

## La Conjetura de Poincaré. Caracterización de la esfera tridimensional

María Teresa Lozano Imízcoz

Académica Numeraria

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, España

### Resumen

La Conjetura de Poincaré ocupa el quinto lugar en la lista de los siete Problemas del Milenio considerados por el Instituto Clay de Matemáticas con sede en Cambridge (Massachusetts).

En el año 2004 se ha celebrado el centenario del enunciado de esta célebre Conjetura. También se ha conmemorado el 150 aniversario del nacimiento del gran matemático Henri Poincaré, quien la propuso.<sup>1</sup> Es un problema de Topología que ha dado lugar, directa o indirectamente, a un desarrollo espectacular de esta rama de las Matemáticas durante todo un siglo. Aunque su enunciado es sencillo, la dificultad de su resolución ha dado lugar a la búsqueda de nuevos métodos cada vez que los conocidos hasta ese momento se consideraban insuficientes para alcanzar una solución.

### Su creador: Henri Poincaré

Dedicaré unas líneas a glosar la figura del insigne matemático que originó la cuestión que, con una manera de pensar e investigar novedosa para la época, (su intuición geométrica era extraordinaria) aportó importantes avances en el desarrollo de algunas ramas de las matemáticas, en particular de la Topología.

Henri Poincaré nació el día 29 de abril de 1854 en Nancy (Francia). Era hijo de Léon Poincaré, profesor de medicina en la universidad. Destacó en el Lycée de Nancy, donde estudió durante once años (1862-1873), en varias materias, pero sobre todo en matemáticas, según el testimonio de uno de sus profesores que lo define como un monstruo de las matemáticas.<sup>2</sup> En 1873 entró en École Polytechnique. Tras graduarse en 1875, continuó estudios en L'École des Mines. Su tesis doctoral la realizó, bajo la dirección de Charles Hermite, en ecuaciones diferenciales, defendiéndola en París en 1879. Fue profesor en la Universidad de Caen, la Facultad de Ciencias de París, la Sorbonne y la École Polytechnique. Murió en París, el día 17 de julio de 1912, a los 58 años.

Se puede decir que dedicó su vida a la investigación, siendo uno de los últimos sabios integrales, capaces de abarcar muchos aspectos de las matemáticas, la física e incluso la filosofía.

---

<sup>1</sup>Por estas razones ha habido diversos eventos de conmemoración en los que he tenido la oportunidad de participar. El contenido de esta conferencia recoge material que también fue expuesto en otros foros. En particular en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales. Su publicación también aquí pretende contribuir a una mayor divulgación del tema.

<sup>2</sup>Carta de Elliot à Liard a un amigo en 1872: "J'ai dans ma classe à Nancy, un monstre de mathématiques, c'est Henri Poincaré".



Figura 1.— Fotografía de H. Poincaré

### Su contexto: Analysis sitûs (Topología)

Poincaré es el creador de la topología, que él llamó Analysis sitûs, rama de las matemáticas que se ocupa de caracterizar las propiedades de los objetos que permanecen tras una deformación continua, sin roturas ni pegados. Es algo así como una geometría blanda. Esta manera de pensar sólo es posible en una mente con una extraordinaria capacidad de abstracción espacial. He aquí la definición dada por Poincaré en [10]:

*El Analysis sitûs es la ciencia que nos hace conocer las propiedades cualitativas de las figuras geométricas no sólo en el espacio ordinario sino en espacios de más de tres dimensiones.*

Más adelante explica este grado de abstracción como la que realizamos en el arte de la geometría: *razonar bien sobre figuras mal realizadas. Las proporciones de las figuras pueden ser alteradas, pero sus elementos no pueden ser trastocados y deben conservar su posición relativa. En otras palabras, las propiedades cuantitativas no son importantes, sino que se deben respetar las propiedades cualitativas, es decir precisamente aquellas de las que se ocupa el Analysis sitûs.*

### La esfera topológica

La primera definición de esfera es de origen geométrico. La esfera de dimensión  $n$ ,  $S^n$ , es el conjunto de vectores unitarios del espacio Euclideo de dimensión  $n + 1$ ,  $E^{n+1}$ .

$$S^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

En la Figura 2 dibujamos la esfera  $S^n$  como una figura geométrica. Así, la esfera  $S^1$  es la circunferencia y la esfera  $S^2$  es la superficie esférica, pero tenemos dificultades cuando tratamos de pintar  $S^n$ ,  $n > 2$ . La

