Borges y la matemática[1]

por

Guillermo Martínez

En la introducción al libro “Matemáticas e Imaginación”, de Kasner y Newman, Borges dice que la matemática, al igual que la música, puede prescindir del universo. Quiero agradecerles que esta mañana ustedes hayan prescindido del universo para escuchar esta charla.

El ángulo, el sesgo y la interpretación. Thomas Mann y el dodecafonismo. El juego de la interpretación como un juego de balance

Bien, Borges y la matemática. Siempre que uno elige un ángulo, un tema, introduce de algún modo una distorsión sobre el fenómeno que se propone estudiar. Algo bien sabido por los físicos, ¿no es cierto? También ocurre cuando uno trata de abordar a un escritor desde un ángulo en particular: muy pronto uno se encuentra en las arenas movedizas de la interpretación. En este sentido conviene tener en cuenta que el juego de la interpretación es un juego de balance en el que uno puede errar por exceso o por defecto. Digamos, si nos aproximamos a los textos de Borges con un enfoque puramente matemático, muy especializado, podemos quedar por encima del texto. Aquí “encima” es en realidad afuera: podríamos encontrar o forzar al texto a decir cosas que el texto no dice, ni tiene ninguna intención de decir. Un error de erudición. Por otro lado, si desconocemos en absoluto los elementos de matemática que están presentes reiteradamente en la obra de Borges, podemos quedar por debajo del texto. Entonces, voy a intentar un ejercicio de equilibrio. Sé que aquí en la sala hay gente que sabe mucha matemática, pero yo voy a hablar para los que sólo saben contar hasta diez. Es mi desafío personal. Todo lo que diga debería poder entenderse con sólo saber contar hasta diez.

Hay una segunda cuestión todavía más delicada, a la que se refirió Thomas Mann cuando fue obligado a insertar una nota al final de su *Doctor Faustus* para reconocer la autoría intelectual de Schönberg en la teoría musical del dodecafonismo. Thomas Mann lo hizo a disgusto, porque consideraba que esa teoría musical se había transmutado en algo distinto al ser moldeada literariamente por él “en un contexto ideal para asociarla a un personaje ficticio” (su compositor Adrián Leverkuhn). De la misma manera los elementos de

[1]Esta charla está recogida en el libro, *Borges y la matemática* de Guillermo Martínez, editado originalmente por Eudeba y reeditado en 2006 por Seix Barral.

matemática que aparecen en la obra de Borges también están moldeados y transmutados en "algo distinto": en literatura, y trataremos de reconocerlos sin separarlos de ese contexto de intenciones literarias.

Por ejemplo, cuando Borges da comienzo a su ensayo "Avatares de la tortuga" y dice: "Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito", la vinculación del infinito con el Mal, la supremacía en malignidad, burlona pero certera que establece, quita de inmediato al infinito del sereno mundo de la matemática y pone bajo una luz levemente amenazadora toda la discusión pulcra en fórmulas, casi técnica, que sigue. Cuando dice a continuación que la numerosa hidra es una prefiguración o un emblema de las progresiones geométricas, se repite el juego de proyectar monstruosidad y "conveniente horror" sobre un concepto matemático preciso.

CUÁNTO SABÍA BORGES DE MATEMÁTICA. PRECAUCIONES SOBRE SU BIBLIOTECA. LA VERDAD EN MATEMÁTICA Y EN LITERATURA

¿Cuánto sabía Borges de matemática? Él dice en ese mismo ensayo: "cinco, siete años de aprendizaje metafísico, teológico, matemático, me capacitarían (tal vez) para planear decorosamente una historia del infinito". La frase es lo suficientemente ambigua como para que sea difícil decidir si realmente dedicó esa cantidad de años a estudiar, o es sólo un plan a futuro, pero está claro que Borges sabe por lo menos los temas que están contenidos en el libro que él prologa, *Matemáticas e imaginación*, y que son bastantes. Es una buena muestra de lo que se puede aprender en un primer curso de álgebra y análisis en la universidad. Se tratan allí las paradojas lógicas, la cuestión de las diversas clases de infinito, algunos problemas básicos de topología, teoría de las probabilidades. En el prólogo a este libro Borges recuerda al pasar que, según Bertrand Russell, la vasta matemática quizá no fuera más que una vasta tautología, y deja ver, con esta observación, que también estaba al tanto, por lo menos en esa época, de lo que era una discusión crucial en los fundamentos de la matemática. Una discusión que dividía aguas y daba lugar a agudos debates, centrada en la cuestión de la verdad: lo verdadero *versus* lo demostrable.

Digamos que en su trabajo habitual de escudriñar los universos de formas y de números los matemáticos encuentran conexiones recurrentes, patrones, ciertas relaciones que se verifican siempre, y están acostumbrados a creer que estas relaciones, si son verdaderas, lo son por alguna razón, están concertadas de acuerdo a un orden exterior, platónico, que debe descifrarse. Cuando encuentran esa razón profunda –y en general oculta– la exhiben en lo que se llama una demostración, una prueba.

