

---

---

## EDUCACIÓN

Sección a cargo de

María Luz Callejo

---

---

### **Estrategias de resolución en problemas geométricos. Un estudio con profesores en formación**

por

**Luis Rico, María José González-López, Isidoro Segovia**

En la década de los 80 el National Council of Teachers of Mathematics recomendó la resolución de problemas como objetivo prioritario para el currículum escolar de matemáticas (Krulik & Reys, 1980). Textos como *How to solve it* (Polya, 1945), recobraron su interés y provocaron el desarrollo de numerosos programas de investigación sobre el currículum de matemáticas (Charles & Silver, 1989). La resolución de problemas se reconoció como meta primordial de la enseñanza de las matemáticas, por lo que los investigadores enfocaron su atención sobre la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos (Schoenfeld, 1985; Puig, 1993), convirtiendo este tópico en uno de los organizadores curriculares (Rico, 1997). La resolución de problemas también se ha integrado en la investigación sobre formación de profesores (Blanco, 1991; Carrillo, 1997; Contreras, 1999), ya que la enseñanza basada en este tópico obliga al profesor a considerar nuevas opciones metodológicas y de evaluación. La elección de problemas adecuados hace que los alumnos manifiesten distintas estrategias de resolución y de heurísticos que proporcionan al profesor información útil para orientar el trabajo posterior en el aula (Fernández, 1997).

Este artículo presenta las estrategias planteadas y los heurísticos utilizados al resolver un problema de geometría elemental, propuesto como ejemplo para trabajar con resolución de problemas en el aula de matemáticas. Las respuestas dadas a esta tarea por un grupo de estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas, en el marco de un curso de Didáctica de la Matemática, ha proporcionado unas veinte estrategias y una decena de heurísticos que han permitido detectar algunos rasgos de la comprensión matemática de estos estudiantes y su nivel de dominio sobre geometría. Concluimos señalando algunas de sus actitudes ante la resolución de problemas y mencionando algunos condicionantes del sistema educativo en el que ejercerán su profesión.

## 1. UN PROBLEMA SOBRE EL CUADRADO

El cuadrado es una figura geométrica básica y sencilla que proporciona una gran riqueza conceptual y procedimental, ampliamente documentada. En el campo de la geometría plana elemental encontramos numerosos problemas que involucran al cuadrado, y que, a pesar de su planteamiento sencillo, sorprenden por la riqueza y variedad de estrategias de resolución con que pueden ser afrontados. Es el caso del problema siguiente, que podemos encontrar enunciado en Wells (1988) o en Coriat y otros (1989):

**Sobre cada uno de los lados de un cuadrado se construyen triángulos rectángulos iguales, de hipotenusa igual al lado del cuadrado, que se colocan alternativamente "hacia adentro" y "hacia afuera" (como indica la Figura 1). Demostrar que los cuatro vértices de los triángulos que no son del cuadrado se encuentran alineados.**

Este problema ha sido propuesto durante tres años consecutivos a estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas, en el contexto de una asignatura de Didáctica de la Matemática, en el bloque correspondiente a la resolución de problemas. El problema se propuso entregando a cada estudiante un folio que contenía la Figura 1

y se explicó verbalmente el enunciado del problema. No se aportó ningún tipo de pauta ni indicación que orientase a los estudiantes a usar una técnica concreta, con el fin de que tuvieran total libertad para resolverlo. Tampoco se dieron datos sobre posibles medidas de magnitudes (lados o ángulos) ni se indicó ningún ámbito en que el problema hubiese aparecido. Los estudiantes se llevaron el problema a casa para su resolución y entregaron sus resultados por escrito al día siguiente; no se trató de una prueba que fuera a ser calificada en el contexto de una asignatura.

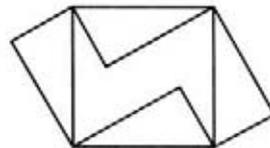


FIGURA 1

## 2. CLASIFICACIÓN DE ESTRATEGIAS

El término estrategia es ampliamente usado en distintas actividades matemáticas, en particular, en el ámbito de la resolución de problemas. Desde las acepciones del término para la educación matemática establecidas por Bell (1976), han sido varios los autores que lo han recogido y matizado, siendo su fundamento *los procedimientos o modos de actuación que conducen a la resolución de un problema* (véase, por ejemplo, el informe Cockcroft (1985, p. 87) o Rico y otros (1990, p. 9)). En las producciones realizadas por los estudiantes en la resolución del problema anterior hemos identificado una gran variedad de estrategias que hemos clasificado, obteniendo los apartados que exponemos a continuación, donde además comentamos las características más significativas observadas en el proceso. Aunque las estrategias no han sido desarrolladas en su totalidad por los estudiantes, nosotros hemos completado aquí lo que,

muchas veces, era un simple esbozo. Cuando algún estudiante ha desarrollado una estrategia por completo así lo mencionamos. Destacamos también que los conocimientos empleados son impartidos en la educación secundaria (12-18 años).

