La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

XXXIX Olimpiada Matemática Española

Organizada conjuntamente por las Universidades de La Laguna y Las Palmas, la Olimpiada correspondiente al curso 2002–2003 se ha celebrado en las Islas Canarias, entre los días 2 y 6 de marzo. ¡Fue duro llegar hasta allí! Pero pese a las agencias de viajes y a las compañías áreas todos los 114 ganadores de la fase local lo consiguieron, acompañados de profesores y familiares, alguna abuela incluida.

Todos los participantes agradecen el día adicional previsto por Pepe Méndez, organizador local junto a José María López Meléndez: los estudiantes, que tuvieron más tiempo para disfrutar de su estancia en las Islas y el Tribunal, que pudo corregir algo más desahogadamente. Todo estuvo perfectamente organizado. Pepe, José María y Rodrigo Trujillo estaban siempre disponibles cuando alguien necesitaba algo, y siempre amables y eficaces.

Los participantes se alojaron en La Laguna. Las pruebas tuvieron lugar en la Facultad de Ciencias, los días 3 y 4, en dos sesiones de mañana, de tres horas y media de duración. Estos fueron los problemas propuestos:

Problema 1. Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y de 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todas nueves. Por ejemplo, si $p = 13$, $999999 = 13 \cdot 76923$

Problema 2. ¿Existe algún conjunto finito de números reales M, que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números a, b cualesquiera de M el número $2a - b^2$ sea también un elemento de M?

Problema 3. Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo $\angle BCA$.

Problema 4. Sea x un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demuestra que tanto x como x^2 son irracionales.

Problema 5. ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?

Problema 6. Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

Las soluciones que siguen a los problemas 1, 2, 3 y 6 fueron seleccionadas por los correctores entre las realizadas por los estudiantes durante la prueba.

Problema 1 (Solución de Luis Hernández Corbato)

Sea a_i el número formado por i nueves $a_i = 99.....9$. Supongamos que existe p que no divide a ningún a_i para probar por contradicción el enunciado.

Considérense en dicho caso los números $\{a_1, a_2, ...a_p\}$. En este conjunto sabemos que no hay ningún $a_i \equiv 0(\bmod p)$. Por tanto, al haber p números y sólo $p-1$ restos posibles módulo p, se sabe que existen m, n tales que $a_m - a_n \equiv 0(\bmod p)$.

Suponemos sin pérdida de generalidad que $m > n$ y:

$$p \mid a_m - a_n = 99...900...0 = a_{m-n} \cdot 10^n$$

Como $p \neq 2$ y $p \neq 5$, p no divide a $10^n = 2^n \cdot 5^n$, luego $p \mid a_{m-n}$ y como a_{m-n} pertenece al conjunto escogido por ser $m - n < n$ y $m - n \geq 1$ se ha llegado a una contradicción. Por ende, para cada primo p existe a_i tal que $p \mid a_i$ y el enunciado queda probado.

Problema 2 (Solución de Víctor González Alonso)

Como M es finito, necesariamente estará acotado.

Pongamos $M \subset [x, y]$, con $x = \min M$ e $y = \max M$. Supongamos que $x \leq 0$:

Tenemos : $x \leq 0 \Longrightarrow 2x \leq x \Longrightarrow 2x - k^2 < x$ (k cualquier número de M). Esto contradice que x sea el mínimo de M. Por tanto, $x > 0$ y $0 < x < y$.

En cualquier caso debe ser:

(1) $x \leq 2x - y^2 \leq y$ y además (2) $x \leq 2y - y^2 \leq y$

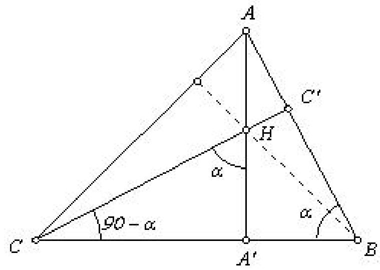
De (1) se desprende que $x \leq 2x - y^2 \Longrightarrow 0 \leq x - y^2 \Longrightarrow y^2 \leq x < y$, que sólo se cumple si $y \in (0, 1)$.

