EDUCACIÓN

Sección a cargo de

María Luz Callejo

El siguiente artículo apareció publicado en el número de julio de 2000 de Gazette des Mathématiciens. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española agradece a la Société Française de Mathématiques el permiso para la presente publicación.

Se acompaña de un amplio comentario de la profesora Nuria Climent, de la Universidad de Huelva.

Los estudios de doctorado de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad

por

Guy Brousseau y Gilles Christol

Desde el momento en que se inicia una reflexión sobre la evolución de la enseñanza de las matemáticas desde la secundaria hasta la universidad, es natural preguntarse lo que la didáctica de las matemáticas puede aportar a ese debate. Además, la reforma de los estudios de doctorado obliga a repensar la formación por y para la investigación. Desde estas dos perspectivas, entre muchas otras, no se puede emprender una reflexión seria sin precisar las relaciones entre la didáctica y las matemáticas. Esta cuestión fundamental es ineludible. Aparece bajo diversas formas dependiendo del punto de vista que se adopte: ¿La didáctica de las matemáticas forma parte de las ciencias matemáticas? ¿Los didactas de las matemáticas son primero matemáticos o son primero didactas? ¿Qué sección del Consejo Nacional de Universidades juzga la didáctica de las matemáticas¹?...

Los autores de este texto coincidieron en una reunión del consejo científico de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) y aunque sus relaciones con la didáctica son diferentes, han podido llegar a un cierto número de puntos de acuerdo básicos sobre las cuestiones

¹Nota de la T.: En la traducción al castellano hemos evitado algunas referencias a instituciones o titulaciones propias del sistema universitario francés, tal como aparecen en el original, y las hemos sustituido por la equivalente en España. En España la pregunta sería, ¿dónde se encuadran los proyectos de investigación en Didáctica de las Matemáticas dentro de la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva?

que se acaban de esbozar. El texto que sigue presenta esta posición común. Habrá alcanzado su finalidad si suscita reacciones.

¿QUÉ ENTENDEMOS POR DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS?

El término didáctica es muy antiguo. Su significado ha sido diferente según las épocas y las instituciones que lo han utilizado. Actualmente suele designar tanto el arte de enseñar como los estudios científicos de este arte. La didáctica de las matemáticas debería por tanto englobar el conjunto de las investigaciones sobre la *difusión de los conocimientos matemáticos*.

Una parte de estas investigaciones se ajustan a enfoques muy diversos que llamaremos “clásicos”: psicológicos, sociológicos, lingüísticos, pedagógicos, etc. Quienes hacen estas investigaciones se pueden denominar didactas de las matemáticas, pero deben adoptar o mantener el nombre de la disciplina desde la que se aproximan que garantiza la validez de su trabajo. Así se puede hablar de un psicólogo didacta de las matemáticas, que puede ser un antiguo matemático que ha cambiado de disciplina.

Existen sin embargo problemas o temas en los que las competencias clásicas son insuficientes. Hay quienes querrían que estos problemas dependieran de una disciplina general, la didáctica, rama de las ciencias de la educación, de la que la didáctica de las matemáticas no sería más que una especialidad estudiada por los *didactas de las matemáticas*. Pero este esquema no corresponde ni a los resultados actuales de la mayor parte de las investigaciones relativas a la difusión de los conocimientos matemáticos, ni a la importancia de las posiciones sobre lo que la difusión de estos conocimientos representa para las matemáticas.

La producción de cada nuevo conocimiento matemático pone de relieve procesos específicos originales. Sucede lo mismo con su aprendizaje y su enseñanza. La comprensión de los mecanismos que intervienen muestra una actividad matemática original y necesita investigaciones en que las matemáticas juegan un papel relevante, no sólo como objeto sino también como instrumento de estudio. Estas investigaciones están llamadas a desarrollar un papel importante sobre cómo se organiza la difusión de las matemáticas, en particular en aquellos campos en los que las matemáticas no podrían dar una respuesta. Por estas dos razones, deberían ser realizadas por didactas de las matemáticas bajo la responsabilidad de la comunidad de los matemáticos. Como es tradición en los países francófonos desde hace tres décadas, reservamos el término “didáctica de las matemáticas” para estas investigaciones y los conocimientos que producen.

En la didáctica de las matemáticas tal y como la concebimos, se puede distinguir tres grandes tipos de actividades.

LA “DIDÁCTICA FUNDAMENTAL DE LAS MATEMÁTICAS”

Es el estudio de los fenómenos generales ligados a la difusión de los conocimientos matemáticos e independientes de los temas particulares. Avanza

poniendo de relieve conceptos, teorías y modelos y diseñando experiencias que permiten validarlos. Se constata que los conceptos y teorías desarrollados hasta hoy son específicos de las matemáticas. No se trata de un a priori ni se opone a la utilización de conceptos más generales o procedentes de otros dominios (didácticos, epistemológicos,...) si la experiencia demuestra que son pertinentes para las matemáticas.

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN SENTIDO ESTRICTO

Estudia los problemas didácticos particulares que se plantean relativos a una teoría o a un concepto matemático (didáctica del análisis, didáctica de la continuidad uniforme,...). En cada uno de estos temas se tiene en cuenta su historia, su desarrollo, la manera en que se enseña, su uso tanto por parte de los alumnos como de los matemáticos, las dificultades que plantea su asimilación, el interés que presenta en el aprendizaje de las matemáticas. Este estudio utiliza naturalmente los instrumentos creados por la didáctica fundamental, pero necesita adaptarlos a los problemas específicos. Su método exige una confrontación permanente entre las teorías y la experiencia.

LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Es la didáctica aplicada de las matemáticas: con la ayuda de los instrumentos de la didáctica fundamental y de los resultados de la didáctica propiamente dicha, propone “ayudas” para la enseñanza. Es la parte más visible para los no especialistas pero, contrariamente a lo que querrían algunos, la didáctica no determina la ingeniería o la práctica docente del mismo modo que la termodinámica no determina la construcción de los motores.

Este estudio no puede hacer abstracción de los proyectos didácticos de la sociedad (programas, horarios, demanda de otras disciplinas,...). Estos dependen de numerosos factores (históricos, sociológicos,...) y es necesariamente pluridisciplinar.

Para ser más concretos, a continuación enumeramos algunos de los dominios que son propios de la competencia del didacta de la matemática:

1. Describir y analizar cómo los diversos usuarios, particularmente los profesores y los alumnos, adaptan los conocimientos matemáticos y la utilización que hacen de ellos. Identificar las causas de estas adaptaciones o “transposiciones” y las dificultades que provocan.
2. Buscar las condiciones de la difusión de los conocimientos específicos en cada dominio de las matemáticas (geometría elemental, álgebra lineal,...). En particular, imaginar un universo de situaciones, de problemas y de ejercicios en el que estos conocimientos encuentran su función y su significado.
3. Reorganizar ciertas teorías matemáticas para que lleguen a ser compatibles con las tensiones relacionadas con su difusión para unos destinatarios

particulares (por ejemplo, cómo abordar la enseñanza de la integración a los futuros físicos o ingenieros que necesitan utilizar el teorema de Lebesgue, cuando hay poco tiempo para dedicar a esta teoría).

Dejamos a juicio del lector decidir si la didáctica de las matemáticas, tal como acabamos de definirla, constituye un simple campo científico o un objeto científico consistente.

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y MATEMÁTICAS

La didáctica de las matemáticas tal como la concebimos, no puede reducirse a una simple aplicación de disciplinas como la psicología, la sociología, la pedagogía, la lingüística o la historia, aunque deba relacionarse con ellas, entre otras razones porque su práctica exige una sólida formación matemática que permita establecer la distancia necesaria con las diferentes teorías estudiadas.

