

Modelo zonal para órbitas de satélites en torno a Marte

A. Abad[†], J. F. San Juan[‡] y S. Serrano[†]

[†] Grupo de Mecánica Espacial.

Universidad de Zaragoza.

50009 Zaragoza, Spain.

[‡] Departamento de Matemáticas y Computación.

Universidad de La Rioja.

26004 Logroño, Spain.

Resumen

El diseño de las actuales y futuras misiones a Marte requiere el estudio de distintos tipos de órbitas que pueden ser empleadas en función del propósito científico que se persiga. Para su análisis, así como para su posterior control, es necesario disponer, entre otras herramientas, de teorías analíticas que describan, con precisión, el movimiento orbital en torno a Marte.

En el presente trabajo abordamos la construcción de varias teorías analíticas que describen el movimiento de un satélite orbitando en torno a Marte perturbado por los armónicos zonales J_2, \dots, J_6 . Para ello se han aplicado dos transformaciones de Lie, las eliminaciones de la paralaje y del perigeo, y finalmente el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky que completa la integración del problema.

Estas teorías han sido aplicadas a condiciones iniciales que determinan órbitas de baja altitud. Para estos valores hemos obtenido, con una teoría de tercer orden, un error máximo en distancia de 400 metros en un mes, en el peor de los casos.

Palabras clave y expresiones: Satélites artificiales, órbitas marcianas, teorías analíticas.

MSC: 70F15, 70K65, 70K70.

1 Introducción

Marte es uno de los principales objetivos de la comunidad aeroespacial. Desde 1965, cuando la Mariner 4 realizó el primer vuelo con éxito sobre Marte, el hombre ha soñado con la conquista de este planeta. La determinación precisa del campo gravitatorio, el

estudio de la topografía, el análisis de la estructura atmosférica, etc., dependen de las misiones que se puedan realizar a este planeta. Actualmente, dos satélites, el Mars Global Surveyor y la Mars Odyssey, están proporcionando numerosos datos científicos sobre el planeta, y otros como la nave Europea Mars Express se les unirá en breve.

El objetivo final que se persigue, el envío de misiones tripuladas a Marte, obliga a seleccionar órbitas con una determinación precisa [6]. Estas órbitas, que serán recorridas durante un periodo de tiempo entre uno y dos meses, servirán de soporte vital para la tripulación que descienda al planeta y finalmente, como punto de partida para el viaje de regreso a la Tierra. Por ello su preciso conocimiento es muy importante en la planificación de la misión.

El interés del Centre National D'Études Spatiales (CNES, France) en esta clase de misiones, junto con la experiencia del Grupo de Mecánica Espacial (GME) de la Universidad de Zaragoza en la construcción de teorías analíticas de satélites artificiales terrestres, nos llevó a colaborar en la obtención de una teoría analítica para un modelo zonal hasta el grado seis. El requisito que debía cumplir el modelo es que el error máximo en distancia no exceda un kilómetro en el transcurso de treinta días. Además el modelo debía ser válido para el rango de condiciones iniciales incluidas en la tabla 1:

a (km)	e	i	ω	Ω	l
3700	0.0001	40°	0°	20°	0°
4350	0.01	45°			
5000	0.1	50°			
	0.15				

Tabla 1: Condiciones iniciales para satélites en torno a Marte.

La aplicación eficiente de las técnicas de integración de problemas perturbados exige la correcta ordenación asintótica de los términos del hamiltoniano del problema (ver [15]). Teniendo en cuenta esta premisa se realiza, en primer lugar, un estudio de la magnitud relativa de cada término del potencial marciano que permite ordenar el hamiltoniano en la forma adecuada.

La integración del problema se ha realizado mediante la aplicación sucesiva de dos transformaciones de Lie, clásicas en el movimiento orbital: las bien conocidas eliminación

de la paralaje [5] y eliminación del perigeo [3]. La aplicación de estas dos transformaciones reduce el problema a un grado de libertad, y éste puede ser expresado, después del adecuado cambio de variables, como un oscilador armónico perturbado. El método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky [4, 8] permite integrar totalmente el problema y completar el modelo.

