LA COLUMNA DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta, *alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página[1]) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.*

EN ESTE NÚMERO...

...se incluyen dos colaboraciones externas: una, a cargo de Teresa Gómez Díaz; la otra, realizada conjuntamente por Francisco Santos Leal y Daciana Bochis. Además presentamos a nuestros lectores un breve Editorial, motivado por la reciente aparición del libro de los profesores Roanes "Cálculos Matemáticos por Ordenador con Maple V.5", sobre la necesidad de difundir la existencia y la utilidad de los programas de *cálculo matemático* en los ordenadores personales de tantas personas (alumnos, profesores, ingenieros) del mundo de la educación, la investigación y la técnica que usan, al nivel que sea, distintos aspectos de las matemáticas.

Teresa Gomez-Díaz es una joven española, doctora en matemáticas por la Universidad de Limoges, que se ha incorporado recientemente como ingeniera de sistemas y co-administradora del centro de Cálculo Simbólico del grupo francés MEDICIS (una UMS –unidad mixta de servicios– del CNRS, una especie de centro de recursos de Cálculo Simbólico), tras trabajar durante varios años en la empresa NAG Ltd. (Oxford, UK). Teresa anuncia en estas páginas de La Gaceta la posibilidad de usar gratuitamente esos extraordinarios medios humanos, de software y de hardware del centro Medicis, por parte de los científicos e investigadores españoles.

Francisco Santos, profesor de Geometría y Topología de la Universidad de Cantabria y la reciente doctora Daciana Bochis, anuncian, en un breve artículo de divulgación sobre el decimoctavo problema de Hilbert –una de cuyas facetas sigue abierta a pesar de los cien años transcurridos–, una sensacional mejora (dividiendo por dos las cotas conocidas desde hace décadas) de la estimación

[1]Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. recio@matesco.unican.es

del número máximo de caras de los poliedros convexos de cierto tipo que pueden enlosetar el espacio. Esta solución ha requerido el uso de cálculos con ordenador para la verificación exhaustiva de un gran número de casos.

¡Ponga un programa de Cálculo Matemático en su vida!

por

T. Recio

Resulta difícil hacer afirmaciones genéricas sobre la popularidad de ciertos aspectos del mundo de los ordenadores. Por ejemplo, hoy día los profesores tendemos a asumir que todos los alumnos tienen, por simple "contagio" generacional, determinados conocimientos informáticos. Después descubrimos que no es así–o que sí que lo es, pero de modo muy selectivo ... Pero, a pesar de mis precauciones al respecto, me arriesgaría a asegurar que un amplio porcentaje de la población sí sabe de la existencia y utilidad de los procesadores de texto. Todo el mundo tiene que escribir algo, alguna o muchas veces, y los ordenadores suelen ser bastante útiles para ello.

Ahora bien, al igual que aprendemos, casi simultáneamente, las primeras letras y los primeros números, tambien casi todo el mundo tiene que efectuar alguna cuenta, alguna o muchas veces. Pero si hay que hacer "números" ya tenemos las calculadoras, se dirá. Al parecer esta prohibido usar los ordenadores, cotidianamente, para las matemáticas. Así ocurre que hay auténticos virtuosos de la calculadora simple, gráfica o científica, que se dejan los ojos en un sinfín de manipulaciones sobre la minúscula y sombría pantalla de la calculadora, mientras reservan el ordenador de su casa para conectarse a la red o para presentar limpiamente ciertos documentos de trabajo ...

En las últimas semanas me he encontrado con un par de casos de este tipo. Por ejemplo, el de un ingeniero amigo, que tenía que resolver la ecuación $tan(x) - x = 0$, donde $tan(x)$ es la tangente de x. Disponía de un ordenador portátil con procesadores de texto, hojas de cálculo, etc ..., pero sólo usaba una calculadora para abordar este problema, para dibujar $y = tan(x)$, para tantear y aproximar. Yo le mostré lo que podía hacer (no mucho más –compruébelo el lector– pero mucho más cómodamente) el programa Maple V, en mi propio portátil. Mi amigo ignoraba la existencia de tales programas que denominaremos de *cálculo matemático* y quedó gratamente sorprendido. Empezó inmediatamente a explorar algunas de las posibilidades de Maple V para las pequeñas tareas técnicas que solía hacer en la calculadora y entonces se maravilló de que nadie le hubiera hablado del mismo hasta ese momento.