Recíprocamente, cualquier persona que explique matemáticas, desde la enseñanza primaria hasta los seminarios de investigación, hace, más o menos conscientemente, didáctica de las matemáticas. Pero esta práctica espontánea se desarrolla sin recapacitar sobre ella, sin instrumentos para reconocer la evolución y el progreso. Lo propio del didacta de las matemáticas es emprender una reflexión sistemática sobre estos problemas enriqueciéndolos al situarlos en un marco más conceptual. Además no puede trabajar sin contactos y lazos institucionales con los matemáticos y los profesores de matemáticas. Por una parte, la ingeniería matemática se consolida y se enriquece a través del intercambio permanente con los enseñantes. Por otra, un contacto con las matemáticas vivas permite a la didáctica renovarse constantemente y evitar una deriva escolástica.

De estas dos características se deduce que la didáctica de las matemáticas debe considerarse como una rama de las “ciencias matemáticas”.

Por ello pensamos que la decisión de los matemáticos, hace treinta años, de incorporar a los didactas entre ellos, contrariamente a lo que se ha hecho en física o en química por ejemplo, ha sido buena. Sugerimos pues continuar por este camino. En realidad, la situación actual de los estudios de doctorado (y en particular de los DEA²) de didáctica de las matemáticas en las universidades francesas está poco clara. En Francia estos estudios se crearon en 1975, primero en los IREM y en una Unidad de Formación e Investigación (UFR) de didáctica de las disciplinas, después como parte de programas de doctorado de “matemáticas e informática” y de “psicología y ciencias de la información”. En sus inicios estos estudios los dirigían matemáticos didactas. Sus programas suelen abarcar los tres grandes ejes de la didáctica de las matemáticas que hemos descrito más arriba.

²Diploma de Profundización de Estudios, equivalente a los cursos de doctorado.

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DE MAESTROS

Las instituciones universitarias que tienen a cargo la formación de maestros necesitan enseñantes que hayan reflexionado sobre los problemas de didáctica de las matemáticas y puedan no sólo formar a los futuros profesores de matemáticas en su disciplina sino también poner a su disposición una cierta ingeniería matemática (conjunto de situaciones o ejercicios que ilustran la utilización de cada noción del programa) y prepararles para las dificultades que van a encontrar (desarrollo de los temas, adaptación de las matemáticas a los alumnos o a las instituciones que les acogen, límite de las capacidades de aprendizaje,...). Los matemáticos didactas están naturalmente bien preparados para este aprendizaje.

La idea de que la didáctica pueda aportar algo a los enseñantes experimentados, en especial universitarios, se comparte mucho menos. La experiencia de un profesor sobre lo que “se digiere bien” es ciertamente fundamental, pero descansa sobre intuiciones nunca confrontadas con métodos críticos. Parece sin embargo que una reflexión didáctica es mucho más provechosa si se dirige a personas que han tenido ya una experiencia de enseñanza y si se enfoca más como una actividad de formación permanente que de formación inicial.

Se debe constatar, o quizás lamentar, que las repercusiones de las investigaciones didácticas son escasas a nivel universitario, aunque haya algún ejemplo aislado positivo.

Así la didáctica se encuentra muy a menudo reducida a la “formación de maestros”. Esta situación se ha visto agravada estos últimos años por la existencia de puestos en las Escuelas de Magisterio (IUFM), por la disminución del número de plazas de matemáticas y por la influencia de estos dos factores sobre la gestión de los puestos a nivel local e incluso a nivel nacional. El peligro extremo es hacer de las Escuelas de Magisterio el gueto de los didactas y separar estos últimos de las universidades. Otro peligro sería privar a los matemáticos de una ayuda importante para ejercer sus responsabilidades en el dominio de la formación de maestros³. El remedio a este efecto perverso no es fácil de encontrar sin una voluntad de cooperación.

LOS ESTUDIOS DE DOCTORADO EN DIDÁCTICA

Los estudios de doctorado deben responder a dos tipos de demandas:

1. La de una formación a través de la investigación. En didáctica, procede fundamentalmente de profesores que desean mejorar su práctica pedagógica. Se trata pues de un tipo de formación continua a título personal no reconocida profesionalmente.

³La situación en España es similar: en los planes de estudio de diferentes centros para la formación inicial de los futuros maestros se contempla en algunas especialidades créditos de Didáctica de las Matemáticas; en unas pocas facultades de Matemáticas hay alguna materia relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas.

2. La de una formación en investigación. Esta se traduce en la redacción de una tesis con vistas a una carrera universitaria.

En didáctica de las matemáticas la ruptura entre los estudios de doctorado y la formación anterior es aún mayor que en otros casos y plantea pues problemas específicos. En efecto, el joven matemático estudiante de didáctica debe iniciarse en conocimientos y tecnologías que están a menudo muy alejadas de los que ha adquirido en el curso de sus estudios. Además, los que ya tienen una cierta experiencia docente deben cuestionar y, si es preciso, renunciar a considerar sus intuiciones en tanto que profesores como verdades establecidas.

A pesar de estas particularidades, es deseable que la organización de los estudios de doctorado de didáctica de las matemáticas se parezca tanto como sea posible a los otros programas. Para evitar que no se transformen exclusivamente en una formación continua para profesores, habría que reflexionar sobre la creación de nuevos títulos que respondan más específicamente a esta demanda.

Un asunto importante: si la llamada reforma “3/5/8”, esto es, los planes europeos de unificar las titulaciones universitarias, se implanta efectivamente, es recomendable que haya un título de Máster en Didáctica de las Matemáticas.

CUÁLES SON LAS SALIDAS PROFESIONALES

Podemos decir que la formación a través de la investigación en matemáticas se reconoció oficialmente el día en que el contacto con la investigación fue considerado positivo para conseguir un puesto en los cursos de preparación para la universidad. Asimismo, la formación mediante la investigación en didáctica de las matemáticas no será reconocida hasta el día en que la obtención de un DEA de didáctica sea tenida en cuenta en la carrera de los profesores para conseguir determinados puestos.

Para los estudiantes de formación inicial, la cuestión de las salidas es crucial: ¿para qué sirven los doctorados en didáctica de las matemáticas? Como siempre, su salida natural es hacer carrera en la universidad. La cuestión es pues el lugar de las didácticas en las universidades.

Teniendo en cuenta nuestra definición de didáctica, el didacta de la matemática debe ser un matemático especialista en didáctica, como otros lo son en análisis o en teoría de números. Esto implica que junto a su trabajo como investigador, debe poder:

1. Impartir enseñanza de primer y segundo ciclo.
2. Beneficiar a los futuros profesores de su doble competencia (matemático-didáctico) tanto para la preparación a las oposiciones, como para el año de formación profesional. Pero este tipo de enseñanza no debe quedar reservada a los didactas y los didactas no deben dedicarse a ello exclusivamente.
3. Enseñar su especialidad en los terceros ciclos (formación de los futuros didactas) o en otros.

El nivel de exigencia que se presenta aquí es alto: no hay que olvidar que en el curso de su formación de tercer ciclo, los futuros didactas deben adquirir, además de su formación específica, una cultura general en diversos dominios (psicología, historia,...). Es sin duda el precio que hay que pagar para que la didáctica tenga un lugar en el seno de las ciencias matemáticas. Sin embargo, el problema de saber si es posible formar doctores con estas exigencias y respetando las normas en uso en las otras ramas de las matemáticas queda planteado.

CONCLUSIÓN

Los principios generales que aquí hemos desarrollado nos parecen irrenunciables so pena de ver la didáctica de las matemáticas desaparecer en una didáctica de las disciplinas muy de moda hoy pero cuyo interés para los profesores de matemáticas no es evidente.

En particular sería especialmente deplorable ver empobrecerse las redes que la didáctica de las matemáticas ha sabido crear entre los matemáticos de todos los niveles. Constituye una riqueza para nuestra disciplina y son a la vez una especialidad de los matemáticos y de Francia. Entendemos que el papel de la didáctica no puede limitarse a este aspecto social ni a un estudio abstracto de las condiciones de difusión de las matemáticas. Para ser completamente reconocida, deberá mostrar su eficacia para un amplio espectro de profesores de todos los niveles educativos y esto no será posible más que a través del desarrollo de la ingeniería didáctica.