Los valores numéricos del potencial marciano han sido tomados del Goddard Mars Model 2B (GMM-2B), que es un modelo de orden y grado 80 obtenido a partir del seguimiento del Mars Global Surveyor desde Octubre del año 1997 hasta Febrero del año 2000 (ver [9]).

La aplicación del software ATESAT, [1, 13], para la generación automática de teorías analíticas del movimiento de un satélite artificial, nos ha permitido obtener los modelos de orden dos y tres aplicando los métodos antes descritos. De la aplicación de estos modelos al conjunto de elementos orbitales de la tabla 1 se deduce que el modelo de orden dos no cumple los requerimientos de error deseados, pues éste llega hasta los 7 kilómetros en algún caso. Sin embargo, el modelo de orden tres nos da un error siempre menor que 400 metros y, en algunos casos del orden de los 10 metros.

2 Ordenación del Hamiltoniano

El modelo de potencial considerado es un modelo zonal de grado seis, por lo que el hamiltoniano se escribirá como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \sum_{n=2}^6 \frac{\mu}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n J_n P_n(\text{sen } i \text{ sen } \theta). \quad (1)$$

Para poder aplicar el método de Lie-Deprit, es necesario expresar dicho hamiltoniano como una serie de potencias en función de un pequeño parámetro ϵ . Con objeto de obtener la ordenación adecuada, debemos obtener el valor máximo, en valor absoluto, de cada una de las expresiones que forman \mathcal{H} , es por ello que definimos (ver [15])

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K^\circ &= |\mathcal{H}_K|, \\ \mathcal{H}_{J_n}^\circ &= \frac{\mu \alpha^n}{a^{n+1} (1-e)^{n+1}} p_n(i) |J_n|, \end{aligned}$$

con $p_n(i)$ definida de la siguiente forma:

$$p_n(i) = \begin{cases} |P_n(\text{sen } i)|, & \text{si } \text{sen } i \in \bigcup_{j=1+2m-n}^m [x_j^*, x_{j+1}], \\ |P_n(x_k)|, & \text{si } \text{sen } i \in (x_k, x_k^*), \text{ con } k = 1, \dots, m, \end{cases}$$

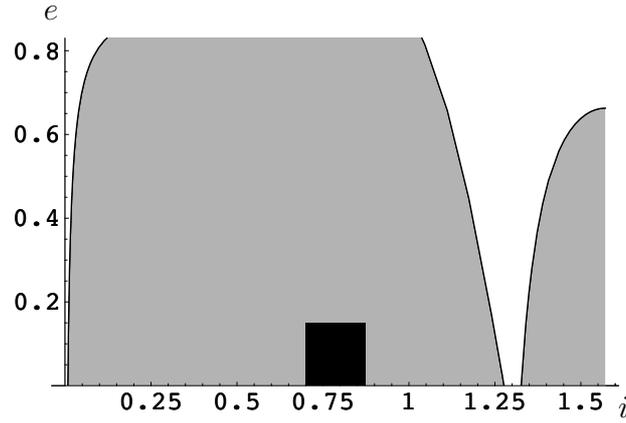


Figura 1: División del espacio de fases para el caso de Marte.

donde $m = \lfloor n/2 \rfloor$ y $x_j^* > x_j \geq 0$ tales que $P'_n(x_j) = 0$ y $|P_n(x_j^*)| = |P_n(x_j)|$ para $j = 1, \dots, m$; $x_{m+1} = 1$ y $x_0^* = 0$.