Hay de esta manera dos momentos en la matemática, igual que en el arte: un momento que podemos llamar de iluminación, de inspiración, un momento solitario e incluso “elitista” en que el matemático entrevé en un elusivo mundo platónico un resultado que considera que es verdadero, y un segundo momento, digamos, democrático, en el que tiene que convencer de esa verdad a su comunidad de pares. Exactamente del mismo modo en que el artista tiene fragmentos de una visión y luego, en un momento posterior, tiene que ejecutarla en la escritura de la obra, en la pintura, en lo que fuera. En ese sentido los procesos creativos se parecen mucho. ¿Cuál es la diferencia? Que hay protocolos formales de acuerdo con los cuales la verdad que el matemático comunica a sus pares la puede demostrar paso por paso a partir de principios y “reglas de juego” en las que todos los matemáticos coinciden. En cambio, una demostración de un hecho estético no es tan general. Un hecho estético siempre está sujeto a criterios de autoridad, a modas, a suplementos culturales, a la decisión personal y última –muchas veces perfectamente caprichosa– del gusto.

Ahora bien, los matemáticos pensaron durante siglos que en sus dominios estos dos conceptos, lo verdadero y lo demostrable, eran en el fondo equivalentes. Que si algo era verdadero, siempre se podía exhibir la razón de esa verdad a través de los pasos lógicos de una demostración, de una prueba. Sin embargo, que lo verdadero no es igual que lo demostrable lo saben desde siempre, por ejemplo, los jueces: supongamos que tenemos un crimen en un cuarto cerrado (o, más modernamente, en un *country* cerrado) con sólo dos sospechosos posibles. Cualquiera de los dos sospechosos sabe toda la verdad sobre el crimen: *yo fui o yo no fui.* Hay una verdad y ellos la conocen, pero la justicia tiene que acercarse a esta verdad por otros procedimientos indirectos: huellas digitales, colillas, verificación de coartadas. Muchas veces la justicia no llega a probar ni la culpabilidad de uno ni la inocencia del otro. Algo similar ocurre en la arqueología: sólo se tienen verdades provisorias, la verdad última queda fuera del alcance, es la suma incesante de huesos de lo demostrable.

Así, en otros terrenos, la verdad no necesariamente coincide con lo demostrable. Bertrand Russell fue quizá quién más se afanó en probar que dentro de la matemática sí se podían hacer coincidir los dos términos, que la matemática no era más que “una vasta tautología”. De algún modo ése era también el programa de Hilbert, un gran intento de los matemáticos para dar garantías de que todo lo que se probara verdadero, por cualesquiera métodos, se iba a poder demostrar a posteriori de acuerdo con un protocolo formal que pudiera prescindir de la inteligencia, un algoritmo que pudiera corroborar la verdad de una manera mecánica y que pudiera modelarse en una computadora. Eso hubiera sido en el fondo reducir la matemática a lo que puede probar una computadora.

Finalmente se demostró, y ese fue el resultado dramático de Kurt Gödel de los años ´30 –su famoso teorema de incompletitud– que las cosas no son así, que la matemática se parece más bien a la criminología en este aspecto: hay afirmaciones que son verdaderas y quedan, sin embargo, fuera del alcance de las teorías formales. O sea, las teorías formales no pueden ni demostrar la afirmación ni demostrar su negación, ni su culpabilidad ni su inocencia. Lo que quiero señalar es que Borges vislumbraba el origen de esta discusión (aunque no parece que se hubiera enterado de su desenlace).

Elementos de matemática en la obra de Borges

Hay elementos de matemática muy variados a lo largo de la obra de Borges. El paso obvio natural, cuando uno se acerca a este tema, es rastrear todas esas huellas matemáticas en sus textos. Eso ha sido hecho, y muy bien, en varios de los ensayos del libro *Borges y la Ciencia* (ed. Eudeba). Pueden encontrar allí ensayos sobre Borges y la matemática, sobre Borges y la investigación científica, sobre el tema de la memoria, sobre Borges y la física. He dicho alguna vez en broma que mi preferido es "Borges y la biología". Luego de algunos rodeos, y algo desolado, casi como disculpándose, el autor se decide a escribir que después de haber leído la obra completa de Borges tiene que decir que no hay ninguna vinculación entre Borges y la biología. ¡Ninguna! El hombre había descubierto con terror algo en este mundo que Borges no había tocado.

Pero sí hay, profusamente, elementos de matemática. Yo voy a abusar un poco de mi condición de escritor para tratar de hacer algo ligeramente diferente: voy a tratar de vincular los elementos de matemática con elementos de estilo en Borges. Voy a intentar una vinculación no temática sino estilística. Pero menciono de todos modos algunos de los textos donde las ideas matemáticas asoman con más claridad: los cuentos "El disco", "El libro de arena", "La biblioteca de Babel", "La lotería de Babilonia", "Del rigor en la ciencia", "Examen de la obra de Herbert Quain, *Argumentum ornithologicum*"; los ensayos "La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga" junto con "Avatares de la tortuga", "El idioma analítico de John Wilkins", "La doctrina de los ciclos", "Pascal" junto con "La esfera de Pascal", etc. Hay textos que son incluso pequeñas lecciones de matemática. Aún así, aún dentro de esta variedad, creo yo que hay tres temas que son recurrentes. Y esos tres temas aparecen reunidos en el cuento "El Aleph", les propongo que los estudiemos desde allí.