En el otro caso, un joven estudiante de primero de carrera deseaba resolver la ecuación (sobre los complejos) $z^7 - \bar{z} = 0$. Multiplicando ambos lados de la ecuación por z obtenía que $z^8 = \bar{z}z$. De ahí deducía que z^8 debería ser un número real y positivo, puesto que $\bar{z}z$, obviamente, lo es. Tambien deducía que el módulo de z^8 ha de coincidir con el de z^2, pues $|\bar{z}z| = |\bar{z}||z| = |z|^2$. Por tanto, concluía, dejando a un lado la solución obvia $z = 0$, que $|z|^6 = 1$, luego $|z| = 1$, por ser la única raíz, real y positiva, sexta de la unidad. En definitiva, z^8 tenía que ser un número real positivo de módulo 1 (como el módulo de $\bar{z}z$). De modo que $z^8 = 1$. Pero le resultaba difícil (desde su óptica) verificar si su razonamiento era correcto: la idea de hallar expresiones para las ocho raíces de esta ecuación, de sustituir y simplificar en la expresión $z^7 - \bar{z}$ se le antojaba muy complicada. Le hice ver cómo Maple V, que dormitaba dentro de su ordenador doméstico, permitía comprobar (sólo comprobar) de modo *exacto* cuáles eran las soluciones correctas.

Ignoro hasta que punto estas situaciones se repiten cotidianamente entre las personas involucradas en tareas técnicas o educativas –ya sean ingenieros, estudiantes o profesores de matemáticas. He elegido, voluntariamente, dos casos en los que los programas de *cálculo matemático* son absolutamente innecesarios, en sentido estricto. Pero facilitan la vida enormemente, como ocurre con los procesadores de texto. Sin embargo, estoy bastante seguro que el número de ordenadores con un programa de *cálculo matemático* instalado es bajísimo respecto del número total de ordenadores. Y ha de ser mucho menor el de ordenadores en el que dicho programa es utilizado, alguna vez, de algún modo. Desgraciadamente, el colectivo que debería contribuir más a su difusión, el de los matemáticos, no suele estar muy al tanto de estas nuevas herramientas (posiblemente la contribución matemática que debería ser más popular en los ordenadores personales).

Por todo ello resulta altamente encomiable la tarea de los profesores de la Universidad Complutense Roanes Macías y Roanes Lozano, que llevan años dedicados a la difusión y vulgarización de determinados aspectos del Cálculo Simbólico, una parte fundamental de las matemáticas que están detrás de los programas de cálculo matemático. El libro CÁLCULOS MATEMÁTICOS POR ORDENADOR CON MAPLE V.5. *E.Roanes Macías, E.Roanes Lozano. Editorial Rubiños, 1999. Madrid. 444 pgs.+ diskette.* que comentaremos es un ejemplo más. Contiene una colección de situaciones matemáticas (cálculos aritméticos, con polinomios, cálculo vectorial y matricial, de límites y series, de derivadas e integrales, resolución de ecuaciones diferenciales, de ecuaciones algebraicas o lineales, combinatoria, lógica y estadística, dibujo de curvas y superficies y de figuras de la geometría elemental, aplicación de movimientos, semejanzas, etc. sobre las mismas,...) sobre las cuales se ejemplifican las posibilidades de Maple V de modo conciso y claro, muy útil para la consulta rápida de un aprendiz (basta con mirar el índice de comandos y signos descritos en el libro e ir a las páginas indicadas allí).

Supongamos que uno está trabajando sobre la ecuación $z^7 - \bar{z} = 0$ y desea usar MapleV. En el índice de comandos del libro aparece el conjugado de un complejo, que se declara mediante la instrucción *conjugate* descrita en la sección 6.5 mediante un ejemplo. En las sección 8 se indica que *solve* es la forma más sencilla de resolver una ecuación, pero no puede aplicarse directamente al tipo de ecuación dado. Evidentemente, el programa no puede sustituir (por ahora) a la inteligencia. Así pues sólo podemos hacer una verificación (que no es poco), resolviendo $z^8 - 1 = 0$, mediante $solve(z^8 - 1)$; obteniendo

$$[1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, 1/2\sqrt{2} + 1/2\sqrt{-1}\sqrt{2},$$
$$-1/2\sqrt{2} - 1/2\sqrt{-1}\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2} - 1/2\sqrt{-1}\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2} + 1/2\sqrt{-1}\sqrt{2}]$$

Llamamos A a esta lista y luego verificamos que cada elemento de A (es decir, los elementos u operadores que ocupan el lugar uno, *op(1,A)*, o el dos, *op(2,A)*, etc... en la lista –véase la sección 2.5, *Operaciones Básicas*, del libro) es un cero de la expresión $z^7 - \bar{z}$, escribiendo (de acuerdo con lo aprendido en la sección 4.5, *Procedimientos Iterativos*)

$$\textit{for i from 1 to 8 do simplify}(op(i, A)^7 - conjugate(op(i, A)))\ \textit{od}$$

El resultado es una colección de ocho ceros, lo que confirma que tales elementos son raíces de nuestra ecuación original. Hay otra forma de confirmar este hecho, más geométrica y elegante, pero cuesta más fósforo ....