### 2.1. ESTRATEGIAS DE GEOMETRÍA SINTÉTICA

Englobamos en este apartado aquellas soluciones del problema a las que se llega realizando nuevas construcciones geométricas a partir de la figura original para completarla o ampliarla, y después emplear sobre ellas razonamientos deductivos. En bastantes ocasiones los estudiantes han considerado evidentes y han utilizado algunas propiedades fundamentales que debían ser deducidas. Es el caso de las *relaciones de paralelismo y perpendicularidad que se dan entre las rectas que contienen a los catetos de los triángulos rectángulos* (véase la Figura 2), propiedad que ha sido utilizada a discreción por los estudiantes, sin mencionarla ni probarla explícitamente y que se justifica, por ejemplo, observando que dos cualesquiera de las rectas candidatas a ser paralelas (p. ej.  $P_1C$  y  $P_2B$ ) tienen una secante común ( $P_2C$ ), perpendicular a ambas, que forma con ellas ángulos alternos-internos iguales (nótese que denotamos cada recta por un par de puntos sobre ella). Prolongando los catetos de los triángulos rectángulos y teniendo en cuenta las relaciones anteriores, conseguimos completar algunos cuadrados y rectángulos nuevos (Figuras 3.1 y 3.2), cuyas componentes estaban parcialmente dadas en la figura original y que cuentan a los cuatro puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , a los que llamaremos en lo sucesivo puntos  $P_i$ , entre sus vértices.

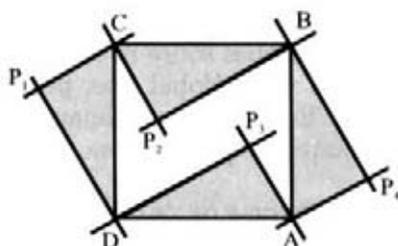


FIGURA 2

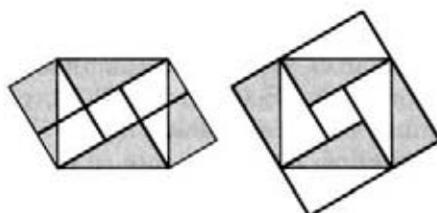


FIGURA 3.1

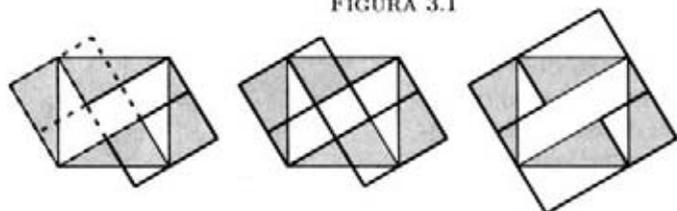


FIGURA 3.2

Los estudiantes han observado que las diagonales de los nuevos cuadrados construidos (*consecutivos* en la Figura 3.1(a), *homotéticos* en la Figura 3.1(b) y *anidados* en la Figura 3.2, según la terminología de los estudiantes) pertenecen a la misma recta. La justificación de este hecho, considerado evidente por los estudiantes, puede justificarse en todos los casos por la siguiente propiedad fundamental de la diagonal del cuadrado: *un punto pertenece a la (recta que contiene a la) diagonal de un cuadrado si y solo si equidista de (las rectas que contienen a) los lados correspondientes del mismo*. Estas estrategias que completan y amplían la figura dada pueden enmarcarse en la línea de pensamiento de la Gestalt, en la que un fundamento esencial en el proceso de resolución de un problema es *completar* una situación incompleta desde una perspectiva global, realizando operaciones de “*agrupamiento, reorganización, y estructuración de división en subtotaes*” (Wertheimer, 1991). En nuestro problema concreto, completar total o parcialmente la figura dada, para razonar después sobre la coincidencia o la alineación de diagonales, indica este punto de vista global que, posteriormente, se resuelve en subproblemas más simples. Este tipo de razonamientos, utilizado por algo más de la mitad de los estudiantes, requieren conocimientos geométricos del primer ciclo de E.S.O.

## 2.2. ESTRATEGIAS DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Agrupamos bajo este epígrafe las estrategias que relacionan ciertas partes de la figura con otras mediante transformaciones geométricas. En ellas los estudiantes han sentido escasa o nula necesidad de demostrar sus afirmaciones por el hecho de *percibir las en un dibujo*. Una cuarta parte de los estudiantes, aproximadamente, han planteado estas estrategias, que requieren conocimientos del segundo ciclo de E.S.O.

### 2.2.1. HOMOTECIA

Consideremos el punto  $O$ , intersección de las rectas  $AD$  y  $P_3P_4$  (Figura 4), y la homotecia de centro  $O$  y razón  $r := \overline{DP_3}/\overline{AP_4}$ , que transforma el segmento  $\overline{AP_4}$  en  $\overline{DP_3}$ . Los triángulos  $\triangle AP_3P_4$  y  $\triangle DP_1P_3$  son semejantes, siendo  $r$  su razón de semejanza, por ser rectángulos e isósceles. Deducimos que la homotecia transforma  $\triangle AP_3P_4$  en  $\triangle DP_1P_3$ , por lo que  $O$ ,  $P_1$  y  $P_3$  están alineados. Esto, junto con la alineación de  $O$ ,  $P_3$  y  $P_4$ , permite deducir que  $P_1$ ,  $P_3$  y  $P_4$  están alineados. Análogamente se prueba la alineación de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_4$ .

### 2.2.2. SIMETRÍA CENTRAL

Una simetría central con centro  $G$  en el centro del cuadrado original transforma uno de los triángulos exteriores (resp. interiores) en el otro triángulo exterior (resp. interior) (Figura 5).