Guy Brousseau
IUFM de Aquitania

Gilles Christol
Universidad Paris 6

Traducción: M^a Luz Callejo. IEPS. Madrid

La didáctica de la matemática: su carácter interdisciplinar y su relación con la práctica docente

Comentarios en torno al artículo Los estudios de doctorado de didáctica de las matemáticas en la universidad (Guy Brousseau y Gilles Christol)

por

Nuria Climent

Con el objetivo de plantear la situación de los estudios doctorales en didáctica de la matemática, los autores de este artículo presentan su perspectiva respecto de la propia definición y fundamentación de la disciplina. Esta perspectiva es, desde mi punto de vista, provocadora, tanto para los distintos colectivos interesados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (la sociedad en general pero, en mayor grado, los profesores, los matemáticos, los responsables de la política educativa...), como para el propio colectivo de los didactas de la matemática (que después se intentará definir). En lo que sigue, analizaré las posiciones defendidas por estos autores, contrastándolas con la de otros investigadores en didáctica de la matemática (lo que ayuda a captar la dimensión de lo que aquí se propone), y planteando mi punto de vista desde mi experiencia en la didáctica de la matemática. Relego, por tanto, a un segundo plano, la discusión sobre los estudios doctorales, del que plantearé sólo algunas cuestiones al final de mis comentarios.

Las dos características que considero claves para la definición de la didáctica de la matemática vienen dadas por su relación con, por un lado, diversas disciplinas académicas “ya consolidadas”, y, por otro, con la práctica docente. La primera hace alusión al carácter interdisciplinar que muchos investigadores en didáctica de la matemática le atribuyen y es quizás, una de las cuestiones centrales, y más polémicas, de la visión de Brousseau y Christol. La segunda está más implícita que la anterior en este artículo. Junto a estas cuestiones conviene aclarar la delimitación de la didáctica de la matemática con relación a la educación matemática. Estos tres temas serán los organizadores de los comentarios que siguen.

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

¿Todo lo relacionado directamente con la enseñanza y aprendizaje de la matemática (al menos; si no en un sentido más amplio, con la difusión de los conocimientos matemáticos) constituye la didáctica de la matemática? ¿Se reserva este término para la investigación sobre estos procesos? Esta distinción se corresponde en parte con la que algunos autores (sobre todo europeos) establecen entre educación matemática y didáctica de la matemática. En el universo de las personas profesionalmente implicadas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas podemos encontrar a profesores, escritores de

libros de texto y otro material de apoyo, diseñadores de currículo, formadores de profesores, investigadores, editores... Estos papeles no tienen por qué ser excluyentes (de hecho no suelen serlo). ¿Todas estas actividades son parte de la didáctica de la matemática? Hay cierto grado de consenso entre los investigadores en didáctica de la matemática en denominar a todo este universo *educación matemática*, y diferenciar la *didáctica de la matemática* como una parte de éste, la de la disciplina de estudio, de investigación sobre este universo⁴.

Me parece clarificadora la distinción que en este sentido hacen Rico y Sierra (2000): la educación matemática es considerada como *un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general, actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tienen lugar con carácter intencional* (Rico, Sierra, y Castro, 1999) (p. 79). En la educación matemática así concebida se diferencian tres campos de actuación (p. 81): como *conjunto de conocimientos, artes, destrezas, lenguajes, convenciones, actitudes y valores, centrados en las matemáticas y que se transmiten por medio del sistema escolar; como actividad social que tiene lugar en unas instituciones determinadas y que es llevada a cabo por unos profesionales cualificados; y como disciplina científica*⁵, que tiene como objeto de estudio los dos campos anteriores y su propia fundamentación teórica. Este último campo de la educación matemática es lo que constituye la didáctica de la matemática⁶.

Una primera característica, por tanto, que asocio a la didáctica de la matemática es la de disciplina de investigación. En este punto, coincido con Brousseau y Christol [*reservamos el término “didáctica de la matemática” para estas investigaciones y los conocimientos que producen*].

EL CARÁCTER INTERDISCIPLINAR DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

La didáctica de la matemática se asocia al estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La mayoría de las veces, se tiene en mente el proceso institucional que se lleva a cabo dentro del marco escolar. La perspectiva que se nos presenta en este artículo amplía este marco al

⁴Este consenso es menos generalizado entre los investigadores anglosajones, para los que el término *didactic* tiene connotaciones negativas (se asocia con “enseñanza didáctica”, como un estilo de enseñanza formal, no interactivo), por lo que usan *mathematics education* tanto para el universo al que antes referido como para la disciplina que indaga sobre éste.

⁵No entraré tampoco, al igual que los autores del artículo, en la discusión de si la didáctica de la matemática se puede considerar como disciplina científica. Los temas que se abordan en este artículo son lo suficientemente complejos como para no añadir más elementos a la discusión.

⁶Asimismo, en los profesionales de la educación matemática se diferencia entre los técnicos, los formadores de profesores y los investigadores; estos últimos se ocupan de la didáctica de la matemática (prefiero llamarles investigadores en didáctica de la matemática, aunque pueda ser reiterativo, a didactas de la matemática).

más general de difusión del conocimiento matemático⁷. Esta ampliación parece adecuada por cuanto que, aunque el sistema escolar constituye el ámbito establecido socialmente para la difusión de ese conocimiento y, por eso mismo, en el que se tiene más posibilidad de incidir, no deben desdeñarse otras vías de difusión de este conocimiento, que pueden ser complementarias y jugar papeles importantes. De este modo se reconocen campos de estudio y aplicación que permanecen casi inexplorados por la didáctica de la matemática (a diferencia de otras didácticas específicas, como la didáctica de las ciencias, que tiene, por ejemplo, un amplio terreno de estudio en la educación ambiental, que trasciende el ámbito escolar⁸).

Se restrinja el ámbito de estudio de la didáctica de la matemática al sistema escolar o se contemple el más general de la difusión de conocimientos, una característica de los procesos que se consideran es la diversidad de factores que intervienen, que constituyen, por separado, el objeto de estudio de distintas disciplinas. Intervienen, entre otros, las características propias de la matemática como objeto de estudio (relacionado con la matemática como disciplina, la historia de la matemática y la epistemología de la matemática), los procesos de pensamiento de las personas implicadas (relacionado con la psicología), la interacción social de éstos y las estructuras organizativas que se establecen (sociología y antropología), los modos de comunicación que se establecen en esta interacción (semiótica), y las características de los procesos de enseñanza (pedagogía). ¿Constituye la didáctica de la matemática la intersección de estas disciplinas, en lo relativo a situaciones de difusión de conocimientos matemáticos, siendo una ciencia aplicada de las otras? ¿Es la especificación de alguna de ellas? ¿Tiene un estatus independiente de las disciplinas anteriores?

En la relación de la didáctica de la matemática con las disciplinas antes referidas dos son las que han asumido históricamente un papel predominante: la matemática y la psicología (véase la historia de la investigación en didáctica

⁷En Azcárate (1997) se explica esta perspectiva, sobre la base de la definición progresiva de didáctica de la matemática que se ofrece en Brousseau (1994). En primera instancia, se presenta como la *ciencia de las condiciones específicas de la adquisición provocada de conocimientos matemáticos* (Brousseau, 1994, p. 1). Se objeta a ésta que excluye tanto la adquisición espontánea como la intervención intencionada que no produce aprendizaje, por lo que se formula una segunda definición: *ciencia de las condiciones específicas de la difusión de los conocimientos matemáticos* (Brousseau, 1994, p. 2).

⁸Parte de la restricción de la didáctica de la matemática al ámbito escolar se debe al escaso valor cultural que se le reconoce a la matemática. Así como la literatura y la producción artística de cada época constituye un elemento de reconocido valor para la comprensión del hombre de esa época (prodigándose, por ejemplo, exposiciones que las recrean), ¿por qué no su producción matemática? ¿Quizás porque necesita de un conocimiento de la materia? Igualmente se necesita conocimiento artístico o literario para apreciar las otras producciones. ¿Por qué en los museos de la ciencia hay poca cabida para “experimentos matemáticos”? (que pueden consistir en la modelización matemática de fenómenos reales), ¿es porque no es fácil encontrar ejemplos “asequibles” al gran público?

de la matemática que se presenta, tanto a nivel internacional como nacional, en Kilpatrick, Rico y Sierra, 1992).

