Métodos RK particionados y problemas orbitales redundantes

M. Palacios

Grupo de Mecánica Espacial y Departamento de Matemática Aplicada.

Universidad de Zaragoza.

50009 Zaragoza, Spain.

Resumen

Se construye un sistema de variables canónicas superabundantes, relacionadas con los parámetros de Euler, que permiten definir el movimiento de un satélite artificial perturbado en forma canónica referido al sistema de referencia ideal. Se realiza la propagación de la órbita numéricamente mediante un propagador simpléctico de tipo particionado y se comparan los resultados con los obtenidos por un propagador numérico tradicional.

Palabras clave y expresiones: Satélites artificiales, perturbaciones, variables canónicas, métodos simplécticos.

MSC: 70F15, 65P10.

1 Introducción

De sobra es conocido que la formulación de los problemas orbitales (dinámicos, en general) en forma canónica permite un estudio analítico de los mismos más sencillo y elegante. También ocurre esto cuando se intenta propagar las órbitas numéricamente. En efecto, si el problema está formulado en forma canónica, se pueden utilizar métodos numéricos particionados, que integran por separado momentos y coordenadas. La ventaja de los métodos particionados es notoria, pues el uso de un pares adecuados conduce a métodos particionados simplécticos. El interés de los métodos simplécticos está en que conservan algunos invariantes o constantes del movimiento y, por eso, se hacen imprescindibles, por ejemplo, cuando se pretende propagar una órbita a largo plazo y, desde luego, cuando se quieren estudiar numéricamente algunas propiedades de conservación (de la energía, momento angular, etc.).

Los métodos particionados aplicables a un sistema hamiltoniano que se muestran más interesantes [12, 10] son los constituidos por un método Runge-Kutta del tipo Lobatto IIIA y otro del tipo Lobatto IIIB; el primero propaga los momentos y el segundo lo hace con las coordenadas. Tienen la ventaja añadida de ser, el primero, un método de colocación y, el segundo, un método de colocación discontinua, basados ambos en los mismos nodos. Además, son especialmente interesantes en el tratamiento numérico de problemas hamiltonianos con restricciones [10].

Pero, como siempre, el interés real de un método numérico radica en la posibilidad de resolver los problemas habituales. En nuestro caso, comprobamos que nuestros problemas, los orbitales, pueden ser formulados en la forma hamiltoniana con restricciones mencionada. De hecho, nosotros nos hemos visto forzados a ella de manera natural, pues hace tiempo nos propusimos conseguir una buena propagación numérica de soluciones de problemas orbitales. Para ello, en un principio, comenzamos por buscar un conjunto de variables adecuado para formular dichos problemas. Encontramos [13], por ejemplo, que la formulación en variables proyectivas regularizadas referidas al sistema ideal de Hansen conduce a una mejora de al menos dos dígitos en la propagación numérica, cualquiera que sea el método numérico utilizado.

Sin embargo, algunas dificultades pueden aparecer al utilizarla. La primera es que el sistema de referencia ideal está definido a partir del sistema de referencia inicial mediante cuaternios; para que la transformación de coordenadas cartesianas a otras con cuaternios esté definida unívocamente, es preciso que los cuaternios cumplan algunas restricciones; en concreto, han de ser de módulo uno. Este tipo de restricciones ha sido utilizado, tradicionalmente, para controlar el progreso en la propagación numérica de las soluciones.

Otra característica poco adecuada de estas variables proyectivas con cuaternios es que no forman un sistema canónico. Dadas las ventajas que, desde el punto de vista numérico, puede proporcionar la utilización de sistemas canónicos, sería interesante disponer de un conjunto de variables canónicas que gozará de las ventajas de las variables proyectivas con cuaternios, aunque fuese con restricciones.

Por eso, en este trabajo, nos proponemos construir, siguiendo la técnica propuesta por Cid [3, 4] y otros [1, 14, 5, 6], un sistema extendido de cinco variables canónicas, que incluyan como coordenadas las componentes del cuaternio que define la rotación instantánea, y los cinco momentos coordenados adecuados. A continuación, presentaremos los métodos Runge-Kutta particionados (PRK, en adelante) y su utilización para la propagación de problemas canónicos con restricciones. Finalmente, mostraremos algunos ejemplos sencillos.