Otro asunto, completamente distinto, es la utilización didáctica de estos programas; es decir, la conveniencia o inconveniencia de animar o de prohibir su uso para la resolución de problemas en un marco académico. Ciertamente, uno a veces se entrena poniendo piedras en la mochila .... Pero parece bastante evidente, para el responsable de esta columna de *Matemática Computacional* que ningún alumno universitario español de Ciencias o Ingenierías debería terminar el primer curso de carrera sin saber de la existencia y utilidad de los programas de *cálculo matemático.* Y el libro de los profesores Roanes puede ser una excelente guía para introducir uno de los programas mas populares y acabados.

Aquí MEDICIS, Cálculo Simbólico a su medida...

por

Teresa Gómez-Díaz

El Álgebra Computacional, también conocida como Cálculo Simbólico o *Calcul Formel* (francés), se refiere a dos áreas que pueden parecer, a primera vista, más bien distanciadas. Mientras que el Álgebra sugiere, rápidamente, matemáticas y teoría, el cálculo o cómputo se relaciona fácilmente con la informática y las aplicaciones. Sin embargo, ambas áreas aparecen entremezcladas en problemas de apariencia tan dispar como los cálculos necesarios para el diseño de un robot o la determinación de una base de Gröbner de un ideal de polinomios.

Nuestro artículo pretende dar una respuesta real a determinados problemas que muchos científicos e investigadores de la comunidad internacional se plantean en este momento. ¿Cómo puedo realizar cierto cálculo simbólico? ¿En qué ordenador? ¿Con qué programa de Álgebra Computacional? ¿Cuánta memoria se necesita, durante cuánto tiempo? ¿Cuánto cuesta?

Bienvenidos a la UMS MEDICIS 658

MEDICIS es una unidad mixta de servicio, cofinanciada por el CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) y la Ecole Polytechnique, sendos organismos oficiales del Estado Francés. La unidad está dirigida por el Profesor Marc Giusti y se sitúa en el Laboratorio de Álgebra Computacional GAGE de la Ecole Polytechnique, que se encuentra a su vez en Palaiseau, al suroeste de Paris.

MEDICIS (Mathématiques Effectives, Développement Informatiques, Calcul, Ingénierie et Systèmes) nace como un GDR organizado por Marc Giusti en torno al tema *Calcul Formel* en Enero de 1992. Un GDR es un grupo de animación científica reconocido oficialmente por el CNRS y que obtiene subvenciones para organizar reuniones en torno a un tema de investigación. Pero pronto las necesidades informáticas de la comunidad de *Calcul Formel* se hicieron patentes...

En efecto, el programa de moda en aquellos años es AXIOM, que sólo funciona en un tipo de máquina (IBM RS 6000), y cuya instalación y manejo del sistema operativo no es ciertamente trivial, sin contar con el desembolso necesario para adquirir la máquina *y* el programa. Por otra parte, las bases de Gröbner se habían convertido en un algoritmo clave para atacar muchos problemas no sólo de tipo teórico, sino también práctico. Sin embargo, el cálculo de estas bases en ejemplos de interés real resultaba frecuentemente infructuoso (salvo en casos excepcionales), dada la alta necesidad de recusos en términos de memoria, potencia y tiempo de cálculo de un ordenador.

MEDICIS ataca el problema de frente y, gracias a la intervención de Marc Giusti y de Joël Marchand (Ingeniero de investigación CNRS), comienza a poner a disposición de la comunidad francesa de Cálculo Formal ordenadores con gran capacidad de cálculo y con varios programas de Álgebra Computacional instalados y en perfecto estado de uso.

Años más tarde, las necesidades de esta comunidad son ampliamente reconocidas por parte de los organismos oficiales, que apoyan y amplían las soluciones aportadas por MEDICIS con la correspondiente financiación. Nace así la Unidad Mixta de Servicio 658 MEDICIS.

¿Que es MEDICIS?

En la actualidad MEDICIS es un centro de cálculo para el Álgebra Computacional, que ofrece sus servicios a la comunidad científica internacional. MEDICIS es un centro de recursos que pone a su disposición, ordenadores, programas y personal experimentado, así como la experiencia, las investigaciones en curso y el saber hacer de buena parte de la comunidad de Cálculo Simbólico.