El infinito de Cantor

Los voy a mencionar en orden inverso al que aparecen, el primer elemento es el infinito o los infinitos. Dice Borges, hacia el final del relato:

> "Dos observaciones quiero agregar: una sobre la naturaleza del Aleph, otra sobre su nombre. Éste, como es sabido, es el de la primera letra del alfabeto de la lengua sagrada. Su aplicación al disco de la historia no parece casual. Para la Cábala esa letra significa el *En Soph*, la ilimitada y pura divinidad. También se dijo que tiene la forma de un hombre que señala el cielo y la tierra, para

> indicar que el mundo inferior es el espejo y el mapa del superior. Para la *Mengenlehre* es el símbolo de los números transfinitos en los que el todo no es mayor que alguna de las partes”.

La *Mengenlehre* es la denominación en alemán de la teoría de las cantidades. El símbolo aleph, que los matemáticos simplificamos al dibujarlo, se parece a ésto:

$$\aleph$$

Un brazo que señala al cielo y el otro que señala la tierra. El símbolo de los números transfinitos, en los que, como dice Borges, *el todo no es mayor que alguna de las partes*. Este es uno de los conceptos de matemática que fascinaba realmente a Borges. Es el quiebre de un postulado aristotélico según el cual el todo debe ser mayor que cualquiera de las partes y me gustaría hacer una pequeña explicación de cómo surge esta idea del infinito en la matemática.

Hasta 1870, la época en que Cantor empieza sus trabajos sobre la teoría de conjuntos, los matemáticos usaban otro símbolo para el infinito, el 8 acostado: ∞, y pensaban que en realidad había un único infinito, no se planteaban la posibilidad de que hubiera diferentes variedades de infinito. ¿Cómo llega Cantor a su idea de infinito, que es la que suscita esta primera paradoja?

Para entender esto, tenemos que recordar qué significa contar. Uno puede pensar el proceso de contar de dos maneras: supongamos que en un primer conjunto tenemos diez personas –que es nuestro número límite– y en un segundo conjunto tenemos diez sillas.

Uno podría decir, muy bien, sé que hay tantas personas como sillas, porque aquí cuento diez personas y aquí cuento diez sillas, o sea, le asigno al primer conjunto una cantidad entre las que conozco: diez, y a este segundo conjunto una cantidad que conozco: diez, y como $10 = 10$ concluyo que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Sin embargo, supongamos que yo estoy jugando con un chico de tres años a las cartas. El chico, como nosotros esta tarde, tampoco sabe contar más allá de diez, pero sabe que si me da a mí la primera carta, se queda con la segunda, me da la tercera, se queda con la cuarta, etc, cuando termina de repartir el mazo, aunque no puede decir qué *cantidad* de cartas tiene en las manos (porque no sabe contar más que hasta diez), sí puede decir algo todavía, sí tiene todavía un elemento de certidumbre, y es que *tanto él como yo tenemos la misma cantidad de cartas*. Esto sí lo sabe, aunque no sepa cuántas son. En el ejemplo de las sillas podríamos también haber concluido que hay la misma cantidad de personas que de sillas haciendo sentar a cada persona en una silla y comprobando que se establece una correspondencia perfecta en la que no queda silla sin persona ni persona sin silla. Del mismo modo, cuando uno mira un desfile militar, no puede decir a golpe de vista cuántos jinetes hay, o cuántos caballos hay, pero sí sabe algo todavía, sabe que hay tantos militares como caballos (*risas*).

Es trivial, sí, lo reconozco, pero a veces de las trivialidades surgen las grandes ideas. Aquí está el pase de prestidigitador de los matemáticos. Fíjense qué es lo que hace Cantor, en el fondo es algo muy simple, pero extraordinario. Lo que él encuentra es un concepto que en el contexto finito resulta equivalente a "tener la misma cantidad de elementos". Él dice: "en el contexto finito, los conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si puedo establecer una correspondencia perfecta uno a uno entre ellos". Esta afirmación es muy sencilla de probar. ¿Pero qué ocurre cuando saltamos al infinito? Uno de los dos conceptos equivalentes: "cantidad de elementos", deja de tener sentido. ¿Qué significa cantidad de elementos de un conjunto infinito cuando uno no puede terminar de contar? Esa parte ya no la puedo usar, pero sí puedo usar todavía la segunda parte. La segunda parte sobrevive, todavía podemos establecer, para conjuntos infinitos, correspondencias perfectas uno a uno como hicimos entre las personas y las sillas.

Pero entonces empiezan a ocurrir cosas extrañas. Porque hay una manera obvia de establecer una correspondencia perfecta uno a uno entre todos los números naturales, los números que usamos para contar, y los números pares. Al 1 le asignamos el 2, al 2 le asignamos el 4, al 3 el 6, etc. Y aquí, forzados por la definición de Cantor, tenemos que decir que hay "tantos" números naturales como números pares. Sin embargo, los pares son una "mitad" de los naturales, en el sentido de que los naturales los obtenemos al unir los pares con los impares. Entonces, hay efectivamente una parte, los pares, que es tan grande como el todo. *Hay una parte que equivale al todo*. Este es el tipo de paradoja que maravillaba a Borges: en el infinito matemático, el todo no es necesariamente mayor que cualquiera de las partes. Hay partes propias que son tan grandes como el todo. Hay partes que son equivalentes al todo.