De esta manera, teniendo en cuenta que el término de mayor magnitud es el kepleriano, y el siguiente el generado por el achatamiento marciano, consideraremos como valor del pequeño parámetro,

$$\epsilon = \frac{\mathcal{H}_{J_2}^\circ}{\mathcal{H}_K^\circ} = \frac{2\alpha^2}{a^2(1-e)^3} p_2(i) |J_2|.$$

Siguiendo las ideas de Segel [14] y Meyer [10], al término factorizado por J_n le corresponde aparecer a orden j si satisface la condición

$$K\epsilon^{j+1} \leq \frac{\mathcal{H}_{J_n}^\circ}{\mathcal{H}_K^\circ} \leq K\epsilon^j,$$

donde K es una constante positiva. Teniendo en cuenta las propiedades de la función logaritmo, la condición anterior puede expresarse también como

$$j - \delta \leq \log_\epsilon \frac{\mathcal{H}_{J_n}^\circ}{\mathcal{H}_K^\circ} \leq j + 1 - \delta,$$

donde $\delta = -\log_\epsilon K$.

Con estas condiciones, hemos realizado el estudio de los órdenes adecuados para cada término del potencial, evidentemente, el término kepleriano aparecerá a orden cero, mientras que el factorizado por J_2 lo hará a primer orden, en cuanto al resto, la región gris de la figura 1 se corresponde con la zona en la cual todos los términos factorizados por J_3 hasta J_6 se sitúan a segundo orden.

La parte en negro de la figura corresponde a la región del espacio de las fases para la que queremos obtener el modelo orbital, por lo que se hace evidente que el hamiltoniano puede expresarse en este caso en la forma

$$\mathcal{H} = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n, \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}, \\ \mathcal{H}_1 &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 J_2^* P_2(s \operatorname{sen} \theta), \\ \mathcal{H}_2 &= \sum_{n=3}^6 \frac{\mu}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n J_n^* P_n(s \operatorname{sen} \theta), \\ \mathcal{H}_k &= 0, \quad k \geq 3, \end{aligned} \quad (3)$$

siendo $J_2^* = J_2/\epsilon$, $J_n^* = 2J_n/\epsilon^2$, mientras que s representa el seno de la inclinación.

3 Teoría Analítica

La integración se realiza comenzando por la simplificación clásica del hamiltoniano del satélite consistente en la eliminación de la paralaje y del perigeo por medio de dos transformaciones de Lie sucesivas. Con objeto de conseguir una integración en forma cerrada y evitar las singularidades en la inclinación y la excentricidad se ha evitado el uso de la normalización de Delaunay y se ha sustituido por el método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM) [2] que ha sido sistematizado mediante el uso de transformaciones de Lie no canónicas [12].

3.1 Eliminación de la paralaje

Esta transformación (cuyos detalles pueden verse en [5]) reduce las potencias r^{-n} con $n > 2$ a la forma r^{-2} , a la vez que elimina, formalmente, la variable θ . En realidad no elimina variable alguna, sino que traslada la dependencia de ésta a las variables de estado $C = e \cos g$ y $S = e \operatorname{sen} g$. Unos de los efectos más importantes de esta transformación es la reducción del número de términos que aparecerán en las transformaciones posteriores.

3.2 Eliminación del perigeo

En esta segunda transformación (ver [3]) se elimina totalmente al argumento del perigeo, obteniéndose un intermediario radial de un grado de libertad. Esta transformación se caracteriza, por un lado, por la aparición explícita de la inclinación crítica, singularidad esencial del problema. Por otro lado, la función generatriz de orden n se obtiene en dos partes, la primera al completar el orden n de la transformación, y la segunda en el orden

orden	\mathcal{H}_{ini}	\mathcal{H}_{par}	\mathcal{H}_{per}	\mathcal{W}_{par}	\mathcal{W}_{per}
0	4	4	2	-	-
1	3	2	2	7	24
2	25	53	27	542	125
3	0	117	286	1288	4372

Tabla 2: Número de términos de hamiltonianos y funciones generatrices.

Paralaje	r	θ	ν	R	Θ	N
Directa	363	1057	530	315	494	1
Inversa	363	1059	530	315	494	1

Perigeo	r	θ	ν	R	Θ	N
Directa	2673	5806	2117	2501	2073	1
Inversa	2673	5806	2117	2501	2073	1

Tabla 3: Número de términos de las transformaciones (segundo orden).

siguiente. Por ello una teoría completa de orden n exige llegar en los cálculos hasta el orden $n + 1$, lo que aumenta considerablemente el número de cálculos a realizar.