De (2) obtenemos que $2y - y^2 \leq y \Longrightarrow y - y^2 \leq 0 \Longrightarrow y \leq y^2$ y eso sólo es cierto si $y \in [1, \infty)$.

Como (1) y (2) deben cumplirse a la vez, no existe ningún $y \in \mathbb{R}$ que pueda ser máximo de M, por lo que no estaría acotado y no sería finito.

Problema 3 (Solución de Ibón Arregui Bilbao)

Llamaremos A' al punto en que la altura de A corta al lado BC del triángulo ABC, y C' al punto donde la altura de C corta al lado AB del triángulo ABC.



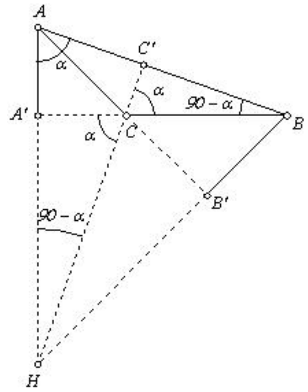
El ángulo $\angle CHA'$ es igual al ángulo $\angle AHC' = \alpha$. En el triángulo $CA'H$, el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tanto $\angle HCA'$ es $90 - \alpha$. Igualmente en el triángulo AHC' el ángulo $\angle HC'A$ es recto, por tanto $\angle HAC'$ es $90 - \alpha$.

El ángulo $\angle HAC'$ es igual al ángulo $\angle A'AB$ del triángulo $A'AB$ que es rectángulo, por tanto el ángulo $\angle A'BA$ es α.

a) Ángulo $C < 90^o$ a) Ángulo $C < 90^o$ De aquí concluimos que los triángulos CHA' y $A'AB$ son semejantes, y como $CH = AB$ son triángulos iguales, de donde obtenemos que $AA' = CA'$, por tanto $tgC = 1$, y $C = 45^o$

b) Ángulo $C > 90^o$

Procediendo de igual modo, el ángulo $\angle A'CH$ es igual al ángulo $\angle C'CB = \alpha$. En el triángulo $C'CB$ el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tamto $\angle A'HC = 90 - \alpha$, y en el triángulo $CC'B$ el ángulo $\angle CC'B$ es recto y por tanto $\angle C'BC = 90 - \alpha$. El triángulo $AA'B$ es rectángulo en A' y por ello $\angle BAA'$ es α. Entonces los triángulos $AA'B$ y $A'CH$ son semejantes y tienen la hipotenusa igual, luego son iguales y deducimos $AA' = A'C$, y entonces $tgC = -1$, y $C = 135^o$.



c) Finalmente, si fuese C=90^o, C coincide con H y $CH = 0$. Como $AB \neq 0$, este valor de C no es válido.

Problema 6 (Solución de Mohamed Blanca Ruiz)

Tenemos la cadena con el total de $4n$ bolas, $2n$ blancas y $2n$ negras. Cogemos un grupo de un extremo con $2n$ bolas. Este grupo tendrá x bolas negras e y bolas blancas, de forma que la diferencia es $x - y = 2k$ para $k \in \{-n, 1-n, ..., 0, ...n-1, n\}$.

Vamos moviéndonos de una en una posición hacia el extremo contrario. En cada movimiento la diferencia del número de bolas blancas y negras varía en 2 o no varía, es decir, k aumenta en 1, disminuye en 1 o no cambia.

La diferencia varía en 2 si la bola que se deja y la que se coge son de distinto color y se mantiene si son del mismo color.

La posición final, es decir en el otro extremo, tendrá las bolas al revés: x bolas blancas e y bolas negras, con lo que la diferencia negras - blancas será ahora $y - x = -2k$, para el mismo valor de k. Es decir, que k pasa de una posición a su opuesta con el mismo valor absoluto. Como k varía sólo de uno en uno tiene que pasar por el 0 ya que no se lo puede saltar.