La influencia de la psicología educativa y, concretamente, el enfoque cognitivo es latente tanto en el marco teórico como en el metodológico de muchos de los trabajos que se producen actualmente dentro de la didáctica de la matemática⁹. Sin embargo, la consideración de la didáctica de la matemática como un subconjunto de la psicología (o la didáctica general, u otra de las disciplinas educativas con las que está relacionada) es fácil de invalidar. El estudio de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje (o de difusión) del conocimiento matemático necesita de la consideración de la matemática y su naturaleza en el primer plano de la investigación, y esta especificación enriquece el enfoque, transformándolo en métodos y resultados que no siempre pertenecen al conjunto inicial. Esta postura parece clara en la comunidad de investigadores en didáctica de la matemática.

Respecto de la relación con la matemática, las posturas difieren más, representando uno de los extremos la presentada por Brousseau y Christol (y que es compartida por muchos de los investigadores franceses en didáctica de la matemática¹⁰). Los argumentos que mantienen en este artículo para defender la consideración de la didáctica de la matemática como parte de las matemáticas se pueden agrupar en:

- a) los intereses de la matemática (como disciplina científica) en la difusión de los conocimientos matemáticos;
- b) la necesidad de la didáctica de la matemática (y del didacta de la matemática, lo que condiciona cuál debería ser su formación) de partir de una comprensión profunda de la disciplina (tanto para considerar adecuadamente la especificidad del objeto de estudio como por necesidades metodológicas);
- c) la necesidad de que la didáctica de la matemática se mantenga ligada a la evolución de la propia disciplina.

⁹Como algunos autores han hecho notar (Godino, 1991; Lerman, 1998), no es casual que el congreso que anualmente celebra el *International Group of Psychology in Mathematics Education (PME)* sea de los más representativos de la investigación en didáctica de la matemática a nivel internacional. Aunque los trabajos que se presentan a estos congresos recogen la multiplicidad de enfoques (no exclusivamente inspirados en la psicología) que caracteriza la producción actual en didáctica de la matemática, ¿no debería dar cuenta el propio nombre de esta multiplicidad de perspectivas?

¹⁰La posición de los investigadores en didáctica de la matemática ante la dependencia de la matemática, parece muy influida por la tradición en cada país de la implicación de los matemáticos (profesionales) en cuestiones de educación matemática. En el caso de Francia ha habido una intensa implicación, que se mantiene con el trabajo conjunto de matemáticos y didactas de la matemática en los IREM (Artigue, 1998 y Margolinas, 1998 explican claramente esta tradición). No se puede decir lo mismo en nuestro país (salvo excepciones). Aún así, en el caso de Francia, como explica Artigue, ambos colectivos no dejan de tener sus desavenencias

El propio Brousseau (1991) aborda una defensa sistemática de la necesidad de esta dependencia. A las razones anteriores cabe añadir:

- d) algunos de los procesos que se consideran propios de la didáctica de la matemática son comunes a la investigación en matemáticas (como la transposición didáctica¹¹; reorganizar las matemáticas para enseñarlas y para favorecer nuevas investigaciones es una componente esencial de la investigación matemática);
- e) los matemáticos tienen responsabilidad sobre el uso social (y en particular a través de la enseñanza) que se da a los conocimientos que generan; tienen la obligación de realizar la vigilancia epistemológica de su disciplina (sobre todo respecto de la enseñanza obligatoria).

Estas razones podrían clasificarse en: intereses y obligaciones de la matemática respecto de la educación matemática (a) y e)), paralelismo entre la investigación en matemáticas y en didáctica de la matemática (d), y necesidades de la investigación en didáctica de la matemática respecto de la matemática (b) y c)).

De estas tres categorías el argumento para mí más claro (y que comparto) es el de la necesidad de la didáctica de la matemática de considerar el conocimiento matemático como referente básico. ¿Qué puede aportar la didáctica de la matemática al análisis de las situaciones de enseñanza y aprendizaje matemáticos respecto del análisis que se puede realizar desde las ciencias (generales) de la educación? La diferencia y riqueza de este análisis sólo puede residir en considerar el objeto matemático en el foco principal de la investigación (aunque no el único)¹². Para realizar dicho análisis se necesita una comprensión profunda de la materia y su naturaleza, comprensión que se amplía como resultado del análisis mismo.

La manera en que se considera que la matemática es el foco principal de la investigación tiene diversas interpretaciones entre las diferentes escuelas de investigación en didáctica de la matemática. En Gascón (1998) se presenta una reconstrucción de la génesis de la “didáctica fundamental” (programa de investigación iniciado por Brousseau con el nombre de “epistemología experimental”, que recoge en gran medida la perspectiva que de la didáctica

¹¹O adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado (Godino, 1991, p. 136).

¹²Veo cierto paralelismo con el papel del área de Didáctica de la Matemática en la formación inicial de maestros. A veces la balanza se ha inclinado hacia las aportaciones de la psicopedagogía general, quizás como reacción natural al enfoque que durante décadas ha estado primando (casi exclusivamente contenidos matemáticos). Ese cambio de rumbo puede vaciar de contenido la aportación de la didáctica de la matemática a la formación del maestro. Si en lugar de partir del análisis del contenido (sin perder la perspectiva de su enseñanza), se hace una especificación de las teorías psicopedagógicas generales al caso particular del aprendizaje del contenido matemático, suavizando el análisis de ese contenido, temo que se aporte poco a dichas teorías. El problema no es de intereses de competencia, sino de riqueza.

de la matemática se mantiene en el artículo que comentamos). Según este autor, para la didáctica fundamental, el objeto primario de estudio es la actividad matemática escolar. Frente a ésta, los enfoques que denomina clásicos de la didáctica de la matemática¹³, consideran como objetos primarios de estudio “enseñar matemáticas” y “aprender matemáticas”, considerados como cuestiones transparentes y no cuestionables, o bien como nociones construidas en otras disciplinas. La didáctica fundamental amplía de este modo la problemática didáctica clásica, puesto que permite reformular sus problemas y plantear y abordar muchos más. Además, pone de manifiesto que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial, inaugurándose una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos (el propio conocimiento matemático) (Gascón, 1998, p. 19).

La didáctica de la matemática así entendida (desde la perspectiva de la didáctica fundamental) sería un subconjunto de la didáctica de la matemática como la hemos definido (campo de investigación de y sobre la educación matemática). Aunque este enfoque me parece interesante y aporta resultados valiosos y diferenciados de los de otros enfoques (ver, por ejemplo, el análisis que Gascón, 1997, hace sobre el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a la Universidad), no comparto que otras muchas investigaciones que tienen más influencia de la psicología pero que se distinguen por utilizar la matemática y su naturaleza como instrumento fundamental de estudio (por ejemplo, los estudios de concepciones de los profesores sobre la matemática o los de definición e imágenes de los alumnos sobre conceptos matemáticos, en la línea de Tall y Vinner, 1981) sean tachadas de reducirse a lo psicológico. Además, hay problemas que son abordados desde las denominadas perspectivas clásicas (como la formación del profesor y su desarrollo profesional) en cuya reformulación tendría que avanzar la didáctica fundamental, mostrando la potencialidad que se atribuye¹⁴. La teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997) pa-

¹³El enfoque clásico presupone que la “*actividad cognitiva del sujeto*” -*el que aprende y/o el que enseña*- es el factor central para explicar los hechos didácticos considerando, además, que dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de la relación didáctica y de las matemáticas (Ruiz, Orús, Godino y Gascón, 2001). En la práctica la interrelación que se establece entre la didáctica de la matemática y la psicología, según Gascón (1998), *comporta una subordinación y casi una reducción de lo didáctico a lo psicológico*. (p. 13). [...]. Resulta que, *en el marco del enfoque clásico de la didáctica de la matemática, la teoría del aprendizaje (también del aprendizaje matemático) se debe fundamentar, en última instancia, en las ciencias cognitivas*. (p. 14). La didáctica fundamental, por su parte, busca el desarrollo de una fundamentación propia y original de la didáctica de la matemática, no prestada de otras disciplinas.