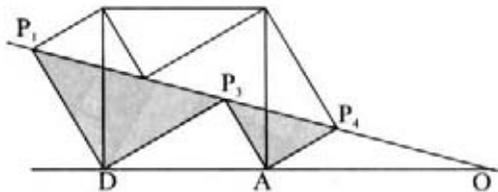


FIGURA 4

En particular, transforma  $P_2$  en  $P_3$ , y  $P_1$  en  $P_4$ . Si probamos que  $G$ ,  $P_1$  y  $P_2$  están alineados, concluiremos que los puntos  $P_i$  están alineados. Esta propiedad no ha sido demostrada por ningún estudiante. Una posible solución es la siguiente: según la notación de la Figura 6, donde  $H$  es el punto de corte entre  $P_2B$  y una diagonal, tenemos que:

(a)  $\triangle P_2HC$  y  $\triangle HGB$  son semejantes, por ser rectángulos y tener igual el ángulo en  $H$ .

(b)  $\triangle P_2GH$  y  $\triangle HBC$  son semejantes, ya que tienen igual el ángulo de vértice  $H$  y los lados en que éste se apoya son proporcionales, por (a),

(c) deducimos que el ángulo  $\widehat{HP_2G}$  mide  $45^\circ$ ,

(d) además  $\widehat{CP_2P_1} = 45^\circ$ , ya que  $\overline{P_1P_2}$  es diagonal de un cuadrado. Concluimos que  $\widehat{GP_2P_1} = \widehat{HP_2G} + \widehat{BP_2C} + \widehat{CP_2P_1} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ , y así los puntos  $G$ ,  $P_2$  y  $P_1$  están alineados.

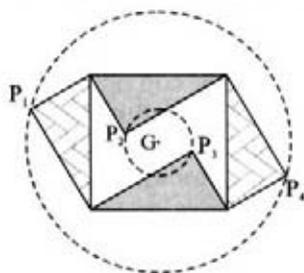


FIGURA 5

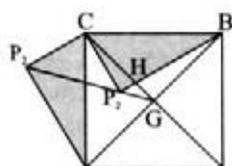


FIGURA 6

### 2.2.3. COMPOSICIÓN DE DOS GIROS

Algunos estudiantes han obtenido la simetría central anterior como producto de dos giros de  $90^\circ$ , centrados en vértices consecutivos del cuadrado, como indica la Figura 7:

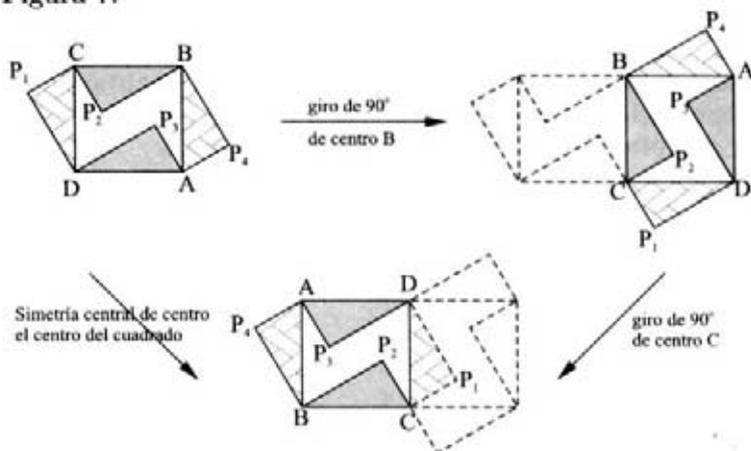


FIGURA 7

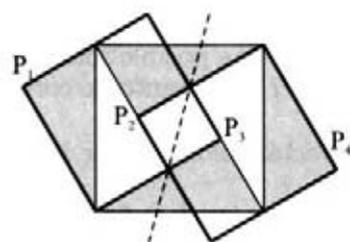


FIGURA 8

## 2.2.4. SIMETRÍA AXIAL

Los dos cuadrados iguales marcados en trazo grueso en Figura 8, comparten el cuadrado pequeño, por lo que son simétricos respecto del eje de simetría que pasa por los vértices opuestos de dicho cuadrado compartido. Esta simetría transforma  $P_2$  en  $P_3$  y  $P_1$  en  $P_4$ . Además la recta  $P_1P_2$  es perpendicular al eje de simetría, ya que contiene a la diagonal del cuadrado pequeño.

## 2.3. ESTRATEGIAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Bajo este epígrafe colocamos las soluciones en las que el planteamiento del problema pasa por establecer un sistema de referencia y determinar las coordenadas de los puntos considerados para razonar con ellas. Menos de la cuarta parte de los estudiantes ha seguido este tipo de argumentos y es de destacar que en ellos se han encontrado menos errores que en los correspondientes a construcciones geométricas, consiguiendo argumentar el proceso de solución hasta el final (es un ejemplo de “*la vía lenta pero segura de la operatoria con expresiones algebraicas, en coordenadas, en los problemas geométricos*” (Recio, 1998, p. 24)). Los conocimientos necesarios para abordar este tipo de estrategias se imparten en Bachillerato. Estructuralmente, los argumentos que siguen han estado caracterizados por los tres aspectos siguientes, condicionantes de la dificultad de los cálculos posteriores:

1. La habilidad de los estudiantes para situar sobre el dibujo el sistema de referencia.
2. Las magnitudes elegidas para escribir las coordenadas en función de ellas.
3. El tipo de argumento usado para comprobar que cuatro puntos dados por sus coordenadas están alineados (vectorial, analítico o algebraico). La combinación de estas posibilidades da lugar a estrategias variadas, de las que ofrecemos a continuación un extracto.

