a la epistemología matemática, y es el modo de dar cuenta del conocimiento mismo: el conocimiento se refiere a la ordenación y organización de nuestras experiencias y no a la captación de una realidad ontológica objetiva. Los constructivismos encuentran referentes psicológicos diversos –Piaget y Vygotsky– para fundamentar sus propuestas, pero éstas corresponden a teorías del conocimiento más amplias que la epistemología de dominios científicos concretos como puede ser el matemático. Hay unos presupuestos filosóficos de qué sea el conocimiento y una opción por eludir cualquier tipo de correspondencia con el mundo para definir verdad y objetividad. Las propuestas del constructivismo radical y social presentadas, son ejemplos importantes de este tipo de concepción que da origen a creencias influyentes en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática[21].

Las diversas concepciones del conocimiento del mundo que encierra cada propuesta didáctica hacen que éstas tengan, además, un alcance en la formación de los alumnos que no se reduce al aprendizaje de las matemáticas. Devienen modos indirectos de familiarizarles con formas diversas de ver el mundo y de concebir la objetividad y la verdad, y como consecuencia, de sentar las bases para su concepción de la responsabilidad moral.

Otro aspecto se refiere a la posible perplejidad que la diversa oferta didáctica puede causar a quien se plantee cómo elegir la propuesta que mejor desarrolle las potencialidades matemáticas de sus alumnos. ¿Cualquiera de estos caminos les conduce a buen fin y a situarse con lucidez ante lo que han conocido? ¿Prevalecen las mejores ofertas o lo hacen aquellas que tienen valedores con mayor poder e influencia en el ámbito académico y político? Una evaluación rigurosa de los resultados se hace imprescindible para disponer de respuestas que orienten el futuro.

[21]La dinámica de las creencias es compleja cfr. Cañon, 2003. Su influencia en actividades matemáticas como la resolución de problemas ha sido estudiada por A. Vila y M.L. Callejo, 2004.

REFERENCIAS

[1] M. ARTIGUE, *Contribution à l´étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thése de Doctorat d´Etat. Université Paris VII, 1984.

[2] M. ARTIGUE, *Epistemologie et Didactique*, Cahier de DIDIREM, 3. IREM, Université Paris VII, 1989.

[3] D. BLOOR, *Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge*, Macmillan, London, 1983.

[4] BOSCH, Y. CHEVALLARD, J. GASCÓN, *"Science or Magic? The use of Models and Theories in Didactic of Mathematics"*. Paper proposed to Working Group 11: Different theoretical perspectives/approaches in research in mathematics education", CERME-4, February 2005.

[5] G. BROUSSEAU, *Théorie des Situations didactiques*, Pensée Sauvage, Paris, 1998.

[6] C. CAÑÓN, *La Matemática: Creación y Descubrimiento*, UPCO, Madrid, 1993.

[7] Y. CHEVALLARD, *La Transposition Didactique du savoir Savant au Savoir Enseigné*, La Pensèe Sauvage Editions, Grenoble, 1985/1991.

[8] J. CONFREY, "What Constructivism Implies for Teaching", en R.B. DAVIS, C.A. MAHER Y N. NODDINGS (EDS.), *Constructivist View on the Teaching and Learning of Mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education, Monograph N^{o}.4, 1990, pp. 107–122.

[9] J. DE LORENZO, *Filosofías de la Matemática Fin de Siglo*, Universidad de Valladolid, 2000.

[10] P. ERNEST, *The Philosophy of Mathematics Education*, London, Falmer Press, 1991.

[11] P. ERNEST, *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, NY, SUNY Press, 1997.

[12] P. ERNEST, "¿Son las Matemáticas descubiertas o inventadas?", *UNO* **37** (2004) pp. 25–31.

[13] H. FREUDENTHAL, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[14] H. FREUDENTHAL, *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[15] J. GASCÓN, "Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18** (1998) 1, 7–34

[16] J.D. GODINO, *Perspectiva De la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica*, 2005. Documento de Trabajo: `http://www.ugr.es/local/jgodino/`

[17] J.D. GODINO, "Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. ¿Es posible compatibilizar postulados pragmáticos y realistas sobre la matemática", *Diálogo filosófico* **64** (2006) 63–73

[18] I.M. Gómez Chacón, *Matemática Emocional*, Narcea, Madrid, 2000.

[19] R. Harré, G. Gillet, *The Discursive Mind*, Sage, London, 1994.

[20] I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1976. Traducción de C. Solís, *Pruebas y Refutaciones*, Alianza, Madrid, 1978.

[21] E. Lamo de Espinosa, J.M. González García, C. Torres Albero, *La Sociología del Conocimiento y de la Ciencia*, Alianza, Madrid, 1994.

[22] S. Lerman, "Research on Socio-Cultural Perspectivas of Mathematics Teaching and Learning", en A. Sierpinska, J. Kilpatrick, 1998, pp. 333–350.

[23] A.R. Luria, *The Working Brain*, Penguin, Harmondsword, 1973.

[24] H.R. Maturana, "Biology of language: The epitemology of reality", en G. A. Miller, E. Lenneberg (eds.), *Psychology and biology of language and thought: Essay in honor of Eric Lenneberg*, Academic Press, New York, 1978, pp. 27–63.

[25] J. Piaget, A. Szeminska, *La Genèse du nombre chez l´enfant*, Delachaux & Niestlé, 1941. Traducción española: *La Génesis del número en el niño*, Guadalupe, Buenos Aires, 1967.

[26] L. Rico, M. Sierra, "Didáctica de la Matematica e Investigación", en J. Carrillo y L.C. Contreras (eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI*, Regué, Huelva, 2000, pp. 77–131.

[27] R. Rortry, *The Philosophy and the Mirror of Nature*, Princeton University Press, 1979. Traducción española de Jesús Fernández Zulaica, *La Filosofía y el Espejo de la Naturaleza*, Cátedra, Madrid, 2001.

[28] L. Ruiz Higueras, *La Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico*, Univ. de Jaén, 1998.

[29] A. Sierpinska, S. Lerman, "Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education" en Bishop *et al.* (eds.), *International handbook of mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996, pp. 827–876.

[30] A. Sierpinska, J. y Kilpatrick, *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[31] G. Vergnaud, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10** (1990) 23, 133–170.

[32] A. Vila, M.L. Callejo, *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*, Narcea, Madrid, 2004.

[33] E. Von Glasersfeld, *Introducción al constructivismo Radical* en P. Watzlawick y otros, *La Realidad Inventada*, Gedisa, Barcelona, 1993. La versión original es de 1981, en *Die Erfundene Wirklichkeit*, Piper, Munich, 1981. Hay versión inglesa del autor en *The Invented Reality*, Norton, N.Y., 1984.

[34] E. Von Glasersfeld (ed), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1991.

[35] L. VYGOTSKY, *Pensamiento y Lenguaje*, La Pléyade, Buenos Aires, 1977.

[36] L. WITTGENSTEIN, *Philosophical Investigations*, Basil Blackwell, Oxford, 1956.

Camino Cañón Loyes
Universidad Pontificia de Comillas, Madrid
Correo electrónico: cloyes@fil.upco.es