En el momento en que $k = 0$, $x = y = n$, como queríamos demostrar.

Siempre se podrá cortar un segmento de longitud $2n$ con n bolas blancas y n bolas negras.

Como de costumbre, cada problema se calificó entre entre 0 y 7 puntos. La tabla siguiente recoge la frecuencia de puntuaciones por problema:

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
0 ptos	81	95	39	61	68	73
1 pto	15	8	33	31	16	17
2 ptos	6	2	14	15	9	5
3 ptos	0	3	2	3	10	4
4 ptos	1	3	3	3	1	2
5 ptos	1	1	22	0	0	3
6 ptos	2	0	0	1	2	2
7 ptos	8	2	1	0	8	8

Y las medias:

media oros	4,83	4,17	3,88	2	5,83	5
media premiados	2,5	1,19	3,11	1,528	2,81	2,92
media todos	0,912	0,456	1,719	0,772	1,193	1,14
desviación	1,98	1,29	1,91	1,08	2,01	2,09

Todos los participantes en la fase nacional son ganadores de la fase local. La correspondiente entrega de Diplomas se celebró en el Salón de Actos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de La Laguna en la tarde del miércoles 3 de marzo; no faltó a la cita la Subdirectora General de Becas y Promoción Educativa del MECD, que entregó a los estudiantes el cheque que les correspodía. Durante el Acto se rindió un pequeño homenaje al Profesor N. Hayek, delegado de la Olimpiada en Canarias durante años.

El día 5, la Olimpiada en pleno cambió de isla, pues la entrega de premios de la fase nacional se celebró en Las Palmas. Entre los seis ganadores, los dos primeros repetían: también se clasificaron en primer y segundo lugar el año pasado en La Rioja. Y, de nuevo, una niña, y además joven, de 1^{o}de Bachillerato. Por cierto, fue la única entre las 24 chicas participantes que recibió alguno de los 36 premios.

Los seis estudiantes con Medalla de Oro constituyen el equipo que nos representará en Tokio en la Olimpiada Internacional, que se celebrará en julio.

Alumnos premiados en la XXXIX OME

Medallas de Oro
Daniel Rodrigo López (2^{o}Bto., IES Montserrat Miro, Montcada i Reixac)
Luis Hernández Corbato (2^{o}Bto., IES Fortuny, Madrid)
Mohamed Blanca Ruiz (1^{o}Bto., IES Ausias March, Manises)
Víctor González Alonso (2^{o}Bto., IES La Bureba, Briviesca)
Javier Gómez Serrano (2^{o}Bto., Colegio Alemán de Madrid)
Maite Peña Alcaraz (1^{o}Bto., Colegio Portaceli, Sevilla)

Medallas de Plata
Xavier Roca Artola (2^{o}Bto., Aula Escola Europea, Barcelona)
Ibon Arregui Bilbao (2^{o}Bto., Colegio Calasancio, Bilbao)
Antonio Sánchez Puente (2^{o}Bto., Colegio María Auxiliadora, Salamanca)
Martín Cladera Pozuelo (2^{o}Bto., IES Beat Romon Llul, Inca)
Javier Alonso Mora (2^{o}Bto., IES n^{o}1 de Requena)
Serafín Ruiz Cabello (2^{o}Bto., IES Las Cumbres, Ubrique)
Matía Javier Wartelski Pryluca (2^{o}Bto., Liceo Francés de Barcelona)
David Morales Hidalgo (2^{o}Bto., IES Séneca, Córdoba)
Emilio Alba Linero (1^{o}Bto., Colegio Ntra Sra de la Victoria, Málaga)
Miguel Domínguez Vázquez (2^{o}Bto., IES O Couto, Ourense)
Carlos Alonso Prieto (2^{o}Bto., Colegio Maristas Champagnat,Salamanca)
Arnau Padrol Sureda (2^{o}Bto., IES Menéndez y Pelayo, Barcelona)