ARGUMENTO 2.3.1: Los estudiantes comienzan girando el dibujo dado, para que los ejes del sistema de referencia queden en la posición habitual; el origen se sitúa fuera de la construcción (Figura 9). Usando las longitudes  $a$  y  $b$  de los catetos, las coordenadas de los puntos  $P_i$ , son especialmente sencillas:  $(0, a + b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(b, a)$  y  $(a + b, 0)$ . Justificamos la alineación de estos puntos observando que

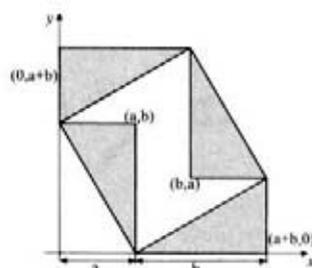


FIGURA 9

los tres vectores  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  que se forman con origen en el punto  $(0, a + b)$  y extremos en cada uno de los otros tres puntos, es decir,  $v_1 := (a, b) - (0, a + b) = (a, -a)$ ,  $v_2 := (b, a) - (0, a + b) = (b, -b)$ , y  $v_3 := (a + b, 0) - (0, a + b) = (a + b, -(a + b))$ , tienen la misma dirección.

ARGUMENTO 2.3.2: Los estudiantes que proponen la siguiente estrategia colocan el origen del sistema de referencia en un vértice del cuadrado original y los ejes a lo largo de dos lados (Figura 10); utilizando la medida  $\theta$  de uno de los ángulos del triángulo rectángulo, el cateto  $b$  y la hipotenusa  $L$ , obtienen:  $P_1 = b(-\sin \theta, \cos \theta)$ ;

$P_2 = (L - b \cos \theta, L - b \sin \theta)$ ;  $P_3 = b(\cos \theta, \sin \theta)$ ;  $P_4 = (L + b \sin \theta, L - b \cos \theta)$ , expresiones a partir de las que se sigue un razonamiento algebraico, calculando los productos mixtos siguientes, ambos iguales a 0, ya que  $\cos \theta = b/L$ :

$$\begin{vmatrix} -b \sin \theta & b \cos \theta & 1 \\ L - b \cos \theta & L - b \sin \theta & 1 \\ b \cos \theta & b \sin \theta & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} L - b \cos \theta & L - b \sin \theta & 1 \\ b \cos \theta & b \sin \theta & 1 \\ L + b \sin \theta & L - b \sin \theta & 1 \end{vmatrix}$$

ARGUMENTO 2.3.3: Los estudiantes colocan el origen del sistema de referencia en un vértice de uno de los triángulos rectángulos interiores, y los ejes a lo largo de los catetos (Figura 11). Posteriormente observan que los puntos  $P_i$  equidistan de los ejes, notando que son vértices de los cuadrados marcados en trazo grueso en la figura; concluyen argumentando que los puntos están alineados sobre la recta  $y = x$ .

ARGUMENTO 2.3.4: Los estudiantes comienzan rotando el dibujo, colocando el origen del sistema de referencia sobre un vértice del cuadrado original y los ejes a lo largo de sus lados (Figura 12). Utilizan un vector unitario  $v = (v_1, v_2)$  en la dirección de  $OP_4$  y la longitud  $L$  de la hipotenusa para describir, en función de ellos, las ecuaciones de todas las rectas paralelas y perpendiculares que intervienen en la construcción. Calculan así las rectas  $L_i$  y  $R_j$ :

$$\begin{array}{ll} L_1 : & v_2(x - L) = v_1(y - L), & R_1 : & v_1x = -v_2(y - L), \\ L_2 : & v_2(x - L) = v_1y, & R_2 : & v_1(x - L) = -v_2(y - L), \\ L_3 : & v_2x = v_1(y - L), & R_3 : & v_1x = -v_2y, \\ L_4 : & v_2x = v_1y, & R_4 : & v_1(x - L) = -v_2y. \end{array}$$

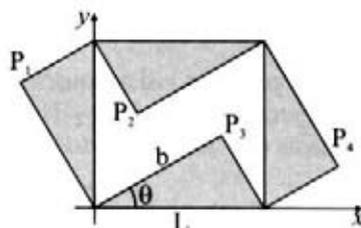


FIGURA 10

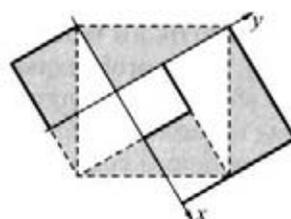


FIGURA 11

Los puntos  $P_i$  se describen como intersección de parejas de rectas, en función de  $v$  y  $L$ :

$$P_1 = L_1 \cap R_1 = (Lv_2^2, L(1 - v_1v_2)), \quad P_2 = L_2 \cap R_2 = (L(1 + v_1v_2), Lv_2^2)$$

$$P_3 = L_3 \cap R_3 = (-Lv_1v_2, Lv_1^2), \quad P_4 = L_4 \cap R_4 = (Lv_1^2, Lv_1v_2)$$

Concluye el proceso calculando la expresión de la recta que pasa por dos de ellos (por ejemplo  $(x + Lv_1v_2)(v_2 - v_1) = (y - Lv_1^2)(v_1 + v_2)$  pasa por  $P_3$  y  $P_4$ ) y verificando que los otros dos puntos también satisfacen dicha ecuación.