Las tablas 2, 3 y 4 muestran el número de términos de los hamiltonianos, funciones generatrices y transformaciones directa e inversa, tanto de la eliminación de la paralaje como del perigeo hasta el tercer orden.

3.3 Integración mediante el método KBM

Una vez aplicadas las dos transformaciones anteriores, el Hamiltoniano \mathcal{H} tendrá la forma

Paralaje	r	θ	ν	R	Θ	N
Directa	2056	5000	4738	1988	3057	1
Inversa	2052	4981	4610	1989	3034	1

Perigeo	r	θ	ν	R	Θ	N
Directa	83410	155376	81893	80156	66322	1
Inversa	83294	154769	81435	79915	66322	1

Tabla 4: Número de términos de las transformaciones (tercer orden).

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(r, \dot{r}, \dot{\theta}, R, \Theta, N),$$

lo que demuestra que los momentos Θ y N tienen un valor constante y por tanto θ y ν se obtienen mediante dos cuadraturas.

Combinando las dos primeras ecuaciones de Hamilton que nos dan la variación de r y R con respecto al tiempo obtendremos una ecuación diferencial de segundo orden. Si aplicamos a esta ecuación el cambio de (r, t) a (u, f) definido por las expresiones

$$u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{\Theta^2}, \quad r^2 \frac{df}{dt} = \Theta,$$

obtenemos una ecuación de la forma

$$\frac{d^2 u}{df^2} + \omega^2 u = F(u, v; \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{n,0}(u, v), \quad F_{0,0}(u, v) = 0, \quad v = \frac{du}{df}, \quad (4)$$

que corresponde a un oscilador armónico perturbado.

El método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM), que puede verse en detalle en [4, 8], demuestra que la solución de la ecuación (4) se puede expresar a través de un desarrollo asintótico en la forma

$$u = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} u_n(\delta, \psi), \quad u_0 = \delta \cos \psi, \quad (5)$$

donde cada $u_n(\delta, \psi)$ es una función 2π -periódica en ψ , y la variación de δ y ψ con respecto al tiempo viene dada por

$$\dot{\delta} = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} A_n(\delta), \quad \dot{\psi} = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} B_n(\delta), \quad A_0 = 0, \quad B_0 = \omega. \quad (6)$$

Las funciones A_n, B_n se obtendrán a partir de las relaciones

$$A_n = -\frac{s_1(U_n)}{2\omega}, \quad B_n = -\frac{c_1(U_n)}{2\omega\delta}, \quad (7)$$

mientras que las funciones u_n vienen dadas por un desarrollo de Fourier cuyos coeficientes son

$$c_0(u_n) = \frac{c_0(U_n)}{\omega^2}, \quad c_j(u_n) = \frac{c_j(U_n)}{\omega^2(1-j^2)}, \quad s_j(u_n) = \frac{s_j(U_n)}{\omega^2(1-j^2)}, \quad j \geq 2, \quad (8)$$

donde $c_j(f)$ y $s_j(f)$ representan respectivamente los coeficientes de $\cos j\psi$ y $\sin j\psi$ en el desarrollo en serie de Fourier de $f(\psi)$.

Para completar el método, necesitamos obtener los valores de u, v a partir de los de δ, ψ en el instante inicial. Para ello debemos invertir las series correspondientes a u y v . El algoritmo de inversión de transformaciones de Lie no puede ser aplicado directamente puesto que el orden cero de las expresiones no son las nuevas variables sino funciones de éstas. Para aplicar el algoritmo de inversión, se definen C y S como $C = \delta \cos \psi$ y $S = \delta \sin \psi$, de tal forma que, combinando las propiedades de los polinomios de Chebyshev¹ junto con las expresiones de $\delta, \cos \psi$ y $\sin \psi$ en función de C y S , se obtiene que

$$\cos n\psi = T_n\left(\frac{C\omega}{\sqrt{\omega^2 C^2 + S^2}}\right), \quad \sin n\psi = \frac{-S}{\sqrt{\omega^2 C^2 + S^2}} U_{n-1}\left(\frac{C\omega}{\sqrt{\omega^2 C^2 + S^2}}\right).$$

Aplicando estas relaciones obtenemos finalmente

$$u = C + \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} u_n(C, S), \quad v = S + \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} v_n(C, S),$$

expresión a la que puede ser aplicado el algoritmo de inversión, obteniendo las expresiones de C, S y en consecuencia, δ, ψ en función de u, v .