Hoy día el equipo MEDICIS está compuesto por cinco personas: Marc Giusti, su fundador y director, Nicole Dubois, encargada de la gestión, Joël Marchand, jefe del equipo informático, compuesto además por Christian Logé y la autora de esta nota. Pero el gran peso humano de MEDICIS está esencialmente formado por el conjunto de más de 200 utilizadores, que provienen principalmente de la comunidad de *Calcul Formel* en Francia, pero donde también hay un buen número de investigadores de la UE y de USA y Canadá.

MEDICIS es también un *racimo* de ordenadores, denominado *la grappe* en francés – como no podía ser menos en un pais de tan alta tradición vitivinícola – cuyos nombres son elegidos, obviamente, entre los miembros de la familia Médicis. El racimo está compuesto por 21 nodos de cálculo: 6 ordenadores Compaq Alpha EV6 XP/1000, denominados *leon*, con procesadores de 500 Mhz de frecuencia y 640 Mo de RAM; 6 ordenadores Compaq Alpha EV56 PWS/500au, denominados *julien*, con procesadores de 500 Mhz de frecuencia, tres con 192 Mo de RAM y otros tres con 128; 8 ordenadores PC Intel Pentium II, denominados *laudomia*, cada uno con dos procesadores de 400 Mhz de frecuencia y 512 Mo de RAM; y aún otro PC Intel Pentium II, denominado *isabelle*, con dos procesadores de 300 Mhz y 512 Mo de RAM. Todas estas máquinas estan gestionadas uniformente por un programa de repartición automática de tareas, LSF, que elige en cada momento el ordenador con mejores condiciones para lanzar un nuevo cálculo. El sistema operativo de los ordenadores es Linux para los Intel y OSF/1 para los Alpha.

Aparte de este racimo, y fuera de la gestión automática LSF, hay tres ordenadores más: *alexandre*, un PC Intel Pentium Xeon con dos procesadores de 400 Mhz y 2048 Mo de RAM, *eleonore*, un Compaq Alpha EV56 Ultimate con dos procesadores de 533 Mhz y 2048 Mo, y *anne*, un DEC Alpha EV56 500/400 con un procesador de 400 Mhz y 1024 Mo. Estos tres ordenadores se dedican a cálculos extremos, con grandes necesidades de memoria y potencia de cálculo.

En este conjunto de ordenadores se encuentran instalados todos los sistemas de Álgebra Computacional existentes en el mercado (Axiom, Magma, Maple, Mathematica, Reduce,... por citar los más conocidos), y también la mayor parte de los programas de libre distribución, que suelen tener objetivos más específicos. Entre estos últimos podemos citar GAP (para Teoría de Grupos), CoCoA para Algebra Conmutativa, PARI para Teoría de Números, etc.

MEDICIS es tambien un servidor en *la red*, al que se puede acceder en la dirección:

`http://www.medicis.polytechnique.fr`

o su version en inglés

`http://www.medicis.polytechnique.fr/index-eng.html`

y donde se puede encontrar la información que intenta aportar este artículo y muchas más cosas.

Como los amables lectores observarán, si nos visitan, la lengua oficial de MEDICIS es el francés, aunque la mayor parte de las páginas están también traducidas al inglés. Una version en español está prevista para un futuro no muy lejano.

¿Cual es la meta de MEDICIS?

La meta de MEDICIS es proporcionar a los investigadores de Cálculo Simbólico los medios humanos, materiales y de software necesarios para el avance de sus investigación en el área de Álgebra Computacional.

En la actualidad es frecuente que los investigadores traten problemas con aplicaciones prácticas concretas. Desgraciadamente este tipo de problemas pueden conllevar, a la hora de la verdad, cálculos imposibles con los recursos propios. Pero el Cálculo Simbólico es un área joven y día a día, la conjunción de desarrollos matemáticos e informáticos teóricos, y la fabricación de ordenadores mas potentes y capaces, contribuyen a mejorar las posibilidades de cálculo.

Pero ¿cómo puede acceder un investigador a estos avances? La compra de nuevos ordenadores, su instalación y mantenimiento, el sistema operativo, la instalación de nuevas versiones de un programa, son cosas que suelen quedan lejos de la cabeza de un investigador preocupado por encontrar un nuevo algoritmo. Además, hoy en día los ordenadores utilizados para tareas que requieren potencia de cálculo suelen tener como sistema operativo UNIX. Citemos entonces a Matt Welsh, (1994): *Ninguna version de UNIX se ha hecho para funcionar sola sin ningún mantenimiento.* Un administrador de sistemas, que comprenda las necesidades específicas de este área de investigación, se convierte, por tanto, en una pieza indispensable de este complicado juego.