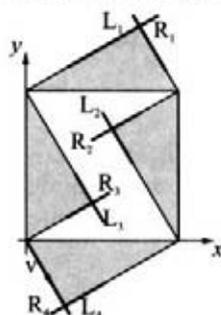


FIGURA 12

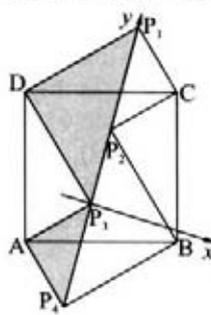


FIGURA 13

ARGUMENTO 2.3.5: Colocando el origen del sistema de referencia sobre uno de los vértices de uno de los triángulos rectángulos (p. ej.  $P_3$ ) y tal que  $OY = P_3P_2$ , (Figura 13), basta probar que las abscisas de los otros puntos ( $P_1$  y  $P_4$ ) también son 0. En efecto, los triángulos  $\triangle AP_3P_4$  y  $\triangle DP_1P_3$  son isósceles rectángulos, por lo que en ambos el ángulo de vértice  $P_3$  es de  $45^\circ$ . Utilizando primitivas de LOGO podemos comprobar que, partiendo del origen, los desplazamientos del tipo *GiraIzquierda 45 Avanza X GiraDerecha 90 Avanza X* (que describen un triángulo isósceles rectángulo, en este caso  $\triangle DP_1P_3$ ) vuelven a colocar a la tortuga en el eje  $y$ , es decir, con abscisa 0; (análogamente reemplazando  $45^\circ$  por  $135^\circ$  obtenemos el triángulo  $\triangle AP_3P_4$ ).

#### 2.4. ESTRATEGIAS DE GEOMETRÍA MÉTRICA

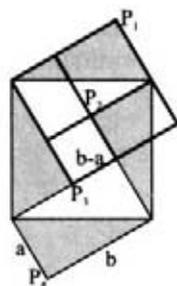


FIGURA 14

En el método siguiente, que ha sido propuesto por un estudiante, tenemos que  $P_1$  y  $P_2$  están en vértices opuestos de un cuadrado de lado  $a$ ,  $P_1$  y  $P_3$  en vértices opuestos de un cuadrado de lado  $b$ , y  $P_2$  y  $P_3$  en vértices opuestos de un cuadrado de lado  $b-a$ , (suponiendo, sin perder generalidad,  $b \geq a$ ) (Figura 14); debido a esto, se observa que  $d(P_1, P_3) = b\sqrt{2} = a\sqrt{2} + (b-a)\sqrt{2} = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ . Por igualarse la desigualdad triangular deducimos que  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  están alineados; análogamente podríamos razonar con  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ , de donde se sigue la alineación de los cuatro puntos.

## 2.5. LUGARES GEOMÉTRICOS

Pasamos a presentar algunas de las estrategias que surgen de un planteamiento dinámico basado en la idea de lugar geométrico; sólo la primera de ellas (el planteamiento clásico) fue esbozada por algunos estudiantes.

## 2.5.1. PLANTEAMIENTO CLÁSICO

Algunos estudiantes han observado que los puntos  $P_i$  pertenecen a semi-circunferencias centradas en los puntos medios de los lados de los cuadrados, de radio la mitad del lado (Figura 15), lo que les ha inducido a indagar qué ocurre al “mover” dichos puntos a lo largo de dichas semi-circunferencias. Así han estudiado algunos casos particulares en posición límite: por ejemplo, que los puntos  $P_i$  coincidan, de dos en dos, con un par de vértices opuestos del cuadrado, en cuyo caso tenemos sólo dos puntos; o que los catetos de los triángulos rectángulo sean iguales, en cuyo caso coinciden los dos puntos  $P_i$  de los triángulos interiores.

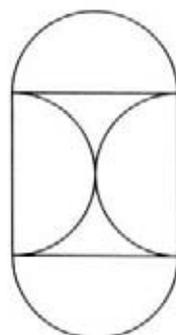


FIGURA 15

## 2.5.2. CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

Si a partir del cuadrado original y de un punto cualquiera de una de las circunferencias sobre uno de sus lados, (p. ej. el punto  $P_1$  en la circunferencia  $C_1$ ), trazamos las paralelas y perpendiculares correspondientes (Figura 16) obtendremos la construcción dada originalmente en el problema. Con este planteamiento el lugar geométrico de cada uno de los otros tres puntos ( $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ ) cuando  $P_1$  recorre su circunferencia, es otra circunferencia centrada en cada lado del cuadrado. La comprobación de estos argumentos resulta especialmente cómoda usando algún software de Geometría Dinámica (p. ej. Cabri-Géomètre (<http://www.cabri.net>)), donde podemos comprobar, experimentalmente que hay una recta que contiene a los cuatro puntos.