Nuestro problema queda ahora prácticamente integrado, sin embargo, todavía nos falta deshacer el cambio de variables y tiempo que hemos realizado para alcanzar la ecuación del oscilador. Para ello, tendremos en cuenta la relación existente entre los dos tiempos t y f

$$n_f \Theta dt = r^2 df. \quad (9)$$

Podemos aplicar, ahora, un cambio idéntico al de la transformación de la anomalía verdadera a la anomalía excéntrica en el problema de dos cuerpos no perturbado

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E}, \quad \cos f = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E},$$

donde f y E representan ahora las anomalías generalizadas. De ese cambio, se obtiene fácilmente

$$\frac{p}{1+e \cos f} = a(1-e \cos E), \quad df = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE.$$

El cambio anterior nos permite integrar (9), obteniéndose la llamada ecuación de Kepler generalizada en la forma

$$n(t-T) = E - e \sin E + \sum_{k>0} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathcal{F}_k(E, f),$$

que, como puede observarse, depende simultáneamente de las dos anomalías E y f .

¹ $\cos n\psi = T_n(\cos \psi), \quad \sin n\psi = \sin \psi U_{n-1}(\cos \psi).$

4 Resultados Numéricos

Para el análisis de las órbitas de satélites marcianos hemos creado tres teorías diferentes: Z6PPKB₂, Z6PPKB₃, Z6PPKB₃* [11]. El subíndice indica el orden de la teoría. Las dos teorías de tercer orden difieren en la forma en que han sido generadas. En el caso Z6PPKB₃* se ha generado usando el valor numérico de los coeficientes del potencial, mientras que en los otros dos casos se ha usado la expresión simbólica y sólo en el momento de calcular efemérides se ha sustituido ésta por su valor numérico.

En la tabla 5 se muestra el tamaño del programa de evaluación generado en los tres modelos diferentes, así como el tiempo de cálculo de la posición del satélite para cada instante de tiempo.

Modelo	Tamaño (unidades)	Tiempo (punto \times segundo)
Z6PPKB ₂	10656	0.127
Z6PPKB ₃	90378	1.758
Z6PPKB ₃ *	35698	1.448

Tabla 5: 1 unidad = 512-bytes. UltraSPARC I a 167 MHz.

La precisión obtenida con las teorías Z6PPKB₃, Z6PPKB₃* es la misma, pero, como puede observarse, hay un ahorro considerable en el tamaño del programa generado para el modelo Z6PPKB₃* frente al del modelo Z6PPKB₃, además de un ahorro en tiempo de ejecución más notable cuanto mayor sea el número de puntos a evaluar, aunque, evidentemente, el segundo modelo nos permitiría modificar el valor de los coeficientes del potencial en el caso de ser necesario. De hecho, esta misma teoría es igualmente válida para el caso terrestre sin más que cambiar el fichero con los coeficientes del potencial de Marte por los de la Tierra.

El estudio del error numérico fue realizado comparando los resultados de los modelos con una integración numérica obtenida mediante un método numérico de integración Runge-Kutta de orden ocho y trece etapas [7].

Las tablas 6 y 7 muestran el error máximo, en kilómetros, cometido a lo largo de 30 días en las teorías de segundo y tercer orden.