Medallas de Bronce
Alejandro Cruz Robledillo (2^{o}Bto., Colegio Sta María del Pilar, Madrid)
Esteban Alcántara Cárdenas (2^{o}Bto., IES Ángel Saavedra, Córdoba)
Mikel Arizaleta Delshorts (2^{o}Bto., IES Ramón Cid, Benicarló)
Juan José Omiste Romero (2^{o}Bto., IES Julio Rodríguez, Motril)
Francisco Manuel Canto Martín (2^{o}Bto., IES Pérez de Guzmán, Ronda)
Roberto de la Cruz Moreno (2^{o}Bto., IES Leopoldo Cano, Valladolid)
Francisco Javier Hernández Heras (1^{o}Bto., IES Emilio Ferrari, Valladolid)
Daniel de la Barrera Mayoral (1^o Bto., Colegio La Inmaculada, Getafe)
Carles Solano Molins (2^{o}Bto., Institución Cultural del CIC, Barcelona)
Carles Salas Cladellas (2^{o}Bto., IES Sant Quirze, St Quirze del Vallès)
Carlos Zomeño Canales (2^{o}Bto., Colegio Ntra Sra del Pilar, Valencia)
Alfonso Zamora Sáiz (2^{o}Bto., IES José Isbert, Tarazona de La Mancha)
David Puertas Centeno (2^{o}Bto., IES Giner de los Ríos, Motril)
Joan Antoni Cabrer Rubert (2^{o}Bto., IES Beat Ramon Llul, Inca)
Baldomero Coll Perales (2^{o}Bto., IES Gil de Junterón, Beniel, Murcia)
Víctor García Fernández (2^{o}Bto., IES Padre Isla, León)
Alejandro Redondo Moral (2^{o}Bto., IES María Moliner, Laguna de Duero)
Luis Sánchez Lajusticia (2^{o}Bto., IES Luis Buñuel, Zaragoza)

Primer Premio

Apellidos y nombre	**Distrito**
Alonso Mora, Javier	Valencia
Alonso Rodrigo, Ángel	León
Arizaleta Delshorts, Mikel	Castellón
Blanca Ruiz, Mohamed	Valencia
Busto Llavona, Leticia	Oviedo
Cabrer Rubert, Jan Antoni	Baleares
Canto Martín, Francisco Javier	Málaga
Díaz Cereceda, Cristina	Murcia
Domínguez Vázquez, Miguel	Galicia
Esteban Cuesta, Lander	País Vasco
Fernández Ferández, Amador	Cantabria
García Vargas, Jesús Manuel	Castilla-La Mancha
Gómez Serrano, Javier	Madrid
González Alonso, Víctor	Burgos
Hernández Corbato, Luis	Madrid
Hernández Heras, Francisco Javier	Valladolid
Li, Ru	Zaragoza
Martín Brualla, Ricardo	Madrid
Martínez Pérez, M^{a}Carmen	Jaén
Martínez Pérez, David	Sevilla
Mazo Olarte, Javier	La Rioja
Méndez Rodríguez, Eduardo	La Laguna
Morales Hidalgo, David	Córdoba
Paz Rodríguez, Hugo	Galicia
Pérez Encinar, Irene	Extremadura
Pérez González, José Luis	Elche
Phillips, Daysy	Las Palmas
Puertas Centeno, David	Granada
Ramos López, Darío	Almería
Rodrigo López, Daniel	Cataluña
Rodríguez Ortega, Rubén	Melilla
Rodríguez Ponce, Ruth	Huelva
Ruiz Cabello, Serafín	Cádiz
Sánchez Puente, Antonio	Salamanca
Serra Montolí, Joaquim	Cataluña
Vera Nieto, Salvador	Murcia
Villafranca Velasco, Aitor	Navarra
Wartelski Pryluca, Matías Javier	Cataluña