¹⁴En el dominio del desarrollo profesional o el más restringido de las concepciones del profesor, o del conocimiento profesional, podría plantearse una discusión paralela a la de si la didáctica de la matemática es parte de la matemática o concreción de disciplinas educativas generales. Un caso paradigmático (y claro) es el de las concepciones. Si suponemos que las concepciones sobre la enseñanza determinan en gran medida las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, estamos apoyando la visión de la concreción. Numerosas investigaciones han mostrado lo errado de esta suposición. Más bien parece

rece más apropiada para el estudio de situaciones de enseñanza-aprendizaje de tópicos matemáticos concretos (lo que Brousseau y Christol denominan “didáctica de las matemáticas en sentido estricto”) que para la diversidad de problemáticas que abordan las investigaciones en didáctica de la matemática.

En cuanto a los intereses y obligaciones de la matemática (como disciplina) respecto de la difusión de la matemática, pueden ser entendidos desde una perspectiva que no comparto. Coincido con los autores del artículo que se comenta en reconocer el interés de la matemática en la buena difusión de sus conocimientos (entre otros motivos por lo que esto repercute en la formación de futuros matemáticos y la valoración social que se tenga de la disciplina). De este hecho, sin embargo, no se deriva una posible cercanía entre la matemática y la didáctica de la matemática. El interés de la matemática en su enseñanza no parece acompañarse de una comprensión e interés de los matemáticos hacia la didáctica de la matemática.

En el mismo sentido, ¿cómo debe interpretarse la afirmación de Brousseau y Christol de que las investigaciones que indagan sobre la comprensión de los mecanismos puestos en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas *deberían ser realizadas por didactas de las matemáticas bajo la responsabilidad de la comunidad de matemáticos*? Podría entenderse que la producción de la didáctica de la matemática debe estar supeditada al juicio de los matemáticos, que serían, en último término, los valedores de “la verdadera matemática”. Esta interpretación, referida a la vigilancia epistemológica de los matemáticos hacia la matemática que se enseña en la escuela, parece ser la que comparte el matemático israelí Abraham Amitsur en las siguientes declaraciones:

[A la pregunta de “¿quién debería jugar el papel principal en la planificación del currículum de matemáticas? ¿Los matemáticos? ¿Los profesores? ¿Los investigadores (en didáctica de la matemática)?]: *Los matemáticos, no hay duda de eso. [...] Hay lugar para los investigadores [en la construcción del currículo matemático], con tal de que ellos sirvan sólo como asesores. Si yo quiero construir mi propio negocio, tomaré consultores para que me asesoren en diferentes materias; sin embargo, el consultor no me dirá lo que tengo que hacer, y todas las decisiones serán mías.* (Sfard, 1998, pp. 453-454¹⁵).

que ocurra al contrario, o sea, que en todo caso las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las distintas materias escolares proporcionan un factor común que es lo que podríamos llamar concepciones sobre la enseñanza. Aunque esta perspectiva peca de simplista, pretende dejar claro que es necesario aplicar una caracterización de la didáctica de la matemática que incluya los dominios mencionados (conocimiento y desarrollo profesional, incluyendo las concepciones del profesor respecto de la enseñanza de las matemáticas).

¹⁵En un estudio reciente del ICMI sobre la educación matemática como dominio de investigación (Sierpinska y Kilpatrick, 1998), en el que se recogen las aportaciones de investigadores en didáctica de la matemática de diversos países (y varios matemáticos) en torno a un documento de discusión (Balacheff; Howson; Sfard; Steinbring; Kilpatrick y Sierpinska, en Sierpinska y Kilpatrick, 1998, pp. 3-8) que plantea las cuestiones: *¿cuál es el objeto específico de estudio de la educación matemática?, ¿cuáles son los fines de la investigación en educa-*

La responsabilidad de los matemáticos hacia la enseñanza de la matemática, así entendida, más bien parece derecho sobre. Desde mi punto de vista, la matemática como disciplina tiene sentido en la determinación del currículo matemático de la escuela¹⁶, por ejemplo, pero no como único referente ni como el de mayor peso. Parece razonable que la didáctica de la matemática y las ciencias que se ocupan de las cuestiones generales de enseñanza y aprendizaje tengan mucho que decir¹⁷, así como los propios profesores de matemáticas. La estrecha relación de la didáctica de la matemática con la matemática es deseable, pero sin jerarquías. Debería pasar por el reconocimiento mutuo de matemáticos y didactas de la matemática, con el conocimiento y respeto de las diferencias de sus labores profesionales, y la conciencia de que comparten un vínculo especial con la misma disciplina y el interés por la mejora de su enseñanza. La pregunta es si la diferencia de concepciones sobre la propia matemática posibilita este entendimiento (Sfard, 1998) y si los matemáticos están preparados para aceptar este reto (Mura, 1998)¹⁸. Esta diferencia de concepciones se debe en parte a las diferencias metodológicas en el trabajo de investigación de matemáticos y didactas de la matemática. El modo de obtener y validar sus resultados, el grado de generalidad y certidumbre que se espera de ellos y el propio objeto de estudio difieren notablemente (aunque se consideren como objetos de estudio de la didáctica de la matemática la génesis y el significado de los conceptos matemáticos, irreductiblemente matemáticos, como afirma Brousseau -Sierpínska y Kilpatric, 1998, p. 535-, no son éstos el objeto de estudio de los matemáticos; aunque este autor lo define como el punto de encuentro con la investigación en matemáticas). En muchas de estas

ción matemática?, ¿cuáles son las cuestiones de investigación o problemáticas específicas de la investigación en educación matemática?, ¿cuáles son los resultados de la investigación en educación matemática?, y ¿qué criterios deberían usarse para evaluar los resultados de la investigación en educación matemática?

El ICMI (*International Commission on Mathematics Instruction*) forma parte de la Unión Matemática Internacional (IMU), constituyendo el principal colectivo que recoge la influencia de la matemática en la didáctica de la matemática.

La visión de Amitsur hacia la enseñanza de la matemática y la didáctica de la matemática se presenta como ejemplo paradigmático de la del colectivo de matemáticos.

¹⁶Algunos defienden que constituida la didáctica de la matemática, la matemática pierde su responsabilidad sobre la enseñanza, pero no parece adecuado, entre otras razones para que la escuela no se mantenga ajena a la evolución de la propia matemática.

¹⁷Tanto de los peligros de un currículo determinado exclusivamente desde la matemática como de uno desde las ciencias generales de la educación tenemos ejemplos claros no muy lejanos (la reforma promovida por el movimiento de la "Matemática Moderna" y el actual curriculum de formación del maestro de Primaria).

¹⁸La mayoría de los investigadores de didáctica de la matemática de nuestro país son matemáticos de formación (o físicos, u otros licenciados en los que la matemática juega un papel importante), por lo que ven clara esta relación. Por parte de los (investigadores) matemáticos, me da la impresión de que institucionalmente y en círculos minoritarios se reconoce esta estrecha vinculación. Ejemplos de esto son esta misma sección de esta revista. Sin embargo, tengo mis dudas sobre el colectivo en general.

cuestiones (sobre todo en lo relativo a la naturaleza de los resultados y sus vías de validación) hay muchas más similitudes con otras disciplinas relativas a la educación que a las matemáticas. Por tanto, el paralelismo entre la investigación en matemáticas y en didáctica de la matemática señalado por Brousseau y Christol (d) no parece tan evidente (considerando la didáctica de la matemática no restringida sólo a la didáctica fundamental).

La segunda característica que asocio a la didáctica de la matemática es que recibe aportaciones de otras disciplinas, entre ellas la influencia más distintiva es la de la matemática, y tiene entidad propia, no constituyéndose como subconjunto de ninguna de ellas.