2 Un Sistema Canónico Redundante

Una elección de coordenadas [13] que resulta muy adecuada para describir los problemas orbitales es la que considera las coordenadas (q_1, q_2, q_3, q_4, r) , donde las cuatro primeras son las componentes de un cuaternio $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ y la última es la distancia radial. Considerando un sistema inicial de coordenadas cartesianas, el cuaternio \mathbf{q} permite definir la rotación instantánea del sistema de coordenadas inicial al sistema ideal de Hansen, cuyo plano principal de referencia coincide con el plano orbital instantáneo. Como la posición de un punto en la órbita puede ser descrita por la distancia radial, que es una de las coordenadas, y un ángulo, definido a partir del cuaternio \mathbf{q} , estas coordenadas pueden ser llamadas proyectivas. Una posterior regularización y la consideración de la variable $\rho = 1/r$ permite escribir las ecuaciones del movimiento como las de un oscilador armónico perturbado, a las que hay que añadir las ecuaciones que definen la variación de las componentes del cuaternio. Naturalmente, entre estas coordenadas proyectivas existen algunas restricciones que mencionaremos más adelante.

No obstante, las variables mencionadas no componen un sistema canónico y, claro, no permiten describir el movimiento en forma canónica, impidiendo obtener las ventajas inherentes al uso de propagadores geométricos. Con el ánimo de poder aplicar este tipo de integradores para propagar la órbita, construiremos una extensión canónica de las mismas.

Transformaciones de este tipo, que amplían en uno o dos el número de coordenadas, han sido consideradas frecuentemente por diversos autores (Cid [3], Broucke [1], Cid y Sansaturio [4], Pascal [14], Ferrándiz y SanSaturio [5, 6], Ferrer [7], entre los más cercanos a nosotros, aparte de los clásicos, Levi-Cività, Stiefel-Scheifele, Kustaanheimo-Stiefel, etc.).

El proceso de construcción de un sistema canónico con restricciones se desarrolla en la forma siguiente. Sea un sistema inicial definido por las coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) . Consideramos unas nuevas coordenadas $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, r)$ constituidas por las cuatro componentes del cuaternio \mathbf{q} , que permite definir la rotación instantanea del sistema de referencia inicial al nuevo sistema de referencia (por ejemplo, el sistema ideal de Hansen), y la distancia radial. Esta transformación puede ser definida por las ecuaciones

$$x_{1} = r (q_{1}^{2} - q_{2}^{2} - q_{3}^{2} + q_{4}^{2})$$

$$x_{2} = 2 r (-q_{1} q_{2} + q_{3} q_{4})$$

$$x_{3} = 2 r (q_{1} q_{3} + q_{2} q_{4}).$$
(1)

Fácilmente se comprueba su veracidad si se tiene en cuenta la relación entre el cuaternio **q** y los ángulos de Euler.

Sin embargo, esta transformación está definida unívocamente si las coordenadas q_j

verifican las dos restricciones siguientes:

$$x_4 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2,$$

$$x_5 = \frac{q_1 q_3 - q_2 q_4}{q_1 q_4 + q_2 q_3},$$
(2)

en donde x_4 and x_5 deben ser constantes. Estas representan el módulo del cuaternio \mathbf{q} y la tangente de uno de los parámetros de Euler, respectivamente, por lo que, en particular, $x_4 = 1$.

Se puede obtener una extensión canónica de la transformación de las variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ a las variables \mathbf{Q} , definiendo los nuevos momentos $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ mediante las ecuaciones que con notación matricial se expresan en la forma siguiente:

$$\mathbf{X} = M \mathbf{P}, \qquad M = (A^T)^{-1}, \quad A = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{Q}},$$
 (3)

propuestas por Ferrándiz y Sansaturio [6] y consideradas ya por Ferrer [7], en donde $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ representa el vector de momentos antiguos. Sin embargo, algunas de las expresiones obtenidas por Ferrer para los momentos no son sencillas, debido a la complicación de la matriz M, por lo que nosotros hemos realizado la mencionada transformación siguiendo los pasos propuestos por Cid [3].