Objetos recursivos

Uno podría abstraer esta propiedad curiosa del infinito y pensar en otros objetos, en otras situaciones, en las que una parte del objeto guarda la información del todo. Los llamaremos objetos *recursivos*. Así, el Aleph de Borges, la pequeña esfera que guarda todas la imágenes del universo, sería un objeto ficcional recursivo. Cuando Borges dice que la aplicación del nombre Aleph a esta esfera no es casual y llama la atención de inmediato sobre la vinculación con esta propiedad de los infinitos, está insertando a su idea dentro de un ambiente propicio, de la manera que él mismo enseña en su ensayo "El arte narrativo y la magia" cuando analiza el problema de la difícil verosimilitud del centauro. La rodea de un marco que la vuelva plausible: así como en el infinito una parte equivale al todo, puede concebirse que haya una parte del universo que guarde la información del todo.

Hay otros objetos recursivos con los que Borges juega en su obra. Por ejemplo los mapas crecientes en "Del rigor en la ciencia", donde el mapa de una sola provincia ocupaba toda una ciudad, y "en cuyos pedazos abandonados en los desiertos habitaban animales y mendigos". También, desde el punto de vista de la biología, el ser humano sería un objeto recursivo. Basta una célula del ser humano para fabricar un clon. Los mosaicos son claramente objetos recursivos, la figura de las primeras baldosas se propaga al todo.

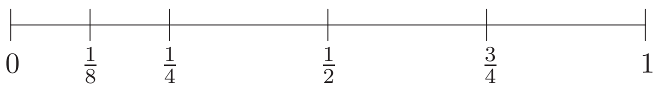
Pensemos ahora en objetos que tengan la propiedad *opuesta*. ¿Cuáles serían los objetos "incomprimibles", por llamarlos de alguna manera? Objetos en los cuales ninguna parte reemplaza al todo. Objetos en los que cada parte es esencial. Podríamos decir: los conjuntos finitos. Yo diría, un rompecabezas razonable. En un rompecabezas razonable uno no debería poder facilitarse las cosas repitiendo diseños. También, el ser humano, desde el punto de vista existencial. Hay una frase muy intimidante que no es de Sartre sino de Hegel y que dice: "el hombre no es más que la serie de sus actos". No importa cuán impecable fue la conducta de un hombre durante cada día de todos los años de su vida, siempre está a tiempo de cometer un último acto que contradiga, que arruine, que destruya todo lo que ha sido hasta ese momento. O al revés, para tomar el giro que le dio Thomas Mann en *El elegido*, basado en *Vida de San Gregorio*: no importa cuán incestuoso o pecador haya sido un hombre durante toda su vida, siempre puede expiar sus culpas y convertirse en Papa.

El infinito y el Libro de Arena

Lo que dije hasta aquí sobre el infinito bastaría para aclarar este pequeño fragmento. Me voy a extender un poco más para explicar algo que está relacionado con "La biblioteca de Babel" y "El libro de arena". Recién acabamos de ver que hay "tantos" números naturales como pares. ¿Que ocurrirá cuando consideramos los números fraccionarios? Los números fraccionarios son muy importantes en el pensamiento de Borges. ¿Por qué? Recordemos que los números fraccionarios, que también se llaman quebrados, o números racionales, son los que se obtienen al dividir números enteros, los podemos pensar como pares de enteros: un número entero en el numerador y un número entero (distinto de cero) en el denominador.

$$3/5, 5/4, 7/6, 7/16...$$

¿Cuál es la propiedad que tienen estos números, la propiedad que usa Borges en sus relatos? *Entre dos números fraccionarios cualesquiera siempre* *hay uno en el medio*. Entre 0 y 1 está $\frac{1}{2}$, entre 0 y $\frac{1}{2}$ está $\frac{1}{4}$, entre 0 y $\frac{1}{4}$, está $\frac{1}{8}$ etc. Digamos, siempre se puede dividir por 2.



De modo que cuando yo quiero saltar del 0 al primer número fraccionario, nunca puedo encontrar ese primer número en el orden usual, porque siempre hay uno en el medio. Esta es exactamente la propiedad que toma prestada Borges en "El Libro de Arena". Recordarán que hay un momento en este cuento en que al personaje de Borges lo desafían a abrir por la primera hoja el Libro de Arena.

> "Me dijo que su libro se llamaba el Libro de Arena porque ni el libro ni la arena tienen principio ni fin.
>
> Me pidió que buscara la primera hoja. Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro".

La tapa del Libro de Arena sería el cero, la contratapa sería el uno, las páginas corresponderían entonces a los números fraccionarios entre cero y uno. En los números fraccionarios uno no puede encontrar el primer número después de 0 ni el último antes de 1. Siempre hay números que se interponen. Uno estaría tentado a conjeturar que el infinito de los números fraccionarios es más apretado, más denso, más nutrido.

La segunda sorpresa que nos deparan los infinitos es que esto no es así, es decir, hay "tantos" números racionales como números naturales. ¿Cómo podemos ver esto?

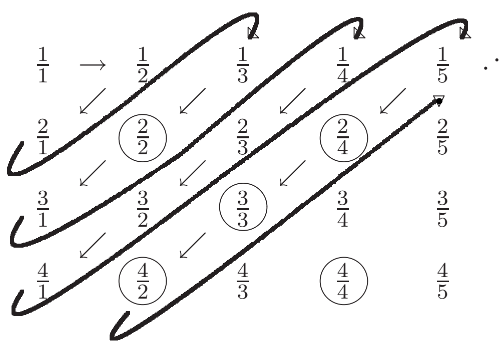
Como las fracciones son pares de enteros, numerador/denominador, todas las fracciones (positivas) están representadas en este cuadro:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots
\end{array}$$

Anoto en la primera fila todas las fracciones que tienen numerador 1, en la segunda fila todas las que tienen numerador 2, en la tercera fila todas las que tienen numerador 3, etc. Evidentemente al escribirlas de este modo hay algunas que se repiten, por ejemplo, $\frac{3}{3}$ es lo mismo que $\frac{2}{2}$ o que $\frac{1}{1}$. O sea, algunas fracciones quedan anotadas repetidas veces, pero eso no importa. Quien puede más, puede menos: si puedo contar con repeticiones puedo contar sin repeticiones. Lo que me interesa es que todos los números fraccionarios positivos aparecen en algún momento aquí. Me quedan la mitad de los negativos. Pero si sé contar los positivos es fácil contar los negativos. Los matemáticos me van a perdonar algunos deslices, que no hable con toda la precisión debida.