LA RELACIÓN DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICA CON LA PRÁCTICA DOCENTE

La finalidad que los investigadores en didáctica de la matemática le atribuyen a ésta, suele ser la comprensión y explicación de la enseñanza y aprendizaje de la matemática (o de los procesos de difusión de los conocimientos matemáticos), por un lado, y la mejora de estos procesos, por otro. Esta doble finalidad para algunos va unida, siendo la segunda el fin último de la primera. Otros enfatizan alguna de las dos finalidades. Esta dualidad representa otra de las tensiones inherentes a la didáctica de la matemática: la tensión investigación-práctica docente¹⁹.

Silver (1997) considera que esta tensión es más importante en la definición de la didáctica de la matemática que la de dependencia-independencia de otras disciplinas. Además, según este autor, la relación con las disciplinas viene determinada en gran parte por cómo se conciba su relación con la práctica. Para algunos investigadores la relación es casi directa. La didáctica de la matemática tiene como objetivo la mejora de la práctica docente y ésta (la práctica) es la arena en la que deben validarse las investigaciones y sus resultados. Los problemas de investigación deben surgir de la práctica y aquella dar respuesta a los que en ésta surgen (recogiendo, entre otros, los problemas que se plantean los profesores), los resultados deben proporcionar respuestas “aplicables”, válidas para la práctica. En cierto modo, el resultado de la investigación se identifica con la teoría para la práctica docente. Este punto de vista parece ser el compartido en gran medida por profesores (Argüello, et al., 1996²⁰) y matemáticos (Amitsur, en Sfard, 1998). Desde esta perspectiva, la

¹⁹En Puig y Calderón (1996) se recogen los trabajos presentados en un seminario organizado por el CIDE sobre *Investigación y didáctica de las matemáticas*, en el que profesores, asesores de CPRs, e investigadores, analizaron, entre otras cuestiones, las relaciones entre investigación y práctica docente.

²⁰Analizan la relación investigación en didáctica de la matemática-práctica docente desde la perspectiva de la práctica. Una de las cuestiones que plantean es: *¿hasta qué punto (la investigación en educación matemática en España) está acercándose en la actualidad al aula como laboratorio en el que se generan y validan las investigaciones y donde se deben aplicar la mayoría de los resultados obtenidos?* (p. 153).

investigación-acción (en la que los profesores se convierten en investigadores de sus aulas) es uno de los máximos exponentes de la buena relación investigación-práctica. Ésta supone un salto cualitativo en la consideración de la investigación para la práctica docente, añadiendo la participación del profesor en la investigación.

Otros interpretan esta relación de manera más compleja. Margolinas (1998), desde la perspectiva de la didáctica fundamental, traza una línea entre la teoría y la práctica que define la relación entre esta última y la investigación. La práctica genera hechos (proposiciones que pueden ser verificadas experimentalmente; por ejemplo, que los alumnos tienen problemas con el concepto de límite, que puede ser verificado con cuestionarios y el análisis estadístico de éstos), que el investigador puede explicar al alumbrarlos con una teoría (convirtiéndolos en fenómenos). No todos los hechos tienen que ser considerados por la investigación. Esto produciría la generación de pequeñas teorías aisladas. Frente a esto, la principal preocupación de la investigación debe ser crear teorías conectadas que constituyan paradigmas didácticos. En el sentido contrario, hay fenómenos que no proceden de hechos de la práctica. La teoría produce proposiciones que al ser constatadas en la práctica (mediante situaciones experimentales) se convierten en fenómenos. En estos experimentos el profesor forma parte del equipo de investigación. Hay tensiones entre ambos colectivos, por su diferencia de intereses. Los profesores buscan innovaciones y los investigadores, corroborar los hechos extraídos de la teoría. Al difundir los resultados de la investigación, los profesores pueden tomar como resultado los propios experimentos (innovaciones), en lugar de los fenómenos o hechos explicados por la teoría y validados por los experimentos. Esta situación del profesor como parte del equipo de investigación es muy diferente de la de la investigación-acción. El profesor participa en la experimentación pero el objetivo es constatar la teoría. De hecho, desde esta perspectiva se mantienen reservas hacia la investigación-acción. Según Balacheff (Sierpiska y Kilpatrick, 1998, p. 537), *tú no puedes ser un profesor-investigador igual que no puedes ser tu propio psicoanalista*. Para Brousseau (1991), el profesor, aun en una situación de investigación experimental, debe actuar bajo la lógica de su papel y estar inmerso en éste, no en la de investigador, en aras de la validez de la propia situación experimental. La investigación-acción parece un concepto inútil técnicamente (en relación con lo anterior) y vacío de contenido teórico. Establece una relación “engañosa” con los docentes, poniéndolos en el mismo estatus que el de los investigadores, tomando su terminología profesional *sin mantener ninguna distancia y sin precauciones* (Brousseau, 1991, p. 15), pareciendo que puede aportar soluciones rápidas y transparentes a los problemas sentidos por los profesores (para solucionar estos problemas los investigadores toman conceptos creados por los profesores, y tras racionalizarlos mínimamente, los devuelven envueltos en un halo de saber sabio; los profesores toman estas soluciones como aplicables a la práctica, al serles familiares). La relación que desde la didáctica fundamental se defiende entre investigación y enseñanza es la de *ciencia-técnica, no la de prescripción-reproducción* (Brousseau, 1991, p. 18). La ingeniería didáctica se fundamenta en los resultados de

la investigación para proponer acciones para la enseñanza (*acción racional sobre el sistema, con base en los conocimientos didácticos establecidos*, Artigue, 1995), actuando en cierto modo de puente entre ambas.

En Godino (1996) se analiza la relación investigación-tecnología (se propone desarrollar materiales y recursos para mejorar la instrucción matemática usando los conocimientos cient)-práctica a través de tres investigaciones. En dos de estas investigaciones se parte de problemas pertinentes para la práctica (que en uno de los casos surge de la práctica propia del investigador como formador), para cuyo estudio (primero como investigación tecnológica) se requiere del desarrollo de cuestiones cada vez más teóricas (mediante el desarrollo de investigaciones científicas). Finalmente, a partir de los resultados de esta investigación se generan productos tecnológicos. La tercera investigación parte directamente de necesidades teóricas. Para este autor, la investigación (científica) está guiada por la teoría y pretende desarrollar teoría. La práctica reflexiva y la tecnología se preocupan de la acción sobre contextos concretos. *El conocimiento científico teórico condiciona el conocimiento tecnológico y el práctico, esto es, desempeña un papel “dominante y de control”*. (p. 135)

Bajo esta diferenciación, la validez de la investigación no se mide con parámetros dados por su aplicación a la práctica. Lo que se le pide a la investigación es responsabilidad sobre la justificación de sus afirmaciones. La teoría que desarrolla la investigación es teoría sobre la enseñanza pero no para la práctica de ésta²¹.

¿Tiene entonces la investigación (en didáctica de la matemática) responsabilidad hacia la mejora de la enseñanza (ya sea por caminos directos o indirectos)? ¿Es un “saber por el deseo de saber”?