Las ecuaciones de la transformación propuesta por Cid [3], equivalente a la (3), son

$$\mathbf{P} = J\mathbf{X}, \qquad J = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{Q}})^T, \tag{4}$$

donde para los vectores \mathbf{x} , \mathbf{X} solo se tienen en cuenta sus tres primeras componentes, es decir, las tres coordenadas cartesianas y sus momentos conjugados. Estas ecuaciones definen un sistema inversible, si se cumplen ciertas restricciones, cuya solución hemos podido obtener tras un largo proceso de eliminación gaussiana con ayuda de un manipulador simbólico, resultando

$$X_{1} = \frac{(-q_{1} q_{3} + q_{2} q_{4}) P_{3} - (q_{1} q_{2} + q_{3} q_{4}) P_{2} + (q_{1}^{2} + q_{4}^{2}) P_{1}}{2 r q_{1}},$$

$$X_{2} = \frac{(q_{2} q_{3} + q_{1} q_{4}) P_{3} + (-q_{1} q_{2} + q_{3} q_{4}) P_{2} - (q_{1}^{2} + q_{3}^{2}) P_{1}}{2 r q_{1}},$$

$$X_{3} = \frac{(-q_{2} q_{3} + q_{1} q_{4}) P_{3} + (q_{1} q_{3} + q_{2} q_{4}) P_{2} + (q_{1}^{2} + q_{2}^{2}) P_{1}}{2 r q_{1}},$$

$$(5)$$

siendo las restricciones, precisamente las condiciones de compatibilidad del sistema, las siguientes:

$$X_4 = P_4 q_1 - P_3 q_2 + P_2 q_3 - P_1 q_4 = 0,$$

$$X_5 = P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 + P_4 q_4 - 2 P_5 r = 0.$$
(6)

Como se observa, las expresiones anteriores (5) de los antiguos momentos en función de las nuevas coordenadas y nuevos momentos resultan relativamente simples y, además, las condiciones de compatibilidad (6), coinciden con las obtenidas por Ferrer [7].

3 Ecuaciones del Movimiento y su Tratamiento Numérico

En primer lugar, el nuevo hamiltoniano se obtiene sin más que sustituir las expresiones de las antiguas coordenadas (1) y momentos (5) en el hamiltoniano antiguo. Por ejemplo, para el problema kepleriano en el espacio

$$H = \frac{1}{2} \left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \right) - \frac{\mu}{r},$$

resulta la nueva expresión:

$$H = \frac{1}{8} \frac{(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) q_1^2 + (P_3 q_2 - P_2 q_3 + P_1 q_4)^2}{8 q_1^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) r^2} - \frac{\mu}{r}.$$

Las ecuaciones canónicas del movimiento, al existir restricciones, ya no serán las clásicas

$$\dot{\mathbf{P}} = -H_{\mathbf{Q}}, \qquad \dot{\mathbf{Q}} = H_{\mathbf{P}},$$

donde $\mathbf Q$ and $\mathbf P$ representan coordenadas y momentos canónicos conjugados, sino que habrán de ser formuladas en la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{P}} = -H_{\mathbf{Q}} - \mathbf{g}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) \lambda,$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = H_{\mathbf{P}},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0},$$
(7)

donde la función $\mathbf{g}(\mathbf{Q})$ tiene como componentes las restricciones existentes entre las coordenadas \mathbf{Q} y λ es un vector de σ componentes, tantas como restricciones.