Otra posibilidad, inspirada en el argumento 2.3.3, es realizar la construcción a partir de un cuadrado de lado  $L$  y de un vector unitario  $v$ , centrado en el origen (Figura 17): al “mover”  $v$  alrededor de la circunferencia unidad (utilizando, p. ej. Cabri-Géomètre), se observan los lugares geométricos –circunferencias– descritos por los puntos  $P_i$ , y también se comprueba que éstos permanecen alineados.

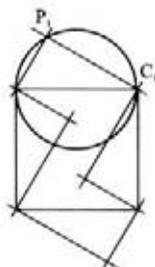


FIGURA 16

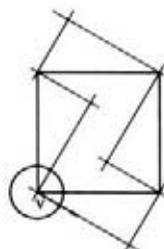


FIGURA 17

## 2.5.3. DEMOSTRACIÓN AUTOMÁTICA

La perspectiva dinámica puede ser abordada también desde la Demostración Automática de Teoremas Geométricos (Chou, 1988; Recio, 1998). La propiedad geométrica aquí planteada puede describirse en términos de “hipótesis de partida” y “tesis a deducir”, donde ambas, hipótesis y tesis, pueden describirse mediante polinomios. Indicaremos a continuación el proceso, sin entrar en detalles técnicos:

**Hipótesis:** Sea  $P_1 = (p_1, p_2)$  un punto sobre la circunferencia  $C_1$ ; consideremos  $P_2 = (q_1, q_2)$ ,  $P_3 = (r_1, r_2)$  y  $P_4 = (s_1, s_2)$ , definidos por la intersección de dos rectas perpendiculares, construidas a partir de  $P_1$  y el cuadrado (como se indicó en la Figura 16). La transcripción algebraica de esta hipótesis (tras colocar el sistema de referencia como en la Figura 18, y suponer, sin perder generalidad, que el lado del cuadrado mide 2 unidades) consiste en escribir las ecuaciones que satisfacen (las coordenadas de) los puntos  $P_i$  (Ecuaciones 18(a)).

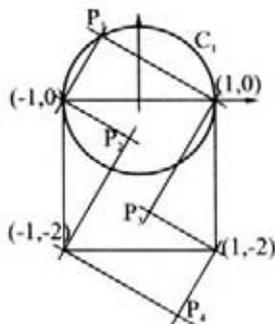


FIGURA 18

**Tesis:** Los puntos  $P_i$  están alineados. Escribimos esta condición a través de dos ecuaciones, cada una de las cuales corresponde a la alineación de una terna de entre dichos puntos (Ecuaciones 18(b)).

$$\left. \begin{array}{l} p_1^2 + p_2^2 - 1 = 0 \\ q_2 + q_2 p_1 - p_2 - p_2 q_1 + 2p_1 = -2 \\ -q_2 + q_2 p_1 - p_2 q_1 - p_2 = 0 \\ r_2 + r_2 p_1 - p_2 r_1 + p_2 = 0 \\ r_2 p_1 - r_2 + p_2 - p_2 r_1 + 2p_1 = 2 \\ s_2 + s_2 p_1 + p_2 - p_2 s_1 + 2p_1 = -2 \\ -s_2 + s_2 p_1 - p_2 - p_2 s_1 + 2p_1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} q_2 p_1 - r_2 p_1 + r_2 q_1 - p_2 q_1 - q_2 r_1 + p_2 r_1 = 0 \\ r_2 q_1 - s_2 q_1 + s_2 r_1 - q_2 r_1 - r_2 s_1 + q_2 s_1 = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones 18(a)

Ecuaciones 18(b)

Manipulando algebraicamente estas expresiones (con ayuda de software de Cálculo Simbólico, entre los que mencionamos Maple (<http://www.maplesoft.com>), Mathematica (<http://www.wolfram.com>), o CoCoo ([cocoo@dima.unige.it](mailto:cocoo@dima.unige.it))), se puede probar que los polinomios de la tesis pueden escribirse como combinación polinomial de los de las hipótesis, por lo que los puntos que verifican las ecuaciones de 18(a), verificarán también 18(b), es decir, estarán alineados.

## 2.5.4. RECÍPROCO

La experimentación geométrica también puede conducirnos a estudiar una versión del problema recíproco del planteado inicialmente: Cualquier recta que pase por el centro del cuadrado y corte al lado  $AB$  del mismo (resp.  $CD$ ), determina cuatro puntos sobre las semi-circunferencias, que son vértices de

cuatro triángulos rectángulos iguales. La demostración formal de este resultado podría seguir los pasos siguientes (tomamos la notación de la Figura 19):

- Cualquier recta  $r$  que pase por el centro  $G$  del cuadrado y corte al lado  $AB$ , cortará también al lado  $CD$  y a las semicircunferencias  $C_1$  y  $C_4$  en puntos  $P_1$  y  $P_4$ , simétricos, por la simetría central de centro  $G$  (basta tener en cuenta la simetría del cuadrado respecto de su centro).
- Además  $r$ , por pasar por  $G$ , corta a  $C_2$  y  $C_3$  en puntos  $P_2$  y  $P_3$ , (que podrían coincidir en un caso límite), que son simétricos por la simetría central de centro  $G$ .
- La simetría de los pares de puntos  $(P_1, P_4)$  y  $(P_2, P_3)$  permite concluir que los triángulos rectángulos que se forman con vértices en dichos puntos son iguales.