Pero hacer la vida del investigador más fácil no es la única ambición de MEDICIS. MEDICIS tambien quiere ser una vitrina donde el saber hacer de la comunidad se muestre a los ojos de cualquier espectador. MEDICIS quiere constituirse en un foro donde la experiencia, las inquietudes y las preguntas directas de los investigadores se intercambien y debatan. MEDICIS quiere ser el punto de referencia de la comunidad y para la comunidad, donde se refleje el estado de avance de las cuestiones punteras.

¿Cual es la utilidad de MEDICIS ?

MEDICIS puede ser útil a varios niveles distintos, dependiendo del punto de partida. ¿Es usted un principiante en Álgebra Computacional, y quiere profundizar en el tema? ¿Tiene usted ya algún conocimiento adquirido y necesita probar un programa de Cálculo Simbólico? ¿Está usted en la fase de determinar qué sistema de Cálculo Simbólico se adapta mejor a sus necesidades? ¿Conoce bien varios sistemas, pero necesita comparar con un nuevo programa que acaba de salir? ¿Está usted desarrollando un algoritmo propio y quiere conocer su funcionamiento sobre problemas de gran talla? ¿Está usted desarrollando su propio programa y quiere ponerlo a disposición del público especializado? ¿Es usted un vendedor de sistemas de Álgebra Computacional y quiere dar la mayor publicidad posible al producto X dentro de la comunidad? ¿Quiere usted que su producto sea probado por expertos en el tema?

Ni qué decir tiene que MEDICIS no puede proporcionar, libérrimamente, ordenadores y programas a todo ser del planeta interesado en estas cuestiones. Un uso racional de los recursos (pronto o tarde limitados) se impone. No podemos asignarle un ordenador, con su programa favorito funcionando, para toda la vida. Pero pretendemos poder ayudarle hasta que usted haya tomado una decisión (para comprar un programa, por ejemplo) o hasta que haya obtenido los medios necesarios para adquirirlo.

El estado actual de *la red* no permite tampoco una conexión a distancia de muchas personas, al mismo tiempo, durante varias horas. Lo más razonable consiste en iniciar una conexión para lanzar unos cálculos y mantener algunas conexiones posteriores para poder controlar los avances de los mismos. Hay incluso formas de lanzar una tarea en las que usted recibirá un correo electrónico con la respuesta cuando la tarea haya terminado.

Tampoco pretendemos resolver sus problemas teóricos por usted ... pero sí podemos ayudarle a contactar con expertos en el tema, que prodrán ayudarle a encontrar la mejor forma de avanzar en sus indagaciones.

¿COMO ACCEDER A MEDICIS ?

El procedimiento a seguir consiste en remitirnos unos cuantos datos básicos. El formulario a rellenar se encuentra en

`http://www.medicis.polytechnique.fr/medicis/acces.compte.html`

o su version en inglés

`http://www.medicis.polytechnique.fr/medicis/acces.compte-eng.html`

y debe enviarlo por correo a la dirección electrónica

`assistance@medicis.polytechnique.fr`.

Acceder a MEDICIS es fácil ... si se es un miembro conocido de la comunidad. No hay que olvidar que MEDICIS se desarrolla *por los investigadores de Cálculo Simbólico y para los investigadores de Cálculo Simbólico.* Tampoco hay que olvidar que hay cierto retorno al siglo XVII y que los piratas de varios tipos vuelven a estar de moda. Pero, a diferencia de otros tiempos, donde lo primordial era un buen puñado de monedas de oro y un buen trago de ron, ahora nos enfrentamos a seres cuya codicia consiste (incomprensiblemente) en divertirse de formas extrañas y echar por la borda años de trabajo precioso y difícil de recuperar.

Se imponen, por tanto, ciertas medidas de seguridad, dado que una vez que el *pirata* ha abordado un ordenador, el trabajo de todos los investigadores que tienen acceso a ese ordenador puede estar en peligro, así como los correspondientes usuarios de otros ordenadores que se conecten a menudo con el abordado. Pero el investigador serio y responsable no sufrirá con estas medidas, puesto que siempre podrá darnos algunas referencias, necesarias para la obtención de una cuenta.

¿Y cuanto cuesta ?

Medicis esta co-financiado por dos organismos públicos del Estado Francés. Su actividad, por tanto, es sin ánimo de lucro y el acceso a los ordenadores se proporciona de forma GRATUITA a los investigadores que así lo pidan.