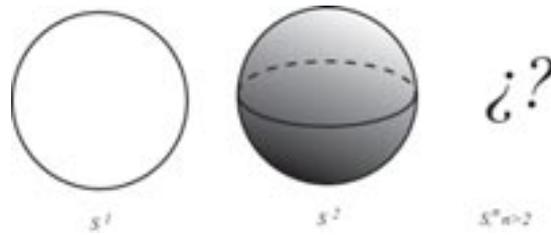


Figura 2.— Esferas.

razón es que no es posible incrustar toda la esfera  $S^n$ ,  $n > 2$  en una porción del espacio tridimensional, que es nuestro campo visual, de la misma manera que no es posible incrustar (sin autointersecciones) la superficie esférica en una porción de plano.

Observamos que una esfera  $S^n$  es un espacio con una notable propiedad local: cualquier punto,  $x$ , tiene un entorno,  $U_x$ , que es como un disco de dimensión  $n$ ,  $D^n$ . En lenguaje topológico, este entorno es *homeomorfo* a un disco (existe una aplicación biyectiva continua  $f_x : U_x \rightarrow D^n$  con inversa continua). Todo espacio con esta propiedad local recibe el nombre de *variedad de dimensión  $n$* . Considerar la esfera  $S^n$  únicamente como variedad de dimensión  $n$  es olvidar la estructura rígida que le da la geometría, conservando las demás propiedades cualitativas. Así desde el punto de vista topológico, *una curva simple cerrada en el plano o en cualquier espacio de dimensión superior es una esfera  $S^1$* . Esta propiedad caracteriza la esfera de dimensión 1.

La caracterización de la esfera de dimensión 2 con una propiedad intrínseca que la distinga de las otras variedades de dimensión 2 (superficies), se consigue con un invariante algebraico definido y estudiado por Poincaré, que es conocido como grupo fundamental o de Poincaré. Cada espacio topológico  $X$  con un punto distinguido  $x_0$ , tiene asociado un grupo algebraico,  $\pi_1(X, x_0)$ , cuyos elementos son clases de equivalencia de caminos que empiezan y terminan en el punto  $x_0$ . Dos caminos son equivalentes si se puede deformar uno en el otro de forma continua manteniendo fijos los extremos.

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua, } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

La composición de dos elementos del grupo es la clase que resulta de recorrer un representante a continuación de otro.

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\longrightarrow [\alpha \star \beta] \end{aligned}$$

La esfera es la única superficie cerrada cuyo grupo fundamental es el grupo trivial:  $\pi_1(S^2, x_0) = 0$ . Es decir, cada camino cerrado se contrae a un punto. *Un camino cerrado en la esfera  $S^2$  es el borde de un disco inmerso (una porción de superficie)*, que es el área barrida durante la contracción a un punto.

### Origen de la cuestión

La conjetura de Poincaré es una caracterización de la esfera  $S^3$ . En 1900, Henri Poincaré, por analogía con la caracterización de la esfera  $S^2$ , antes citada, escribió que también la esfera  $S^3$  es la única variedad de dimensión 3 en la que toda curva cerrada bordea una superficie [8].

Cuatro años más tarde, en 1904, él mismo publicó en el quinto complemento al *Analysis situs* [9], un contraejemplo a esta caracterización. En el artículo describe una variedad de dimensión 3, hoy conocida como esfera homológica de Poincaré, en la que toda curva simple cerrada bordea una superficie, pero no

es homeomorfa a la esfera tridimensional. De hecho, esta variedad tiene un grupo fundamental de 120 elementos y su recubridor universal es la esfera  $S^3$ . Se puede definir como el conjunto de dodecaedros (o icosaedros) inscritos en una esfera bidimensional. El artículo termina asegurando que la propiedad que caracteriza la esfera tridimensional es la de tener grupo fundamental trivial. La última frase de este escrito es: *Mais cette question nous entraînerait trop loin*. Nada más exacto. Su investigación ha sido objeto de estudio de muchos topólogos durante todo un siglo. El enunciado preciso de la Conjetura de Poincaré es:

*Una variedad tridimensional cerrada con grupo fundamental trivial es homeomorfa a la esfera tridimensional.*

Parece una sencilla afirmación y es difícil de imaginar un contraejemplo, pero las demostraciones detalladas que se han ido produciendo en el siglo XX, han resultado incompletas o erróneas.