Para el caso que estamos estudiando, problema orbital, $\sigma=2$ y, por tanto, λ es un vector de \mathbb{R}^2 . Este vector puede ser obtenido derivando dos veces con respecto al tiempo la función vectorial \mathbf{g} de las restricciones en (7). Así, llamando $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial}{\partial q} \mathbf{g}(\mathbf{Q})$, se obtiene:

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}) H_{\mathbf{P}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial q} (\mathbf{G}(\mathbf{Q}) H_{\mathbf{P}}) H_{\mathbf{P}} - \mathbf{G}(\mathbf{Q}) H_{\mathbf{P}\mathbf{P}} (H_{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q})^T \lambda) = 0.$$
(8)

Por lo tanto, si la matriz

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}) H_{\mathbf{PP}} \mathbf{G}(\mathbf{Q})^T$$

es regular, el vector λ puede ser obtenido a partir de la (8) como una función $\lambda = \lambda$ (**P**, **Q**).

Sustituyendo este resultado en las ecuaciones (7) surge una ecuación diferencial para las variables (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) sobre la variedad

$$\mathcal{M} = \{ (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{Q}) = 0, \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) H_{\mathbf{P}} = 0 \}, \tag{9}$$

que es reversible si se cumple que $H(-\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, lo cual es satisfecho en el caso que nos ocupa.

Se puede demostrar [8] que el flujo del sistema (8) es una transformación simpléctica sobre la variedad \mathcal{M} .

4 Propagación Numérica de Sistemas con Restricciones

El sistema (8) a resolver compone un sistema de ecuaciones algebraico—diferencial. Para resolverlo podrían utilizarse técnicas clásicas, como la reducción de índices; sin embargo, la reducción de índices no es compatible con la propagación simpléctica. Por eso, diferentes extensiones o modificaciones de los métodos simplécticos han sido propuestas para integrar sistemas hamiltonianos con restricciones. Básicamente, estas modificaciones integran momentos y coordenadas y después realizan una proyección adecuada sobre la variedad \mathcal{M} . También se pueden obtener integradores simplécticos de orden alto, de otro modo, mediante el uso de métodos Runge—Kutta particionados (PRK); esto fue propuesto por Leimkuhler [12] y Jay [10], quienes aconsejan la utilización de pares compuestos por un método Runge—Kutta de tipo Lobatto IIIA junto con otro de tipo Lobatto IIIB para la propagación de problemas de este tipo.

Como todo método Runge-Kutta particionado, los métodos Lobatto IIIA-IIIB pueden ser expresados en la forma siguiente:

$$q_1 = q_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \quad p_1 = p_0 + h \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i l_i,$$

donde

$$k_i = H_{\mathbf{P}}(P_i, Q_i), \quad l_i = -H_{\mathbf{Q}} - \mathbf{g}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) \lambda,$$

y las etapas intermedias deben estar dadas por

$$Q_i = q_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j, \quad P_i = p_0 + h \sum_{j=1}^{s} \hat{a}_{ij} l_j.$$

Estos médodos son simplécticos puesto que cumplen las condiciones de simplecticidad siguientes:

$$b_i = \hat{b}_i$$
, para $i = 1, ..., 2$, y

$$b_i \hat{a}_{ij} + \hat{b}_j a_{ji} - b_i \hat{b}_j = 0$$
 para $i, j = 1, ..., s$.

Recordemos que los métodos de Lobatto IIIA de s etapas son métodos de colocación que usan como nodos c_i , i = 1, ..., s, los ceros de los polinomios

$$\frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}} \left(x^{s-1} \left(x - 1 \right)^{s-1} \right),\,$$

y son equivalentes a métodos Runge-Kutta de s etapas cuyos coeficientes estén determinados por las siguientes condiciones:

$$C(s): \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \quad k = 1, ..., s, \forall i$$

$$B(s): \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, ..., s.$$

Por contra, los métodos de Lobatto IIIB de s etapas son métodos de colocación discontinua que usan los mismos nodos que los métodos Lobatto IIIA, y son equivalentes a métodos Runge-Kutta de s etapas cuyos coeficientes estén determinados por las siguientes condiciones:

$$c_1 = 0$$
, $c_s = 1$, $a_{i1} = b_1$, $a_{is} = 0$, para $i = 1, ..., s$, $C(s-2)$ y $B(s-2)$ y $C(s)$ y $B(s)$.