Este dilema, que es compartido por las disciplinas relativas a la educación (véase la respuesta que se le da, por ejemplo desde el paradigma crítico, Latorre et al., 1997), no parece ser común a la investigación en matemáticas. En último término, parte de las investigaciones tendrán que ofrecer resultados útiles para algún campo aplicado (para conseguir financiaciones, para preservar la importancia que se le atribuye a la matemática en el progreso humano...), pero gran parte de ellas surgen de las propias problemáticas de las teorías en desarrollo, sin que tengan que preocuparse los investigadores de sus posibles aplicaciones. La investigación (en didáctica de la matemática) busca el desarrollo de teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pero, ¿para qué y para quién? En cuanto al para qué, moralmente no veo más respuesta que para la mejora de la enseñanza, aun en último término. No creo que a cada investigación haya que buscarle su aplicación a la práctica, lo más probable es que no la tenga. Será la integración de las investigaciones la que deberá aportar conocimiento que resulte útil para incidir en la práctica²². Respecto del pa-

²¹Para Puig (1996) la relación investigación/ docencia no coincide con el par teoría/práctica sino con el par *objeto de conocimiento/conocimiento elaborado sobre el objeto*. (p. 108)

²²Coincido con la distinción que hace Ponte (2000, pp. 328-329) entre la *relevancia externa* de la investigación en didáctica de la matemática (que puede incidir sobre la práctica pro-

ra quién, en relación con lo anterior, no creo que tenga que ser directamente para los profesores. El problema es quién y cómo recoge el saber que se va desarrollando como fruto de las investigaciones y elabora materiales de ayuda para los profesores (o utiliza otros cauces para hacerles llegar propuestas de acción basadas en dicho saber). Tomando nota de las diferencias que algunos investigadores han señalado entre el mundo de la investigación y el de la enseñanza (García Cruz, 1996; Ponte, 2000), el lenguaje no debería ser en el que redactamos los informes de investigación, los medios de difusión no deberían ser las revistas de investigación (esos medios de difusión y ese lenguaje debe mantenerse para la difusión en el colectivo de investigadores, necesaria para el desarrollo de la investigación). Ese espacio no está lo suficientemente cubierto en nuestro país. Coincido con García Cruz en que no basta con la labor que realizan los diseñadores de currículos y los escritores de libros de texto (que, por otro lado, deben hacerse eco de los resultados de la investigación en didáctica de la matemática). Tampoco parece que baste con dar prescripciones. Esta labor, en la realidad actual de nuestro país, debería ser asumida por los investigadores y, sobre todo, los formadores de profesores. Estos últimos pueden considerarse como mediadores entre los profesores y los investigadores (Rico y Sierra, 2000). Además, en nuestro país coincide en buena parte el colectivo de investigadores y de formadores de profesores. Esto hace que se encuentren en una situación privilegiada²³. El conjunto de los investigadores debe asumir ese compromiso, junto con los de sus tareas investigadoras, y los cauces de diálogo entre la investigación y las administraciones educativas y sociedades de profesores deben potenciarse (estos cauces tienen que reivindicarse también, aunque no sólo, desde las sociedades de investigadores). ¿Son estos propósitos prescripciones? No las veo como tales porque no son preceptos a observar y guardar por otros, son llamadas de atención para nosotros mismos (investigadores y/o formadores).

De lo anterior, no debe derivarse una valoración de la aportación de la investigación en didáctica de la matemática a la mejora de la práctica por encima de sus posibilidades reales. No podrá resolver todos los problemas de la práctica, ni siquiera buena parte de ellos, y menos a corto plazo (pensemos, por ejemplo, en la investigación en medicina y en su larga tradición, frente a la de la didáctica de la matemática). Tampoco puede (ni debe) incidir directamente (media la propia sociedad).

Aunque se hayan presentado las posturas de investigadores en didáctica de la matemática sobre la relación investigación-enseñanza como antagónicas (relación directa, relación indirecta), esto ha sido por un deseo de mostrar la

fesional -lectiva y no lectiva-, el desarrollo curricular, la formación de profesores, la política educativa, y la comprensión de la sociedad sobre la enseñanza de la matemática y sus problemas) y su relevancia interna, para el propio desarrollo del campo científico.

²³ Como ejemplo de propuestas para la formación de profesores que recogen resultados de la investigación en didáctica de la matemática (en este caso para la formación inicial de maestros de Primaria), puede verse Contreras y Carrillo (2000), en un número anterior de esta misma revista.

controversia de la cuestión. No coincido en que pueda asociarse implicación más directa en la mejora de la práctica con menor teorización o fundamentación de la investigación. La investigación-acción es para mí una vía rica e importante de acercar a los profesores al mundo de la investigación en didáctica de la matemática. No identifico investigación-acción con sólo práctica reflexiva (ni con innovación). Me refiero a una indagación del profesor sobre aspectos de su práctica que le haga buscar referencias en la propia didáctica de la matemática y en otras disciplinas, recoger información sobre el/los problema/s de su práctica que centre/n su investigación de manera rigurosa e interpretarla en función de los referentes teóricos construidos (por su propia reflexión, sobre la base de su experiencia profesional y el conocimiento desarrollado en otras investigaciones). Ésta puede no ser investigación en los mismos términos que la que desarrollan los investigadores, no va dirigida a crear teoría y su fundamentación teórica quizás no sea tan sólida como la de otras investigaciones. El profesor además, actuará en algunos momentos como profesor y en otros como investigador, debiendo concentrarse en ocasiones en su tarea docente, sin interferencias. El tema central no es para mí si merece ser considerada investigación en los mismos términos que la que realizan los investigadores en didáctica de la matemática, sino cuál es su aportación. En este sentido, los beneficios de tales investigaciones en el desarrollo profesional de los profesores implicados me parecen indudables (ver Jaworski, 1999). Estos beneficios son aún mayores si la investigación es colaborativa. Se establecen grupos mixtos de profesores y de investigadores, que llevan a cabo investigaciones a distintos niveles y según sus intereses pero que comparten los beneficios del apoyo del otro grupo (que para ambos es necesario) y un proyecto común que recoge las expectativas de ambos colectivos. En el seno de esta colaboración la investigación-acción tiene un mayor soporte teórico y la investigación propiamente dicha (para desarrollar teoría) puede tomar hechos de la práctica para convertirlos en fenómenos y puede constatar resultados teóricos en la práctica. Estos proyectos de investigación colaborativos suelen transformarse en procesos de investigación/formativos, sobre todo si los investigadores son a su vez formadores de profesores (ver Climent y Carrillo, en prensa). La formación, además, es para ambos colectivos. Éste es otro cauce importante de incidencia de la investigación en didáctica de la matemática en la enseñanza.

Como conclusión de este apartado, decir que la tercera característica que atribuyo a la didáctica de la matemática es que su finalidad es desarrollar conocimiento sobre la difusión de los conocimientos matemáticos, con el fin último de incidir en su mejora. La relación investigación-enseñanza de la matemática no es directa, debiendo asumir los investigadores y formadores de profesores parte de la responsabilidad de integrar el conocimiento que se extrae de las investigaciones en propuestas de acción para la enseñanza de la materia.

CONSIDERACIONES FINALES

Las dos cuestiones principales abordadas (dos últimos epígrafes) no son inconexas. La preocupación por la dependencia de la investigación en didáctica

de la matemática de las disciplinas relativas, puede ser “inversamente proporcional” a la preocupación por su relación con la práctica docente. ¿No debería estar supeditada la discusión sobre las disciplinas a qué herramientas posibilitan, aportando algo a las disciplinas ya existentes, la comprensión (y en último término mejora) de la enseñanza de la materia? Es atractiva la idea de que la didáctica de la matemática se fundamente en sus propios principios teóricos y metodológicos, pero llevar al límite esta pretensión sin considerar lo que otros campos del conocimiento han desarrollado que puede ser de utilidad, ¿no parece más defensivo (respecto de su posición académica) que enriquecedor? ¿Estar abierto a esas aportaciones equivale a ver la didáctica de la matemática como campo de aplicación de otras disciplinas? Por otro lado, ¿aceptar la diversidad de perspectivas e influencias de distintas disciplinas sobre la investigación en didáctica de la matemática significa que la integración de la variedad de resultados de estas investigaciones la debe hacer el profesor?

Espero que lo expuesto en los apartados anteriores muestre mi visión de estas cuestiones. Esta visión no deja de ser borrosa y plantearme dudas en muchos aspectos. Las preguntas abordadas y el conocimiento de la diversidad de perspectivas (a veces enfrentadas) dentro de los investigadores en didáctica de la matemática me han obligado a hacer explícitos presupuestos de los que no era consciente. A su vez, me ha supuesto una llamada de atención a preguntas que debo hacerme en mi propia investigación (¿considera el conocimiento matemático como objeto primario de la investigación?; ¿qué aportaciones toma de otras disciplinas?; Respecto de estas aportaciones, ¿qué garantías tengo de su posible extrapolación a mi estudio?; ¿en qué medida puede contribuir al aumento de la comprensión de los procesos de difusión de conocimiento matemático?; ¿cuál es su relación con la práctica de la enseñanza?; ¿hacia quién va dirigida su difusión?;...)