Lo que quiero hacerles notar, de lo que quiero convencerlos, es que en este cuadro infinito que armé, de infinitas filas, de infinitas columnas, están todas las fracciones positivas.

Para mostrar que hay "tantos" números fraccionarios como números naturales, bastaría entonces poder asignar un número natural a cada elemento de este cuadro de manera que al progresar en la enumeración nos aseguremos de que no quedarán elementos sin numerar. ¿Cómo hacer esto? Es claro que no conviene empezar el recorrido tratando de agotar por ejemplo la primera fila, porque nunca pasaría a la segunda. El recorrido tiene que alternar elementos de las distintas filas para asegurar que se vaya cubriendo todo el cuadro. El método de enumerar fracciones también lo descubrió Cantor, se lo conoce como el *recorrido diagonal de Cantor*.



Es decir:

A la fracción $\frac{1}{1}$ le asigno el número 1.
A la fracción $\frac{1}{2}$ le asigno el número 2.
A la fracción $\frac{2}{1}$ le asigno el número 3.
A la fracción $\frac{1}{3}$ le asigno el número 4.
A la fracción $\frac{2}{2}$ la salteo porque ya la conté ($\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$).
A la fracción $\frac{3}{1}$ le asigno el número 5.
A la fracción $\frac{3}{2}$ le asigno el número 6, etc.

El recorrido avanza por diagonales cada vez más largas y barre de esa manera todas las filas y todas las columnas. A medida que avanzo me aseguro de que voy numerando a todos los números fraccionarios y paso por encima, simplemente salteo, a las fracciones que se repiten y que ya numeré, como $\frac{3}{3}$ ó $\frac{2}{2}$. ¿Qué se demuestra con esto? Que a pesar de que el infinito de los números fraccionarios parece más apretado, hay "tantos" números fraccionarios como números naturales. Más aún, con esta enumeración se le puede dar un orden consecutivo a los números fraccionarios, un orden, por supuesto, distinto del que tienen en la recta, pero que permite explicar la enumeración de páginas en el Libro de Arena. Esto es algo que posiblemente Borges no supiera. La numeración de páginas que a Borges en el cuento le parece misteriosa y le atribuye una razón también misteriosa, en principio no tiene ningún misterio. No hay contradicción entre el hecho de que entre dos hojas del Libro de Arena siempre hay otra intercalada con el hecho de que cada hoja pueda tener un número: el mismo habilidoso imprentero que pudo coser las infinitas páginas del Libro de Arena, pudo también perfectamente numerarlas tal como lo estamos haciendo nosotros.

El infinito y la Biblioteca de Babel

A los matemáticos y también a Borges, les gusta exprimir las ideas, repetirlas, sacarles todo el partido posible. Ahora que tengo este cuadro no me resisto a usarlo una vez más para otro tema recurrente en Borges que es el tema de los lenguajes, tal como está presente, por ejemplo, en "La biblioteca de Babel".

Pensemos un momento en la idea de "La biblioteca de Babel", una biblioteca de libros no necesariamente inteligibles, una biblioteca absoluta cuya ley fundamental es: "basta que un libro sea posible para que exista". Borges fija un alfabeto de veinticinco símbolos, pero nosotros, para darnos todavía más libertad, pensaremos en libros escritos en todos los idiomas posibles y haremos una sola lista, un alfabeto universal, reuniendo todos los signos de todos los alfabetos existentes. Empezamos con los veinticinco símbolos ortográficos que menciona Borges (y de este modo nos aseguramos de que todos los libros de la Biblioteca de Babel estén también en nuestros anaqueles). Proseguimos con los 27 símbolos del alfabeto castellano. Agregamos como nuevos símbolos las 5 vocales acentuadas. Seguimos, por ejemplo, con los símbolos del cirílico, después agregamos la ö del alemán, y los demás símbolos diferentes que tenga cada idioma. Así el alfabeto básico va creciendo y creciendo. Para darnos un margen hacia el futuro podemos suponer directamente que los símbolos de nuestro alfabeto son los números naturales, de esa manera nos queda espacio siempre disponible para poder adicionar nuevos alfabetos, nuevos símbolos como la @, o símbolos de lenguajes extraterrestres que nos lleguen en algún momento. Los números del 1 al 25 corresponden a los símbolos ortográficos de los libros de la Biblioteca de Babel, el número 26 es la A, el número 27 es la B, el número 526 será quizá un idiograma chino, etc.

Recuerdan ustedes que en "La biblioteca de Babel" Borges acota el número de páginas que puede tener cada libro: cuatrocientas diez páginas. Lo que nosotros nos preguntamos ahora es de qué tipo será el infinito de todos los libros distintos de *cualquier* número de páginas que pueden escribirse con este alfabeto universal, si admitimos palabras de *cualquier* longitud.