Unas citas adecuadas al apoyo de MEDICIS en los documentos científicos logrados con nuestra ayuda, y el saber que somos útiles en el avance de la investigación será, para nosotros, la mejor forma de pago.

Teresa Gómez-Díaz
GAGE – UMS MEDICIS
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau CEDEX
France
teresa@gage.polytechnique.fr

Nuevas cotas superiores para el número de caras de estereoedros de Dirichlet 3-dimensionales

por

Daciana Bochis y Francisco Santos

Historia del problema

Nuestro trabajo versa sobre el número máximo de caras que pueden tener los poliedros que enlosetan (o teselan) el espacio 3-dimensional. El estudio de teselaciones del espacio por poliedros aparece, por ejemplo, en el problema XVIII de Hilbert (1901) (véase [MIL], [SEN]). Más concretamente, en la segunda parte del problema, Hilbert pregunta *si existe un poliedro que tesele el espacio* $\mathbb{R}^d$*, pero sin que haya ningún grupo cristalográfico que actúe transitivamente sobre la teselación.*

Aunque este problema fue resuelto en 1928 por Reinhardt, que encontró poliedros en dichas condiciones, diversas generalizaciones o variantes aparecen presentadas en un denso y completo survey ("Tilings with congruent tiles", [GSI]) de Grünbaum y Shephard, autores también de una de las más completas monografías sobre teselaciones del plano [GSII].

De los problemas allí mencionados, el más ambicioso es:

(A) *Determinar todos los poliedros convexos que son teselas de una teselación monoedral en* $\mathbb{R}^d$.

Una teselación se dice monoedral si todas las teselas son iguales. Si, además, las teselas son convexas y sobre ellas actúa transitivamente un grupo cristalográfico, la teselación se dice *estereoedral* y cada tesela es un *estereoedro*. En el problema (A), "determinar todos" significaba, originalmente, determinarlos combinatoria y métricamente. Este problema no ha sido resuelto completamente ni siquiera para el caso del plano (véase [GSI]). Lo más cercano que existe es la clasificación de Grünbaum y Shephard para el caso particular de teselaciones estereoedrales. En el mismo survey se proponen, por tanto, otros problemas más "suaves" relacionados con el problema (A). Uno de ellos es:

(B) *Determinar cotas para el número máximo de caras $(d-1)$-dimensionales de un poliedro convexo que es tesela de una teselación monoedral en $\mathbb{R}^d$.*

También en el survey "Tilings" [SS, p. 50] se presenta como uno de los problemas abiertos importantes en el campo de las teselaciones *"encontrar una buena cota superior para el número de caras de un estereoedro de dimensión n"*, que es un caso particular del problema (B) y que es el que nosotros abordamos, en dimensión tres. El problema (B) es trivial en dimensión 2 (las teselas posibles son polígonos de 3, 4, 5 ó 6 lados), pero el número máximo de caras posible no se conoce ni en el espacio ni en dimensión superior.

El único resultado general previo es el teorema fundamental de los estereoedros demostrado por Delone en 1961. Se llama *número de aspectos* de un grupo cristalográfico G al índice $|G : G_T|$ donde G_T es el subgrupo de G formado por todas las traslaciones. Según el teorema de Delone, un estereoedro correspondiente a un grupo cristalográfico de a aspectos en d dimensiones tiene como mucho $2^d(a+1)-2$ caras $(d-1)$-dimensionales (véase [STO], [DEL]). En 3 dimensiones esta cota sería 390, ya que el número máximo de aspectos de un grupo cristalográfico 3-dimensional es 48.

Sin embargo, el estereoedro con mayor número de caras conocido fue descubierto por Engel en 1980 (véase [ENG]) y es un estereoedro de Dirichlet de "sólo" 38 caras (correspondiente al grupo $I4_132$, un grupo cúbico de 24 aspectos). Estereoedros de Dirichlet son aquéllos que se obtienen como regiones del diagrama de Voronoi de una órbita de un grupo cristalográfico. En la literatura, parece que hay común acuerdo en que el número máximo de caras que puede alcanzar un estereoedro está mucho más cerca de 38 que de 390 (véase por ejemplo [GSI, p. 960], [ENG, p.214] y [SS'97, p.50]).