Segundo Premio

Apellidos y nombre	**Distrito**
Alba Linero, Emilio	Málaga
Alcántara Cárdenas, Esteban	Córdoba
Alonso Prieto, Carlos	Salamanca
Arconada López, Celia	Cantabria
Arregui Bilbao, Ibón	País Vasco
Barrera Mayotal, Daniel de la	Madrid
Cladera Pozuelo, Martín	Baleares
Coll Cámara, Carmen	Murcia
Cruz Moreno, Roberto de la	Valladolid
Cruz Robledillo, Alejandro	Madrid
Fornés Catala, Eduard	Elche
García Fernández, Víctor	León
Heredia Juesas, Juan	Oviedo
Iranzo Sanz, José Ángel	Zaragoza
Luengo López, Juan Carlos	Almería
Martínez Ballesteros, M^{a}del Mar	Jaén
Martínez Santana, Virginia	Las Palmas
Mora Gómez, Juan	Cádiz
Munárriz Arrieta, Javier	Navarra
Navarro Cruz, Jaime	Murcia
Omiste Romero, Juan José	Granada
Ortega Díez, Héctor	Burgos
Pattaranit, Warrawit	Madrid
Rabaza Giner, Jerónimo	Castellón
Ramírez Aretio, Cristina	La Rioja
Rey Ramos,Lucas	Galicia
Rivero Rodríguez, Javier	Sevilla
Roca Artola, Xavier	Cataluña
Rodríguez García, Francisco Javier	La Laguna
Rodríguez Rodríguez, Claudia	Galicia
Sabaté Vidales, Anna	Cataluña
Sala Cladellas, Carles	Cataluña
Salinas Illarena, José Luis	Valencia
Sanchís Bonet, Carlos	Valencia
Soroa León, Pablo	Melilla
Tarifa Fernández, Noel	Extremadura
Villalta Alfonsín, Jesús	Huelva
Zamora Sáiz, Alfonso	Castilla-La Mancha

Tercer Premio

Apellidos y nombre	**Distrito**
Alén Fernández, Iván	Galicia
Álvarez Santos, Felipe Antonio	La Laguna
Andrea Calvo, Laura	Cantabria
Aparicio Roa, Juan	Madrid
Arrieta Salinas, Itziar	Navarra
Caro Bayo, Miguel Ángel	Huelva
Carro Fernández, Jesús	Oviedo
Coll Perales, Baldomero	Murcia
Cordero Marcos, M^{a}Isabel	Salamanca
Díaz López, José Antonio	Castilla-La Mancha
Esteban Alonso, Gonzalo	País Vasco
Galván Fernández, José Iván	Murcia
García Domínguez, Antonio	Cádiz
Gómez González, Ana	Galicia
Jiménez Vega, Marta Noelia	Baleares
Leyva Guerrero, Esther	Córdoba
López Garrido, Antonio José	Jaén
Lorenzo García, Elisa	Madrid
Magreñán Ruiz, Ángel Alberto	La Rioja
Martínez Amiguetti, Juan Bautista	Melilla
Miguel Ortiz, César Antonio	Valencia
Navarro Garmendia, Alberto	Extremadura
Ortega Ramírez, Rafael	Granada
Padrol Sureda, Arnau	Cataluña
Pastor Pérez, Javier Atanasio	Almería
Peña Alcaraz, Maite	Sevilla
Pino García, Beatriz del	Burgos
Prado Ramos, Fernando de	León
Redondo Moral, Alejandro	Valladolid
Robla Albarrán, Iván	Las Palmas
Rodríguez Coloma, Pau	Alicante
Sánchez Lajusticia, Luis	Zaragoza
Sanchís Ojeda, Roberto	Castellón
Sarabia Utrilla, Luis	Madrid
Seisas Vega, José	Málaga
Solano Molins, Carles	Cataluña
Vera Sánchez, M^{a}del Carmen	Elche
Zomeño Canales, Carlos	Valencia