Usando este mismo cuadro puede probarse que este conjunto de libros *también es enumerable*. La idea es, por supuesto, disponer en la primera fila los libros de una sola página, en la segunda fila los libros de dos páginas, en la tercera fila los libros de tres páginas, etc. Y luego hacer la enumeración de acuerdo al recorrido diagonal de Cantor. Como todos los libros de la Biblioteca de Babel están también incluidos en nuestros anaqueles, podemos concluir que el conjunto de libros de la Biblioteca de Babel es enumerable. ¿Por qué tiene importancia esto para la comprensión del cuento de Borges?

En una nota al final del cuento, Borges escribe que una amiga le observó que toda la construcción de la biblioteca de Babel era superflua o excesiva (él usa la palabra *inútil*), porque en realidad todos los libros de la Biblioteca de Babel cabrían en un solo volumen. En un solo libro de infinitas páginas infinitamente delgadas, "un *vademecum* sedoso en el que cada hoja se desdoblaría en otras". La forma de hilvanar los distintos libros uno detrás del otro en este único volumen no sería más que este recorrido diagonal de Cantor.

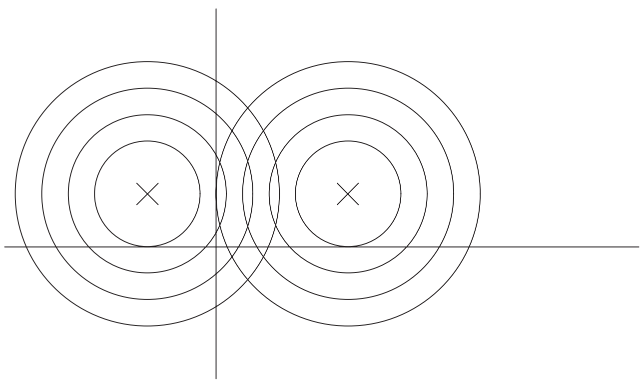
Esta nota al pie que cierra el cuento es el germen de la idea que da después como resultado "El Libro de Arena". Esta es una forma de concebir muy matemática. El primer ejemplo, "La biblioteca de Babel", es laborioso, profuso, por supuesto tiene otra riqueza y tiene otros significados, no estoy diciendo que se reduzca a esto. Pero Borges encuentra al final una idea más simple: que se pueden reunir todos los libros en un único volumen, con una cantidad infinita de páginas. Él dice: un libro tal que cada página sea divisible. Es el preanuncio del cuento "El Libro de Arena". Quiero llamar la atención sobre este modo de reflexionar sobre sus propios textos para abstraer una idea esencial que repetirá o desdoblará en otros sitios. Es el primer ejemplo de un procedimiento general, una operación que recuerda los modos matemáticos y que estudiaremos con más detenimiento luego.

La esfera con centro en todas partes y circunferencia en ninguna

Examinemos ahora el segundo elemento de matemática en "El aleph". Aparece en el momento en que Borges está por describir el Aleph, y dice: "cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca".

Algo más digo aquí sobre el símbolo aleph. Me parece particularmente acertada la figura de un hombre con un brazo que toca la tierra y el otro brazo que apunta al cielo, porque de algún modo la operación de contar es el intento humano de acceder a lo infinito. Es decir, el ser humano no puede, en su vida finita, en su "vidita" –como diría Bioy Casares– contar efectivamente todos los números, pero tiene una manera de generarlos, una manera de concebir y acceder a un número tan grande como sea necesario. A partir del descubrimiento de la escritura decimal, a partir de los diez dígitos, puede alcanzar números tan grandes como quiera. Aún limitado a su situación terrestre, todavía puede extender su brazo al cielo. Ése es el intento y la dificultad de contar. Algo similar escribe Borges: "¿cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca? Los místicos, en análogo trance, prodigan los emblemas: para significar la divinidad un persa habla de un pájaro que de algún modo es todos los pájaros; Alanus de Insulis, de una esfera cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna". Un poco más abajo dice: "por lo demás, el problema central es irresoluble. La enumeración siquiera parcial de un conjunto infinito". Es decir, lo que él acomete es la descripción del Aleph, que es infinito. Y no lo puede agotar en la escritura, porque la escritura es secuencial, el lenguaje es "sucesivo", es el problema al que nos referíamos recién. Entonces tiene que dar una idea, una muestra, una lista de imágenes suficientemente convincente. Es la célebre enumeración de imágenes que viene a continuación y a la que nos referiremos luego.

Pero en realidad la segunda idea en la que me quiero detener ahora es esta esfera que aparece también en "La esfera de Pascal". Una esfera *cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna*. Borges advierte aquí: "No en vano rememoro esas inconcebibles analogías". Es una analogía muy precisa que añade verosimilitud a la esferita que quiere describir. Para entender esta idea geométrica, que en principio parece un juego de palabras, pensemos primero en el plano, en vez de esferas pensemos en círculos. La idea sería la siguiente: todos los puntos del plano son abarcables por círculos crecientes cuyo centro no importa realmente donde esté, el centro puede estar en cualquier parte.