### Visualizando la esfera tridimensional

Para representar la esfera tridimensional como un espacio topológico que podamos comprender e imaginar fácilmente, se utilizan varios procedimientos. Antes de mencionar algunos, recordemos ciertos elementos que se definen en  $S^3$  por analogía con la esfera bidimensional.

**Polo Norte**  $N = (0, 0, 0, 1)$

**Polo Sur**  $S = (0, 0, 0, -1)$

**Hemisferio Norte**  $H_N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_4 \geq 0\}$

**Hemisferio Sur**  $H_S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_4 \leq 0\}$

**Ecuador**  $E = H_N \cap H_S = \{(x_1, x_2, x_3, 0)\} \cong S^2$

#### *Unión de dos bolas tridimensionales*

Es claro que cada hemisferio es una bola tridimensional, puesto que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - x_4^2 \leq 1.$$

Ambos hemisferios tienen el ecuador como parte común, luego podemos representar  $S^3$  como dos bolas tridimensionales pegadas por su esfera borde, es decir dos bolas identificadas por el borde mediante un homeomorfismo. Cualquier homeomorfismo (pegado) entre las esferas bordes de las dos bolas produce el mismo resultado (Figura 3).

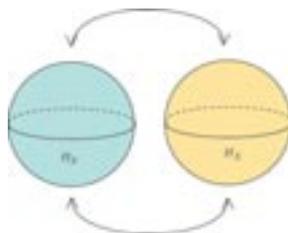


Figura 3.— Dos bolas identificadas.

### Proyección estereográfica

La proyección estereográfica desde el norte de la esfera al hiperplano ecuatorial

$$e : S^3 \setminus N \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow \left( \frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right)$$

es un homeomorfismo (aplicación biyectiva continua con inversa continua). Si identificamos la imagen con nuestro espacio ambiente, podemos pensar que la esfera tridimensional es su compactificación con un punto en el infinito. En esta representación el polo sur, S, es el origen de coordenadas, el hemisferio sur es la bola unidad, cuyo borde, la esfera bidimensional unidad, es el ecuador, y el exterior de la bola unidad se corresponde con el hemisferio sur, entorno del punto del infinito que representa al polo norte (ver Figura 4).

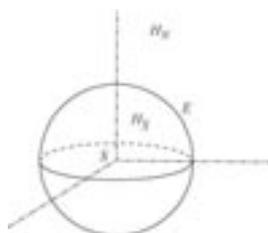


Figura 4.—  $\mathbb{R}^3 \simeq S^3 \setminus N$ .

### Unión de dos toros sólidos

Si se considera un toro sólido ( $D^2 \times S^1$ ) no anudado en  $\mathbb{R}^3$ , su complementario en  $\mathbb{R}^3 \cup \infty \cong S^3$  es también un toro sólido. El pegado se realiza por la superficie tórica del borde identificando el meridiano de un toro con una longitud del otro toro.

### Una bola con su borde identificado por reflexión en el ecuador

Si partimos de la representación de  $S^3$  como dos bolas pegadas por su esfera borde y hacemos primero la identificación de un disco, el resultado es homeomorfo a una bola en la que se debe identificar la esfera borde por reflexión en una línea. Ver Figura 5.

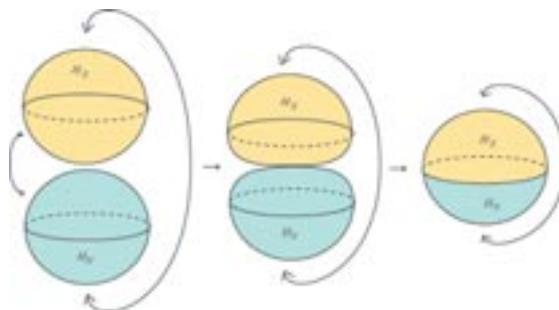


Figura 5.— Una bolas con auto-identificación.