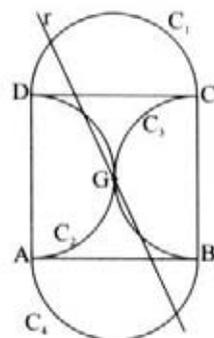


FIGURA 19

## 2.6. ESTRATEGIAS FALLIDAS

Finalmente, queremos dejar constancia de algunas otras estrategias que, pese a transitar por caminos cerrados, han sido intentadas por los estudiantes. Entre ellas destacamos los intentos por resolver en el espacio la cuestión planteada, con métodos que “recortan”, partes de la figura para sacarlas del plano y colocarlas sobre un cubo; y el uso de la relación de congruencia entre algunas de las partes de la figura propuesta o de alguna de sus ampliaciones, intentando deducir la alineación de los puntos mediante razonamientos basados en el cálculo de áreas.

## 3. HEURÍSTICOS OBSERVADOS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En el desarrollo de una estrategia identificamos algunos procesos específicos de pensamiento (Coriat y otros, 1989, pg. 31) o heurísticos, que son caracterizados por Polya (1945), Schoenfeld (1985) o Puig (1992/93) en el contexto de la resolución de problemas. Analizando las resoluciones propuestas por los estudiantes a nuestro problema concreto hemos detectado algunos de ellos, que enumeramos a continuación.

- *Completar/ampliar* la figura, en sus distintas versiones, ha sido el heurístico más usado en las resoluciones clasificadas de Geometría Sintética (Sección 2.1), con el fin de formar otras figuras geométricas más útiles que las propuestas, para conseguir un argumento convincente.
- *Destacar/resaltar* algunas partes de la figura original también ha sido un heurístico útil y mayoritario, detectado tanto en las resoluciones de tipo 2.1, 2.2 o 2.3.
- *Colocar el dibujo en otra orientación*, de forma que las figuras propuestas estuvieran colocadas en una posición “más canónica” ha facilitado algunos de los argumentos. Un ejemplo significativo es el planteamiento realizado 2.3.1.

- *Asignar valores concretos a las magnitudes* de la construcción dada (lados y ángulos) ha servido a algunos estudiantes para argumentar estrategias del tipo 2.3.
- *Analizar casos particulares* en que los triángulos rectángulos verifican ciertas restricciones (longitudes iguales de los catetos o un cateto de longitud cero) también ha sido utilizados como análisis previo a la posterior resolución general.
- La *elección de las magnitudes* en función de las cuales va a ser resuelto el problema ha condicionado la dificultad de la argumentación posterior; son un ejemplo de ello los distintos argumentos usados en la Sección 2.3.
- La *descomposición del problema en partes* cuya solución es más fácilmente abordable ha sido un heurístico comúnmente utilizado en todas las estrategias.
- *Interpretar el problema en un contexto dinámico* permite transformarlo en un problema de reconstrucción de la figura a partir de elementos básicos, asociarlo con el estudio de determinados lugares geométricos o plantear el problema recíproco.
- Finalmente, el heurístico consistente en “*ir hacia atrás*” ha impregnado todas las estrategias y a la forma de presentar el problema, mediante un dibujo en el que se visualiza la alineación pedida, sitúa al estudiante frente a la solución y lo conduce a encontrar una justificación a dicho suceso.

#### 4. REFLEXIONES EN TORNO AL PROCESO Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio se centra en sistematizar y organizar las diversas estrategias detectadas en la resolución del problema inicial, analizar su riqueza heurística y compartir unas reflexiones derivadas de este análisis. No hemos pretendido hacer una clasificación general sobre estrategias en la resolución de problemas geométricos, nuestro propósito ha sido organizar las estrategias detectadas en la resolución de este problema, lo que hemos efectuado basándonos en los tres ejes siguientes:

- la teoría matemática ó el enfoque geométrico en los que se enmarca la resolución,
- la perspectiva de completar o no la estructura dada,
- el planteamiento estático o dinámico del problema.

En el análisis realizado destacamos dos aspectos que han impregnado la mayoría de las resoluciones de los estudiantes:

1. La *visualización* del dibujo ha hecho que muchos estudiantes descuiden la necesidad de realizar una demostración formal de ciertas propiedades, sintiéndose satisfechos con argumentos del tipo: “*comprobemos la alineación de los puntos con una regla*” o “*doblemos el papel haciendo coincidir determinados puntos*”. Ésta es una constatación más de la escasa importancia que se

da en la enseñanza a la conexión entre imagen visual y estructura o teoría matemática en que se sustenta.

2. La *falta de rigor* en la expresión escrita y en la argumentación de algunos razonamientos geométricos; sin dejar de valorar negativamente este hecho, podemos atribuirlo al carácter de tarea abierta con el que (intencionadamente) se propuso el problema, reconociendo así que el rigor viene dado por unas reglas previamente acordadas.