Hago centro en cualquier punto, no importa el punto, y considero círculos cada vez más grandes. A medida que aumento el radio esos círculos van ocupando toda la superficie del plano. En el ensayo "La esfera de Pascal", cuando quiere precisar un poco más esta imagen, Borges escribe: "Calogero y Mondolfo razonan que intuyó una esfera infinita, *o infinitamente creciente*, y que las palabras que acabo de transmitir tienen un sentido dinámico". O sea, podemos concebir y reemplazar al plano por un círculo que crece y crece, porque todos los puntos del plano son abarcables por ese círculo. Ahora, en ese círculo que se expande indefinidamente, la circunferencia se perderá en el infinito. No podemos delimitar ninguna circunferencia. Esta, creo yo, es la idea a la que se refiere. Haciendo un salto al infinito puede pensarse que todo el plano es un círculo con centro en cualquier punto y circunferencia en ninguna parte.

El mismo tipo de construcción vale si uno piensa en el espacio tridimensional. Es decir, una esfera pensada como un globo que crece infinitamente y va ocupando todos los puntos. En definitiva, el universo puede concebirse como una esfera infinitamente expandida. Esta es, dicho sea de paso, la concepción actual del universo en la física contemporánea: una esferita de magnitud infinitesimal y masa infinitamente concentrada que en algún momento, en el *Big Bang*, se expandió en todas direcciones. ¿Por qué es interesante esta "inconcebible analogía"? Porque el Aleph es una esferita. Si uno logra ver a todo el universo también como una gran esfera, es mucho más plausible la idea de que todas las imágenes del universo puedan reproducirse en la esferita al pie de la escalera. Simplemente por contracción uno puede trasvasar todo el universo a la esfera pequeña. Este es, por supuesto, sólo uno de los sentidos con que Borges utiliza esta analogía: el sentido al que prestamos particular atención en nuestro modo matemático con que el que vemos "todo a lo grillo esta mañana". Pero, como dije antes, la matemática se desliza en los textos de Borges dentro de un contexto de referencias filosóficas y literarias: la idea del universo como esfera está vinculada a toda una tradición de misticismo, religiosa, cabalística, en fin, estas otras connotaciones están explicadas con más detalle en "La Esfera de Pascal".

La paradoja de Russell

La tercera idea es lo que yo llamaría la "paradoja de la magnificación" (técnicamente, es lo que se llama en lógica *autoreferencia*, pero la palabra "autoreferencia" tiene un significado distinto en literatura y no quisiera mezclarlos). Esta paradoja aparece en el momento de la enumeración, en que Borges se decide a dar la descripción parcial de las imágenes en el Aleph. Pero también ocurre en otras ficciones, cuando Borges construye mundos que son muy vastos, abarcatorios y que terminan por incluirlo a él mismo –o a los lectores– en su ámbito. En "El Aleph" esto puede verse aquí: "Vi la circulación de mi oscura sangre, vi el engranaje del amor y la modificación de la muerte. Vi el Aleph, desde todos los puntos. Vi en el Aleph la tierra y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra. Vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara y sentí vértigo y lloré".

La postulación de objetos muy vastos, la magnificación, da lugar a curiosas paradojas y Borges debía conocer perfectamente la más famosa, debida a Bertrand Russell, que hizo tambalear la teoría de conjuntos y que fue una de las fisuras más importantes en los fundamentos de la matemática. La paradoja de Russell dice que no se puede postular la existencia de un conjunto que contenga a todos los conjuntos, es decir, que no puede postularse un Aleph de conjuntos. Esto se puede explicar rápidamente de este modo: observemos que los conjuntos más usuales en los que podemos pensar no son elementos de sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales no es ninguno de los números naturales. El conjunto de todos los árboles no es un árbol. Pero pensemos ahora por un momento en el conjunto de todos los conceptos. El conjunto de todos los conceptos sí es en sí mismo un concepto. O sea que, aunque un poco más rara, cabe la posibilidad de que un conjunto sea elemento de sí mismo. Si yo postulo el conjunto de todos los conjuntos, ése, por ser en sí mismo un conjunto, tendría que ser elemento de sí mismo.

En definitiva, hay conjuntos que son elementos de sí mismos, y otros que no. Consideremos ahora el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

$$X = \{A \text{ tal que } A \text{ es un conjunto y } A \text{ no está en } A\}$$

En X estará el conjunto de los números naturales, el conjunto de todos los árboles, el conjunto de las personas de esta sala, etc. Entonces nos preguntamos: ¿será X elemento de X? La respuesta debería ser sí o no. Ahora bien, si X fuera elemento de sí mismo tiene que verificar la propiedad dentro de la llave. O sea, que si X pertenece a X, X no está en X. Pero esto es absurdo. ¿Será entonces que X no es elemento de sí mismo? Pero si X no es elemento de sí mismo, verifica la propiedad dentro de la llave, por lo tanto tiene que estar en X, es decir, si X no es elemento de X, X tiene que pertenecer a X. Otra vez absurdo. Tenemos aquí un conjunto que está en una tierra de nadie, un conjunto que no es ni no es elemento de sí mismo.

Esta es la paradoja que encontró Russell, cuando era joven, y le envió una carta a Gottlob Frege, uno de los próceres de la lógica, que estaba por entregar a prensa el último volumen de su gran tratado sobre los fundamentos de la matemática, basado justamente en la teoría de conjuntos. Frege agradeció la comunicación al final de su tratado con las siguientes patéticas palabras: "Un científico difícilmente pueda encontrarse en una situación más indeseable que ver desaparecer sus fundamentos justo cuando su trabajo ha terminado. Fui puesto en esta posición por una carta de Mr. Bertrand Russell cuando mi obra estaba por ir a imprenta". Con estas pocas líneas Russell no sólo dio por tierra el trabajo de diez o quince años de Frege, sino que provocó una de las crisis más profundas en los fundamentos de la matemática.