Utilizando las mencionadas condiciones y con la ayuda de un procesador simbólico, nosotros hemos obtenido, entre otros, el par Lobatto IIIA-IIIB con s=5 etapas siguiente:

0	0	0	0	0	0
$7 - \sqrt{21}$	$119 + 3\sqrt{21}$	$343 - 9\sqrt{21}$	$8(-49 + 12\sqrt{21})$	$343 - 69\sqrt{21}$	$3(-7+\sqrt{21})$
14	1960	2520	2205	2520	1960
1	13	$7(56+15\sqrt{21})$	8	$7(-56 + 15\sqrt{21})$	3
$\overline{2}$	320	2880	45	2880	320
$7 + \sqrt{21}$	$119 - 3\sqrt{21}$	$343 + 69\sqrt{21}$	$8(49 + 12\sqrt{21})$	$343 + 9\sqrt{21}$	$3(7+\sqrt{21})$
14	1960	2520	2205	2520	1960
1	1	49	16	49	1
1	20	180	45	180	20
	1	49	16	49	1
	20	180	45	180	20

Lobatto IIIA, s = 5.

Lobatto IIIB, s = 5.

5 Algunos Resultados Numéricos

Los métodos PRK que estamos proponiendo son implícitos; esto significa que en cada iteración un sistema de ecuaciones no lineales debe ser resuelto; por ello, el proceso de iniciación es muy importante. El más sencillo de los procesos de iniciación utilizados [8] es el de iteración funcional, aunque últimamente se han propuesto varios otros que lo mejoran sensiblemente. Por ejemplo, Laburta [11, 2] construye valores de partida mucho más aproximados, para el método de Runge–Kutta–Gauss, con la ayuda de unas pocas evaluaciones de función. Muy recientemente, Higueras y Roldán [9] han propuesto un algoritmo de partida para los métodos Lobatto IIIA-IIIB que no hemos tenido tiempo de utilizar.

Observando la tabla de Butcher de coeficientes de los métodos Lobatto IIIA-IIIB, vemos que la primera fila del Lobatto IIIA y la última columna del Lobatto IIIB tienen

todos sus elementos nulos; esto hace que algunas etapas sean explícitas y, por lo tanto, se reduzca el número de evaluaciones de función.

Nosotros hemos implementado el par Lobatto IIIA-IIIB (LABs, abreviadamente) de s etapas y orden $p=2\,s-2$, con varios valores de s, teniendo en cuenta el comentario anterior y considerando una adaptación del algoritmo de partida de Laburta [11], para el problema kepleriano puro con excentricidad e=0.6.

Hemos comparado el método LABs, con s=4,5 con el método Runge–Kutta–Gauss (Gs, abreviadamente) con s=2,4,6 etapas.

En la tabla 1, podemos ver que el número de evaluaciones de función para el método LABs con s etapas está entre el Gs-1 y el Gs, aunque más próximo a Gs-1 que a Gs, es decir, el método LABs es menos costoso que el Gs equivalente.

	h	Num. pasos	N. eval. func.
G2	0.10	62	627
G2 LAB4 G4 LAB5 G6	0.10	62	733
G4	0.10	62	883
LAB5	0.10	62	947
G6	0.10	62	1059

Tabla 1: Número de evaluaciones de función después de dos revoluciones.

En la figura 1, aparece el error en energía después de 200 revoluciones para los pasos h=0.5,0.1,0.05,0.01,0.005 y los métodos G2, LAB4 y G4. Se puede observar que el error para el método LAB4 está comprendido entre los correspondientes a G2 y G4, como es lógico, ya que el orden de Gs es $p=2\,s$ mientras que $p=2\,s-2$ para los métodos LABs. Nótese que el error para LAB4 es más próximo al de G4 a medida que el paso h decrece, es decir, LAB4 es más eficiente, en proporción, que el G4.

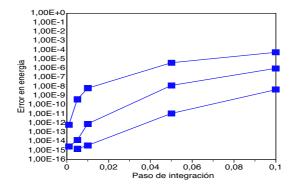


Figura 1: G2, LAB4, G4 (de arriba a abajo). Error en energía después de 200 revoluciones.