### Un dodecaedro con caras identificadas

En la Figura 6 se ha dibujado la intersección de un dodecaedro regular centrado en el origen con el primer octante. El dodecaedro total es el resultado de reflejar en los tres planos coordenados la porción

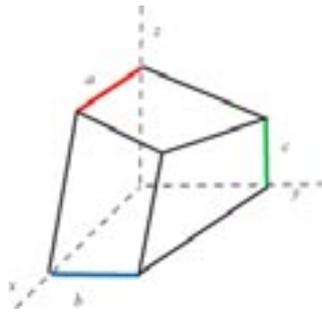


Figura 6.— Una porción del dodecaedro.

dibujada en la Figura 6. Cada cara del dodecaedro tiene un lado marcado con las letras  $a$ ,  $b$  ó  $c$ . Si se identifican las caras por giro en el lado marcado, el resultado es  $S^3$ , y las líneas marcadas forman el enlace conocido como anillos de Borromeo. En la Figura 7 se ha dibujado este proceso en varias etapas. En 7.1 se muestran las identificaciones a realizar. En 7.2 ya se han identificado las caras que tienen en común las aristas con etiqueta  $a$ , que han quedado en el interior del sólido. En 7.3 se ha identificado las caras laterales dejando las aristas marcadas con  $c$  como una curva cerrada en el interior; a la vez las aristas marcadas con  $b$  se han convertido en una curva cerrada en la esfera borde del sólido, que es una bola en la que se debe identificar el borde por reflexión en  $b$ , y eso produce la esfera  $S^3$ . En la Figura 4 se han dibujado sólo las curvas correspondientes a las aristas marcadas.

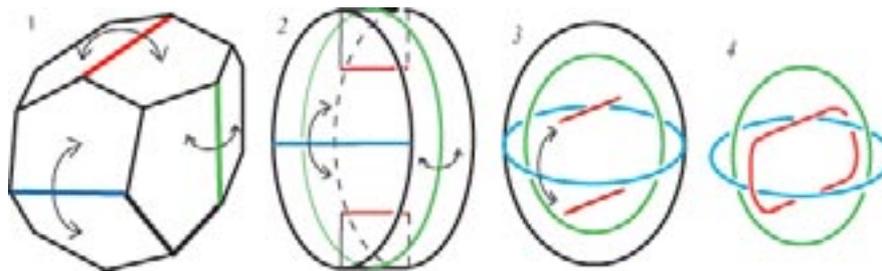


Figura 7.— Identificación en el dodecaedro.

### Hacia una solución con métodos topológicos

Durante todo el siglo XX se han utilizado diversos métodos para resolver el problema. En numerosas ocasiones ha habido matemáticos que han presentado a la comunidad matemática una demostración. Pero en un tiempo más o menos breve, otros matemáticos han encontrado algún error o algún detalle no demostrado. Esto da idea de la complejidad del problema. Realmente no es difícil imaginar caminos de demostración, pero lo complicado es comprobar cada paso de la prueba.

En lo que sigue vamos a indicar, con un ilustrativo y simplificado ejemplo, los pasos a seguir para demostrar la conjetura.

En primer lugar fijamos un procedimiento para construir o visualizar todas las 3-variedades cerradas. Existen muchos procedimientos para hacerlo, generalizando los existentes para 2-variedades. Uno de ellos, que se deduce del Teorema 1.1 de [3], es el siguiente:

**Teorema 1** *Toda 3-variedad cerrada es unión de un número finito de dodecaedros pegados por sus caras, de manera que cada arista pertenece a uno, dos ó cuatro dodecaedros.*

Los datos en este caso son:

1.  $n$  el número de dodecaedros, que corresponde al número de hojas del espacio recubridor en el Teorema
2. los pegados de las caras, que vienen dados por la monodromía del espacio recubridor.

En segundo lugar, como desgraciadamente no conocemos un procedimiento que asocie a cada 3-variedad un único conjunto de datos (las 3-variedades cerradas no están totalmente clasificadas), hay que estudiar las transformaciones en los datos que no modifican la variedad que representan. En nuestro caso hay que estudiar las jugadas que cambian el número de hojas o la monodromía, sin modificar el espacio recubridor.

En tercer lugar hay que relacionar el grupo fundamental de la variedad con los datos que la representan. Para nosotros esto es factible algorítmicamente usando la relación existente entre espacios recubridores y grupos fundamentales.

A continuación, se establecen los datos que corresponden a una 3-variedad cerrada simplemente conexa. Por último, mediante el uso de jugadas que cambian los datos pero no cambian la 3-variedad, se trata de llegar a unos datos que correspondan a la 3-esfera.

Como se puede deducir de este ejemplo (inconcluso hasta el momento), el camino es largo y con sutiles detalles a comprobar.

N.B.: El camino esbozado, es una simplificación del método general aplicado a la representación de toda 3-variedad cerrada como orbifold hiperbólica que cubre a la orbifold hiperbólica  $B_{4,4,4}$  (con la 3-esfera como espacio subyacente y los anillos de Borromeo como singularidad de orden 4).