Finalmente, ¿qué aporta todo lo discutido a la reflexión sobre los cursos de doctorado en didáctica de la matemática? La formación que se aporta en el doctorado debe ser para la investigación. Considerando que la investigación sobre la práctica puede ser una importante vía de formación para los profesores, tiene sentido el planteamiento de los cursos de doctorado como formación por la investigación. Estas dos finalidades no son incompatibles con un mismo planteamiento de la naturaleza de dichos cursos, dado que en ambos casos la formación que se debe ofrecer es sobre la investigación. La incompatibilidad vendría de concebir los cursos de doctorado como formación permanente (no desde la perspectiva de la investigación), cuestión que no se justifica. Surgen al menos dos problemas, de cara a que los profesores se creen falsas expectativas sobre dichos cursos: la casi inexistencia de vías de formación permanente para el profesorado y las expectativas de los profesores hacia la propia didáctica de la matemática. El contraste entre estas expectativas y la realidad de un doctorado encaminado a la formación de investigadores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede alimentar su visión de que la didáctica de la matemática se queda en un plano teórico que no aporta soluciones para la práctica. ¿A quién puede interesar este doctorado? Si pensamos en las salidas profesionales (uno de los aspectos que estos autores abordan), el doctorado

sólo interesa de cara a trabajar en la universidad. Este porcentaje de interesados haría casi inviable los programas de doctorado (como los de cualquier disciplina). Aparte de este colectivo, los posibles interesados en éste serían los profesores/futuros profesores de matemáticas²⁴. ¿Cómo unir entonces la pervivencia de éstos y que no pierdan su identidad (para la investigación)? En los últimos programas de doctorado de didáctica de la matemática de la Universidad de Huelva han coincidido varios profesores/futuros profesores que han sabido vislumbrar la formación para la investigación en didáctica de la matemática como vía para su mejora profesional, a través de la investigación sobre sus intereses docentes (sus alumnos, su práctica...). Éstos, que además han abordado o inician un trabajo de investigación, contemplan satisfechos cómo se cumplen sus expectativas respecto de su formación como profesores. De cara a estos dos colectivos (profesores y futuros profesores) las líneas de investigación que se aborden en los cursos de doctorado deben ser cercanas y de interés para éstos. Les resultará más interesante (de cara a la investigación como vía para el aprendizaje y la mejora profesional) la investigación sobre el pensamiento del estudiante o sobre aspectos de la interacción profesor-alumno, por ejemplo, que la investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional del profesor, que interesa más a los formadores de profesores. Por otro lado, coincido con Brousseau y Christol en que los profesores que busquen formación por otra vía deberían tener a su alcance proyectos de formación permanente que le dieran respuesta (también desde la didáctica de la matemática). Pero ahí debería entrar la Administración educativa. Desde la didáctica de la matemática se debe dar un mensaje claro a los profesores, que les haga ver la potencialidad de la investigación sobre su práctica como vía de formación pero que no les haga confundir el doctorado con formación sobre la práctica docente.

REFERENCIAS

ARGÜELLO, A.; ESTEBAN, F.L. Y DE LA FUENTE, C. (1996). Investigación y práctica: relaciones y futuro. En Puig, L. y Calderón, J. *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: M.E.C (CIDE).

ARTIGUE, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Una empresa docente- Grupo Editorial Iberoamérica.

ARTIGUE, M. (1998). Research in mathematics education through the eyes of mathematicians. En Sierpiska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics Edu-*

²⁴Licenciados en matemáticas o equivalentes (por lo expuesto en lo relativo a la relación investigación en didáctica de la matemática-matemáticas), profesores de matemáticas o interesados en serlo.

cation as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study. London: Kluwer Academic Publishers.

AZCÁRATE, C. (1997). Didáctica de la Matemática como disciplina científica: un punto de vista desde España. En Malara, N. (Ed.) *An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Modena: C.N.R.-M.U.R.-S.T.- University of Modena.*

BROUSSEAU, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda Parte). *Enseñanza de las Ciencias, 9(1), 10-21.*

BROUSSEAU, G. (1994). Perspectives pour la didactique des Mathématiques. En Artigue, M. et al. (Eds.) *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France. Paris: La Pensée Sauvage.*

BROUSSEAU, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathématiques 1970-1990. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Eds. and Trans.). *Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.*

CLIMENT, N. Y CARRILLO, J. (En prensa). Developing and researching professional knowledge with primary teachers. Comunicación presentada al *CERME II, 2001. Mariánské Lázně (República Checa).*

CONTRERAS, L.C. Y CARRILLO, J. (2000). Formación inicial de los maestros y resolución de problemas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 3(3), 515-527.*

GARCÍA CRUZ, J.A. (1996). Investigadores y profesores: dos culturas. En Puig, L. y Calderón, J. *Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Madrid: M.E.C (CIDE).*

GASCÓN, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *SUMA, 26, 11-21.*

GASCÓN, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(1), 7-34.*

GODINO, J.D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de las Matemática. En Gutiérrez, A. (Ed.) *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis.*

GODINO, J.D. (1996). Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza. En Puig, L. y Calderón, J. *Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Madrid: M.E.C (CIDE).*

- JAWORSKI, B. (1999). Teacher education through teachers' investigation into their own Practice. En Krainer, K., Goffree, F. & Berger, P. (eds.) *European research in mathematics education I.III. On research in mathematics teacher education. Osnabrück (Alemania): Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.*
- KILPATRICK, J.; RICO, L. Y SIERRA, M. (1992). *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Síntesis.
- LATORRE, A; DEL RINCÓN, D. Y ARNAL, J. (1997). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Hurtado Ediciones.
- LERMAN, S. (1998). Research on socio-cultural perspectives of mathematics teaching and learning. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study.* London: Kluwer Academic Publishers.
- MARGOLINAS, C. (1998). Relations between the theoretical field and the practical field in mathematics education. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study.* London: Kluwer Academic Publishers.
- MURA, R. (1998). What is mathematics education? A survey of mathematics educators in Canada. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study.* London: Kluwer Academic Publishers.
- PONTE, J.P. (2000). A investigação em didáctica da matemática pode ser (mais) relevante? En Ponte, J.P. & Serrazina, L. *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália. Actas de Escola de Verão, 1999. Secção de Educação e Matemática-Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.*
- PUIG, L. (1996). La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora. En Puig, L. y Calderón, J. *Investigación y Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: M.E.C (CIDE).
- PUIG, L. Y CALDERÓN, J. (1996). Investigación y Didáctica de las Matemáticas. *Madrid: M.E.C (CIDE).*
- RICO, L. Y SIERRA, M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación. En Carrillo, J. y Contreras, L.C. *Matemática española en los albores del siglo XXI.* Huelva: Hergué Editorial.
- RICO, L.; SIERRA, M. Y CASTRO, E. (1999). Didáctica de la matemática. En Rico, L. y Madrid, D. (Eds.) *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares.* Madrid: Editorial Síntesis.

RUIZ, L.; ORÚS, P.; GODINO, J.D. Y GASCÓN, J. (2001). Perspectiva de la investigación del grupo "Didáctica de las matemáticas como disciplina científica". En Contreras, L.C.; Carrillo, J.; Climent, N. y Sierra, M. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.*

SFARD, A. (1998). A mathematician's view of research in mathematics education: An interview with Shimshon A. Amitsur. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study. London: Kluwer Academic Publishers.*

SIERPINSKA, A. Y KILPATRICK, J. (Eds.) (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study. London: Kluwer Academic Publishers.*

SILVER, E.A. (1997). A disputation on a disciplinary dilemma: The tension between Theory and Practice in the Didactics of Mathematics. En Malara, N. (Ed.) *An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Modena: C.N.R.-M.U.R.S.T.- University of Modena.*

TALL, D. Y VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.*

Nuria Climent
Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Huelva
Avda. Fuerzas Armadas, s/n
21071 Huelva
correo electrónico: climent@uhu.es