Como se podía esperar, los errores son menores para el modelo a tercer orden, consiguiéndose para dicho modelo una precisión superior a la requerida por el CNES, ya que el error, a lo largo de los 30 días, se mantiene por debajo de los 400 metros en el peor de los casos y llegando en algún caso a estar por debajo de los 10 metros.

a	i	e			
		0.0001	0.01	0.1	0.15
3700	40	3.274	3.323	3.992	4.517
3700	45	4.662	4.681	5.161	5.745
3700	50	6.389	6.368	6.691	7.282
4350	40	1.708	1.706	1.788	1.924
4350	45	2.375	2.363	2.411	2.572
4350	50	2.956	2.943	3.036	3.253
5000	40	0.905	0.900	0.908	0.952
5000	45	1.220	1.214	1.234	1.301
5000	50	1.453	1.453	1.530	1.641

Tabla 6: Error en distancia, medido en kilómetros, obtenido con la teoría de segundo orden.

a	i	e			
		0.0001	0.01	0.1	0.15
3700	40	0.048	0.049	0.054	0.058
3700	45	0.065	0.063	0.049	0.040
3700	50	0.123	0.127	0.207	0.305
4350	40	0.022	0.022	0.024	0.025
4350	45	0.031	0.030	0.020	0.012
4350	50	0.046	0.047	0.074	0.109
5000	40	0.011	0.011	0.011	0.011
5000	45	0.014	0.014	0.010	0.008
5000	50	0.017	0.018	0.028	0.042

Tabla 7: Error en distancia, medido en kilómetros, obtenido con la teoría de tercer orden.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia (Proyectos DGICYT # BFM2002-03157 y DGICYT # BFM2003-02137).

Referencias

- [1] Abad, A and San Juan, J. F.: 1995, ‘ATESAT: software tool for obtaining automatically ephemeris from analytical simplifications’, *Conseil de L’Europe. Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie. Luxembourg*. Eds. A. Elipe and P. Paquet **10**, 93–98.
- [2] Abad, A., San Juan, J. F. and Serrano, S.: 2001, ‘Método KBM versus normalización de Delaunay’, *Monografías del Seminario Matemático “García de Galdeano”* **21**, 125–130.
- [3] Alfriend, K. T. and Coffey, S. L.: 1984, ‘Elimination of the perigee in satellite problem’, *Celestial Mechanics* **32**, 163–172.
- [4] Bogoliubov, N. N. and Mitropolsky, Y. A.: 1961, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations*, Gordon and Breach, New York.
- [5] Deprit, A.: 1981, ‘The elimination of the parallax in satellite theory’, *Celestial Mechanics* **24**, 111–153.
- [6] Desai, P. N., Braun, R. D. and Powell, R. W.: 1992, *Aspects of Parking Orbit Selection in a Manned Mars Mission*, NASA TP-3256.
- [7] Dormand, J. R. and Prince, P. J.: 1989, ‘Practical Runge–Kutta processes’, *SIAM Journal on Scientific Computing* **10**, 977–989.
- [8] Krylov, N. and Bogoliubov, N. N.: 1947, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New York.
- [9] Lemoine, F. G *et al.*: 2001, ‘An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor’, *Journal of Geophysical Research* **106**, 23359–23376.
- [10] Meyer, K. R.: 1984, ‘Scaling Hamiltonian systems’, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **15**, 877–889.
- [11] San Juan, J. F. and Serrano, S.: 2000, ‘Application of the Z6PPKB ATESAT-model to compute the orbit of an artificial satellite around Mars’, *Report DTS/MPI/MS/MN/2000-057*, CNES, Toulouse.

- [12] San Juan, J. F., Abad, A. and Serrano, S.: 2001, ‘Una nueva formulación del método de Krylov–Bogoliubov–Mitropolsky’, *Actas del VII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones*, 264–268.
- [13] San Juan, J. F.: 1996, *Manipulación Algebraica de Series de Poisson. Aplicación a la Teoría del Satélite Artificial*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.
- [14] Segel, L. A: 1972, ‘Simplification and scaling’, *SIAM Review* **14**, 547–571.
- [15] Serrano, S.: 2003, *Teorías Analíticas del Movimiento de un Satélite Artificial Alrededor de un Planeta. Ordenación Asintótica del Potencial en el Espacio Fásico*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.