En la figura 2, aparece el error relativo en distancia radial después de 200 revoluciones para los pasos h=0.5,0.1,0.05,0.01,0.005 y los métodos G2, LAB4 y G4. Se puede

observar un comportamiento del todo similar al observado con el error en energía.

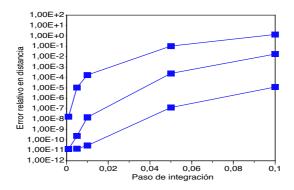


Figura 2: G2, LAB4, G4 (de arriba a abajo). Error relativo en distancia radial después de 200 revoluciones.

6 Conclusiones

Se ha construido un conjunto de variables canónicas redundantes para problemas orbitales compuesto por las cuatro componentes del cuaternio que define la rotación instantánea al sistema de referencia ideal. Se han formulado las ecuaciones canónicas del movimiento como un sistema algebraico—diferencial, siendo la parte algebraica la correspondiente a las restricciones. Para resolver este sistema, es decir, para propagar numéricamente las órbitas, se han seguido las recomendaciones al uso, considerando los métodos Runge—Kutta particionados Lobatto IIIA—Lobatto IIIB. Han sido obtenidos los primeros resultados para el problema kepleriano que ponen de manifiesto la mayor eficiencia de los métodos PRK Lobatto IIIA—IIIB frente a los más clásicos métodos de Runge—Kutta—Gauss.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto #BFM2003-02137 del Ministerio Ciencia y Tecnología.

Referencias

- [1] Broucke, R., Lass, H. and Ananda, M.: 1971, 'Redundant variables in celestial mechanics', *Astronomy and Astrophysics* 13, 390–398.
- [2] Calvo, M., Laburta, M. P. and Montijano, J. I.: 2003, 'Starting algorithms for Gauss Runge-Kutta methods for Hamiltonian systems', *Computers and Mathematics with Applications* **45**, 401–410.

- [3] Cid, R.: 1979, Curso de Mecánica Celeste, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza.
- [4] Cid, R. and Sansaturio, M. E.: 1988, 'Motion of rigid bodies in a set of redundant variables', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **42**, 263–277.
- [5] Ferrándiz, J. M.: 1988, 'A general canonical transformation increasing the number of variables with application to the two-body problem', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 41, 343–357.
- [6] Ferrándiz, J. M. and Sansaturio, M. E.: 1994, 'Extended canonical transformations with redundant variables: Hamiltonian and Lagrangian formulations and degeneration', Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik 45, 458–477.
- [7] Ferrer, S. and Pérez, J. M.: 2002, 'Extensiones canónicas y sistemas de variables redundantes', *Métodos de Dinámica Orbital y Rotacional*. Eds. S. Ferrer, T. L. Moratalla and A. Vigueras, Universidad de Murcia, 31–38.
- [8] Hairer, E., Lubich, C. and Wanner, G.: 2002, Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for ODE, Springer Verlag, Berlin.
- [9] Higueras, I. and Roldán, T.: 2004, 'Starting algorithms for partitioned Runge-Kutta methods: the pair Lobatto IIIA-IIIB', Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza vol. 25. Eds. J. Palacián and P. Yanguas, Prensas Universitarias Zaragoza, 149–158.
- [10] Jay, L.: 1996, 'Symplectic partitioned Runge-Kutta methods for constrained Hamiltonian systems', SIAM Journal on Numerical Analysis 33, 368–387.
- [11] Laburta, M.P.: 1998, 'Construction of starting algorithms for the RK-Gauss methods', Journal of Computational and Applied Mathematics 90, 239–261.
- [12] Leimkuhler, B. and Skeel, R. D.: 1994, 'Symplectic numerical integrators in constrained Hamiltonian systems', *Journal of Computational Physics* **112**, 117–125.
- [13] Palacios, M. and Calvo, C.: 1996, 'Ideal frames and regularization in numerical orbit computation', *The Journal of the Astronautical Sciences* 44, 63–77.
- [14] Pascal, M.: 1981, 'A note on the correspondence between Mathieu's transformations and redundant variables in Lagrangian mechanics', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **24**, 53–61.