La historia del problema de cuántas caras puede tener un estereoedro 3-dimensional comienza en realidad antes de que Hilbert propusiera sus famosos problemas en 1901. En 1885 Fedorov, que poco antes había establecido la clasificación de los grupos cristalográficos en 219 clases por conjugación afín, dio la lista de los 5 posibles tipos combinatorios de paraleloedros (estereoedros correspondientes a grupos traslacionales) cuyos números de caras van desde 6 hasta 14. Es de observar que 14 es precisamente la cota de Delone para este caso, en el que $a=1$ (ésto es un hecho general, en cualquier dimensión existen paraleloedros con $2^{d+1}-2$ caras). Hasta el año 1916, cuando Föppl [FOP] descubre estereoedros de Dirichlet con 16 caras, se creyó que 14 era el número máximo de caras que tiene un estereoedro. La historia sigue y en el año 1978 se conocen familias de estereoedros de Dirichlet con número de caras entre 17 y 26. En 1978 Brunner y Laves conjeturan que 26 ($3^3 - 1$) es una cota superior para el número de caras de un estereoedro de Dirichlet 3-dimensional y que para el caso d-dimensional la cota sería $3^d - 1$ ([BRLA]). Esta conjetura resultó ser falsa, ya que en 1980 Engel encuentra varias familias de estereoedros con caras desde 17 a 38.

Una via de solucion algoritmica, pero impracticable

Obsérvese que en la historia del problema (B) sólo se considera, en la práctica, el caso particular de los estereoedros de Dirichlet. La razón es la ausencia de métodos para estudiar estereoedros en general (ver [GSI, p.965]). Tampoco se sabe para dimensiones mayores que 2 si todo estereoedro es combinatoriamente equivalente a uno de Dirichlet (en el caso del plano la respuesta a esta pregunta es afirmativa).

Desde el punto de vista teórico, a partir de la clasificación de los grupos cristalográficos tridimensionales existe un algoritmo que calcularía, si se dispusiera de ordenadores suficientemente potentes, todos los tipos combinatorios de estereoedros de Dirichlet de dimensión tres: para cada uno de las 219 clases de conjugación afín de grupos cristalográficos, tomése como espacio de configuraciones el formado por los posibles parámetros métricos del grupo más las coordenadas de un punto base para una órbita del mismo. Este espacio puede tener hasta dimensión seis, aunque los grupos más complejos son los del sistema cúbico y en ellos no hay parámetros métricos, con lo cual su espacio de configuraciones tiene dimensión tres.

Una vez hecho ésto, habría que descomponer el espacio de configuraciones en regiones semialgebraicas en las cuales el tipo combinatorio del estereoedro de Dirichlet permanece constante. Este es un problema de eliminación de cuantificadores en geometría algebraica real, para el que existen algoritmos generales, algunos de ellos implementados. Lo malo es que el número de ecuaciones es, a priori, de varios cientos y, por tanto, la aproximación algorítmica parece impracticable. Ni siquiera para estudiar, por ejemplo, el grupo $I4_132$ en el cual Engel obtuvo sus estereoedros con mayor número de caras. Pero, insistimos, la situación es aún peor si se desea estudiar estereoedros en general, puesto que ni siquiera existe un algoritmo teórico para hacerlo.

La nueva cota

Como en la aproximación anterior, nosotros nos hemos basado en la clasificación de los grupos cristalográficos tridimensionales y restringimos nuestro estudio al caso particular de estereoedros de Dirichlet. Dividimos las 219 clases de grupos en varios tipos con propiedades similares. Los grupos más sencillos para nuestros propósitos resultan ser aquéllos con reflexiones. En ellos, llamamos *celda de reflexión* al dominio fundamental del subgrupo generado por las reflexiones. Se tiene entonces la propiedad de que un estereoedro de

Dirichlet para un punto base (generador de la órbita cuyo diagrama de Voronoi estamos considerando) que esté dentro de una celda de reflexión R, tiene su número de caras acotado por el número de vecinos *externos* a R (que son, como mucho, uno por cada cara de la celda de reflexión R, es decir a lo más seis) más el número de vecinos *internos*. Estudiando por separado los grupos con reflexiones en 3, 2, y 1 direcciones, demostramos una cota de 8, 18 y 15 caras, respectivamente. Además éstas cotas son exactas, pues hemos encontrado explícitamente estereoedros de Dirichlet con número de caras igual a la cota obtenida para cada uno de los tres casos.

Para los grupos sin reflexiones, en primer lugar nos olvidamos de los grupos con 8 o menos aspectos (en los cuales la cota de Delone es 70, que consideramos suficientemente buena) y dejamos para un estudio por separado los grupos del sistema cúbico. En los 14 grupos que quedan utilizamos el hecho de que los grupos con más de cuatro aspectos contienen siempre una traslación perpendicular a otras dos del grupo. Definimos el concepto de *celda suficiente* como un prisma en la dirección de la traslación distinguida, con base no necesariamente convexa y que contiene a todos los posibles vecinos del punto inicial. El número de puntos de la órbita del punto base que están dentro de la celda suficiente será una cota superior para el número de caras del estereoedro de Dirichlet. Tanto el cálculo de las celdas suficientes como el del número de puntos dentro de ellas se realiza "a mano", obteniendo una cota superior de **102** caras.