### Hacia una solución usando el flujo de Ricci

En los últimos años, se han introducido en el estudio de las 3-variedades topológicas, métodos que utilizan estructuras Riemannianas.

Es bien conocido que cada superficie cerrada admite una estructura Riemanniana de curvatura constante, aquella que tiene su espacio recubridor universal. Las superficies orientables de género mayor o igual que 2, y las no orientables de género mayor o igual que 3, tienen una estructura hiperbólica (curvatura constante negativa); el toro y la botella de Klein tienen una estructura Euclídea (curvatura 0); y la 2-esfera y el plano proyectivo tienen una estructura Riemanniana de curvatura constante positiva. Entonces se deduce que una superficie cerrada simplemente conexa con una estructura Riemanniana de curvatura constante positiva, es necesariamente la 2-esfera.

La analogía en dimensión 3, sugiere un camino de demostración de la conjetura de Poincaré. Se trata de demostrar que toda 3-variedad cerrada simplemente conexa posee una estructura Riemanniana de curvatura constante positiva y, por tanto, es la 3-esfera.

El flujo de Ricci, fue ideado por Hamilton en [2] para variar de manera diferenciable la métrica en la variedad tendiendo hacia una estructura más homogénea. Su definición es la siguiente. Sea  $M$  una 3-variedad cerrada. La familia de estructuras Riemannianas diferenciables,  $\{g(t)|t \in [0, T)\}$ , es flujo de Ricci si satisface  $g'(t) = -2Ric(g(t))$ , donde  $Ric(g(t))$  es el tensor de Ricci de la métrica  $g(t)$ .

En el mismo artículo, Hamilton demostró el siguiente resultado

**Teorema 2** Si  $M^3$  es una variedad Riemanniana cerrada cuyo tensor de Ricci es definido positivo, entonces la variedad colapsa a un punto bajo el flujo de Ricci. Si se considera el flujo normalizado (volumen constante) converge a una variedad con curvatura constante positiva.

Entonces, para demostrar la Conjetura de Poincaré es suficiente probar que toda 3-variedad cerrada simplemente conexa admite una estructura Riemanniana cuyo tensor de Ricci es definido positivo.

En los últimos años, el matemático ruso Perelman ha usado el flujo de Ricci para demostrar la Conjetura de Geometrización, propuesta por el gran matemático Thurston, en la que confiere a cada pieza simple de cada 3-variedad una estructura Riemanniana. La Conjetura de Poincaré es consecuencia de la Conjetura de Geometrización. El trabajo de Perelman sobre el tema está contenido en tres artículos, [5, 7, 6] disponibles a través de la red informática de comunicaciones. Sus resultados no han sido todavía publicados en una revista científica, pero son numerosos los matemáticos que han emitido una opinión positiva de su contenido, aunque también son muchos los que esperan cautelosamente su publicación. Esta prevención se justifica por la evolución de las anteriores pruebas anunciadas periódicamente, algunas de las cuales estuvieron vigentes bastante tiempo hasta que, finalmente, fueron desechadas por ser incompletas o erróneas. Para más información sobre el tema recomendamos los artículos recientes [4] y [1].

En la actualidad, podemos decir que el premio prometido por el Instituto Clay para este problema del milenio no ha sido todavía otorgado a ningún matemático. Por tanto debe ser considerado como un problema abierto.

## Referencias

- [1] Michael T. Anderson. Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow. *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(2):184–193, 2004.
- [2] R. S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2):255–306, 1982.
- [3] H. M. Hilden, M. T. Lozano, J. M. Montesinos, and W. C. Whitten. On universal groups and three-manifolds. *Invent. Math.*, 87(3):441–456, 1987.
- [4] John Milnor. Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices Amer. Math. Soc.*, 50(10):1226–1233, 2003.
- [5] G. Perelman. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. *preprint math.DG/0211159*, 2002.
- [6] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *preprint math.DG/0307245*, 2003.
- [7] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *preprint math.DG/0303109*, 2003.
- [8] Henri Poincaré. Second complément a “l’analysis situs”. *Proc. London Math. Soc.*, 32:277–308, 1900.
- [9] Henri Poincaré. Cinquieme complément a “l’analysis situs”. *Rendiconti Circolo mat. Palermo*, 18:45–110, 1904.
- [10] Henri Poincaré. Analyse de ses travaux scientifiques. *Acta Math.*, 38:36–135, 1921.