Para popularizar esta paradoja, Russell pensó en el barbero de un pueblo que únicamente afeita a los hombres que no se afeitan a sí mismos. En principio la existencia de un hombre con esta honesta profesión parece razonable: el barbero de un pueblo, diría uno, es precisamente el hombre que afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos. Ahora bien, ¿el barbero debe afeitarse a sí mismo, o no debe afeitarse a sí mismo? Si se afeita a sí mismo, deja de estar en la clase de los hombres a los que puede afeitar. O sea, no puede afeitarse a sí mismo. Pero por otro lado, si no se afeita a sí mismo queda dentro de la clase de los hombres que no se afeitan a sí mismos y por lo tanto se tiene que afeitar. El barbero está atrapado en un limbo lógico en que su barba crece ¡y no puede ni afeitarse ni no afeitarse a sí mismo! (risas).

Hay una variación también atribuida a Russell y que la usa Borges elípticamente en “La biblioteca de Babel”. Al principio del cuento “La biblioteca de Babel” el bibliotecario está a la búsqueda del catálogo de todos los catálogos. Les propongo que piensen para la semana próxima en la formulación de la paradoja en términos de catálogos. Porque ¿qué son en el fondo los catálogos? Son libros que tienen como texto títulos de otros libros. Hay catálogos que se incluyen a sí mismos entre sus títulos y otros que no. De esa manera uno puede llegar a la misma paradoja.

¿Por qué Borges interesa a los matemáticos?

Estos tres elementos que acabamos de examinar aparecen una y otra vez en la obra de Borges moldeados en formas literarias de diversas maneras. En el ensayo “El cartesianismo como retórica (o ¿por qué Borges interesa a los científicos?)”, del libro ”Borges y la Ciencia”, la autora, Lucila Pagliai, se pregunta por qué los textos de Borges son tan caros a los investigadores científicos, a los físicos, a los matemáticos. La conclusión a la que llega es que hay en Borges una matriz esencialmente ensayística, sobre todo en la obra madura. Y por supuesto, todo el texto trata de fundamentar esto. Es un ensayo agudo, creo que es una parte de la verdad. Borges es un escritor que procede desde una idea: “en el principio era la idea”, y concibe sus ficciones como encarnaciones o avatares de una concepción abstracta. Hay también fragmentos de argumentación lógica en muchos de los relatos. Este tipo de matriz ensayística a la que ella se refiere es, indudablemente, uno de los elementos que marcan cierta similitud con el pensamiento científico. En un pequeño artículo que yo escribí sobre el mismo tema, apunto a los elementos de estilo que tienen afinidad con la estética matemática. Leo de allí la tesis principal[2].

> Dije antes que hay una multitud de rastros matemáticos en la obra de Borges. Esto es cierto, pero aún si no hubiera ninguno, aún en los textos que nada tienen que ver con la matemática, hay algo, un elemento de estilo en la escritura, que es particularmente grato a la estética matemática. Creo que la clave de ese elemento está expresada, inadvertidamente, en este pasaje extraordinario de *Historia de la Eternidad*: “No quiero despedirme del platonismo (que parece glacial) sin comunicar esta observación, con esperanza de que la prosigan y justifiquen: *lo genérico puede ser más intenso que lo concreto*. Casos ilustrativos no faltan. De chico, veraneando en el norte de la provincia, la llanura redonda y los hombres que

[2]Otro excelente ensayo de este mismo libro, “Indicios”, de Humberto Alagia, me llamó la atención sobre el fragmento de “Historia de la Eternidad” que cito dentro de este pasaje.

> mateaban en la cocina me interesaron, pero mi felicidad fue terrible cuando supe que ese redondel era 'pampa' y esos varones 'gauchos'. Lo genérico... prima sobre los rasgos individuales".
>
> Cuando Borges escribe, típicamente acumula ejemplos, analogías, historias afines, variaciones de lo que se propone contar. De esta manera la ficción principal que desarrolla es a la vez particular y genérica, y sus textos resuenan como si el ejemplo particular llevara en sí y aludiera permanentemente a una forma universal. Del mismo modo proceden los matemáticos. Cuando estudian un ejemplo, un caso particular, lo examinan con la esperanza de descubrir en él un rasgo más intenso, y general, que puedan abstraer en un teorema. Borges, les gusta creer a los matemáticos, escribe exactamente como lo harían ellos si los pusieran a la prueba: con un orgulloso platonismo, como si existiera un cielo de ficciones perfectas y una noción de verdad para la literatura.

Esto resume, de algún modo, lo que yo pienso sobre la articulación del pensamiento matemático en el estilo de Borges. Por ahora es muy poco más de lo que los matemáticos llaman un *claim*, algo que se afirma por anticipado pero que debe probarse en algún momento. En la próxima charla intentaré fundamentar esta afirmación y leeré algunos de los textos no matemáticos de Borges bajo esta luz. Les agradezco que hayan estado aquí, hasta la semana próxima.

Guillermo Martínez
Matemático y escritor
Correo electrónico: guillermomartinez@fullzero.com.ar
Página Web: www.guillermomartinez.8m.net