Aunque no se pueda argumentar que unas estrategias sean mejores que otras, sí es cierto que cada una denota un tipo de razonamiento y de conocimiento distinto. Así, a nuestro juicio, las estrategias basadas en razonamientos geométricos denotan un nivel de creatividad mayor, predilección por los argumentos deductivos y mayor capacidad de razonamiento lógico. El grupo de estrategias basadas en transformaciones geométricas ha conducido a subproblemas de mayor dificultad que los encontrados con las estrategias anteriores, pero los estudiantes no han razonado su resolución, por considerarla evidente en el dibujo. Las estrategias basadas en el uso de coordenadas denotan una predilección por la manipulación algebraica y algorítmica de los símbolos; en estos casos, la toma de decisiones en el desarrollo de los argumentos se simplifica o es prácticamente nula.

Interesa destacar, finalmente, algunas contradicciones que hemos detectado en el grupo de futuros profesores de matemáticas con sus expectativas como estudiantes de matemáticas. La sencillez del enunciado y la dificultad de encontrar una respuesta sencilla inmediata hacen que la mayor parte de los resolutores contemplen el problema como un problema "con trampa" o de "idea feliz", viéndolo con cierta desconfianza si no con abierta desgana. Por un lado, es un problema muy sencillo y, por otro, parece resistirse a una solución rápida. Estos son, a nuestro juicio, dos ingredientes básicos para que un problema resulte atractivo. Sin embargo, son pocos los estudiantes que tratan de abordar sistemáticamente el problema; si bien la mayor parte de ellos hace una primera aproximación correcta, enmarcando y representando el problema en una teoría matemática adecuada, con una gran riqueza de posibilidades, posteriormente muestran escasa capacidad argumentativa, son poco cuidadosos en sus razonamientos, tienen exceso de confianza en el dibujo y exhiben un dominio parcial y fraccionado de los heurísticos más usuales en la resolución de problemas, lo que hace que en muy pocos casos lleven la estrategia hasta el final. En ningún caso contemplan esta tarea en conexión con su formación como docentes, ni valoran su interés formativo y heurístico. Estas incidencias ponen de manifiesto una formación alejada de planteamientos de resolución de problemas; considerando que la mayoría serán profesores de matemáticas de secundaria podemos preocuparnos por las carencias con que van a asumir esta tarea. Como se ha visto, hay tareas que ofrecen una gran riqueza de posibilidades para trabajar en resolución de problemas; parece necesario conocer y analizar estas opciones e introducirlas en los procesos de reflexión para la formación de profesores. Sólo a partir de ahí se comenzará a modificar la práctica escolar sobre resolución de problemas.

## Bibliografía

- BELL, A. G. (1976): "The learning of general mathematical strategies", *Doctoral Thesis. Nottingham: Shell Center of Mathematical Education. University of Nottingham.*
- BLANCO, L. (1991): "Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas, de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores", *Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.*
- CARRILLO, J. (1997): "Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y el estudio de posibles relaciones", *Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.*
- CONTRERAS, L. C. (1999): "Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula", *Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.*
- COCKCROFT (1985): "Las matemáticas sí cuentan", *Informe Cockcroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia (traducción del original de 1982).*
- CORÍAT Y OTROS (1989): M. Coriat Benarroch, C. García Arribas, A. Lara Porras, A. Pérez de Madrid, R. Pérez Gómez, P. Sandoval Sierra, M. Vela Torres, "Seis para cuadrar", *Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.*
- CHARLES, R., SILVER, E. (1989): "The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving", *Reston VA: Laurence Erlbaum Associates- NCTM.*
- CHOU, S. C. (1988): "Mechanical geometry theorem proving", *Dordrecht: D. Reidel Pub. Co.*
- FERNÁNDEZ, F. (1997): "Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales", *Tesis Doctoral. Universidad de Granada.*
- KRULIK, S., REYS, R. (1980): "Problem Solving in School Mathematics", *Reston VA: NCTM.*
- POLYA, G. (1945): "How to solve it", *U.S.A.: Princeton University Press.*
- PUIG, L. (1992/93): "Elementos para la instrucción en resolución de problemas de matemáticas", *Tesis doctoral. Universidad de Valencia.*
- RECIO, T. (1998): "Cálculo simbólico y geométrico", *Colección Educación matemática en Secundaria. Madrid: Ed. Síntesis.*
- RICO Y OTROS (1990): L. Rico, E. Castro, A. Fernández, J. M. Fortuny, J. Valenzuela, J. Valldaura, "Guía Didáctica Matemáticas 5<sup>o</sup> E. G. B.", *Sevilla: Ed. Algaida.*
- RICO, L. (1997): "Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Secundaria", *Colección Educación matemática en Secundaria. Madrid: Ed. Síntesis.*
- SHOENFELD, A. H. (1985): "Mathematical problem solving", *Orlando: Academic Press, Inc.*
- WELLS, D. (1988): "Hidden connections, double meanings: a mathematical exploration", *Cambridge: Cambridge University Press.*
- WERTHEIMER, M. (1991): "El pensamiento productivo", *Barcelona: Ed. Paidós.*

Luis Rico e Isidoro Segovia. Departamento de Didáctica de la Matemática,  
 Facultad de Ciencias de la Educación  
 Campus de Cartuja, Universidad de Granada, 18071 Granada,  
 e-mail: lrico@goliat.ugr.es, isegovia@platon.ugr.es

María José González-López, Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación  
 Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria,  
 Av. Los Castros s/n, 39071 Santander  
 e-mail: glopez@matesco.unican.es