Por último nos quedan los grupos del sistema cúbico. Estos grupos contienen tres traslaciones ortogonales dos a dos y de módulos iguales, y una rotación de orden tres que las permuta cíclicamente. En ellos, esencialmente, lo que hacemos es aplicar el método de la "celda suficiente", descrito en el párrafo anterior, tres veces, una en cada dirección de traslación. De este modo la celda suficiente queda descrita como intersección de tres prismas rectos de base no convexa y ortogonales entre sí. El cálculo de la celda suficiente y, sobre todo, del número de puntos de la órbita dentro de ella, es imposible de realizar "a mano". Utilizamos, entonces, una implementación en el lenguaje simbólico Maple para descomponer esa celda suficiente no convexa en poliedros convexos y para comprobar, mediante un "chequeo lineal", la existencia de puntos de la órbita dentro de dichos poliedros convexos. La cota más grande que obtenemos para los diferentes grupos es de **162** caras, casualmente (¿o no?) en el mismo grupo $I4_132$ del ejemplo de Engel.

En resumidas cuentas, obtenemos que ningún estereoedro de Dirichlet de dimensión 3 puede tener más de 162 caras de dimensión 2. Más aún, nuestro método nos da una cota para cada tipo de grupo, cota que sólo en cuatro de ellos supera 102. Los resultados para grupos con reflexiones se pueden consultar en [BSI]; los correspondientes a grupos sin reflexiones aparecen en [BOC], y están en proceso de ser escritos en forma de artículo [BSII] , [BSIII].

Bibliografía

[ARM] ARMSTRONG, M. A.: *Groups and symmetry*, UTM, Springer-Verlag, 1988.

[BOC] BOCHIS, D.: *Estereoedros de Dirichlet en 2 y 3 dimensiones*. Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Abril 1999.

[BSI] BOCHIS D., SANTOS F.: *On the number of facets of 3-dimensional Dirichlet stereohedra II: non-cubic groups, preprint 1999.* Accesible en http://www.matesco.unican.es/˜santos/Articulos/DirichletI.ps.gz

[BSII] BOCHIS D. SANTOS F.: *On the number of facets of 3-dimensional Dirichlet stereohedra II: non-cubic groups, en preparación.*

[BSIII] BOCHIS D. SANTOS F.: *On the number of facets of 3-dimensional Dirichlet stereohedra II: cubic groups, en preparación.*

[BRLA] BRUNNER G. O, LAVES F.: *How many faces has the largest space-filling polyhedron?*, Zeitschr. Kristallographie **147** (1978), 39–43.

[DEL] DELONE D. N. (or Delaunay): *Demostración del teorema fundamental de la teoría de estereoedros*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **138** (1961), 1270–1272 (en ruso).

[FOP] FÖPPL L.: *Der Fundamentalbereich des Diamantgitters*, Phys. Zeitschr. **15** (1914), 191–193.

[ENG] ENGEL P.: *Geometric Crystallography: An Axiomatic Introduction to Crystallography*, D. Reidel Pub. Co. Dordrecht, 1986.

[GSI] GRÜNBAUM B., SHEPHARD G. C.: *Tilings with congruent tiles*, Bull. Amer. Math. Soc.**3** (1980), 951–973.

[GSII] GRÜNBAUM B., SHEPHARD G. C.: Tilings and Patterns, W.H. Freeman and company, New York, 1987.

[MIL] MILNOR J.: *Hilbert's 18 problem: on crystalographic groups, fundamental domains, and on sphere packing*, in Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society Northern Illinois University, Dekalb, Illinois, 1974, pp. 491–507.

[SS] SCHATTSCHNEIDER D., SENECHAL M.: *Tilings*, in Handbook of Discrete and Computational Geometry, (J. E. Goodman, J. O'Rourke, eds), CRC Press, 1997, pp. 43–63.

[SEN] SENECHAL M.: *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1996.

[STO] ŠTOGRIN M. I.: *Regular Dirichlet-Voronoi partitions for the second triclinic group*, Proc. Steklov Inst. Math.; Amer. Math. Soc.,Providence, R.I. **123** (1975)

Daciana Bochis y Francisco Santos
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Cantabria
39071 Santander
santos, dacib@matesco.unican.es, santos@matesco.unican.es